This page intentionally left blank.

ou tard d'erreur. Il n'y a pour moi qu'un moyen d'échapper à ce péril : c'est d'épuiser patiemment l'étude des faits avant de généraliser et de former des associations sous l'influence d'idées théoriques.

J. DECAISNE.

En réponse à la sixième question :

On demande l'étude du cycle d'évolution d'un groupe de la classe des algues.

Commissaires : MM. Morren, Crépin et Gilkinet.

RAPPORTS.

Note sur une équation de Jacobi; par M. Mansion.

Rapport de M. Catalan.

I.

Tous les Géomètres connaissent l'équation

$$(Ax + By + C)(xdy - ydx) - (A'x + B'y + C')\,dy \\ + (A''x + B''y + C'')\,dx = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

traitée par Jacobi, dans le tome XXIV du *Journal de Crelle.* L'illustre auteur forme l'intégrale générale de la proposée, au moyen des racines de l'équation *caractéristique*

$$\begin{vmatrix} A'-s, & A'', & A, \\ B', & B''-s, & B, \\ C', & C'', & C-s, \end{vmatrix} = 0, \quad . \quad . \quad (2)\ (*)$$

(*) Cette équation est celle que l'on rencontre dans la discussion des surfaces du second degré, et dans d'autres questions.

ces racines étant supposées *inégales*. MM. Moigno et Serret, qui ont reproduit la méthode imaginée par Jacobi, n'examinent guère, plus que lui, les cas où l'équation (2) aurait des racines égales. En outre, comme Jacobi lui-même, ils admettent qu'un certain déterminant R est différent de zéro (*). Dans le Mémoire présenté à la Classe, M. Mansion a simplifié le procédé de Jacobi, et il discute, avec sagacité, les cas d'exception laissés de côté par le Géomètre allemand.

II.

Ce qui frappe tout d'abord, dans l'équation (1), c'est le *défaut de symétrie : a priori*, on ne comprend pas comment l'illustre auteur a pu y être conduit, ni comment il a trouvé les transformations, très-peu naturelles, qui lui ont permis d'en former l'intégrale (**).

Quant au premier point, M. Mansion a été heureusement inspiré: il introduit, dans le calcul, outre les variables x, y, une variable *fictive* z, égale à 1; ce qui lui permet d'écrire ainsi l'équation proposée :

$$(Ax + By + Cz)(xdy - ydx) + (A'x + B'y + C'z)(ydz - zdy) + (A''x + B''y + C''z)(zdx - zdx) = 0; \quad (3) \ (***)$$

puis, suivant à peu près la marche indiquée par Jacobi,

(*) Écrivant ce Rapport à Paris, je suis obligé de m'en rapporter aux indications et aux affirmations de l'auteur du Mémoire.

(**) Encore une fois, n'ayant pas sous les yeux le Mémoire de Jacobi, je n'écris ceci que sous toutes réserves.

(***) L'honorable auteur emploie d'autres notations; mais, pour plus de clarté, nous continuons à nous servir des précédentes.

il retrouve (*), au moyen de la théorie des déterminants, l'intégrale connue :

$$+ (S_2 - S_3)\,\mathrm{l}u_1 + (S_3 - S_1)\,\mathrm{l}u_2 + (S_1 - S_2)\,\mathrm{l}u_3 = const\,; \quad (4)$$

dans laquelle S_1, S_2, S_3 sont les racines de l'équation (2), supposées *inégales*.

III.

Les équations entre x, y, z et u_1, u_2, u_3, sont :

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = u_1,\ \alpha_2 x + \beta_2 y\, \gamma_2 z = u_2,$$
$$\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = u_3; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

α_1, β_1,... étant des quantités qui dépendent des données du problème. Ces équations deviendraient incompatibles ou indéterminées si

$$R = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3; \end{vmatrix}$$

était nul.

M. Mansion prouve que R *est différent de zéro, si les racines* S_1, S_2, S_3, *sont inégales*. La démonstration employée par le jeune professeur me paraît exacte; mais, outre l'inconvénient de la longueur, elle a celui d'être peu naturelle; en effet, elle consiste en une *réduction à l'absurde* (**).

(*) Dans l'*historique* du problème, M. Mansion dit, expressément : « Notre premier numéro est donc une reproduction du travail de Jacobi, sous une forme plus élégante. »

(**) Encore un mot sur ce sujet.

Pour le succès de son analyse, M. Mansion multiplie, par R, les deux membres de l'équation (3). Évidemment, cette transformation ne conduirait à rien, si R était nul. C'est donc *a priori*, et non *a posteriori*, semble-t-il, que l'auteur devrait démontrer la proposition dont il s'agit.

IV.

Après ces généralités, M. Mansion examine les cas où l'équation (2) aurait une racine double ou une racine triple. Comme M. Serret (*), procédant d'abord par *induction*, il conclut, de la formule générale (4), les formes particulières de l'intégrale; mais, de plus, il vérifie que ces intégrales satisfont à la proposée; ce qu'aucun Géomètre n'avait fait. M. Mansion a donc complété, utilement, le travail de Jacobi.

Le Mémoire est terminé par des généralisations, toutes naturelles, de l'équation (1).

V.

Aussitôt après avoir reçu le Mémoire, je me suis rappelé une intéressante communication *sur l'équation de Jacobi*, présentée au Congrès de Clermont-Ferrand, par M. Allégret. Sur ma demande, le savant Professeur m'a transmis une note inédite et manuscrite, dont voici l'analyse (**).

Soient les équations, simultanées et homogènes :

$$\frac{du}{A'u + B'v + C'w} = \frac{du}{A''u + B''v + C''w} = \frac{du}{Au + Bv + Cw} \cdot \quad (6)$$

Si l'on pose

$$u = wx, \quad v = wy,$$

(*) « M. Serret s'occupe superficiellement des cas où l'équation en S » n'a pas trois racines inégales, cas dont Jacobi n'a pas parlé. » (Note de l'auteur.)

(**) J'ai introduit, dans l'ingénieuse méthode imaginée par M. Allégret quelques simplifications de détail.

on en conclut, à cause de

$$du - wdx = xdw, \quad dv - wdy = ydw:$$

$$\frac{dx}{(A'x + B'y + C') - (Ax + By + C)x} = \frac{dy}{(A''x + B''y + C'') - (Ax + By + C)y},$$

équation qui est précisément celle de Jacobi (*). Ainsi, grâce à l'heureuse idée de M. Allégret, toute la question se réduit à l'intégration des équations (6). Ce problème auxiliaire peut, on le sait, être résolu de diverses manières; par exemple, au moyen de la méthode que j'ai donnée dans les *Bulletins de l'Académie* et dans les *Annali di Matematica*. Du reste, dans sa Note manuscrite, le Professeur de Clermont-Ferrand s'énonce ainsi : « Cette nou-
» velle méthode d'intégration *dispense*, on le voit, *de*
» *toute discussion relative au cas des racines égales.....*
» Quelle que soit la forme des équations (6), tout est ra-
» mené à un procédé connu, sur lequel il n'y a pas lieu
» de revenir (**). »

(*) On peut se demander si ce n'est pas ainsi que cette équation a été rencontrée par l'illustre Géomètre.

(**) Voici un exemple très-simple, qui nous paraît probant. Il serait facile d'en former d'autres. Dans l'équation de Jacobi, supposons

$$A = A' = A'' = B = B = B' = B'' = 1.$$

L'équation en s devient

$$(1-s)\left[(1-s)^2 - 1\right] + 2\left[1 - (1-s)\right] = 0,$$

ou

$$s^3 - 3s^2 = 0:$$

elle a deux racines nulles. En même temps, les équations (6) se ré-

Ainsi que je l'ai dit à la Classe, il y a quelque temps, cette méthode, si simple et si élégante, rend, sinon inutile, au moins surabondant, le travail de M. Mansion. Naturellement, notre jeune et savant Collègue de Gand ne partage pas cette opinion; et, comme il en avait le droit, il a répondu, à mes observations, par une courte Note intitulée : *Défense de mon petit Mémoire sur l'équation de Jacobi*, Note que je dépose sur le bureau.

VI.

CONCLUSIONS.

Le Mémoire de M. Mansion me semble un peu long, un peu compliqué, surtout si on le compare à la Note présentée, par M. Allégret, au Congrès de Clermont-Ferrand. Néanmoins, comme ce travail est exact, qu'il complète celui de Jacobi, et que d'ailleurs il est l'œuvre d'un jeune Géomètre très-honorablement connu, j'ai l'honneur d'en proposer l'insertion au *Bulletin*.

---

duisent à

$$du = dv = dw,$$

dont les intégrales sont

$$u = w + g, \quad v = w + h.$$

Il résulte, de celles-ci,

$$y - 1 = k(x - 1),$$

k étant la constante arbitraire.