This page intentionally left blank.

— M. P.-J. Van Beneden a fait suivre cette lecture d'une communication verbale sur les affinités des Lépidosirènes, des Ganoïdes et des *Palædaphus*, qui ont fait l'objet de l'une de ses notices académiques.

— M. Dewalque fait une communication verbale sur la nature des terrains anciens, d'après le résultat des études auxquelles il vient de se livrer sur le même sujet, lors d'un voyage qu'il a fait en Angleterre.

Note sur une formule de M. Botesu (suite et fin); par M. E. Catalan (*), associé de l'Académie.

VIII.

Si, dans la relation

$$\varphi(n) = -\int_0^1 \left[\frac{x}{1-x} + \frac{1}{l(x)}\right] x^{n-1}\,dx, \qquad \text{(G) (**)}$$

on fait $x = e^{-\alpha}$, elle devient

$$\varphi(n) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{e^{\alpha} - 1}\right] e^{-n\alpha}\,d\alpha. \qquad \text{(G')}$$

(*) *Bulletins de l'Académie* (juillet 1872).

(**) La formule (G), donnée à la page 28 des *Bulletins*, renferme une faute typographique.

On sait que

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{e^{\alpha}-1}=\frac{1}{2}-2\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{\alpha}{4p^2\pi^2+\alpha^2}\ (^*);$$

d'où résulte, au lieu de l'expression précédente,

$$\varphi(n)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-n\alpha}d\alpha-2\sum_{p=1}^{p=\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{-n\alpha}\alpha d\alpha}{4p^2\pi^2+\alpha^2};$$

ou encore, par des transformations simples et connues,

$$\varphi(n)=\frac{1}{2n}-2\int_0^{\infty}\frac{tdt}{1+t^2}\,\frac{1}{e^{2\pi nt}-1}. \qquad (G'')$$

IX.

A cause de la formule (N), on a cette relation entre deux intégrales de formes bien différentes :

$$\int_0^1\frac{dq}{1+q}\left[q^{2n}+q^{4n}+q^{8n}\ldots\right]=\frac{1}{2n}-2\int_0^{\infty}\frac{tdt}{1+t^2}\,\frac{1}{e^{2\pi nt}-1}. \quad (V)$$

Par exemple :

$$\int_0^1\frac{dq}{1+q}\left[q^2+q^4+q^8+\cdots\right]=\frac{1}{2}-2\int_0^{\infty}\frac{tdt}{1+t^2}\,\frac{1}{e^{2\pi t}-1}. \quad (V')$$

(*) Voir, par exemple, le Mémoire sur les *Intégrales eulériennes*, par Schaar.

X.

Le premier membre de la formule (V) représente

$$\varphi(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - l(n) - C; \qquad \text{(D)}$$

donc

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{1+t^2} \frac{1}{e^{2\pi nt}-1} = \frac{1}{2}\left[C + l(n)\right] + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right); \text{(W)}$$

et, en particulier,

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{1+t^2} \frac{1}{e^{2\pi t}-1} = \frac{C}{2} - \frac{1}{4},$$

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{1+t^2} \frac{1}{e^{4\pi t}-1} = \frac{1}{2}\left[C + l(2)\right] - \frac{5}{8};$$

puis, par soustraction,

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{1+t^2} \frac{1}{e^{2\pi t}-e^{-2\pi t}} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} l(2). \qquad \text{(X)}$$

XI.

Pour généraliser le dernier résultat, changeons n en $2n$ dans (W), puis retranchons membre à membre : il vient

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{1+t^2} \frac{1}{e^{2\pi nt}-e^{-2\pi nt}} =$$

$$-\frac{1}{2} l(2) + \frac{1}{8n} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right];$$

ou, eu égard à l'identité (B) :

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{1+t^2}\frac{1}{e^{2\pi nt}-e^{-2\pi nt}}=\frac{1}{8n}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}-\cdots\right];\quad (\mathrm{X}')$$

ou encore, par une combinaison fort simple :

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{tdt}{1+t^2}\left[\frac{1}{e^{2\pi nt}-e^{-2\pi nt}}-\frac{1}{e^{2\pi(n+1)t}-e^{-2\pi(n+1)t}}\right]\\ =\frac{1}{8n(n+1)(2n+1)}.\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{X}'')$$

Ces intégrales définies ne sont peut-être pas nouvelles (*).

XII.

On a (II et V)

$$\varphi(1)=1-\mathrm{C}=\int_0^1\frac{dq}{1+q}\left[q^2+q^4+q^8+\cdots\right].$$

Ainsi

$$\int_0^1\frac{dq}{1+q}\left[\mathrm{F}(q)-q\right]=1-\mathrm{C};$$

(*) Cependant je ne les trouve pas dans le savant Recueil de M. Bierens de Haan. Si, dans la dernière série, on suppose $n=\frac{1}{2}$, elle devient

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots,$$

c'est-à-dire $l(2)-\frac{1}{2}$. Il semble donc que

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{1+t^2}\frac{1}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}=l(2)-\frac{1}{2}.$$

C'est en effet ce qui a lieu (Bierens de Haan, *Tables d'intégrales définies.*)

ou, à cause de

$$\int_0^1 \frac{q\,dq}{1+q} = 1 - l(2):$$

$$\int_0^1 \frac{dq}{1+q} \mathrm{F}(q) = 2 - l(2) - \mathrm{C},$$

ou enfin

$$\int_0^1 \frac{dq}{1+q} \mathrm{F}(q) = 0,729\,637\,154\,538\,522 \cdots \quad \text{(Y)}$$

Il est assez remarquable que l'on puisse évaluer

$$\int_0^1 \frac{dq}{1+q} \mathrm{F}(q),$$

la transcendante $\mathrm{F}(q)$ ne paraissant pas exprimable sous forme finie.

XIII.

Pour terminer, j'indiquerai deux identités, analogues à (B), mais moins simples que celle-ci.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \cdots - \frac{1}{4n} = \\ &\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{2}{4n-2} + \frac{1}{4n-1}\right) \\ &- \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{2n}\right]; \end{aligned}\right\} \quad \text{(Z)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} + \cdots + \frac{1}{4n-1} = \\ &\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{2}{4n-2} + \frac{1}{4n-1}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{(Z')}$$

— Avant de se former en comité secret pour la présentation des candidatures supplémentaires aux places vacantes, la classe a pris les dispositions habituelles pour les préparatifs de sa séance publique annuelle, fixée au mardi 17 décembre prochain.

Elle se réunira le 7 et le 16 du même mois, en séance ordinaire, pour le jugement du concours, les élections et les derniers préparatifs de la solennité publique.