This page intentionally left blank.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Sur les hexagones de Pascal et de Brianchon; par M. E. Catalan, Associé de l'Académie.

I.

Le *Bulletin* de la séance d'octobre contient (p. 379) une Note intitulée : *Restitution de priorité, en faveur de M. Catalan, par F. Folie.* Cette Note, toute spontanée, fait d'autant plus d'honneur à notre savant confrère, qu'il regarde, comme très-importants, les deux théorèmes dont il s'agit (*) ; savoir :

THÉORÈME I. — *Les intersections successives des côtés alternants, d'un hexagone de Pascal, sont les sommets successifs d'un hexagone de Brianchon;*

THÉORÈME II. — *Les jonctions successives des sommets alternants, d'un hexagone de Brianchon, sont les côtés successifs d'un hexagone de Pascal* (**).

II.

Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1852), et, antérieurement, dans un cours lithographié (***), les

---

(*) *Bulletins*, t. XLIV, pp. 182 et suiv.; t. XLVI, pp. 379 et 380.

(**) J'adopte, presque textuellement, les énoncés de M. Folie, qui ont le double avantage d'être concis et clairs.

(***) *Lycée Charlemagne. — Application de l'Algèbre à la Géométrie* (1848). Cet ouvrage a été déposé sur le bureau de l'Académie.

deux propositions précédentes étaient suivies de celle-ci, qui les complète :

Théorème III. — *Lorsque deux hexagones* H, H′ *sont, l'un inscrit, l'autre circonscrit à une même conique* C, *de manière que les sommets du premier soient les points de contact des côtés du second, l'hexagone de Brianchon, déduit de* H (Th. I), *et l'hexagone de Pascal, déduit de* H′ (Th. II), *sont polaires réciproques, relativement à la conique* C (*).

III.

Voici, je pense, la manière la plus simple de formuler les relations entre les théorèmes de Pascal, de Desargues et de Brianchon :

Dans deux triangles homologiques : 1° *les côtés sont ceux d'un hexagone de Pascal;* 2° *les sommets sont ceux d'un hexagone de Brianchon* (**).

IV.

Problème. — *Sur les côtés* a, b, c *d'un triangle* ABC, *on prend*

$$BL = \alpha,\ BL' = \alpha',\ CM = \beta,\ CM' = \beta',\ AN = \gamma,\ AN' = \gamma',$$

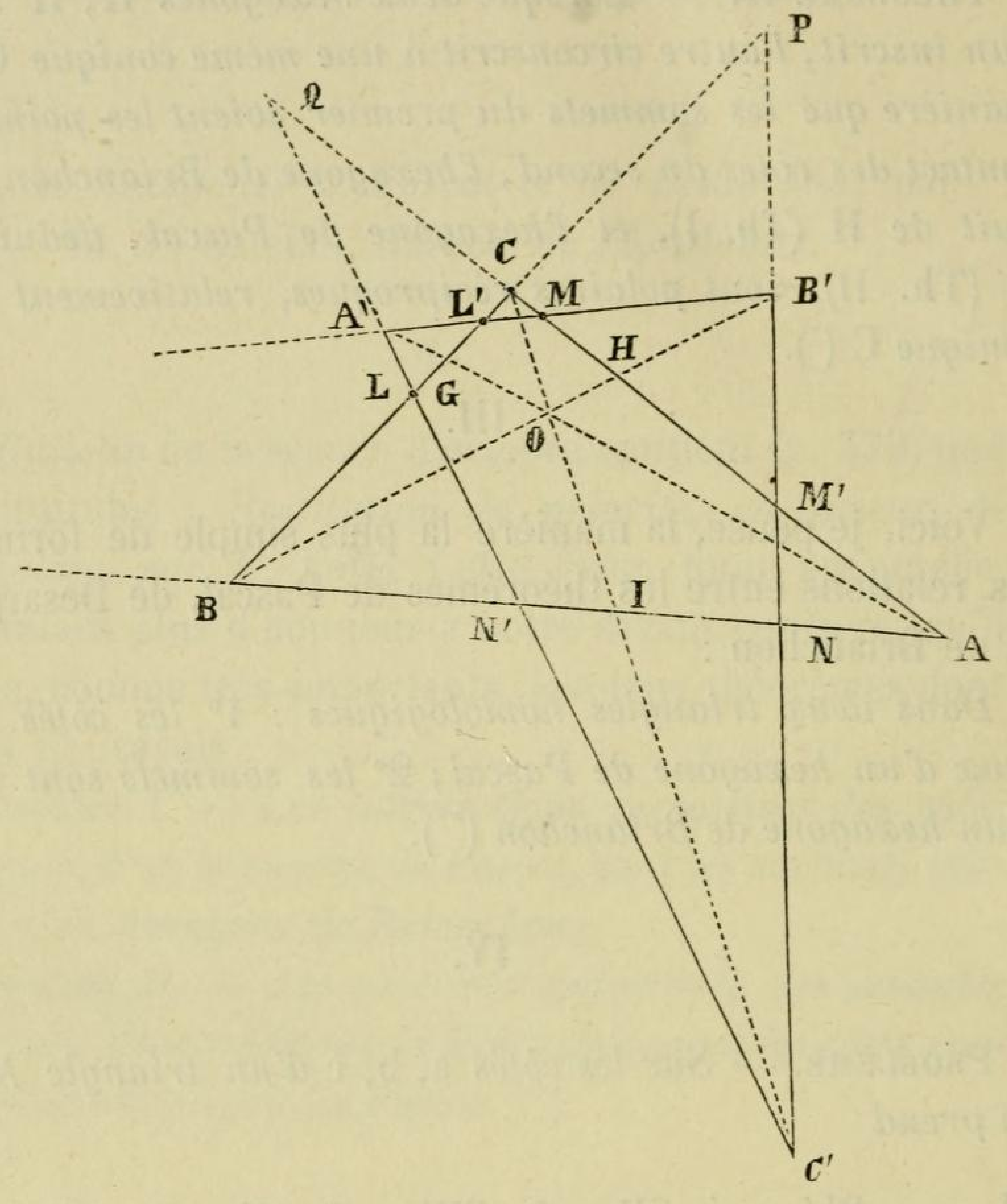
de manière que

$$\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma' = (a - \alpha)(a - \alpha')\ (b - \beta)\ (b - \beta')\ (c - \gamma)\ (b - \gamma')$$

(*) Sans rien changer au sens de l'énoncé primitif, j'en abrége le texte. (Voir l'avant-dernière note.)

(**) Voir la Note de M. Folie (*Bulletins*, t. XLIV, p. 186). On suppose, bien entendu, que les *côtés sont indéfiniment prolongés.*

l'hexagone LL'MM'NN' *est inscrit à une conique* (*).



On construit le triangle A'B'C', *homologique de* ABC. *Déterminer, en fonction des données, le centre* O *d'homologie et l'axe* PQR *d'homologie.*

La seconde partie est fort simple. En effet, comme il est

(*) Théorème de Carnot.

facile de le voir à l'inspection de la figure :

$$\frac{AR}{BR} = \frac{AM.CL'}{CM.BL'} = \frac{(b-\beta)(a-\alpha')}{\beta\alpha'},$$

$$\frac{BP}{CP} = \frac{BN.AM'}{AN.CM'} = \frac{(c-\gamma)(b-\beta')}{\gamma\beta'},$$

$$\frac{CQ}{AQ} = \frac{CL.BN'}{BL.AN'} = \frac{(a-\alpha)(c-\gamma')}{\alpha\gamma'}.$$

La première partie du problème, sur laquelle j'espère revenir, présente plus de difficultés. En attendant une solution satisfaisante, j'indique celle-ci :

1° G, H, I étant les intersections des droites AA', BB', CC' avec BC, CA, AB :

$$\frac{BG}{CG} = \frac{(c-\gamma)(b-\beta')}{\beta\gamma'}\,\frac{\beta\alpha'\gamma' + (b-\beta)(a-\alpha')(c-\gamma')}{\gamma\alpha'\beta' + (c-\gamma)(a-\alpha')(b-\beta')},$$

$$\frac{CH}{AH} = \frac{(a-\alpha)(c-\gamma')}{\gamma\alpha'}\,\frac{\gamma\alpha'\beta' + (c-\gamma)(a-\beta')(b-\alpha')}{\alpha\beta'\gamma' + (a-\alpha)(b-\beta')(c-\gamma')},$$

$$\frac{AI}{BI} = \frac{(b-\beta)(a-\alpha')}{\alpha\beta'}\,\frac{\alpha\beta'\gamma' + (a-\alpha)(b-\gamma')(c-\beta')}{\beta\gamma'\alpha' + (b-\beta)(c-\gamma')(a-\alpha')},$$

2° Les segments BG, CG, CH, ... étant connus, on peut *évaluer* les distances AO, BO, CO.

MM. Houzeau, Crépin et P.-J. Van Beneden donnent lecture des pièces qu'ils se proposent de lire en séance publique.