This page intentionally left blank.

Historique et méthode de la détermination de toutes les singularités ordinaires d'un lieu défini par k *équations algébriques contenant* k — 1 *paramètres arbitraires*, par M. Saltel, maître de conférences à la faculté des sciences de Bordeaux.

Rapport de M. Folie.

« La nouvelle communication de M. Saltel se compose de deux parties bien distinctes, comme l'indique, du reste, son titre même.

C'est sur la partie historique que portent les quelques observations que nous avons à présenter.

La théorie exposée, au début même de cet historique, relativement aux deux systèmes d'équations (C) et (D), semblerait être extraite des travaux antérieurs de l'auteur. Nous ne pensons pas qu'elle y figure explicitement.

Depuis la publication de ces travaux de M. Saltel, M. Le Paige et moi, nous nous sommes occupés, à l'occasion de ma découverte du rapport anharmonique du n^e ordre, du lieu des points n^{uples} communs à n lieux variables, et nous avons énoncé le *Principe de la théorie des faisceaux* (1). On voudra bien nous concéder que, si ce principe avait été formulé dans les travaux antérieurs de M. Saltel, sur lesquels nous avons nous-même fait un rapport, nous nous serions gardé de le donner comme neuf. Nous ajouterons, aujourd'hui, qu'avant de le publier, nous avons consulté à son sujet deux Géomètres très-distingués, que nous avions

(1) *Bulletins de l'Académie*, 2e série, t. XLVI, pp. 193 et suiv.

eu l'occasion de voir, l'un à Vienne, l'autre à Munich, pendant l'été dernier; que l'un a commencé par douter de l'exactitude du principe, et que l'autre nous disait ne l'avoir vu appliqué que dans le cas particulier de la recherche du Jacobien. Que, maintenant, tout le monde le trouve tout à fait élémentaire, ceci n'a rien de surprenant; qu'on croie même l'avoir toujours connu, nous le concevons encore; mais, avant de renoncer à nos droits de priorité, nous désirons vivement, M. Le Paige et moi, qu'on ne se borne pas à dire : « *tout cela résulte simplement de la théorie de l'élimination* », mais qu'on veuille bien nous indiquer un texte, imprimé ou même autographié avant 1878, dans lequel le principe soit formellement et explicitement énoncé. Si on l'eût connu du reste, n'eût-on donc pas songé immédiatement à l'appliquer au lieu des points de concours de trois, et, plus généralement, de n rayons homographiques?

M. Saltel a certainement entrevu le principe, comme il appert de son Mémoire inséré au t. XXIV de notre collection in-8°; mais la clarté même du travail qu'il vient d'adressser à la Classe, comparée au vague que ses travaux antérieurs renferment parfois sur ce point, nous porte à croire qu'il n'avait pas encore une idée tout à fait nette du principe; telle est, du moins, l'impression que nous venons d'éprouver en relisant ses travaux antérieurs.

A part ces observations, qui ne portent que sur l'introduction historique du travail actuel de M. Saltel, nous n'avons que des éloges à décerner à ce jeune Géomètre.

Il a très-notablement étendu le champ des applications du principe de correspondance; et il montre aujourd'hui comment sa méthode est applicable à la détermination de toutes les singularités d'un lieu défini par n équations algébriques renfermant $n - 1$ paramètres arbitraires, qu'il s'agisse de courbes planes, de surfaces, ou de courbes gauches.

Au moyen des résultats trouvés par lui, et de ceux qui avaient été donnés antérieurement par Plücker et Cayley, toutes les singularités ordinaires de ce lieu sont, en effet, déterminées, sans qu'il soit nécessaire d'en rechercher l'équation.

Aussi est-ce avec plaisir que nous proposons à la Classe de voter l'impression, au *Bulletin*, du travail de M. Saltel, ainsi que des remercîments à l'auteur. »

Rapport de M. Catalan.

I.

« Deux jours avant la dernière séance, j'ai reçu ce Mémoire, accompagné du Rapport de M. Folie, premier Commissaire. Bien que les conclusions de notre savant Confrère fussent favorables à l'auteur, je n'ai pas cru devoir m'y rallier immédiatement : le temps de lire le Mémoire m'avait manqué; et, d'un autre côté, le Rapport de M. Folie contient certaines réclamations qui ne me paraissent pas justifiées, et sur lesquelles je reviendrai tout à l'heure. J'ai même demandé, on s'en souvient peut-être, que le Rapport fût communiqué à M. Saltel : M. Folie s'étant, comme il en avait le droit, opposé à cette proposition, elle fut rejetée; mais, après la séance, notre honorable Confrère m'a autorisé à faire connaître, officieusement, son travail à l'auteur du Mémoire; ce que j'ai fait, du moins en partie.

Pendant les vacances, j'ai reçu, de M. Saltel, une Note intitulée : *Observations sur le Rapport de M. Folie.* J'en extrais ce qui suit :

II.

« Afin de mieux préciser, je me bornerai à examiner le
» cas particulier où ce lieu géométrique est défini par trois
» équations.

» Dans cette hypothèse, voici l'énoncé du théorème
» dont M. Folie réclame la priorité :

» *Si les coordonnées* x, y *d'un lieu* (*) *vérifient simultanément les trois équations*

$$f_1(x, y, a, b) = 0, \quad f_2(x, y, a, b) = 0, \quad f_3(x, y, a, b) = 0,$$

» *dans lesquelles* a, b *sont des paramètres arbitraires, on*
» *obtient l'équation de ce lieu en éliminant* a, b *entre ces*
» *trois équations.*

» J'affirme, sans craindre un désaveu, que ce théorème
» se démontre, comme conséquence immédiate de la définition de l'élimination, au moins depuis une dizaine
» d'années (époque où j'étais élève), dans tous les cours de
» Mathématiques spéciales de France, en même temps que
» ces deux autres théorèmes, universellement connus (**) :

» *Si les coordonnées* x, y *d'une courbe, ou les coordonnées* x, y, z *d'une surface, vérifient simultanément les*
» *deux équations*

$$\begin{cases} f_1(x, y, a) = 0, \\ f_2(x, y, a) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1(x, y, z, a) = 0, \\ f_2(x, y, z, a) = 0, \end{cases}$$

» *dans lesquelles* a *représente un paramètre arbitraire, on*

(*) x, y sont les *coordonnées d'un point quelconque du lieu* : mais je dois citer exactement.

(**) *Nouvelles Annales*, 1873, p. 376.

» *obtient l'équation de cette courbe ou surface en éliminant* a
» *entre ces deux équations.* »

. . . .

« Au surplus, il serait difficile de concevoir comment,
» après lecture des passages suivants, extraits de mes tra-
» vaux, antérieurs à l'année 1878, on pourrait douter que
» le théorème en question ne me fût, au moins personnel-
» lement, connu. Je demande, en effet, quel *sens* auraient,
» dans l'hypothèse contraire, ces quelques phrases :

» 1° *Le degré de l'équation du lieu géométrique obtenu*
» *en éliminant les paramètres* r, ρ *entre les équations*

$$\begin{cases} f_a^\alpha(x, y, r, \rho) = 0, \\ f_b^\beta(x, y, r, \rho) = 0, \\ f_c^\gamma(x, y, r, \rho) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_a^\alpha(x, x, z, r\rho) = 0, \\ f_b^\beta(x, y, z, r\rho) = 0, \\ f_c^\gamma(x, y, z, r\rho) = 0, \end{cases}$$

» *de degrés* a, b, c, *par rapport aux variables* x, y, z, *et*
» *dont les coefficients sont de degrés* α, β, γ, *par rapport*
» *aux paramètres* r, ρ, *est, en général*, d'un ordre mar-
» qué par

$$a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta.$$

» 2° *Tout lieu géométrique, défini par des conditions*
» *algébriques, se présente* TOUJOURS *sous la forme de* R + 1
équations

. . . .

» *contenant* R *paramètres arbitraires.*

» *Il est manifeste que le nombre des points du lieu,*
» situés à distance finie, sur la droite arbitraire Δ, repré-
» sentée par

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \rho,$$

» *est égal au nombre des solutions finies, en* ρ, *communes*
» *à ce système.* » (Bulletin de l'Académie, août 1876.)

. . . .

« M. Folie, objecte, il est vrai, que la démonstration
» donnée, dans mon Mémoire, de la généralisation du
» théorème en litige, ne se trouve pas développée dans
» les Traités de Géométrie.... J'accorde ce point; et, loin
» de m'attribuer la paternité de la dite démonstration, je
» me bornerai à faire observer que l'on n'a pas cru utile
» d'imprimer *une démonstration qui.... ne comportait que*
» *la reproduction d'une définition....*; cela est si vrai que,
» même *la démonstration du théorème* III, théorème dont
» on fait un usage continuel, ne se trouve nulle part!... »

III.

Le jeune professeur de Bordeaux a raison, me semble-t-il; et l'on peut regretter que M. Folie, auteur de travaux importants et remarquables, réclame la priorité d'un soi-disant théorème, évident pour tout le monde, excepté, peut-être, pour les Géomètres, *très-distingués*, de Vienne et de Munich.

Encore un mot. Notre honorable Confrère dit : « *Qu'on*
» *veuille bien nous indiquer un texte, imprimé ou auto-*
» *graphié avant 1878, dans lequel le principe soit formel-*
» *lement ou explicitement énoncé.* » Qu'il me permette une comparaison : elle fera comprendre, à ceux de nos Confrères qui ne sont pas Géomètres, la nature de la discussion.

Très-probablement, dans aucun ouvrage *imprimé ou* *autographié*, on ne trouve l'*égalité*

$$38\ 743 + 17\ 499 = 56\ 242.$$

Si j'en réclamais *la priorité,* que penserait-on de moi ?

IV.

Il m'en a coûté beaucoup de présenter, sur le Rapport de M. Folie, ces observations critiques ; mais elles m'ont paru nécessaires. Aussi, suis-je très-heureux de me rallier, complétement, aux conclusions de l'honorable et savant premier Commissaire. »

2 septembre 1879.

Rapport de M. De Tilly.

I.

« Les deux premiers commissaires ont proposé l'impression du travail de M. Saltel au *Bulletin*, ainsi que des remercîments à l'auteur.

Je me rallie à ces conclusions.

Je n'ai donc à parler que du principe de la théorie des faisceaux, appliqué par M. Saltel, et dont la priorité est revendiquée par M. Folie, en son propre nom et au nom de M. Le Paige.

Lorsque je lus, il y a plus d'un an, la Note intitulée : « *Principe de la théorie des faisceaux* » (*), je trouvai que ce principe était, ou bien tout à fait évident si les termes employés par l'auteur devaient être pris dans leur

---

(*) *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, t. XLVI, p. 193.