This page intentionally left blank.

calcéoles, bien développé, comme on sait, à l'est de cette petite ville.

EXPLICATION DE LA PLANCHE.

Fig. 1. *Astræospongium meniscoïdes*, vu d'en haut, grandeur naturelle. Collection Kröfges.
— 2. Le même, vu de profil.
— 3. Étoile grossie deux fois.

Note sur une formule de M. Botesu, de Iassy (Roumanie); par E. Catalan, associé de l'Académie.

I.

Cette formule, qui probablement n'est pas nouvelle, peut être écrite ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n} \\ = l2-\displaystyle\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{1.2\ 3\ldots.p}{2^{p+1}(2n+1)(2n+2)\ldots(2n+p+1)} \end{array}\right\}. \quad \text{(A)}$$

Elle résulte, presque immédiatement, de l'*identité*

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}. \quad \text{(B)}\ (^*)$$

(*) Pour démontrer celle-ci, évidente quand $n=1$, il suffit de changer n en $n+1$, puis de *retrancher membre à membre*.

En effet,

$$\left.\begin{aligned} & 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2n} \\ & = l2-\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}-\cdots\right] \end{aligned}\right\}; \quad \text{(C)}$$

et, au moyen d'une transformation due à Euler (*), la série entre parenthèses devient

$$\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2^2(2n+1)(2n+2)}+\frac{1.2}{2^3(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$$
$$+\frac{1.2.3}{2^4(2n+1)\ldots(2n+4)}+\ldots$$

Substituant dans (B), on trouve la relation (A).

II.

On sait que

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=l(n)+\varphi(n)+C, \quad . \quad . \quad \text{(D)}$$

C étant la *constante d'Euler*, et $\varphi(n)$ s'annulant quand n devient infini.

Comme

$$\frac{1}{n}=\int_0^1 x^{n-1}dx,$$

et que

$$l(n)=-\int_0^1 \frac{dx}{l(x)}(1-x^{n-1}),$$

(*) *Traité élémentaire des séries*, p. 121.

l'égalité (D) donne, successivement :

$$\varphi(n) = -C + \int_0^1 \left[\frac{1 - x^n}{1 - x} + \frac{1 - x^{n-1}}{l(x)}\right] dx, \quad . \quad (E)$$

$$C = \int_0^1 \left[\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{l(x)}\right] dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (F)$$

$$\varphi(n) = -\int_0^1 \left[\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{l(x)}\right] x^{n-1} dx; \quad . \quad . \quad . \quad (G)$$

relations connues.

III.

A cause de l'identité (B), l'égalité (C) est la même chose que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = l(2) - \int_0^1 dx\,(x^{2n} - x^{2n+1} + \dots);$$

ou, plus simplement :

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = l(2) - \int_0^1 \frac{x^{2n}dx}{1+x}.$$

D'après (D), le premier membre égale

$$l(2) + \varphi(2n) - \varphi(n);$$

donc

$$\varphi(n) - \varphi(2n) = \int_0^1 \frac{x^{2n}dx}{1+x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (H)$$

On a aussi (G) :

$$\varphi(n) - \varphi(2n) = -\int_0^1 \left[\frac{x}{1-x} + \frac{1}{l(x)}\right](x^{n-1} - x^{2n-1})\,dx; \quad \text{(K)}$$

conséquemment,

$$\int_0^1 \left[\frac{x^{2n}}{1+x} + \frac{x^n(1-x^n)}{1-x} + \frac{x^{n-1}(1-x^n)}{l(x)}\right] dx = 0; \quad \text{(L)}$$

ou encore, à cause de la formule employée ci-dessus (H) :

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{1-x^2}(1 + x - 2x^{n+1}) = l(2). \quad . \quad \text{(M)} \ (*)$$

IV.

Si, dans (H), on change n en $2n$, $4n$, $8n$, ..., et que l'on fasse la somme, on trouve

$$\varphi(n) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[x^{2n} + x^{4n} + x^{8n} + \dots\right]; \quad . \quad . \quad \text{(N)}$$

d'où, à cause de (G) :

$$\int_0^1 dx\left[\frac{x^n}{1-x} + \frac{x^{n-1}}{l(x)} + \frac{1}{1+x}(x^{2n} + x^{4n} + x^{8n} + \dots)\right] = 0. \quad \text{(P)}$$

Par exemple,

$$\int_0^1 dx\left[\frac{x}{1-x} + \frac{1}{l(x)} + \frac{1}{1+x}(x^2 + x^4 + x^8 + \dots)\right] = 0.$$

(*) Cette relation (M) est une conséquence immédiate de l'identité (B).

V.

Sous la forme (N), la transcendante $\varphi(n)$ peut être rattachée aux fonctions elliptiques. Écrivons d'abord, en changeant la notation :

$$\varphi(n) = \int_0^1 \frac{dq}{1+q}\left[q^{2n} + q^{4n} + q^{8n} + \cdots\right].$$

De là résulte

$$\varphi(1) = \int_0^1 \frac{dq}{1+q}\left[q^2 + q^4 + q^8 + \cdots\right],$$

$$\varphi(5) = \int_0^1 \frac{dq}{1+q}\left[q^{10} + q^{20} + q^{40} + \cdots\right],$$

$$\varphi(9) = \int_0^1 \frac{dq}{1+q}\left[q^{18} + q^{36} + q^{72} + \cdots\right],$$

. . . .

La première série égale $F(q) - q$; (*)
La deuxième, $F(q^5) - q^5$;
La troisième, $F(q^9) - q^9$;

. . . .

Si donc l'on ajoute membre ces égalités, après les avoir

(*) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 49.

respectivement multipliées par $\varepsilon_1, \varepsilon_5, \varepsilon_9, \ldots$ (*), il vient

$$\varepsilon_1\varphi(1) + \varepsilon_5\varphi(5) + \varepsilon_9\varphi(9) + \cdots$$
$$= \int_0^1 \frac{dq}{1+q}\left[\varepsilon_1 F(q) + \varepsilon_5 F(q^5) + \varepsilon_9 F(9) + \cdots - \varepsilon_1 q - \varepsilon_5 q^5 - \varepsilon_9 q^9 - \cdots\right]$$

Et comme (**)

$$\varepsilon_1 F(q) + \varepsilon_5 F(q^5) + \varepsilon_9 F(q^9) + \cdots = f(q) = \frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi} - 1\right),$$

$$\varepsilon_1 q + \varepsilon_5 q^5 + \varepsilon_9 q^9 + \cdot \qquad = f(q) - f(q^2) = \frac{(1-k')\omega}{4\pi};$$

on a simplement

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1\varphi(1) + \varepsilon_5\varphi(5) + \varepsilon_9\varphi(9) + \cdots \\ = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{dq}{1+q}(1+k')\,\omega - \frac{1}{4}\,l(2) \end{array}\right\}. \quad (P)\ (***)$$

VI.

On a aussi, par la formule (G),

$$\varepsilon_1\varphi(1) + \varepsilon_5\varphi(5) + \varepsilon_9\varphi(9) + \cdots$$
$$= -\int_0^1 dq\left[\frac{1}{1-q} + \frac{1}{q\,l(q)}\right](\varepsilon_1 q + \varepsilon_5 q^5 + \varepsilon_9 q^9 + \cdots),$$

(*) En général, ε_n *représente l'excès du nombre des diviseurs de* n, *ayant la forme* $4\mu + 1$, *sur le nombre de ceux qui ont la forme* $4\mu - 1$. (*Recherches....*, p. 49.)

(**) *Recherches....*, pp. 48 et 49.

(***) Le mémoire cité n'étant pas encore imprimé, je rappellerai que, suivant la notation de M. Bertrand,

$$\omega = K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

ou

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_1\varphi(1)+\varepsilon_5\varphi(5)+\varepsilon_9\varphi(9)+\cdots\\ =-\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^1 dq\left[\frac{1}{1-q}+\frac{1}{ql(q)}\right](1-k')\omega\end{array}\right\}; \quad (\mathrm{Q})$$

donc

$$\int_0^1 \frac{dq}{1+q}(1+k')\omega+\int_0^1 dq\left[\frac{1}{1-q}+\frac{1}{ql(q)}\right](1-k')\omega=\pi l(2);$$

ou, après quelques réductions,

$$\int_0^1\left[2\frac{1-qk'}{1-q^2}+\frac{1-k'}{ql(q)}\right]\omega dq=\pi l(2)\ . \quad (\mathrm{R})\ (*)$$

VII.

Nous avons trouvé (V, VI) :

$$\varepsilon_1\varphi(1)+\varepsilon_5\varphi(5)+\varepsilon_9\varphi(9)+\cdots=\int_0^1\frac{dq}{1+q}f(q^2),$$

$$\varepsilon_1\varphi(1)+\varepsilon_5\varphi(5)+\varepsilon_9\varphi(9)+\cdots=-\int_0^1 dq\left[\frac{1}{1-q}+\frac{1}{ql(q)}\right]\left[f(q)-f(q^2)\right];$$

(*) Ce résultat semblera peut-être digne de remarque, si l'on fait attention que ω, k' sont des fonctions transcendantes de q, *définies* par les formules :

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi}-1\right)=\frac{q}{1-q}-\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^5}{1-q^5}-\ldots,$$

$$\frac{(1-k')\omega}{4\pi}=\frac{q}{1-q^2}-\frac{q^3}{1-q^6}+\frac{q^5}{1-q^{10}}-\ldots$$

(*Recherches*..., p. 48.)

donc

$$\int_0^1 \frac{dq}{1+q} f(q^2) + \int_0^1 dq\left[\frac{1}{1-q} + \frac{1}{ql(q)}\right][f(q)-f(q^2)]=0\,; \quad \text{(S)}$$

relation qui ne diffère pas de (R).

On peut l'écrire ainsi :

$$\int_0^1 dq\left[\frac{f(q)-f(q^2)}{ql(q)} + \frac{f(q)}{1-q} - \frac{2q}{1-q^2} f(q^2)\right]=0. \quad \text{(T)}$$

Soient

$$\int_0^a \left[\frac{1}{1-q} + \frac{1}{ql(q)}\right] f(q)\, dq = \psi(a),$$

$$\int_0^a \left[\frac{2q}{1-q^2} + \frac{1}{ql(q)}\right] f(q^2)\, dq = \varpi(a),$$

a étant moindre que l'unité. Si, dans la seconde intégrale, on remplace q^2 par z, elle devient

$$\int_0^{a^2} \left[\frac{1}{1-z} + \frac{1}{zl(z)}\right] f(z)\, dz = \psi(a^2);$$

donc

$$\psi(a) - \varpi(a) = \int_{a^2}^{a} \left[\frac{1}{1-q} + \frac{1}{ql(q)}\right] f(q)\, dq.$$

Cette remarque permet d'écrire ainsi la relation T :

$$\lim. \int_{a^2}^{a} \left[\frac{q}{1-q} + \frac{1}{ql(q)}\right]\frac{f(q)}{q}dq = o, \quad . \quad . \text{(U)}$$

quand le paramètre a *tend vers l'unité* (*).

—

Description d'un procédé pour mesurer l'avantage de la vision binoculaire sur la vision au moyen d'un seul œil, quant à l'éclat ou à la clarté des objets; par H. Valerius, correspondant de l'Académie.

On sait, depuis longtemps, que l'éclat d'un objet paraît plus grand lorsqu'on le regarde avec les deux yeux que lorsqu'on ne le regarde qu'avec un seul œil. Mais, à ma connaissance, on n'a jamais essayé de déterminer le rapport de ces deux éclats, c'est-à-dire l'avantage de la vision binoculaire sur la vision monoculaire, quant au degré de clarté des images J'ai cherché à résoudre ce problème, et je crois y être parvenu au moyen du procédé suivant qui est fondé sur l'emploi du photomètre de Foucault.

Comme je n'ai trouvé la description de cet appareil dans aucun des traités de physique actuellement en usage, je crois devoir, pour faciliter l'intelligence de ce qui va suivre, commencer par en donner une idée succincte.

(*) Cette propriété, conséquence immédiate de l'équation (G), ne subsiste plus si l'on remplace $f(q)$ par une fonction qui devienne infinie pour $q = 1$.