This page intentionally left blank.

RAPPORTS.

Sur l'élimination (3e et 4e Notes); et *Théorie* a posteriori *de l'élimination entre deux équations algébriques* (5e Note); par M. Paul Mansion, professeur à l'Université de Gand.

Rapport de M. Catalan (3e et 4e Notes).

« Dans ces deux nouvelles Notes, le jeune Lauréat de l'Académie complète les théories qu'il avait exposées antérieurement, de manière à préciser davantage les théorèmes ou les démonstrations. Par exemple, au lieu de prouver seulement, comme dans la première Note, la proposition suivante :

« *Si les équations* $A = 0$, $B = 0$, *ont une racine com-*
» *mune,* $R = 0$; *s'il y a deux racines communes, tous les*
» *mineurs de* R *sont nuls, ...* » M. Mansion démontre celle-ci :

« 1° *Pour que* $A = 0$, $B = 0$ *aient une* SEULE *racine*
» *commune, il faut et il suffit que* $R = 0$, $R' \gtrless 0$;

» 2° *Pour que* $A = 0$, $B = 0$ *aient deux racines com-*
» *munes* SEULEMENT, *il faut et il suffit que* $R = 0$, $R' = 0$,
» $R'' \gtrless 0$. »

. . . .

« *Chemin faisant* (*), » l'honorable auteur « *rencontre*
» *quelques théorèmes remarquables* », relatifs à certains

(*) Note 4, page 1re.

déterminants fonctionnels. A cause des abréviations successives, des notations et des formules compliquées, dont la lecture est pénible (l'audition le serait bien plus), il m'est presque impossible d'entrer dans de longs détails touchant les deux Notes présentées à l'Académie. Ce que je puis dire, c'est que M. Mansion est plein de son sujet, et que la théorie des déterminants semble n'avoir pas de mystères pour lui. Néanmoins, avant de *poser mes conclusions*, je demande à présenter deux simples remarques, suggérées par la lecture du travail dont j'ai à rendre compte.

I.

Les quatre Notes ont pour titre : *Sur l'élimination*, quoi qu'elles roulent, uniquement, sur la question des *racines communes à deux équations* $f(x) = 0$, $F(x) = 0$; c'est-à-dire sur la *théorie du plus grand commun diviseur entre deux polynômes, fonctions d'une seule lettre* x.

Il est bien vrai que *si deux équations à deux inconnues :*

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \Phi(x, y) = 0,$$

sont *vérifiées par* $x = \alpha$, $y = \beta$, *la substitution de* β, *à la place de* y, *dans les deux derniers polynômes, leur fait acquérir un plus grand commun diviseur, fonction de* x. M. Mansion faisait allusion à ce lemme préliminaire lorsqu'il écrivait, au commencement de sa première Note :

« Il existe un grand nombre de méthodes pour trouver
» la condition... pour que deux équations... aient une ou
» plusieurs racines communes; *ce qui est l'objet propre de*
» *la théorie de l'élimination.* »

D'après ce que nous venons de rappeler, la première théorie est un acheminement vers la seconde, dont elle est, pour ainsi dire, un auxiliaire; mais les deux sont distinctes; et je ne vois pas, très-clairement, comment les théorèmes de M. Mansion lui feraient découvrir les solutions de deux équations prises au hasard ; par exemple :

$$x^4 + 2yx^3 + y^2 + 2)x^2 + x^4 - y + 3 = 0. \quad . \quad . \quad (1)$$

$$2x^4 + (y + 2)x^3 + y^3x + y^4 - 2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Les théorèmes dont il s'agit lui permettraient-ils même de reconnaître, au moyen d'un calcul facile, si ces équations ont ou n'ont pas de solution commune? Je l'ignore. Quoi qu'il en soit, le long travail auquel mon jeune Collègue de Gand s'est livré appelle un complément, relatif à l'*élimination proprement dite*.

II

« *On ne doit abuser de rien, même des meilleures* » *choses.* » Cet adage est applicable, me semble-t-il, aux *déterminants*. Nul plus que moi n'admire cette belle théorie, à laquelle j'ai dû mes premiers succès académiques (*); mais, depuis quelques années, on en fait abus : tous les jeunes Géomètres sont enchantés, du moment qu'ils ont pu remplacer, par un déterminant, une expression quelconque. Ils ne songent donc pas qu'il ne sert à rien d'avoir trouvé $x = \Delta$, si le calcul de Δ est impraticable (**)? Dans

---

(*) *Sur la transformation des variables, dans les intégrales multiples.* (Académie de Bruxelles, 1840.)

(**) Ceci me rappelle une anecdote assez piquante. Un illustre Géomètre, voulant un jour caractériser la *manière* d'un homme qui a laissé une triste célébrité, me dit : « *Quand il veut sommer* X, *il écrit* $A = \sum X$; *et il s'imagine avoir résolu le problème !* »

sa troisième Note, M. Mansion considère les polynômes

$$\varphi(x) = e_0 + \cdots + e_5 x^5,$$
$$\psi(x) = f_0 + \cdots + f_5 x^5,$$
$$\chi(x) = g_0 + \cdots + g_5 x^5;$$

et, α, β, γ étant les racines d'une équation du troisième degré, il se propose d'évaluer le déterminant Δ des quantités

$$\begin{array}{lll} \varphi(\alpha), & \psi(\alpha), & \chi(\alpha), \\ \varphi(\beta), & \psi(\beta), & \chi(\beta), \\ \varphi(\gamma), & \psi(\gamma), & \chi(\gamma). \end{array}$$

Ce déterminant, dit-il, est égal à une somme de *deux cent seize* déterminants, de la forme

$$\begin{vmatrix} e_m\alpha^m, & f_n\alpha^n, & g_p\alpha^p, \\ e_m\beta^m, & f_n\beta^n, & g_p\beta^p, \\ e_m\gamma^m, & f_n\gamma^n, & g_p\gamma^p, \end{vmatrix}$$

Se figure-t-on un pareil calcul? Il est vrai que, dans cet exemple, il s'agit d'une transformation théorique, et non d'une véritable application. Pour rester dans le domaine de la pratique, supposons qu'il s'agisse de *résoudre* les équations (1), (2). La méthode *qui semble devoir résulter* des théorèmes de M. Mansion sera-t-elle plus simple, plus efficace que le procédé, classique, du plus grand commun diviseur, perfectionné par Labatie et Sarrus? J'appelle, sur ce point, les méditations de mon jeune et savant Collègue.

Ces réserves faites, j'ai l'honneur de proposer, à la Classe, l'insertion des Notes de M. Mansion, au *Bulletin* de la séance, ainsi que des remercîments à l'honorable auteur. »

Rapport de M. Catalan (5e Note).

« En commençant, l'honorable auteur s'énonce ainsi :

« Dans les diverses Notes que nous avons présentées... » nous avons fait connaître les principes d'une théorie, *a* » *priori*, de l'élimination....

» Il existe un autre mode d'exposition de la théorie de » l'élimination, que l'on peut appeler *a posteriori*, en com- » paraison du précédent.....

» Le lecteur qui voudra bien lire le présent travail, la plume » à la main, sera sans doute frappé de la complication des » calculs auxquels conduit la théorie, *a priori*, de l'élimi- » nation. Cette complication, probablement inévitable, nous » semble très-propre à faire ressortir la supériorité de notre » théorie *a priori*, qui conduit directement, par des cal- » culs assez simples, à tous les résultats importants, don- » nées par les autres méthodes, et en fournit quelques-uns » absolument nouveaux... »

Ces paroles, rapprochées des remarques contenues dans un précédent Rapport, facilitent singulièrement la tâche du premier Commissaire : après avoir lu le nouveau Mémoire de M. Mansion (sans en vérifier les calculs), il peut se borner à déclarer que ce travail est digne des précédents, qu'il en est le complément nécessaire, et que l'Académie peut aussi, sans aucune crainte, lui donner l'hospitalité dans les *Bulletins* ou dans les *Mémoires* in-octavo, après avoir accordé, au savant Professeur de Gand, des remercîments mérités. »