Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.
Bruxelles.
http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550

ser.2:t.48 (1879): http://www.biodiversitylibrary.org/item/111111

Article/Chapter Title: Rapport sur les mouvements relatifs de tous les astres du système solaire par M. Souillard
Author(s): Eugène Catalan
Page(s): Page 96, Page 97, Page 98, Page 99, Page 100, Page 101, Page 102, Page 103

This page intentionally left blank.

en quelque point, ces connaissances, soit au point de vue théorique, soit au point de vue expérimental.

Renvoi à l'examen de MM. Folie, Van der Mensbrugghe et De Tilly.

RAPPORTS.

Mouvements relatifs de tous les astres du système solaire; par M. Souillart, professeur à la Faculté des sciences de Lille.

Rapport de M. Catalan.

I.

Depuis un certain nombre d'années, M. Souillart, antérieurement connu par des travaux de natures diverses, s'est livré, exclusivement, à l'étude de la Mécanique céleste. Dans cet ordre de connaissances, il a publié, entre autres Mémoires, une *Théorie analytique des satellites de Jupiter*, fort remarquée. Les méthodes dont il a fait usage, pour déterminer les mouvements du système de Jupiter, lui ont permis d'aborder un problème beaucoup plus compliqué : celui du *mouvement de chacun des astres du système solaire.* Tel est l'objet du Mémoire présenté à l'Académie.

Pour donner une idée de la manière dont l'honorable auteur a compris ce difficile problème, et de la marche qu'il a suivie pour arriver à le résoudre, je ne puis mieux faire que de reproduire quelques passages du préambule :

« Il n'est pas sans intérêt, au point de vue analytique,
» d'envisager le problème dans toute sa généralité, et

» d'embrasser dans une même recherche l'ensemble des
» mouvements, tant de rotation que de translation, de
» tous ces astres à la fois, considérés individuellement.
» On devra, pour cela, tenir compte immédiatement de
» leur figure et de l'action que chacun exerce sur tous
» les autres.... Nous aurons, tout d'abord, à donner l'ex-
» pression approchée de cette fonction (*); il suffira, en-
» suite, de considérer successivement l'action exercée par
» chaque corps sur chacun des autres, pour obtenir, entre
» les nombreuses inconnues de la question, un système
» unique d'équations différentielles simultanées, du second
» ordre, en nombre égal à celui de ces inconnues.... »

« Les fonctions perturbatrices, de diverses espèces, que
» l'on est conduit à considérer ici, sont, pour la plupart,
» beaucoup plus compliquées que celles que l'on rencontre
» habituellement en Mécanique céleste. Par exemple, outre
» l'expression connue

$$(1 - \alpha e^{ix})^{-s}\,(1 - \alpha e^{-ix})^{-s},$$

» on doit développer l'expression plus générale

$$(1 - \alpha e^{ix} - \beta e^{iy})^{-s}\,(1 - \alpha e^{-ix} - \beta e^{-iy})^{-s},$$

» et même la suivante :

$$(1 - \alpha e^{ix} - \beta e^{iy} - \gamma e^{iz})^{-s}\,(1 - \alpha^{-ix} - \beta e^{-iy} - \gamma e^{-iz})^{-s}.$$

« Les coefficients de ces deux derniers développements
» jouissent de nombreuses propriétés algébriques, analo-

(*) Le *potentiel* des masses M, M'.

» gues à celles que l'on connaît pour les coefficients des
» premiers : nous en indiquerons quelques-unes. »

« Dans le mode de calcul que nous indiquons, le degré
» d'approximation des équations n'est pas limité *a priori :*
» il dépend de l'ordre des termes auxquels on s'arrête
» dans le développement des divers potentiels. Nous pous-
» serons ce développement assez loin, pour que l'approxi-
» mation dépasse celle du procédé ordinaire ; on pourrait
» donc ainsi, du moins théoriquement parlant, juger du
» degré d'approximation que comporte celui-ci.

» ..... La considération du système unique d'équations
» différentielles qui régit tous les mouvements intérieurs
» du système planétaire, pourra conduire à quelques
» remarques intéressantes.... Par exemple, nous en dédui-
» rons cette proposition.... dont la démonstration est
» l'objet principal du présent travail :

« *Si l'on néglige les termes qui seraient du troisième*
» *degré par rapport aux excentricités et aux inclinai-*
» *sons, les déplacements séculaires des plans des orbites et*
» *des équations de tous les astres qui composent le sys-*
» *tème solaire, dépendent d'un système d'équations diffé-*
» *rentielles linéaires, tout pareil à celui que l'on obtient*
» *habituellement, pour déterminer les déplacements sécu-*
» *laires des plans des orbites planétaires.* »

II.

Le paragraphe I est intitulé : *Potentiel de deux masses.* Après avoir établi les formules préliminaires, M. Souillart s'énonce ainsi :

« Les dix intégrales qui précèdent peuvent s'exprimer

» toutes au moyen des dérivées partielles de l'intégrale
» unique

$$V = \int \frac{dm\, dm'}{r},$$

» laquelle se nomme le *potentiel des deux masses* M, M'.

» Cette propriété, peu connue en France, se trouve dans
» les ouvrages classiques allemands (voir Schell, *Theorie*
» *der Bewegung und der Kräfte*, p. 713). »

L'honorable auteur est il bien sûr de ce qu'il avance? Le théorème en question se trouve déjà, du moins pour le cas où l'une des deux masses est réduite à un simple point, dans la *Mécanique* de Poisson (1833). Quoi qu'il en soit, le développement de la fonction V est présenté avec une clarté et une élégance remarquables; et M. Souillart arrive à cette valeur approchée, très-symétrique, déjà trouvée par M. Routh :

$$V = \frac{MM'}{R} + M\frac{A' + B' + C' + 3I'}{2R^3} + M'\frac{A + B + C - 3I}{2R^3} : (*)$$

l'erreur relative est du même ordre que la quatrième puissance de la parallaxe de l'un des deux corps, par rapport à l'autre.

III.

Les paragraphes II, III, IV sont intitulés, respectivement : *Équations générales des mouvements relatifs que possèdent les centres de gravité des planètes et des satellites; Équations relatives au mouvement de rotation, autour*

(*) A, B, C, A', B', C', I, I' sont des moments d'inertie.

de son centre de gravité, de l'un quelconque des corps du système solaire;

Développements des diverses fonctions perturbatrices.

Bien entendu, je n'ai pas refait les calculs; mais ils sont établis avec tant de soin, tant de conscience scientifique, que l'on peut, je pense, avoir pleine confiance dans les résultats auxquels ils conduisent.

M. Souillart est, non-seulement un calculateur exercé, mais un véritable Géomètre : à propos des développements de la fonction perturbatrice, il découvre divers théorèmes remarquables, annoncés dans le préambule, et qui généralisent les propriétés des célèbres fonctions X_n, de Legendre. Entrons, à ce sujet, dans quelques détails.

Ayant à développer la fonction

$$F = \left[1 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\cos x - 2\beta\cos y + 2\alpha\beta\cos(x-y)\right]^{-s},$$

l'auteur, par analogie avec ce que l'on fait dans le cas des quantités X_n, écrit ainsi le second membre :

$$(1 - \alpha e^{ix} - \beta e^{iy})^{-s}\,(1 - \alpha e^{-ix} - \beta e^{-iy})^{-s};$$

i remplaçant $\sqrt{-1}$. Développant chaque facteur, et effectuant le produit, il trouve

$$F = \tfrac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\ \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} b^{(m,\,n)}\, e^{(mx+ny)i}.$$

Les coefficients $b^{(m,\,n)}$ satisfont à diverses équations : la première, que je ne transcris pas, est désignée par (A). Si l'on suppose $\beta = 0$, $s = \frac{1}{2}$, cette équation (A) devient

$$0 = (m + \tfrac{1}{2})b^{(m)} - (m+1)(\alpha + \tfrac{1}{2})b^{(m+1)} + (m + \tfrac{3}{2})b^{(m+2)};$$

c'est-à-dire, à la notation près, la relation connue :

$$(m+1)X_{m+1} - (2m+1)x\,X_m + mX_{m-1} = 0.$$

Par un changement de lettres, M. Souillart déduit, de (A), une autre équation (B); après quoi il conclut ainsi :

« *Les sept coefficients qui entrent dans* (B), *étant précisément les mêmes que dans* (A), *on pourra, par l'élimination de l'un d'eux, entre ces équations, obtenir, sous sept formes différentes, une relation entre ces coefficients seulement.* »

Si je ne me trompe, ces cinq lignes constituent le programme d'un Mémoire de pure analyse, qui serait fort intéressant; nous engageons M. Souillart à entreprendre ce travail : il est très-capable de le mener à bien.

Pour abréger, nous passons sous silence d'autres relations (C), (D), (E),... analogues à (A) et (B). Nous omettons, également, toute la fin du paragraphe IV, relative aux développements des diverses fonctions perturbatrices.

IV.

Le dernier paraphe (*) a pour objet la formation, au moyen de la *variation des constantes*, des équations relatives : 1° *à l'orbite d'une planète* M; 2° *à l'orbite d'un satellite* m; 3° *aux équateurs*. Bien entendu, ces équations, numérotées I, II, III,... XL, ne sont qu'approchées. De même que dans toute question de Mécanique céleste, le problème principal consistait à déterminer *quels sont les*

(*) Il contient quarante-trois pages.

termes à conserver, eu égard au degré d'approximation que l'on veut obtenir? M. Souillart me paraît l'avoir heureusement résolu. Pour chaque équation, pour chaque coefficient, il se livre à une discussion exigeant autant de sagacité que de savoir.

Avant de terminer, je crois devoir reproduire un dernier passage du Mémoire (p. 106) :

« En résumé, les valeurs de $\frac{dP}{dt}$, $\frac{dQ}{dt}$ peuvent se réduire » aux termes de l'espèce (I); et comme il en est de même » pour chaque planète, on voit que l'on peut détacher, du » système (41), les équations relatives aux orbites des » diverses planètes, pour en former un premier système » partiel, indépendant du reste, où le nombre d'équations » est égal au nombre des inconnues. C'est à peu près le » système que l'on a l'habitude de considérer, en Méca- » nique céleste: toute la différence est qu'ici chaque planète » est prise seule, tandis qu'on la remplace, en Mécanique » céleste, par l'ensemble de la planète et de ses satel- » lites. »

V.

Contrairement à bon nombre de Géomètres contemporains, M. Souillart écrit bien, au propre et au figuré; ses calculs sont clairs, bien disposés, faciles à suivre. Aussi ai-je lu avec plaisir son beau Mémoire, quoique le sujet traité sorte, complètement, de mes études habituelles. Je pense qu'il sera lu aussi, non-seulement avec plaisir, mais avec profit, par tous les Géomètres-Astronomes. En conséquence, j'ai l'honneur de proposer à la Classe :

1° Qu'elle fasse imprimer, dans le Recueil des savants étrangers, le Mémoire de M. Souillart;

2° Que des remercîments soient adressés à l'auteur.

MM. De Tilly et Van der Mensbrugghe se rallient à ces conclusions, qui sont également adoptées par la Classe. M. Van der Mensbrugghe ajoute : « Si le temps me l'avait » permis, j'aurais tâché de comparer la méthode de » M. Souillart à celle qu'on emploie ordinairement en » Mécanique céleste, et de trouver ainsi des rapproche- » ments curieux; mais je n'ai pas voulu retarder davan- » tage l'impression de son beau Mémoire. »

—

— Sur l'avis de M. Melsens, la Classe ordonne le dépôt aux archives d'une Note de M. Brachet, intitulée : *Sur un appareil dioptrique amplificateur du gaz.*

— MM. P.-J. Van Beneden et Éd. Morren donnent lecture de leur rapport au sujet d'un travail de M. Mailly : *Sur le dessein qu'on avait formé en 1760 de faire l'acquisition du naturaliste Michel Adanson et de son cabinet pour l'Université de Louvain.*

Les commissaires concluent à l'impression dans les Mémoires in-8°. — Adopté.

— Sur un rapport verbal de MM. Melsens et Morren, la Classe vote l'impression au *Bulletin* d'une Note de M. Petermann, avec planche explicative : *Sur la présence des graines de* LYCHNIS GITHAGO (*nielle*) *dans les farines alimentaires.*

—