This page intentionally left blank.

RAPPORTS.

La Classe décide l'impression dans le recueil des Mémoires in-4° :

1° D'un travail de M. Félix Plateau, intitulé : *Recherches expérimentales sur les mouvements respiratoires des insectes*, examiné par MM. Fredericq, Candèze et Masius, et au sujet duquel les remercîments de l'Académie seront exprimés à l'auteur ;

2° D'un travail de M. P. Mansion, *Sur un point de la théorie des séries de Fourier*, examiné par MM. Catalan, Folie et De Tilly.

— Sur un avis favorable de M. Liagre, une note de M. Terby, intitulée : *Observation de la lumière zodiacale et d'un petit bolide,* paraîtra au *Bulletin.*

Sur un point de la théorie des séries de Fourier; par M. P. Mansion.

Rapport de M. Catalan.

I

« Le petit Mémoire de notre savant et nouveau Confrère commence ainsi :

« Depuis que M. Weierstrass a introduit explicitement,
» en Analyse, la notion d'*égale convergence* (*) des séries
» dont les termes sont fonctions d'une variable x, les

(*) Voir la Note I.

» Géomètres ont dû soumettre, à une révision attentive, » les principes fondamentaux de la théorie des séries » trigonométriques, tels qu'ils ont été exposés par Fou- » rier, Poisson, Cauchy, Dirichlet, Riemann, etc. MM. Lip- » schitz, P. du Bois-Reymond, Heine, Cantor, Harnack, » Dini, Ascoli, Jordan, etc., ont élucidé la plupart des » points difficiles signalés dans les travaux antérieurs, et » ont, en outre, traité diverses questions nouvelles, plus » générales que celles dont leurs devanciers s'étaient » occupés.

» Néanmoins, parmi les formules anciennement admises » comme démontrées, il en est une sur laquelle les » Géomètres cités plus haut n'ont pas, croyons-nous, » porté leur attention.

» Dirichlet, on le sait, a établi, d'une manière simple » et rigoureuse, que la série

» $$\tfrac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots, \qquad (1)$$

» dans laquelle

» $$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos nt\, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin nt\, dt, \qquad (2)$$

» a pour somme

» $$\tfrac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right] \text{ ou } \tfrac{1}{2}\left[f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right], \qquad (3)$$

» selon que x est compris entre $-\pi$ et $+\pi$, ou égal à » l'une de ces valeurs extrêmes. La $f(x)$ est supposée » vérifier les *conditions de Dirichlet*, c'est-à-dire qu'elle » est finie et n'a qu'un nombre fini de discontinuités, de » *maxima* et de *minima* (*), entre $-\pi$ et $+\pi$.

(*) Voir la Note II.

» On déduit aisément, de ce premier résultat de Di-
» richlet, la sommation de la série (1), dans le cas où

$$» \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_g^c f(t)\cos nt\,dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_g^c f(t)\sin ntdt, \quad (4)$$

» c et g étant des limites finies quelconques...

» Lorsque l'on veut étendre la nouvelle formule,... au
» cas où l'on a, ensemble ou séparément, $g = -\infty$,
» $c = +\infty$, on reconnaît bientôt qu'il se présente une
» difficulté spéciale...

» L'objet de la présente Note est de faire cette discus-
» sion, dans un cas assez étendu... »

Ce préambule, que j'ai dû citer presque en entier, est suivi de l'indication des principaux résultats obtenus par l'Auteur.

II

On vient de voir que M. Mansion est au courant des travaux relatifs à la difficile question qu'il se proposait de résoudre. Avec une sagacité comparable à son érudition bien connue, il a fait l'analyse du problème; il en a discerné ce qu'on pourrait appeler les *points dangereux;* et, par un heureux emploi de *subdivisions d'intégrales,* de *changements de variables, d'inégalités,* etc., il a établi rigoureusement, à ce qu'il me semble, la formule

$$F = \sum_{l+1}^{\infty} f(x + 2r\pi); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

puis les relations qui se déduisent de celle-ci.

III

Tout inventeur suit, bien rarement, le chemin le plus court. Autrement dit, les méthodes d'exposition et d'invention ne se ressemblent guère. On ne doit pas être étonné, d'après cela, que la démonstration de la formule (A) soit un peu longue (*), même un peu aride. On trouve, dans la Note III, les abréviations que j'ai essayé d'y introduire. Cette Note contient un théorème relatif à la comparaison de deux séries, théorème auquel je n'aurais jamais songé, si je n'avais eu l'agréable tâche d'examiner le nouveau travail de mon jeune Confrère.

IV

En résumé, la Note présentée par M. Mansion me paraît très digne d'être approuvée par la Classe, et j'ai l'honneur d'en proposer l'insertion aux Mémoires *in-quarto*.

NOTES.

I.

A l'exemple de M. Darboux, l'Auteur dit, non-seulement, en parlant d'une seule série : « *égale convergence;* » mais il (**) énonce ainsi un théorème : « *La série... est également convergente pour toute valeur de* x + t... » Il est possible que le mot *gleichmässige* soit admis par les Géomètres allemands. En

---

(*) Elle occupe environ six pages.
(**) Page 10.

français, l'adverbe *également* suppose, en général, une comparaison : « ces deux séries sont *également* convergentes. » Mais on ne peut le regarder comme synonyme de *toujours* ou de *constamment.*

II.

Plus d'une fois, j'ai rappelé que, dès 1810, Lacroix imprimait ceci : « Les mots *maximum* et *minimum,* ayant passé » du latin dans la langue française, ne doivent plus se décliner » que par les articles; c'est pourquoi je n'écrirai pas les *maxima,* » les *minima,* les questions *de maximis* et *de minimis ;* seu- » lement, pour indiquer le pluriel, je mettrai les *maximums,* » les *minimums,* puisqu'on écrit déjà les *factums* (*). »

Suivant Littré : « les mathématiciens disent au pluriel (*sic*) » des maxima (**); mais les grammairiens demandent qu'on » traite ce mot comme français, et qu'on dise des maxi- » mums. »

M. Mansion, à qui j'ai cité *mes auteurs,* déclare que *Lacroix a tort.* Le jugement est sévère, mais il est permis d'en appeler : Lacroix savait le latin.

III.

THÉORÈME. *Soient* $u_1, u_2, .., u_n$ *des quantités positives, décroissantes. Soient* $v_1, v_2, ..., v_n$ *d'autres quantités positives, telles que l'on ait*

$$k_0 > \frac{v_1}{u_1} > k_1 > \frac{v_2}{u_2} > k_2 > \frac{v_3}{u_3} > k_3 > \frac{v_4}{u_4} > \cdots$$
$$> k_{n-1} > \frac{v_n}{u_n} > k_n; \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

(*) Il y a huit jours, un honorable collègue me faisait observer que les Professeurs de latin ne disent pas des *pensa.*

(**) L'illustre philosophe n'a pas consulté, semble-t-il, l'ouvrage de Lacroix.

les limites $k_0, k_1, \ldots, k_n$ étant positives et décroissantes. Si l'on fait

$$S_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots \pm u_n, \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\sigma_n = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \cdots \pm v_n, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

on aura

$$\sigma_n > k_n S_n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

$$\sigma_n < (k_0 - k_n) u_1 + k_n S_n . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

1° Des inégalités (1), on déduit :

$$v_1 > k_1 u_1, \quad -v_2 > -k_1 u_2, \quad v_3 > k_3 v_3,$$
$$-v_4 > -k_3 v_4, \ldots, \quad v_n > k_n u_n \text{ (*)};$$

puis

$$\sigma_n > k_1(u_1 - u_2) + k_3(u_3 - u_4) + \cdots + k_{n-2}(u_{n-2} - u_{n-1}) + k_n u_n.$$

Dans le second membre, tous les termes sont positifs. Donc, à plus forte raison,

$$\sigma_n > k_n \left[u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + u_n \right],$$

ou

$$\sigma_n > k_n S_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

2°

$$v_1 < k_0 u_1, \quad -v_2 < -k_2 v_2, \quad v_3 < k_2 u_3,$$
$$-v_4 < -k_4 u_4, \ldots, v_n < k_{n-1} u_n;$$

$$\sigma_n < k_0 u_1 - k_2(u_2 - u_3) - k_4(u_4 - u_5) - \cdots - k_{n-1}(u_{n-1} - u_n).$$

Dans le second membre, le premier terme, seul, est positif. De plus, on a

$$k_n\left[(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \cdots + (u_{n-1} - u_n)\right]$$
$$< k_2(u_2 - u_3) + k_4(u_4 - u_5) + \cdots + k_{n-1}(u_{n-1} - u_n).$$

(*) Pour fixer les idées, je suppose *n impair.*

Donc, par addition,

$$\sigma_n + k_n(u_2 - u_3 + u_4 - \cdots + u_{n-1} - u_n) < k_0 u_1,$$

ou

$$\sigma_n + k_n(u_1 - S_n) < k_0 u_1,$$

ou enfin

$$\sigma_n < (k_0 - k_n) u_1 + k_n S_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Remarques. 1° La différence entre les deux limites de σ_n est $(k_0 - k_n)\, u_1$;

2° Cette différence est d'autant plus petite, que les nombres k décroissent plus lentement;

3° Les nombres $v_1, v_2, \ldots v_n$, vont en diminuant;

4° Si la série

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

est convergente, la série

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \cdots$$

l'est également.

Application. Supposons

$$\varphi(x) = \lambda(x) \frac{\sin 2nx}{\sin x},$$

$\lambda(x)$ étant une fonction positive et décroissante, de $x=0$ à $x=\frac{\pi}{2}$. L'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)dx$$

est égale à

$$\sigma_n = v_1 - v_2 + v_3 - \cdots \pm v_n,$$

pourvu que l'on fasse :

$$v_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \varphi(x)dx, \quad -v_2 = \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{2\pi}{2n}} \varphi(x)dx, \quad v_3 = \int_{\frac{2\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \varphi(x)dx, \ldots$$

$$\pm v_n = \int_{\frac{(n-1)\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)dx \ (*).$$

Soient, maintenant :

$$u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\varphi(x)}{\lambda(x)}\, dx, \quad -u_2 = \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{2\pi}{2n}} \frac{\varphi(x)}{\lambda(x)}\, dx, \quad u_3 = \int_{\frac{2\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \frac{\varphi(x)}{\lambda(x)}\, dx, \ldots$$

$$\pm u_n = \int_{\frac{(n-1)\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(x)}{\lambda(x)}\, dx;$$

$$k_0 = \lambda(0), \quad k_1 = \lambda\left(\frac{\pi}{2u}\right), \quad k_2 = \lambda\left(\frac{2\pi}{2u}\right), \ldots \quad k_n = \lambda\left(\frac{\pi}{2}\right);$$

$$S_n = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots \pm u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x}\, dx.$$

Les conditions (1) sont remplies. En conséquence :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lambda(x) \frac{\sin 2nx}{\sin x}\, dx > \lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x}\, dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lambda(x) \frac{\sin 2nx}{\sin x}\, dx < \left[\lambda(0) - \lambda\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x}\, dx. \text{ »}$$

La Classe a adopté les conclusions de ce Rapport, auxquelles ont adhéré MM. Folie et De Tilly.

(*) Il est facile de voir que les quantités $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont *positives*.