This page intentionally left blank.

soit indépendant, sans quoi elles disparaissent toutes. Et alors, comme $C''\theta$ doit être nul, il ne reste plus qu'à poser $C''=o$.

Il serait, je pense, de l'intérêt de l'auteur : 1° de partir du théorème de Cauchy comme connu; 2° de soumettre ses équations (4) à une discussion plus serrée.

A part ces deux points du reste, son travail, comme l'a dit M. De Tilly, est très-important et très-remarquable et je me rallie volontiers aux conclusions de nos honorables confrères. »

La classe adopte les conclusions des rapports qui précèdent.

Note sur l'équation de l'épicycloïde; par M. le capitaine d'artillerie belge Reinemund.

Rapport de M. E. Catalan.

« On sait que l'épicycloïde ordinaire est représentée par le système des formules :

$$x=(R+R')\cos\alpha-R'\cos\left(\frac{R}{R'}+1\right)\alpha, \quad . \quad . \quad (1)$$

$$y=(R+R')\sin\alpha-R'\sin\left(\frac{R}{R'}+1\right)\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Si l'on pouvait éliminer la variable auxiliaire α, on aurait l'*équation finale* ou *effective* de la courbe. Ce problème a été résolu dans quelques cas particuliers; mais il ne semble pas pouvoir l'être généralement, au moins d'une manière satisfaisante. En effet, une combinaison très-simple des équations (1), (2) conduit à

$$x^2+y^2=(R+R')^2+R'^2-2R'(R+R')\cos\frac{R}{R'}\alpha; \quad (3)$$

relation d'où l'on conclut, soit

$$x=(R+R')\cos\left[\frac{R'}{R}\operatorname{arc}\cos M\right]-R'\cos\left[\left(\frac{R}{R'}+1\right)\operatorname{arc}\cos M\right],\quad(4)$$

soit

$$y=(R+R')\sin\left[\frac{R'}{R}\operatorname{arc}\cos M\right]-R'\sin\left[\left(\frac{R}{R'}+1\right)\operatorname{arc}\cos M\right];\quad(5)$$

équations *finales*, dans lesquelles on a fait, pour abréger,

$$M=\frac{R^2+2RR'+2R'^2-x^2-y^2}{2R'(R+R')}\quad .\ .\ .\ .\quad(6)$$

Mais comment calculer les fonctions circulaires, directes ou inverses, qui entrent dans ces équations (4), (5)? On ne le voit pas.

Quoi qu'il en soit, M. le capitaine Reinemund s'est proposé de mettre, sous une forme algébrique, l'équation finale de l'épicycloïde. Au moyen des relations entre les fonctions circulaires directes et les exponentielles imaginaires, relations dues à Euler, il trouve, au lieu de l'équation (4), une équation que l'on peut écrire ainsi :

$$\left.\begin{aligned}x=&\frac{R+R'}{2}\left[M+\sqrt{M^2-1}\right]^{\frac{R'}{R}}\\&+\frac{R+R'}{2}\left[M-\sqrt{M^2-1}\right]^{\frac{R'}{R}}\\&-\frac{R}{2}\left[M+\sqrt{M^2-1}\right]^{\frac{R'}{R}+1}\\&-\frac{R'}{2}\left[M-\sqrt{M^2-1}\right]^{\frac{R'}{R}+1}\end{aligned}\right\}\ (7)\,(*)$$

(*) Si l'on met, en facteurs communs,

$$\left[M+\sqrt{M^2-1}\right]^{\frac{R'}{R}},\ \left[M-\sqrt{M^2-1}\right]^{\frac{R}{R'}},$$

on simplifie encore le second membre, mais sans grand avantage.

Malheureusement, cette forme *algébrique* est à peu près illusoire. En effet, à l'inspection d'une figure, on reconnaît que le binôme $M^2 - 1$ *est négatif;* donc le second membre est *compliqué d'imaginaires*, à peu près comme la *formule de Cardan*, appliquée au *cas irréductible.* Et si, pour faire disparaître ces imaginaires, on pose

$$M = \cos\theta = \cos\frac{R}{R'}\alpha,$$

on trouve, au lieu de l'équation (7) :

$$x = \frac{R + R'}{2}\left[e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}\right] - \frac{R'}{2}\left[e^{\left(\frac{R'}{R}+1\right)\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\left(\frac{R'}{R}+1\right)\alpha\sqrt{-1}}\right];$$

c'est-à-dire l'équation (1).

Je pense que cette analyse succincte fait suffisamment connaître le travail de M. Reinemund, et je propose à la Classe d'adresser des remercîments à l'auteur. »

La Classe adopte ces conclusions, auxquelles s'est rallié M. De Tilly, second Commissaire.

Recherches sur l'embryologie des poissons osseux; par M. Ch. Van Bambeke, correspondant de l'Académie.

Rapport de M. Édouard Van Beneden.

« Une nouvelle impulsion a été imprimée aux sciences morphologiques par les remarquables découvertes de Kowalewsky en ce qui concerne l'embryogénie d'un grand nombre de types inférieurs. Les recherches récentes sur