Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.
Bruxelles.
http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550

ser.2:t.43 (1877): http://www.biodiversitylibrary.org/item/28501

Article/Chapter Title: Rapport sur la théorie des fractions continues périodiques par M. Le Paige
Author(s): Eugène Catalan
Page(s): Page 325, Page 326, Page 327, Page 328, Page 329

This page intentionally left blank.

2° *Sur le classement stratigraphique des Phoques fossiles recueillis dans les terrains d'Anvers;* par M. Michel Mourlon. — Commissaires : MM. P.-J. Van Beneden et Dupont;

3° *Quelques remarques à propos de l'hiver de 1876-1877. Périodicité des hivers doux et des étés chauds;* par M. A. Lancaster, météorologiste-inspecteur à l'Observatoire royal de Bruxelles. — Commissaires : MM. Quetelet, Houzeau et Montigny;

4° *Marées extraordinaires de janvier 1877;* par M. F. Van Rysselberghe, météorologiste à l'Observatoire royal de Bruxelles. — Commissaires : MM. Mailly, Liagre et Houzeau;

5° *Un dernier mot en réponse à M. Flammarion;* par M. F. Terby, docteur en sciences, à Louvain. — Commissaires : MM. Houzeau, Liagre et Mailly;

6° *De l'influence de la forme des corps sur leur attraction. Mouvements astronomiques;* par M. C. Lagrange, ancien élève de l'École militaire. — Commissaires : MM. Folie, Catalan et De Tilly.

RAPPORTS.

Remarques sur la théorie des fractions continues périodiques; par M. C. Le Paige.

Rapport de M. Catalan.

« M. Le Paige, déjà connu par d'intéressants travaux, s'est proposé de résoudre les questions suivantes : « *Quels sont les cas dans lesquels la somme, le produit,... de deux* *fractions continues périodiques, est une fraction continue périodique?* »

I.

Considérant d'abord la somme de deux fractions périodiques, l'auteur se donne les équations *génératrices* :

$$x^2 - p_1 x + q_1 = 0, \quad y^2 - p_2 y + q_2 = 0, \quad . \quad . \quad (1)$$

et il forme l'équation

$$u^4 - P_1 u^3 + P_2 u^2 - P_3 u + P_4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

dont les racines sont

$$x_1 + y_1, \quad x_1 + y_2, \quad x_2 + y_1, \quad x_2 + y_2.$$

Ayant observé que les coefficients P_1, P_2, P_3 satisfont à la condition

$$\varphi_1 = P_1^3 - 4P_1P_2 + 8P_3 = 0,$$

mon jeune collègue déduit, de cette remarque, les propositions suivantes :

1° Si, dans l'équation (2), on remplace u par $z + \frac{P_1}{4}$, la transformée est

$$z^4 - Bz^2 + A = 0;$$

2° Les valeurs de z seront réductibles en fractions continues périodiques, si la fonction

$$\varphi_2 = 3P_1^4 - 16P_1^2P_2 + 16P_1P_3 + 16P_2^2 - 64P_4 = k^2.$$

Arrivé à ce point, l'auteur fait usage de théorèmes dus à MM. Hermite et Salmon : ces théorèmes lui permettent d'exprimer φ_1, φ_2 par des fonctions symétriques, et lui donnent, en outre, ce résultat :

$$\varphi_2 = 16(p_1^2 - 4q_1)(p_2^2 - 4q_2).$$

En conséquence : *Si deux fractions continues périodiques ont pour somme une fraction continue périodique, le produit des discriminants des équations génératrices est un carré.*

Presque toujours, un théorème simple peut être prouvé simplement. C'est ce qui a lieu dans le cas actuel (*). M. Le Paige aurait donc pu abréger cette partie de son Mémoire. Mais comme, dans la longue démonstration que nous venons d'analyser, il a fait preuve de savoir et de sagacité, nous croyons pouvoir l'engager à essayer la résolution de cette seconde question, complément de la première :

(*) 1° Pour fixer les idées, considérons le cas de

$$x = \sqrt{2}, \quad y = \sqrt{3}.$$

La somme $s = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ n'est pas racine d'une équation du second degré, à coefficients rationnels. Donc *quand les valeurs de deux fractions continues périodiques ne sont pas réductibles à*

$$x = a + b\sqrt{c}, \quad y = a' + b'\sqrt{c},$$

la somme s de ces fractions ne saurait être périodique.

2° Soit

$$s = (a + a') + (b + b')\sqrt{c}.$$

Cette quantité est racine de l'équation du second degré, *à coefficients rationnels,*

$$u^2 - 2(a + a')u + (a + a')^2 - (b + b')^2 c = 0.$$

Ainsi, *quand les fractions x, y ont la forme indiquée, leur somme* s *est périodique;* etc.

« *Connaissant deux fractions continues périodiques,* ÉCRIRE *la fraction-somme, dans le cas où elle est périodique.* »

II.

Les considérations précédentes s'appliquent, évidemment, au produit de deux fractions périodiques : *ce produit est périodique si* $(p_1^2 - 4q_1)(p_2^2 - 4q_2)$ *est un carré.*

III.

Dans un troisième paragraphe, M. Le Paige démontre que l'équation est réductible au second degré : 1° quand $\varphi_1 = 0$; 2° quand les coefficients P_1, P_3, P_4 satisfont à la relation

$$P_1^2 P_4 - P_3^2 = 0.$$

Cette démonstration, basée sur une méthode due à Lagrange, est, par ce qui précède, inutile dans le premier cas. Dans le second, l'équation (2) devient, en vertu de l'hypothèse précédente,

$$P_1^2 u^4 - P_1^3 u^3 + P_1^2 P_2 u^2 - P_1^2 P_3 u + P_3^2 = 0;$$

et celle-ci, devenant réciproque si l'on fait $u = y\sqrt{\frac{P_3}{P_1}}$, est réductible au second degré.

IV.

Le Mémoire est terminé par l'indication d'une méthode qui permet d'appliquer les fractions continues périodiques à l'intégration des équations aux différences (*). L'auteur

(*) A ce propos, nous croyons devoir faire observer que le développement de tg x, en fraction continue, est dû à Lambert et non à Legendre.

prend, comme exemple, une équation dans laquelle les coefficients sont les fonctions Θ et H. Ce dernier paragraphe est fort peu développé; mais, probablement, M. Le Paige se propose de revenir sur cette question, intéressante et difficile.

V.

En résumé, et malgré les quelques critiques contenues dans le présent Rapport, nous pensons que le nouveau travail de M. Le Paige est très-digne d'être approuvé par la Classe, et inséré au *Bulletin* de la séance. »

Rapport de M. De Tilly.

« Je ne veux pas m'opposer à l'insertion au *Bulletin;* mais ne conviendrait-il pas d'appeler d'abord l'attention de l'auteur sur les observations de M. Catalan? Par suite de ces observations, qui sont fort justes, il me semble que le travail pourrait être considérablement simplifié, au moins dans sa première partie, et qu'il gagnerait à être remanié dans son ensemble. »

Rapport de M. Folie.

« Je me rallie entièrement aux conclusions de notre savant confrère M. Catalan, et j'approuve les simplifications ingénieuses qu'il indique dans les démonstrations des théorèmes énoncés par M. Le Paige.

Mais je ne crois pas devoir suivre M. De Tilly dans la proposition qu'il fait d'engager l'auteur à refondre son travail dans le sens des observations de M. Catalan.

M. Le Paige s'est proposé, en effet, tout d'abord, de rechercher la somme et le produit de deux fractions conti-