This page intentionally left blank.

4° *Documents sur la théorie des deux caractéristiques de M. Chasles;* par M. L. Saltel, professeur au lycée de La Rochelle. — Commissaires : MM. Folie, De Tilly et Liagre;

5° *Sur la fonction* $P_1^{(n)}$ *de Lamé;* par M. Escary, professeur au lycée de Châteauroux. — Commissaires : MM. Folie, De Tilly et Catalan;

6° *Théorèmes relatifs aux foyers des coniques;* par M. Boset, professeur à l'Athénée royal de Namur. — Commissaires : MM. Folie, Catalan et De Tilly.

ÉLECTIONS.

D'après l'article 39 du règlement général, la classe procède à l'élection de son délégué auprès de la Commission administrative pour l'année 1877-1878. M. Stas, trésorier de l'Académie, membre sortant, est réélu.

RAPPORTS.

Sur les sous-normales polaires, et les rayons de courbure des lignes planes; par M. Émile Ghysens.

Rapport de M. Catalan.

« Dans le petit Mémoire soumis à l'examen des Commissaires, M. Ghysens, jeune Docteur en Mathématiques, déjà connu de l'Académie, a résolu divers problèmes, très-intéressants, que nous allons indiquer en peu de mots.

I.

Problème I. *Soient* n + 1 *courbes quelconques,* C, C_1,... C_n, *situées dans un même plan; soient* r, r_1,... r_n *les rayons vecteurs correspondants,* OM, OM_1..., OM_n, *comptés sur une même direction, à partir du même pôle* O; *soient enfin* α, α_1,... α_n *les angles formés par* OM,... M_n, *avec les normales* MN, M_1N_1, ... M_nN_n *aux courbes données. En supposant que les distances* r, r_1,... r_n *satisfassent à une équation*

$$\varphi(r, r_1, \ldots r_n) = 0, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

trouver la relation entre α, α_1, α_n.

Cette relation est

$$\sum r \frac{d\varphi}{dr} \operatorname{tg} \alpha = 0; \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

ou, plus simplement,

$$\sum \lambda \frac{d\varphi}{dr} = 0; \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

λ désignant la *sous-normale polaire.*

II.

M. Ghysens applique les formules (4), (5) à divers exemples simples. Il retrouve, comme cas particulier, une construction donnée par M. Fouret.

III.

Problème II. A, A_1,... A_n *étant les points d'intersection des premières courbes avec une même droite* OA, *passant par le pôle; soient* C', C'_1,... C'_n *de nouvelles courbes,* *respectivement tangentes aux premières, en* A, $A_1, \ldots A_n$. *Quelle est la relation qui existe entre les courbures de toutes ces lignes?*

Un judicieux emploi des infiniment petits conduit l'auteur à cette formule remarquable :

$$\frac{r^2}{\cos^3 \alpha}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{r_p^2}{\cos^3 \alpha_p} \frac{dr}{dr_p}\left(\frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho'_p}\right), \quad . \quad (8)$$

au sujet de laquelle nous présenterons cependant deux objections :

1° *L'équation de condition* (1) contient, sous *forme symétrique,* les rayons vecteurs $r, r_1, \ldots r_n$: la même symétrie devrait, semble-t-il, exister dans la formule (8); ce qui n'est pas. Très-probablement, il n'y a là qu'une faute de signe.

2° M. Ghysens suppose, sans l'indiquer explicitement, que *chaque courbe est rencontrée en un seul point, par une droite issue du pôle.* Les lignes qu'il a considérées sont-elles donc *unicursales?*

IV.

Si les lignes $C', C'_1, \ldots C'_n$ sont les tangentes aux courbes $C, C_1, \ldots C_n$, la formule (8) devient (*)

$$\frac{r^2}{\cos^3 \alpha}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{r_p^2}{\cos^3 \alpha_p} \frac{dr}{dr_p} \frac{1}{\rho_p} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Celle-ci, comme le dit l'auteur, *fait connaître le rayon de courbure* ρ *de la résultante de* n *lignes, en fonction des rayons de courbure de ces lignes, de leurs rayons*

(*) Même remarque relativement au signe du premier membre.

vecteurs, des angles α, et du rayon de courbure ρ' de la résultante de n *droites.*

Ici, M. Ghysens répond, en partie, à l'une des questions ci-dessus. Supposant que r_1, r_3,... r_n *soient les rayons vecteurs correspondants d'une ligne du* n^e *degré,* il prend, au lieu de l'équation générale (1) :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n}.$$

Cette équation représente *la* (n — 1)^e *polaire d'une courbe d'ordre* n, *c'est-à-dire la droite polaire* (*). En conséquence, la formule (9) se réduit à l'équation suivante, que j'ai déjà signalée à la Classe :

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\rho_p \cos^3 \alpha_p} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

et sur laquelle je crois devoir faire quelques remarques.

1° La propriété exprimée par cette équation est très-curieuse, mais elle n'est pas nouvelle, comme je le pensais il y a un mois, et comme M. Ghysens le croyait encore

(*) Soit, pour fixer les idées, $n = 3$. L'équation de la courbe peut être mise sous la forme

$$u^3\varphi_3(\sin\omega, \cos\omega) + u^2\varphi_2(\sin\omega, \cos\omega) + u\varphi_1(\sin\omega, \cos\omega) + 1 = 0;$$

φ_3, φ_2, φ_1 désignant des fonctions homogènes : en particulier,

$$\varphi_1(\sin\omega, \cos\omega) = A\sin\omega + B\cos\omega.$$

Dans la tranformée en $\frac{1}{u}$, la somme des racines,

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3},$$

est

$$-(A\sin\omega + B\cos\omega) = \frac{1}{r}.$$

Ainsi, la *résultante* est la droite représentée par cette dernière formule.

il y a deux jours. En effet, dans le tome IX du *Journal de Mathématiques*, p. 350. M. Liouville rappelle ce théorème, démontré par lui (*), dans le tome VI, p. 411.

« *Deux courbes géométriques étant situées dans un même*
» *plan, représentons en général par* R, r *les rayons de*
» *courbure de ces courbes à un de leurs points d'intersec-*
» *tion, et par* Ω, ω *les angles que les tangentes menées en*
» *ces points aux deux courbes font avec un axe pris à*
» *volonté, on aura*

$$\sum\left(\frac{\cos\omega}{R}-\frac{\cos\Omega}{r}\right)\operatorname{coséc}^3(\Omega-\omega)=0,$$

» *le signe sommatoire s'étendant à tous les points d'inter-*
» *section, réels ou imaginaires, bien entendu.* »

Supposons, avec l'illustre Géomètre, que l'une des deux courbes se réduise à l'axe polaire; alors $\omega=0$, $\frac{1}{r}=0$: l'équation se réduit à

$$\sum\frac{1}{R}\operatorname{coséc}^3\Omega=0;$$

égalité qui ne diffère, de (A), que par la notation.

2° Si la courbe considérée est rapportée à des coordonnées rectangulaires;

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},\quad \cot\alpha=-y',\quad \cos\alpha=-\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}};$$

et l'équation (A) devient

$$\sum\frac{y''}{y'^3}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

(*) Ce premier énoncé est beaucoup moins explicite que le second.

On a donc ce curieux théorème d'Algèbre :

Soit $f(x, y) = 0$ *une équation algébrique ; soient* $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ *: la somme des fractions* $\frac{y''}{y'^3}$, *étendue à toutes les racines de l'équation* $f(x, o) = 0$, *est toujours nulle.*

En particulier, *la somme des fractions* $\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$, *étendue à toutes les racines de l'équation* $f(x) = 0$ (supposées inégales), *est nulle.*

V, VI.

Dans ces deux derniers paragraphes, M. Ghysens détermine, en particulier, le rayon de courbure de la résultante de n droites : il en conclut, par ce qui précède, le rayon de courbure de la résultante de n lignes quelconques. Les formules trouvées par le jeune Docteur m'ont paru exactes. On peut regretter qu'elles soient trop compliquées pour être aisément applicables ; mais ce défaut est, sans doute, inhérent à la difficulté du sujet.

En résumé, le nouveau travail de M. Ghysens me paraît très-digne d'être approuvé par la Classe. J'ai l'honneur d'en proposer l'insertion au *Bulletin.* »

M. De Tilly, deuxième Commissaire, déclare se rallier aux conclusions de son confrère M. Catalan.

Rapport de M. Folie.

« Je me rallie également aux conclusions de notre savant confrère ; et je puis ajouter que les observations qu'il a présentées sur la formule (8) de M. Ghysens m'ont paru parfaitement fondées. La faute de signe présumée par M. Catalan existe réellement ; en la faisant disparaître,