Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.

Bruxelles.
http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550

ser.3:t.4 (1882): http://www.biodiversitylibrary.org/item/90110

Article/Chapter Title: Quelques théorèmes de géométrie élémentaire
Author(s): Eugène Catalan
Page(s): Page 322, Page 323, Page 324, Page 325, Page 326, Page 327, Page 328, Page 329, Page 330, Page 331, Page 332, Page 333

This page intentionally left blank.

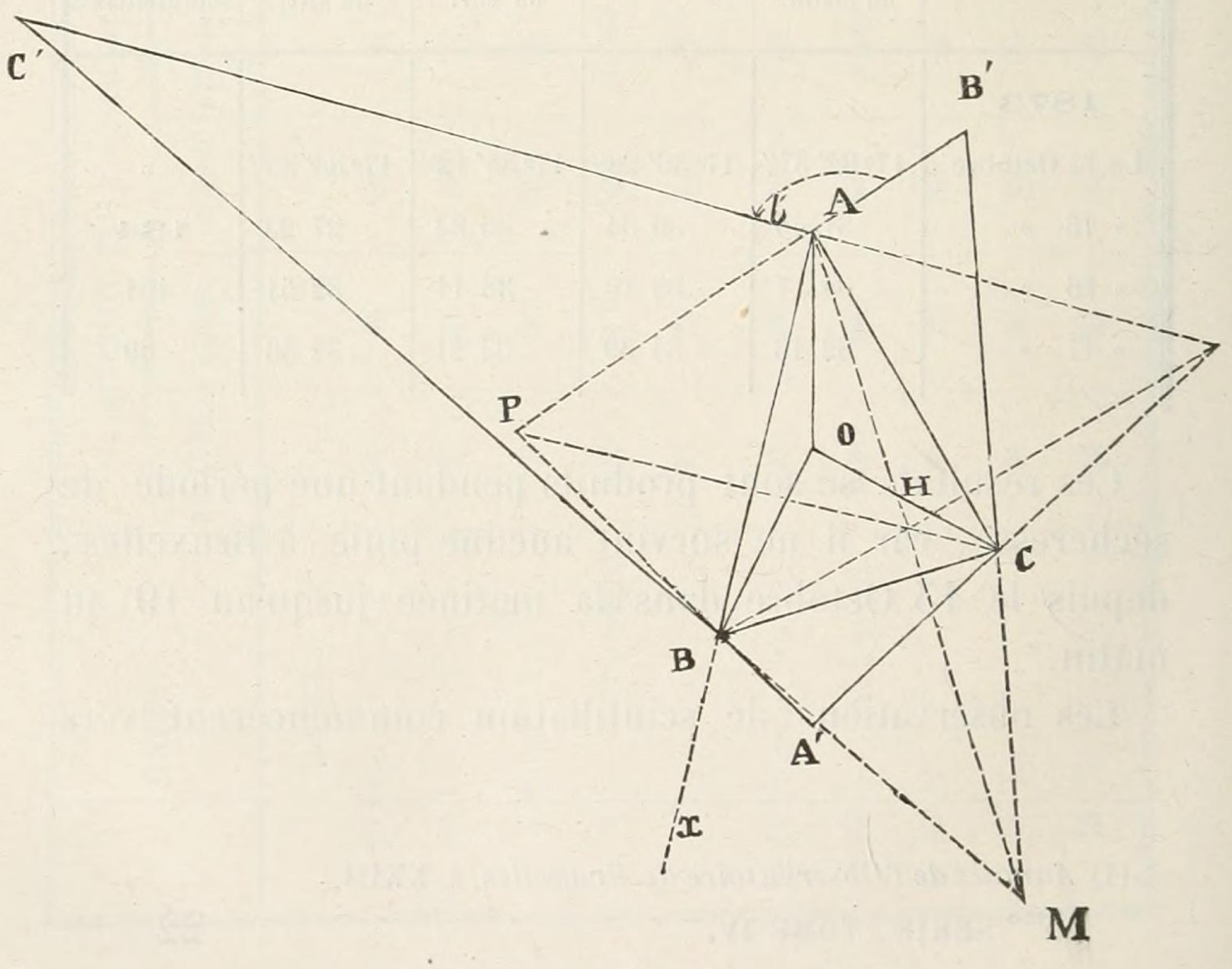
huit heures du soir le 15 Octobre, et à six heures et demie le 16 et le 17.

Le phénomène que j'annonce ici réclame une étude spéciale avant que l'on puisse chercher à pénétrer la cause de la coïncidence remarquable dont il s'agit.

Quelques théorèmes de Géométrie élémentaire; par M. E. Catalan, associé de l'Académie.

1. *Annexes d'un triangle.* Soient M, N, P les points symétriques des sommets A, B, C d'un triangle, relativement aux côtés BC, CA, AB. Si l'on mène les droites PB, NC, elles déterminent en général, avec BC, un triangle

Fig. 1.



BCA′ (*), que l'on peut appeler *annexe de* ABC, suivant BC. De même, CAB′, ABC′ sont des annexes. Ces triangles jouissent de propriétés assez remarquables.

2. *Angles des annexes.* Soit Bx le prolongement de AB. D'après la construction,

$$A'Bx = PBA = CBA = B;$$

donc

$$A'BC = 2^d - 2B.$$

De même,

$$BCA' = 2^d - 2C.$$

Par conséquent,

$$A' = 2^d - 2A. \qquad (**)$$

Ainsi, *les angles de l'annexe suivant* BC *sont les suppléments des doubles des angles de* ABC. Il en est de même pour les deux autres annexes. Conséquemment, *les trois annexes sont semblables ;* et, en outre :

$$A'BC = ABC' = B',$$
$$BCA' = ACB' = C',$$
$$BAC' = CAB' = A'.$$

3. *Remarque.* Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. L'angle *au centre*, BOC, est double de A. Donc $BOC + A' = 2^d$: *le quadrilatère* BOCA′ *est inscrip-*

(*) Il est visible que, si l'angle A est droit, les lignes PB, NC sont parallèles entre elles. Cette conclusion résulte, d'ailleurs, des valeurs suivantes.

(**) Lorsque $A = 1^d$, A′ est nul, conformément à la remarque précédente.

tible. De même, COAB′, AOCA′ sont des *quadrilatères inscriptibles* (*).

4. *Hexagone des annexes.* Dans l'hexagone

$$A'C\,B'A\,C'B\,A',$$

les angles en A′, B′, C′ ont pour valeurs, respectivement :

$$2^d - 2A, \quad 2^d - 2B, \quad 2^d - 2C.$$

L'angle en A égale

$$CAB' + A + BAC' = 2A' + A = 4^d - 3A.$$

Donc *l'angle extérieur* (**), B′AC′, *est le triple de* A. Semblablement :

$$\textit{angle ext. } B'CA = 3C,$$
$$\textit{angle ext. } C'BA' = 3B.$$

5. *Remarques* I. La somme des angles *intérieurs,* en A, B, C, est

$$12^d - 3(A + B + C) = 6^d;$$

donc *un au moins, de ces trois angles, surpasse* 2 *droits.*

II. *L'hexagone est non-convexe.*

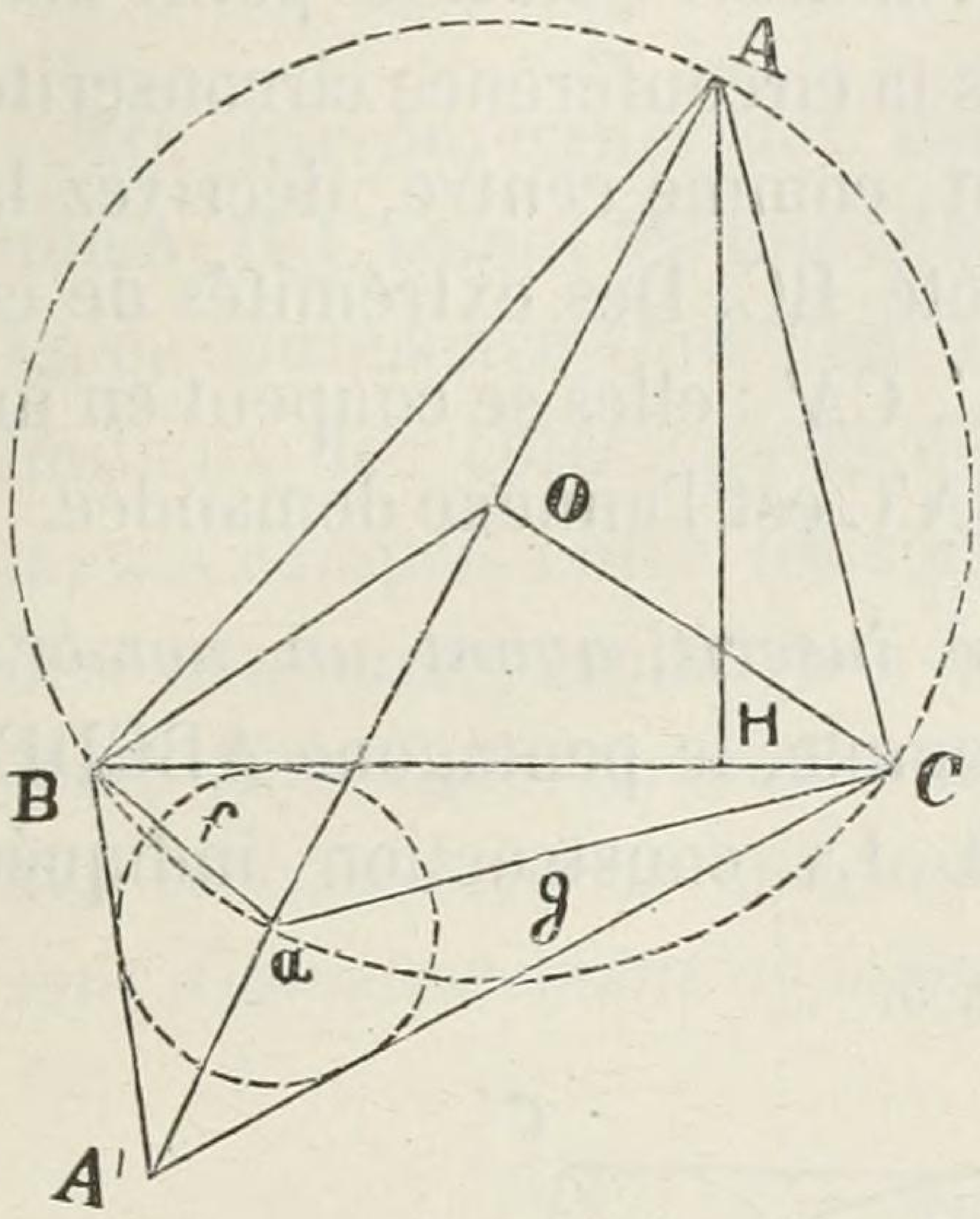
III. *La somme des angles intérieurs, en* A′, B′, C′, *égale* 2 *droits.*

(*) Nous reviendrons sur cette propriété.

(**) L'expression : *angle extérieur,* n'a pas, ici, la signification habituelle.

6. Théorème 1°. *La droite* AA′, *qui joint un sommet de* ABC *au sommet correspondant d'une annexe* BCA′, *contient le centre* O *de la circonférence circonscrite au premier triangle et le centre* α *de la circonférence circonscrite à l'annexe ;* 2° *le second centre est situé sur la première circonférence.*

Fig. 2.



Soient Bf perpendiculaire à BA, Cg perpendiculaire à CA. D'après la *définition* (1), ces droites sont bissectrices des angles CBA′, BAC′; donc elles se coupent au centre α du cercle inscrit à l'annexe.

En second lieu, la circonférence décrite sur Aα, comme diamètre, contient les sommets B, C: elle est circonscrite au triangle ABC.

Menons la droite αA′, laquelle est bissectrice de l'angle A′. Nous aurons :

$$B\alpha A' = 2^d - \tfrac{1}{2}(A' + B') = A + B;$$

et, parce que BαA, BCA sont inscrits au même segment :

$$B\alpha A = BCA = C.$$

Donc

$$B\alpha A' + B\alpha A = A + B + C = 2^d:$$

A′αOA *est une ligne droite.*

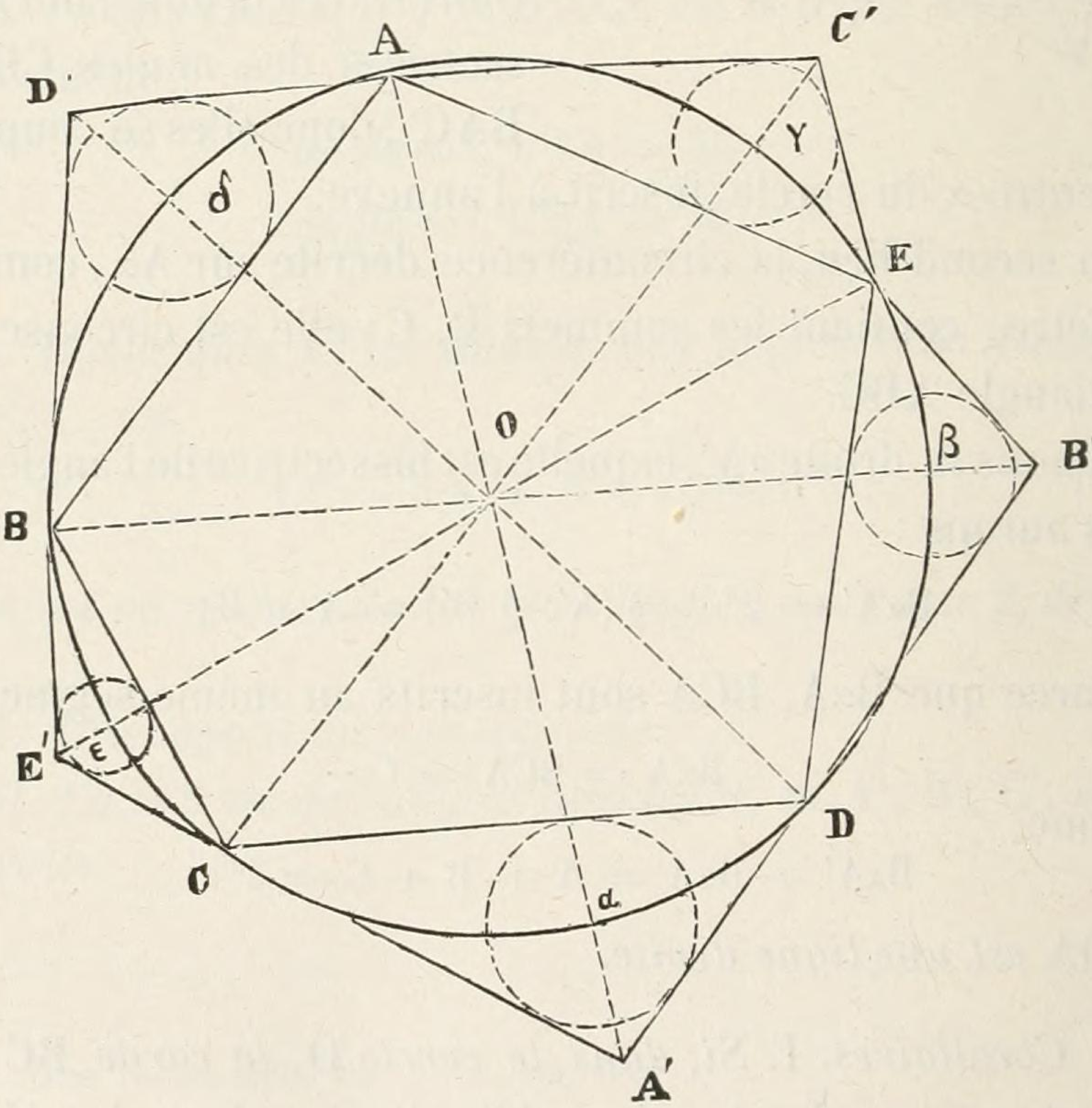
7. *Corollaires.* I. *Si, dans le cercle* O, *la corde* BC *est fixe, et que le point* A *soit mobile, le lieu du point* A′ *est un arc de la circonférence* BOC (3).

II. *Si, au contraire, le point* A *est fixe, et que la corde* BC *soit mobile, le lieu du point* A′ *est le prolongement du diamètre passant en* A (*).

8. *Autre construction de l'annexe.* Soit α le point diamétralement opposé à A, dans la circonférence circonscrite au triangle ABC. De ce point, comme centre, décrivez la circonférence tangente au côté BC. Des extrémités de ce côté, menez les tangentes BA′, CA′ : elles se coupent en un point A′, situé sur AOα; et BA′C est l'annexe demandée.

9. *Annexes d'un polygone inscrit, ayant un nombre impair de côtés.* Soit, par exemple, le pentagone ABCDE, inscrit à la circonférence O. La construction indiquée

Fig. 3.

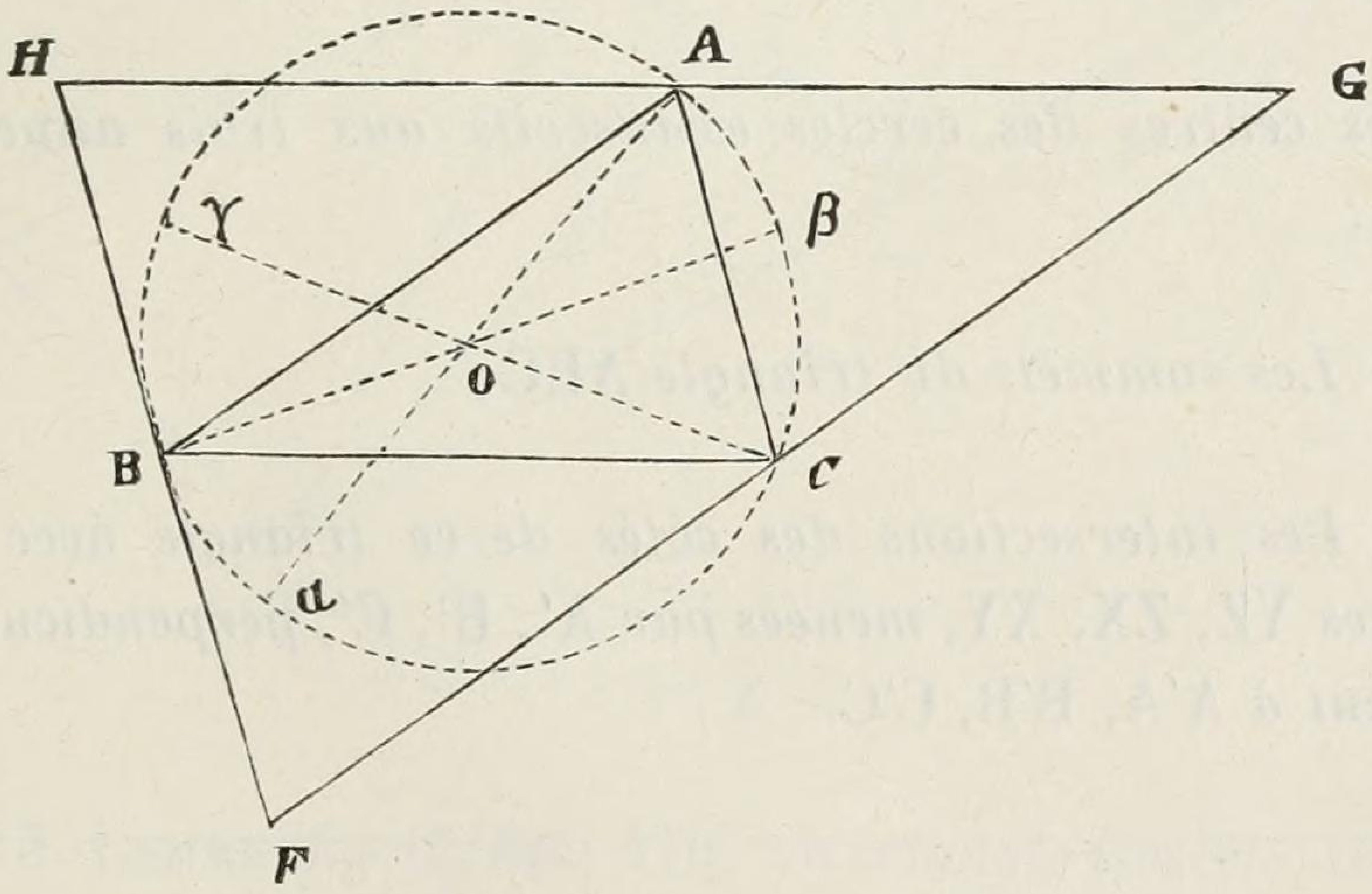


(*) On verra, tout à l'heure, comment on doit prendre la *corde mobile*, pour que le point A′ soit *fixe*.

ci-contre détermine les annexes DA′C, EB′D,.....; puis le décagone AC′EB′D....., dans lequel *les diagonales se coupent au centre du cercle donné* (*).

10. *Circonférence des neuf points* (fig. 4). Supposons que A, B, C soient les milieux des côtés d'un triangle FGH. La circonférence O devient la *circonférence des neuf points* (milieux des côtés, pieds des hauteurs, milieux des segments compris entre les sommets et le point de concours des hauteurs), relative à ce triangle. D'après le théorème (6), *cette circonférence contient les centres* α, β, γ *des cercles inscrits aux annexes de* ABC; *et ces centres sont diamétralement opposés à* A, B, C.

Fig. 4.



(*) En outre, *les quadrilatères* AC′EO, EB′DO, DA′CO, CE′BO, BD′AO *sont inscriptibles*.

Voilà donc *trois* points ajoutés aux *neuf* (*) que l'on connaissait (**).

11. *Cercles ex-inscrits aux annexes* (fig. 5). A'A est la bissectrice de l'angle A'(6) Le côté BA, perpendiculaire à la bissectrice Bα de A'BC, est bissecteur de l'angle *extérieur* A'Bx. Pour la même raison, CA est la bissectrice de A'Cy. Donc A *est le centre du cercle ex-inscrit à l'annexe* BCA', *tangent au côté* BC. *Le rayon de ce cercle est la hauteur* AH.

Considérons les deux autres cercles ex-inscrits à BCA'. Le centre de l'un est l'intersection de AB avec la droite YZ, menée par A', perpendiculairement à A'A; le centre de l'autre est l'intersection de cette même droite YZ avec AC. Par conséquent :

Les centres des cercles ex-inscrits aux trois annexes sont :

1° *Les sommets du triangle* ABC;

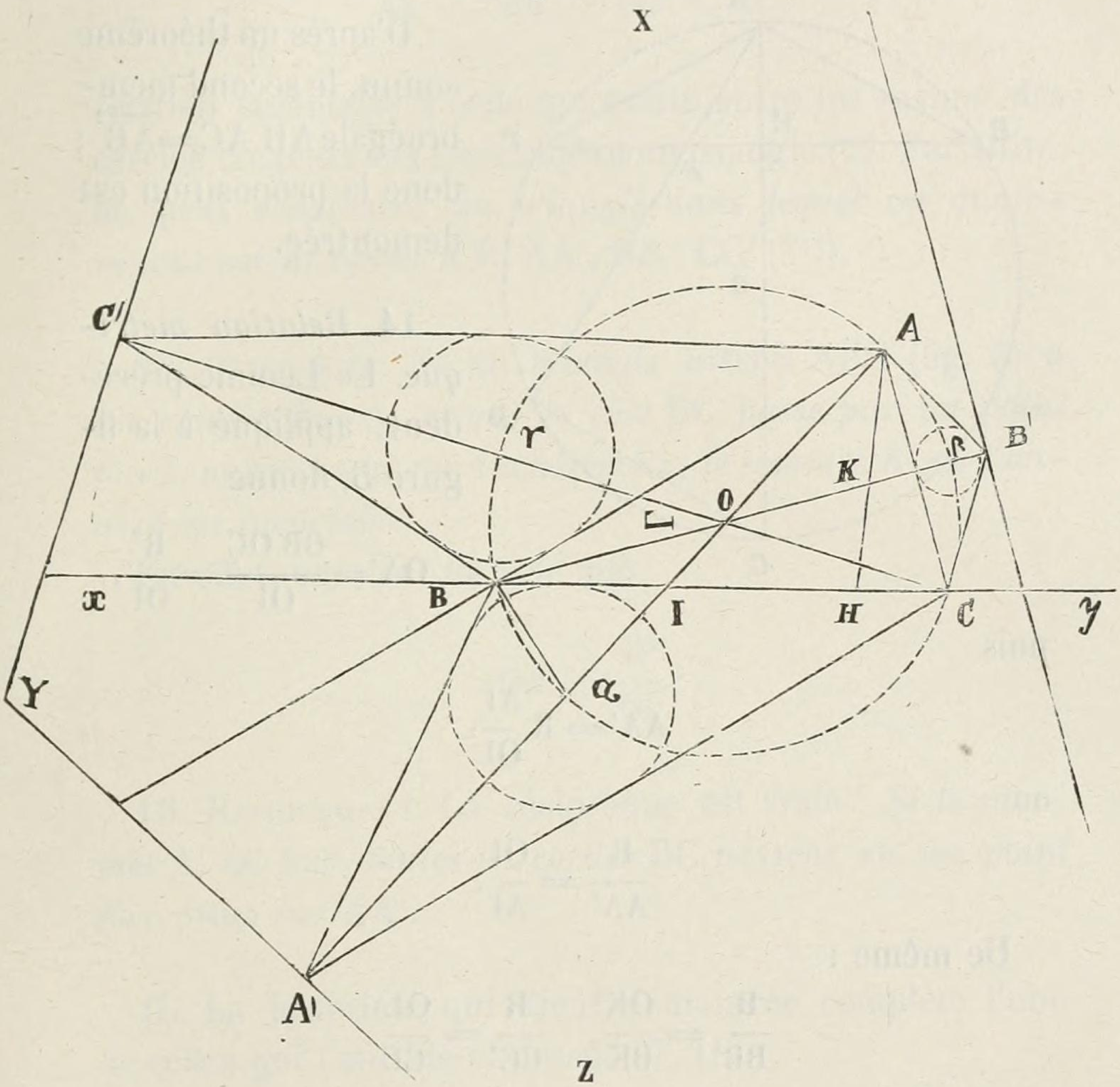
2° *Les intersections des côtés de ce triangle avec les droites* YZ, ZX, XY, *menées par* A', B', C', *perpendiculairement à* A'A, B'B, C'C.

(*) Ou plutôt aux *quinze*. (*Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, 6me édit., p. 177.)

(**) Je fais abstraction, bien entendu, des points remarquables, *en nombre indéfini*, où la circonférence O touche certains cercles. *Loc. cit.*, p. 181.

12. *Remarque.* Ces droites sont parallèles aux tangentes, en A, B, C, au cercle O.

Fig. 5.

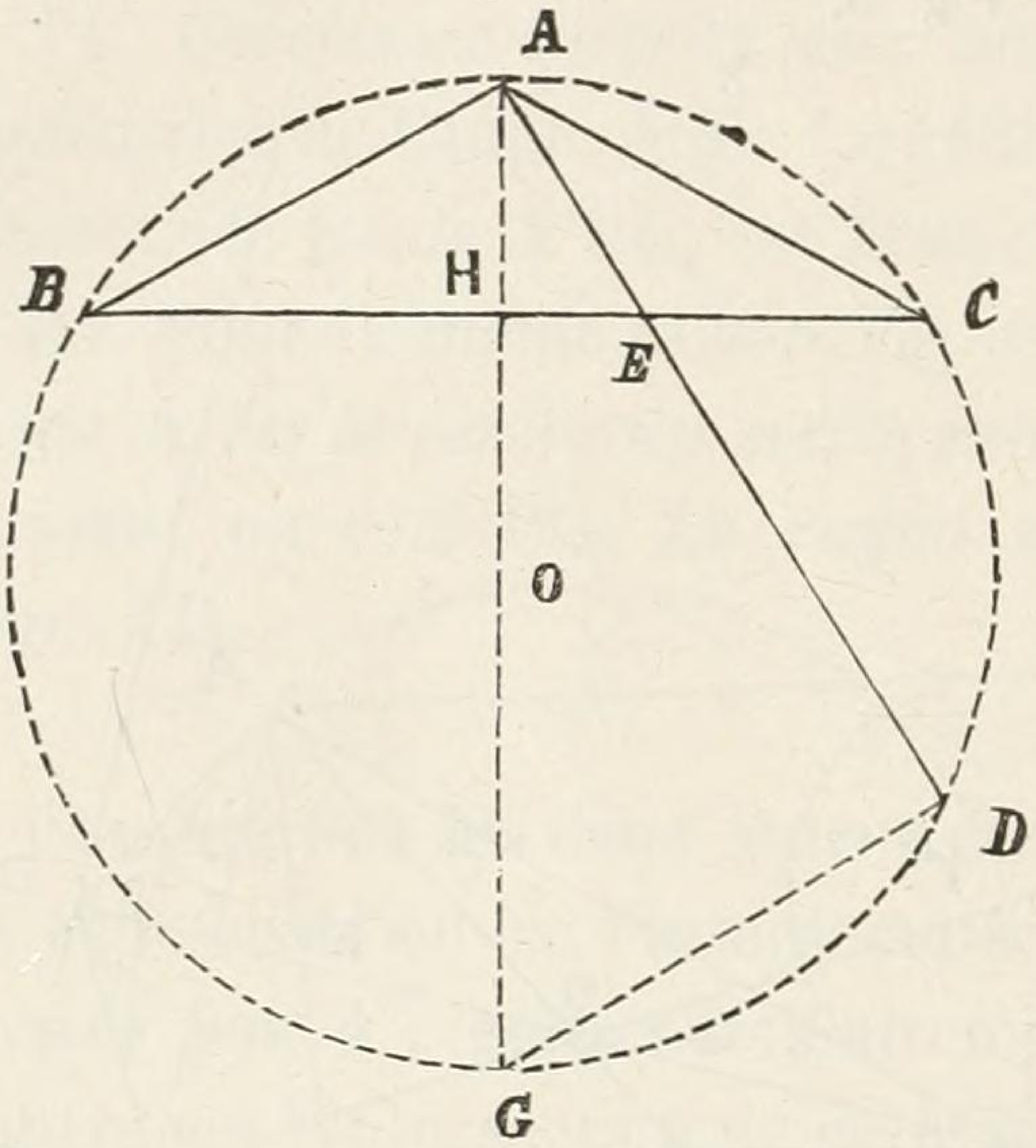


13. Lemme (fig. 6). *Soit* ABC *un triangle isoscèle, inscrit à un cercle* O. *Si l'on trace la corde* AD, *coupant en* E *la base du triangle, on a*

$$AD \cdot AE = \overline{AB}^2.$$

Menons le diamètre AOG et la corde GD. Le quadrilatère DEHG, qui a deux angles opposés droits, est inscriptible (*). Donc

Fig. 6.



$$AD.AE = AG.AH.$$

D'après un théorème connu, le second membre égale $AB.AC = \overline{AB}^2$; donc la proposition est démontrée.

14. *Relation métrique*. Le Lemme précédent, appliqué à la figure 5, donne

$$OA' = \frac{OB.OC}{OI} = \frac{R^2}{OI},$$

puis

$$AA' = R\,\frac{AI}{OI},$$

ou

$$\frac{R}{AA'} = \frac{OI}{AI}.$$

De même :

$$\frac{R}{BB'} = \frac{OK}{BK}, \quad \frac{R}{CC'} = \frac{OL}{CL}.$$

Par conséquent,

$$\frac{R}{AA'} + \frac{R}{BB'} + \frac{R}{CC'} = \frac{OI}{AI} + \frac{OK}{BK} + \frac{OL}{CC}.$$

Mais il est connu (et évident) que la somme des trois

(*) Autrement dit, les triangles ADG, AHE sont semblables.

derniers rapports se réduit à l'unité (*). Donc enfin

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = \frac{1}{R};$$

relation semblable à celle qui existe entre les rayons des cercles tangents aux trois côtés d'un triangle (**). Par suite, on peut *construire un triangle dans lequel ces quatre rayons soient égaux à* R, AA', BB', CC' (***).

15. Théorème. *Si un triangle inscrit* ABC (fig. 5) *a un sommet fixe* A, *et que le côté* BC *passe par un point fixe* I, *appartenant au diamètre* $A\alpha$, *le sommet* A' *de l'annexe est invariable.*

En effet, on vient de voir que

$$OA' = \frac{R^2}{OI}.$$

16. *Remarques* I. La réciproque est vraie : *Si le sommet* A' *est fixe, toutes les cordes* BC *passent en un point fixe, situé sur* AA'.

II. La propriété qui vient démontrée complète l'une de celles qui l'ont été ci-dessus (7, II).

(*) De là résulte que, *dans tout triangle rectiligne,*

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

Cette proposition, également connue, est facile à vérifier directement.

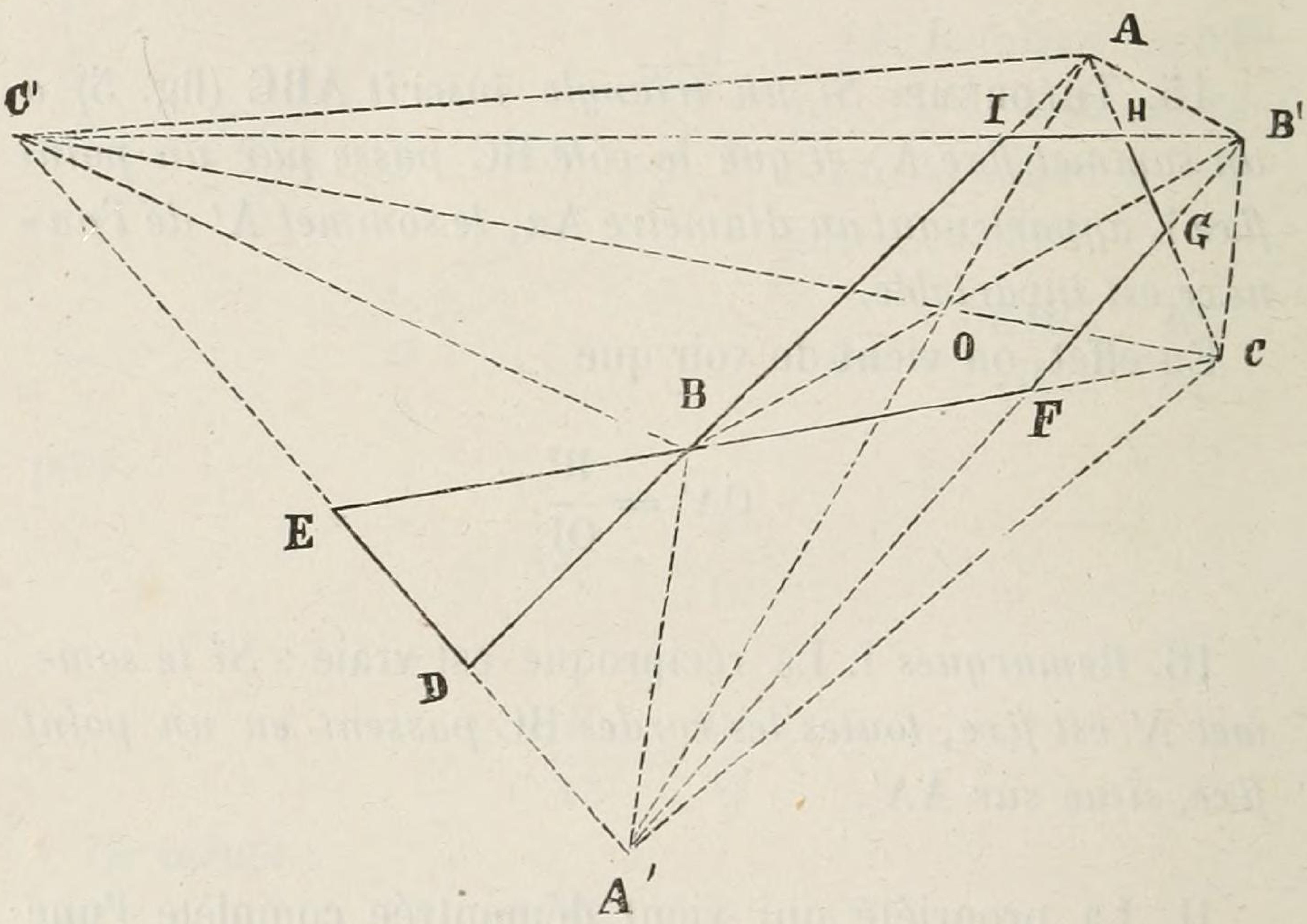
(**) *Théorèmes et Problèmes...*, p. 198.

(***) *Id.*, p. 116.

III. Les points I, A′ sont *réciproques* (*). Donc *la polaire du point* I *est la droite* YZ (II). De même, ZX et XY sont les polaires des points L, K.

17. *Hexagone de Brianchon* (fig. 7). Les diagonales de l'hexagone A′CB′AC′B se coupent au point O. Donc *cet hexagone est circonscrit à une conique.*

Fig. 7.



18. *Hexagone de Pascal.* En 1848, nous avons fait connaître un théorème que l'on peut énoncer ainsi :

Les jonctions successives des sommets alternants d'un

(*) *Éléments de Géométrie*, p. 114.

hexagone de Brianchon, sont les côtés d'un hexagone de Pascal (*).

On vient de voir que C'BA'CB'A est un hexagone de Brianchon. Donc les droites C'A', BC, A'B', CA, B'C', AB sont les côtés successifs d'un hexagone de Pascal. *Cet hexagone est* DEFGHI. Autrement dit, *les points* D, E, F, G, H, I *sont situés sur une conique.*

18. *Circonférence des neuf points.* Supposons, comme précédemment (10), que A, B, C soient les milieux des côtés d'un triangle T (**). Soit O la circonférence des neuf points, relative à T, et soient ABC', BCA', CAB' les annexes de ABC. Les dernières remarques donnent lieu à la proposition suivante :

1° *L'hexagone* AC'BA'CB *est circonscrit à une conique ;*

2° *L'hexagone* DEFGHI, *formé par les intersections successives des droites* AB, C'A', BC, A'B', CA, B'C', AB, *est inscrit à une conique.*

19. *Remarque.* Si, comme au n° 9, on remplaçait le triangle ABC par un polygone convenablement choisi, on pourrait généraliser les dernières propriétés. Mais en voilà assez sur ce sujet.

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1852, p. 173; *Bulletins de l'Académie*, déc. 1878; etc.

(**) Non représenté sur la figure.