This page intentionally left blank.

d'ordonner l'impression du travail dans les *Bulletins* de nos séances et de voter des remercîments à l'auteur. »

La classe, après avoir entendu M. Melsens, second commissaire, adopte les conclusions du rapport précédent.

—

Démonstration de la propriété caractéristique des équations différentielles linéaires; par M. Paul Mansion.

Rapport de M. Catalan.

« Il y a cinq ans, M. Mansion a présenté à l'Académie une *Note sur la première méthode de Brisson.* Dans ce travail, le jeune géomètre de Gand prouve que l'équation

$$D^n y + A_1 D^{n-1} y + \cdots + A_n y = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

peut être mise sous la forme *symbolique*

$$(D - a_n)(D - a_{n-1}) \ldots (D - a_1) y = 0, \quad . \quad (2) \ (^*)$$

(*) Pour développer ce *produit symbolique*, on part de l'identité

$$(D - a_1) y = y' - a_1 y.$$

Prenant la dérivée du second membre, multipliant par a_2, puis retranchant, on a

$$(D - a_2)(D - a_1) y = y'' - (a_1 y)' - a_2 y' + a_1 a_2 y.$$

De même,

$$(D - a_3)(D - a_2)(D - a_1) y = y''' - (a_1 y)'' - (a_2 y')' + (a_1 a_2 y)' - a_3 y'' + a_3 (a_1 y)' + a_2 a_3 y' - a_1 a_2 a_3 y;$$

et ainsi de suite.

même si les coefficients A_1, A_2, A_n sont *fonctions de* x : Brisson avait seulement considéré le cas où ces coefficients sont *constants*.

La Note de M. Mansion, ayant reçu l'approbation de la Classe (*), parut dans le recueil des *Mémoires couronnés* (**).

Aujourd'hui, l'honorable auteur complète son premier travail, en changeant un peu le point de vue où il s'était placé autrefois : observant que l'intégrale de l'équation (1) ou de l'équation (2) a la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

et que, réciproquement, cette intégrale ramène à des équations différentielles semblables à celles dont il s'agit, M. Mansion appelle *propriété caractéristique des équations linéaires*, la transformation exprimée par l'équation (2).

Entrons dans quelques détails.

I. Après un court préambule, l'auteur développe (§ 2) une démonstration *indirecte* du théorème qui fait l'objet principal de sa Note. A cet effet, il identifie

$$D^3 y + A_1 D^2 y + A_2 D y + A_3 y = 0, \quad . \quad . \quad . (4)$$

avec

$$(D^2 + B_1 D + B_2)(D - a) y = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . (5)$$

a étant une nouvelle inconnue : il trouve ainsi l'*équation auxiliaire*

$$a'' + (A_1 + 3a)\, a' + a^3 + A_1 a^2 + A_2 a + A_3 = 0, \quad . (8')$$

laquelle n'est pas *linéaire*. « *Au moyen d'un artifice de*

(*) *Bulletins*, tome XXIX, p. 68.

(**) Collection in-8°, tome XXII.

calcul très-singulier, » et peut-être un peu compliqué, il démontre que

$$a = \frac{y'}{y} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(A) (*)}$$

II. Afin de parvenir à une transformée qui soit *linéaire,* M. Mansion suppose

$$y' - a_1 y = u, \quad \ldots\ldots\ldots \text{(C)}$$

a_1 représentant la valeur de a qui répond à une intégrale *particulière*, $y = y_1$, de la proposée. Il trouve ainsi, au lieu de l'équation (4) :

$$u'' + Pu' + Qu = 0, \quad \ldots\ldots \text{(12)}$$

P, Q étant ce que deviennent les fonctions B_1, B_2 pour $a = a_1$. Cette équation (12) ayant la même forme que la proposée (*), le théorème en question est démontré.

III. Dans un dernier paragraphe, l'auteur applique la théorie des déterminants : 1° à la démonstration *directe* du

---

(*) La transformation *connue :*

$$y = e^{\int a\,dx}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(B)}$$

qui équivaut à la formule (A), redonne, bien entendu, l'équation (8′).

(**) A cause de $a_1 = \frac{y'_1}{y_1}$, l'équation (C) est la même chose que

$$\frac{y_1 y' - y y'_1}{y'^2} = \frac{u}{y_1}.$$

Par conséquent,

$$y = y_1 \int \frac{u}{y_1}\,dx,$$

formule à laquelle on peut avantageusement substituer, comme l'on sait,

$$y = y_1 \int z\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \text{(D)}$$

théorème principal; 2° à la recherche de deux formes remarquables (*) sous lesquelles on peut écrire l'équation auxiliaire.

IV. En résumé, la Note du jeune lauréat de l'Académie, étant le complément naturel d'un premier travail, me paraît digne d'être approuvée par la Classe, et insérée aux *Bulletins.* »

Rapport de M. F. Folie.

« Je me rallie bien volontiers à la proposition de notre savant confrère M. Catalan, au rapport duquel je n'ajouterai que quelques mots.

1° La démonstration du théorème exige que les solutions particulières u_1 et u_2 de l'équation

$$u'' + Pu' + Qu = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

soient distinctes, ce que M. Mansion établit en démontrant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ u'_1, & u'_2 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

2° L'application des déterminants permet à l'auteur de mettre son équation auxiliaire sous deux formes remarquables qui se prêtent à une intégration directe, sans l'emploi de l'artifice signalé par M. Catalan, et par deux méthodes différentes.

(*) La transformée en z serait, évidemment,

$$\left.\begin{array}{l} y_1 z''' + 4y'_1 z'' + 6y''_1 z' + 4y'''_1 z \\ + A_1 (y_1 z'' + 3y'_1 z' + 3y''_1 z) \\ + A_2 (y_1 z' + 2y'_1 z) \\ + A_3 y_1 z \end{array}\right\} = 0.$$