This page intentionally left blank.

du genre *Axinella*. C'est également un cas de commensalisme (1).

Nous ferons remarquer, en terminant cette note, que tous les travaux viennent corroborer l'opinion que nous avons exprimée depuis longtemps sur la nature des Éponges. — L'Éponge n'est autre chose qu'un Polype, avons-nous dit encore en dernier lieu au Congrès de Hanovre, Polype dont la partie active est réduite à un tube membraneux dont l'orifice est dépourvu, contrairement à ce qui s'observe chez les autres animaux de sa classe, de tentacules préhenseurs. *C'est l'animal du type polype réduit à sa plus simple expression*, ai-je dit depuis longtemps dans la *Zoologie médicale* que j'ai publiée en collaboration avec M. P. Gervais (2).

Remarques sur l'équation $x^m - 1 = 0$; par M. E. Catalan, associé de l'Académie.

I.

Soit $m = pq$, les facteurs p, q étant *premiers entre eux*. De

$$\begin{aligned} x^m - 1 &= (x^p - 1)\left[x^{(q-1)p} + \ldots + x^p + 1\right] \\ &= (x^q - 1)\left[x^{(p-1)q} + \ldots + x^q + 1\right], \end{aligned}$$

on tire, en supprimant $x - 1$:

$$\begin{aligned} &(1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1})\left[1 + x^p + x^{2p} + \ldots + x^{(q-1)p}\right] \\ = &(1 + x + x^2 + \ldots + x^{q-1})\left[1 + x^q + x^{2q} + \ldots + x^{(p-1)q}\right]. \end{aligned}$$

---

(1) *Die Spongien des Adriatischen Meeres*. Leipzig, 1862.

(2) *Zoologie médicale*, Paris, 1859, t. 2, p. 394.

Les polynômes

$$1 + x + .. + x^{p-1}, \quad 1 + x + .. + x^{q-1}$$

sont premiers entre eux; donc l'égalité précédente devient

$$\frac{1 + x^p + x^{2p} + .. + x^{(q-1)p}}{1 + x + x^2 + .. + x^{q-1}} = \frac{1 + x^q + x^{2q} + ... + x^{(p-1)q}}{1 + x + x^2 + ... + x^{p-1}} = \mathrm{X}, \quad (1)$$

X étant un polynôme entier.

II.

Lorsque les nombres p, q sont un peu grands, chacune des divisions indiquées est presque impraticable. Il est néanmoins facile, non-seulement de calculer X dans chaque cas particulier, mais encore de trouver l'expression de ce polynôme.

On a

$$\mathrm{X} = (1 - x) \frac{1 - x^{pq}}{(1 - x^p)(1 - x^q)}, \quad (2)$$

ou

$$\mathrm{X} = (1 - x)(1 - x^{pq})(1 + x^p + x^{2p} + ...)(1 + x^q + x^{2q} + ..),$$

ou encore

$$\mathrm{X} = (1 - x)(1 - x^{pq}) \sum x^{ap+bq}; \quad (3)$$

a, b étant des nombres entiers quelconques.

Le dernier terme de X est, d'après la formule (2),

$$x^{pq+1-p-q} = x^{(p-1)(q-1)}.$$

Par conséquent, *on peut faire abstraction du facteur* $(1 - x^{pq})$, *pourvu que, dans le produit* $(1 - x)\sum x^{ap+bq}$, *on* *néglige les termes dont le degré surpasse* (p — 1) (q — 1).

Si, par exemple, $p=7$, $q=5$, d'où résulte

$$\sum x^{7a+5b} = 1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + \ldots + x^5 + x^{12} + x^{19} + \ldots$$
$$+ x^{10} + x^{17} + x^{24} + \ldots + x^{15} + x^{22} + \ldots x^{20} + \ldots;$$

on trouve, en multipliant par $1-x$ et supprimant $(-x^{25})$:

$$\left.\begin{array}{l} X = 1 - x + x^5 - x^6 + x^7 - x^8 + x^{10} - x^{11} + x^{12} \\ \quad - x^{13} + x^{14} - x^{16} + x^{17} - x^{18} + x^{19} - x^{23} + x^{24}. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Tel est le quotient de

$$1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + x^{28}$$

par

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4,$$

et de

$$1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + x^{25} + x^{30}$$

par

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6.$$

III.

Soit $\varphi(n)$ le nombre des solutions, *en nombres entiers*, de l'équation

$$pa + qb = n,$$

n étant égal ou inférieur à $(p-1)(q-1)$. D'après une propriété connue, $\varphi(n) = 1$ ou 0. Donc, *dans le polynôme* X, *les coefficients sont* $+1, -1$ *ou* 0. En outre, on peut remplacer la règle ci-dessus par la formule suivante :

$$X = \sum_{n=0}^{n=(p-1)(q-1)} \left[\varphi(n) - \varphi(n-1)\right] x^n. \qquad (5)$$

IV.

On sait, et cela résulte d'ailleurs des égalités (1), que les coefficients des termes de X, également éloignés des extrêmes, sont égaux entre eux. Donc

$$\varphi(n)-\varphi(n-1)=\varphi\left[(p-1)(q-1)-n\right]-\varphi\left[(p-1)(q-1)-n-1\right],$$

ou

$$\varphi(n)+\varphi\left[(p-1)(q-1)-n-1\right]=\varphi(n-1)+\varphi\left[(p-1)(q-1)-n\right],$$

ou plutôt

$$\varphi(n)+\varphi\left[(p-1)(q-1)-n-1\right]=\text{const.}$$

Lorsque $n=0$, le premier terme est 1, le second est nul (*); donc enfin

$$\varphi(n)+\varphi(pq-p-q-n)=1. \tag{6}$$

Ainsi : *des équations*

$$ap+bq=n, \quad ap+bq=pq-p-q-n,$$

l'une admet une solution en nombres entiers, l'autre n'en admet pas (**).

(*) En effet, il est visible que l'équation

$$p(a+1-q)+q(b+1)=0$$

n'admet aucune solution en nombres entiers.

(**) On ne doit pas oublier que n est compris entre 0 et $(p-1)(q-1)$, *inclusivement.*

V.

Soit $q < p$. On trouve, directement :

$$\varphi(0)=1,\quad \varphi(1)=0,\quad \varphi(2)=0,\ldots,\ \varphi(q-1)=0,\quad \varphi(q)=1.$$

Donc, par l'équation (6) :

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(pq-p-q)=0,\quad \varphi(pq-p-q-1)=1,\\ \varphi(pq-p-q-2)=1,\ldots,\ \varphi(pq-p-2q+1)=1,\\ \varphi(pq-p-2q)=0.\end{array}\right\} \quad (7)$$

Par exemple, p étant égal à 7, q égal à 5 :

$$\varphi(23)=0,\ \varphi(22)=1,\ \varphi(21)=1,\ \varphi(20)=1,\ \varphi(19)=1,\ \varphi(18)=0.$$

En effet, le développement de Σx^{7a+5b}, trouvé ci-dessus, contient x^{22}, x^{21}, x^{20}, x^{19}; il ne contient ni x^{23} ni x^{18}.

VI.

Le dernier terme de X étant $x^{(p-1)(q-1)}$, on a, par la formule (5),

$$\varphi[(p-1)(q-1)] - \varphi[pq-p-q] = 1,$$

ou, d'après l'une des remarques précédentes :

$$\varphi[(p-1)(q-1)] = 1.$$

Ainsi, l'*équation* ap + bq = (p — 1) (q — 1) *admet toujours une solution en nombres entiers* (*).

(*) Lebesgue, *Exercices d'analyse numérique*, p. 54.

VII.

Lorsque n surpasse $(p-1)(q-1)$, le coefficient de x^n, dans X, est nul. Or ce coefficient a pour valeur, à cause de la multiplication par $(1-x)(1-x^{pq})$:

$$\varphi(n)-\varphi(n-1)-\varphi(n-pq)+\varphi(n-pq-1);$$

donc

$$\varphi(n)-\varphi(n-1)=\varphi(n-pq)-\varphi(n-pq-1);$$

et, si l'on suppose $n=\alpha pq+\beta$:

$$\varphi(n)-\varphi(n-1)=\varphi(\beta)-\varphi(\beta-1).$$

On tire aisément, de cette équation,

$$\varphi(n)-\varphi(\alpha pq)=\varphi(\beta)-\varphi(0).$$

Mais :

$$\varphi(\alpha pq)=\alpha+1,\quad \varphi(0)=1;$$

donc enfin

$$\varphi(n)=\alpha+\varphi(\beta).$$

Ainsi, *le nombre des solutions non négatives de l'équation*

$$ap+bq=\alpha pq+\beta,$$

est égal au nombre des solutions de

$$ap+bq=\beta,$$

augmenté de α (*).

(*) Cette proposition peut être démontrée directement (*Mélanges mathématiques*, p. 22).

Il résulte encore, des relations précédentes, que l'*équation*

$$ap + bq = n$$

admet une seule solution en nombres entiers, quand n *est compris entre* (p — 1) (q — 1) *et* pq — 1 (inclusivement).

VIII.

Si, dans X, on change x en $\frac{1}{x}$, ce polynôme devient

$$\frac{(1-x)(1-x^{pq})}{(1-x^p)(1-x^q)x^{(p-1)(q-1)}} = \frac{X}{x^{(p-1)(q-1)}}.$$

Donc $\frac{X}{x^{\frac{(p-1)(q-1)}{2}}}$ reste invariable, si l'on y remplace x par $\frac{1}{x}$. Autrement dit, l'équation $X = 0$, de degré pair, est réciproque (*) : on la réduit au degré $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$, en faisant

$$Z_1 = z = x + \frac{1}{x},$$

$$Z_n = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

En supposant p et q *impairs*, prenons

$$p = 2p' + 1, \quad q = 2q' + 1 :$$

l'égalité (1) donne

$$\left.\begin{aligned}\frac{X}{x^{2p'q'}} &= \frac{1 + Z_p + Z_{2p} + \ldots + Z_{q'p}}{1 + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{q'}} \\ &= \frac{1 + Z_q + Z_{2q} + \ldots + Z_{p'q}}{1 + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{p'}}.\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

(*) Cette propriété, bien connue, a été indiquée ci-dessus (IV).

Ainsi, *chacune des dernières fractions est réductible à un polynôme entier*

$$Z = \sum_0^{2p'q'} A_n Z_n, \tag{9}$$

dans lequel

$$A_n = \varphi(2p'q' - n) - \varphi(2p'q' - n - 1). \tag{10}$$

En effet, *le coefficient de* Z_n, *dans* Z, *égale le coefficient de* $x^{2p'q'-n}$, *dans* X.

L'exemple ci-dessus conduit à

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1 + Z_7 + Z_{14}}{1 + Z_1 + Z_2} = \frac{1 + Z_5 + Z_{10} + Z_{15}}{1 + Z_1 + Z_2 + Z_3}\\ &= 1 - Z_1 + Z_2 - Z_4 + Z_5 - Z_6 + Z_7 - Z_{11} + Z_{12}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

IX.

Les racines imaginaires de $x^m - 1 = 0$ sont données par les équations

$$1 + x + \ldots + x^{p-1} = 0, \tag{12}$$

$$1 + x + \ldots + x^{q-1} = 0, \tag{13}$$

$$X = 0; \tag{14}$$

que l'on peut réduire à

$$1 + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{p'} = 0, \tag{15}$$

$$1 + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{q'} = 0, \tag{16}$$

$$Z = 0. \tag{17}$$

Lorsque $m = 35$, ces dernières équations sont :

$$\left.\begin{aligned}&1 + Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0, \qquad 1 + Z_1 + Z_2 = 0,\\ &1 - Z_1 + Z_2 - Z_4 + Z_5 - Z_6 + Z_7 - Z_{11} + Z_{12} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

D'ailleurs :

$$Z_1 = z, \quad Z_2 = z^2 - 2, \quad Z_3 = z^3 - 3z, \quad Z_4 = z^4 - 4z^2 + 2,$$
$$Z_5 = z^5 - 5z^3 + 5z, \quad Z_6 = z^6 - 6z^4 + 9z^2 - 2,$$
$$Z_7 = z^7 - 7z^5 + 14z^3 - 7z, \quad Z_8 = z^8 - 8z^6 + 20z^4 - 16z^2 + 2,$$
$$Z_9 = z^9 - 9z^7 + 27z^5 - 30z^3 + 9z,$$
$$Z_{10} = z^{10} - 10z^8 + 35z^6 - 50z^4 + 25z^2 - 2,$$
$$Z_{11} = z^{11} - 11z^9 + 44z^7 - 77z^5 + 55z^3 - 11z,$$
$$Z_{12} = z^{12} - 12z^{10} + 54z^8 - 112z^2 + 105z^4 - 36z^2 + 2.$$

Par conséquent, les *réduites* (18) deviennent

$$\left.\begin{array}{l} z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0, \quad z^2 + z - 1 = 0, \\ z^{12} - z^{11} - 12z^{10} + 11z^9 + 54z^8 - 43z^7 - 113z^6 + 71z^5 \\ \quad + 110z^4 - 46z^3 - 40z^2 + 8z + 1 = 0. \end{array}\right\} (19)$$

X.

On peut prendre, comme *racine primitive* de l'équation (12) :

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{p} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2\pi}{p} = e^{\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}.$$

De même, une racine primitive de l'équation (13) est

$$\beta = e^{\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1}}.$$

Soit maintenant

$$\gamma = \alpha\beta = e^{\left(\frac{2\pi}{p}+\frac{2\pi}{q}\right)\sqrt{-1}}:$$

γ est racine primitive de la proposée.

En effet, supposons $\gamma^{\lambda}=\gamma^{\lambda'}$, ou $\gamma^{\lambda''}=1, \gamma, \gamma', \gamma''$ étant moindres que m. La dernière égalité conduit à

$$\lambda''\left(\frac{2\pi}{p}+\frac{2\pi}{q}\right)=2\mu\pi,$$

ou à

$$\frac{p+q}{pq}=\frac{\mu}{\lambda''};$$

résultat absurde, attendu que la fraction $\frac{p+q}{pq}$ est irréductible (*).

XI.

La formule

$$x=\gamma^{\lambda} \tag{20}$$

donne *toutes les racines de l'équation* (14), *et seulement ces racines, si l'exposant* λ *n'est divisible ni par* p *ni par* q : c'est ce que l'on reconnaît aisément. Si l'on identifie alors le polynôme X avec le produit $\Pi(x-\gamma^{\lambda})$, *composé de* (p—1) (q—1) *facteurs*, on pourra trouver des relations simples entre les sommes des puissances de γ.

Par exemple, de

$$\begin{aligned}1 &- x + x^{5} - x^{6} + x^{8} - x^{9} + x^{10} - x^{11} + x^{12} - x^{13} + x^{14} \\ &- x^{15} + x^{16} - x^{18} + x^{19} - x^{23} + x^{24} = \\ &(x-\gamma)(x-\gamma^{2})(x-\gamma^{3})(x-\gamma^{4})(x-\gamma^{6})(x-\gamma^{8}) \\ &(x-\gamma^{9})(x-\gamma^{11})(x-\gamma^{12})(x-\gamma^{13})(x-\gamma^{16}) \ldots\ldots (x-\gamma^{34}),\end{aligned}$$

(*) Si j'ai reproduit cette démonstration, c'est parce qu'ordinairement on choisit, comme racine primitive, une expression beaucoup plus compliquée que le produit $\alpha\beta$.

on conclut

$$\gamma + \gamma^2 + \gamma^3 + \gamma^4 + \gamma^6 + \gamma^8 + \gamma^9 + \gamma^{11} + \gamma^{12} + \gamma^{13} + \gamma^{16} + \gamma^{17} + \gamma^{18} + \gamma^{19} + \gamma^{22} + \gamma^{23} + \gamma^{24} + \gamma^{26} + \gamma^{27} + \gamma^{29} + \gamma^{31} + \gamma^{32} + \gamma^{33} + \gamma^{34} = 0,$$

et

$$\gamma^s = 1,$$

en supposant

$$s = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 9 + .. + 34 = 420 = 35 \times 12.$$

La dernière relation est évidente; l'autre est facile à vérifier.

XII.

Les racines de l'équation (17) sont données par la formule

$$z = 2 \cos \frac{2\lambda(p+q)\pi}{pq}, \tag{21}$$

dans laquelle λ, *tout au plus égal à* $\frac{pq-1}{2}$, *ne doit être divisible ni par* p *ni par* q. En particulier, les racines de l'équation (19) sont :

$$z_1 = 2 \cos \frac{24\pi}{35}, \quad z_2 = 2 \cos \frac{48\pi}{35}, \quad z_3 = 2 \cos \frac{72\pi}{35},$$

$$z_4 = 2 \cos \frac{96\pi}{35}, \quad z_5 = 2 \cos \frac{144\pi}{35}, \quad z_6 = 2 \cos \frac{192\pi}{35},$$

$$z_7 = 2 \cos \frac{216\pi}{35}, \quad z_8 = 2 \cos \frac{264\pi}{35}, \quad z_9 = 2 \cos \frac{284\pi}{35},$$

$$z_{10} = 2 \cos \frac{312\pi}{35}, \quad z_{11} = 2 \cos \frac{384\pi}{35}, \quad z_{12} = 2 \cos \frac{408\pi}{35};$$

ou, plus simplement :

$$z_1 = -2\cos\frac{11\pi}{35},\quad z_2 = -2\cos\frac{13\pi}{35},\quad z_3 = 2\cos\frac{2\pi}{35},$$

$$z_4 = -2\cos\frac{9\pi}{35},\quad z_5 = 2\cos\frac{4\pi}{35},\quad z_6 = -2\cos\frac{17\pi}{35},$$

$$z_7 = 2\cos\frac{6\pi}{35},\quad z_8 = 2\cos\frac{16\pi}{35},\quad z_9 = 2\cos\frac{8\pi}{35},$$

$$z_{10} = -2\cos\frac{3\pi}{35},\quad z_{11} = -2\cos\frac{\pi}{35},\quad z_{12} = 2\cos\frac{12\pi}{35}.$$

XIII.

Quand l'exposant m, supposé *impair*, est décomposé en plusieurs facteurs, premiers entre eux deux à deux, les considérations précédentes sont encore applicables; mais les résultats se compliquent rapidement. Si, par exemple, on fait $m = pqr$, on trouve d'abord

$$\frac{1-x^m}{1-x} = (1+x+\ldots..+x^{p-1})(1+x+\ldots..+x^{q-1})(1+x+\ldots..+x^{r-1})X_1, \quad (22)$$

X_1 étant un polynôme entier; puis

$$X_1 = (1-x)^2 \sum x^{ap+bq+cr}, \qquad (23)$$

pourvu que, dans le produit, *on néglige les termes dont le degré surpasse* m — p — q — r + 2 = μ. Enfin, si l'on désigne par $\varphi(n)$ *le nombre des solutions* de l'équation

$$ap + bq + cr = n,$$

exprimées par des nombres entiers, on a aussi

$$X_1 = \sum_{n=0}^{n=\mu} \Delta^2\varphi(n-2)\,x^n. \qquad (24)$$

XIV.

L'égalité

$$X_1 = \frac{(1-x)^2(1-x^{pqr})}{(1-x^p)(1-x^q)(1-x^r)}$$

peut être écrite sous les trois formes

$$X_1 = \frac{(1-x)(1-x^{pqr})}{(1-x^{qr})(1-x^p)} \cdot \frac{(1-x)(1-x^{qr})}{(1-x^q)(1-x^r)},$$

$$X_1 = \frac{(1-x)(1-x^{pqr})}{(1-x^{rp})(1-x^q)} \cdot \frac{(1-x)(1-x^{rq})}{(1-x^r)(1-x^p)},$$

$$X_1 = \frac{(1-x)(1-x^{pqr})}{(1-x^{pq})(1-x^r)} \cdot \frac{(1-x)(1-x^{pq})}{(1-x^p)(1-x^q)}.$$

Par conséquent, si l'on fait

$$\left.\begin{aligned}
P &= \frac{(1-x)(1-x^{pqr})}{(1-x^{qr})(1-x^p)}, & P_1 &= \frac{(1-x)(1-x^{qr})}{(1-x^q)(1-x^r)},\\
Q &= \frac{(1-x)(1-x^{pqr})}{(1-x^{rp})(1-x^q)}, & Q_1 &= \frac{(1-x)(1-x^{rp})}{(1-x^r)(1-x^p)},\\
R &= \frac{(1-x)(1-x^{pqr})}{(1-x^{pq})(1-x^r)}, & R_1 &= \frac{(1-x)(1-x^{pq})}{(1-x^p)(1-x^q)},
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

on aura

$$X_1 = PP_1 = QQ_1 = RR_1. \qquad (26)$$

Les quantités P, P_1, Q, Q_1, R, R_1, analogues à la fraction (2), sont, comme celle-ci, réductibles à des polynômes entiers : en particulier, $R_1 = X$. Donc *le polynôme* X_1 *est décomposable, de trois manières différentes, en un produit de deux facteurs entiers, dont les termes ont pour coefficients* $+1$ *ou* -1.

Cette propriété n'exige pas que l'exposant m soit impair. Afin de la vérifier dans un cas simple, prenons $p=5$, $q=3$, $r=2$. Nous aurons

$$P=\frac{(1-x)(1-x^{30})}{(1-x^6)(1-x^5)}=\frac{1+x^6+x^{12}+x^{18}+x^{24}}{1+x+x^2+x^3+x^4}$$
$$=1-x+x^5-x^7+x^{10}-x^{13}+x^{15}-x^{19}+x^{20},$$

$$P_1=\frac{(1-x)(1-x^6)}{(1-x^3)(1-x^2)}=\frac{1+x^3}{1+x}=1-x+x^2,$$

$$Q=\frac{(1-x)(1-x^{30})}{(1-x^{10})(1-x^3)}=\frac{1+x^{10}+x^{20}}{1+x+x^2}$$
$$=1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+x^9-x^{11}+x^{12}-x^{14}+x^{15}-x^{17}+x^{18},$$

$$Q_1=\frac{(1-x)(1-x^{10})}{(1-x^2)(1-x^5)}=\frac{1+x^5}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4,$$

$$R=\frac{(1-x)(1-x^{30})}{(1-x^{15})(1-x^2)}=\frac{1+x^{15}}{1+x}$$
$$=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8-x^9+x^{10}$$
$$-x^{11}+x^{12}-x^{13}+x^{14},$$

$$R_1=\frac{(1-x)(1-x^{15})}{(1-x^5)(1-x^3)}=\frac{1+x^5+x^{10}}{1+x+x^2}$$
$$=1-x+x^3-x^4+x^5-x^7+x^8;$$

puis

$$X_1=1-2x+2x^2-x^3+x^5-x^6+x^8-x^9+x^{10}-x^{11}$$
$$+x^{12}-x^{13}+x^{14}-x^{16}+x^{17}-x^{19}+2x^{20}-2x^{21}+x^{22}\ (^*).$$

(*) Le coefficient de x^2 est 2, tandis que, d'après la formule (24), il devrait être égal à 1. Pour expliquer cette divergence, il suffit de rappeler que la dernière formule suppose p, q, r *impairs*, et, par conséquent, *supérieurs à* 2.

XV.

Les relations (25) seraient absurdes si les polynômes P, P_1, Q, ... étaient *premiers*. Il est facile de prouver que

$$\frac{Q}{R_1}=\frac{R}{Q_1}=A,\quad \frac{R}{P_1}=\frac{P}{R_1}=B,\quad \frac{P}{Q_1}=\frac{Q}{P_1}=C,\qquad (27)$$

A, B, C étant des *polynômes entiers*.

En effet,

$$\frac{Q}{R_1}=\frac{(1-x^{pqr})(1-x^p)}{(1-x^{rp})(1-x^{pq})}=\frac{1+x^{pq}+x^{2pq}+\ldots+x^{(r-1)pq}}{1+x^p+x^{2p}+\ldots+x^{(r-1)p}};$$

ou, si l'on fait $x^p=y$:

$$\frac{Q}{R_1}=\frac{1+y^q+y^{2q}+\ldots+y^{(r-1)q}}{1+y+y^2+\ldots+y^{r-1}};\qquad (28)$$

et, d'après la formule (1), le second membre est réductible à un polynôme entier.

XVI.

Dans cette même formule (1), remplaçons X par F (p, q, x); de manière que

$$F(p,q,x)=\frac{(1-x)(1-x^{pq})}{(1-x^p)(1-x^q)}.\qquad (29)$$

Au moyen de cette notation, l'égalité (28) devient

$$\frac{Q}{R_1}=F(q,r,x^p).$$

Ainsi

$$A=F(q,r,x^p),\quad B=F(r,p,x^q),\quad C=F(p,q,x^r);\quad (30)$$

et, en conséquence :

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= F(p, q, x)\,F(p, r, x)\,F(q, r, x^p), \\ X_1 &= F(q, r, x)\,F(q, p, x)\,F(r, p, x^q), \\ X_1 &= F(r, p, x)\,F(r, q, x)\,F(p, q, x^r); \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$X_1 = AQ_1R_1 = BR_1P_1 = CP_1Q_1. \qquad (52)$$

Le polynôme X_1 *est donc décomposable, de trois manières différentes, en un système de trois facteurs entiers, analogues, chacun, au polynôme* X.

Dans l'exemple ci-dessus :

$$A = \frac{(1 - x^5)(1 - x^{30})}{(1 - x^{15})(1 - x^{10})} = \frac{1 + x^{10} + x^{20}}{1 + x^5 + x^{10}} = 1 - x^5 + x^{10},$$

$$B = \frac{(1 - x^3)(1 - x^{30})}{(1 - x^6)(1 - x^{15})} = \frac{1 + x^{15}}{1 + x^3} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12},$$

$$C = \frac{(1 - x^2)(1 - x^{30})}{(1 - x^{10})(1 - x^6)} = \frac{1 + x^{10} + x^{20}}{1 + x^2 + x^4}$$
$$= 1 - x^2 + x^6 - x^8 + x^{10} - x^{14} + x^{16}.$$

Le polynôme du vingt-deuxième degré, trouvé précédemment, se décompose donc comme il suit :

$$\begin{aligned} X_1 &= (1 - x^5 + x^{10})(1 - x + x^2 - x^3 + x^4)(1 - x + x^3 - x^4 + x^5 - x^7 + x^8) \\ &= (1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12})(1 - x + x^3 - x^4 + x^5 - x^7 + x^8)(1 - x + x^2) \\ &= (1 - x^2 + x^6 - x^8 + x^{10} - x^{14} + x^{16})(1 - x + x^2)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4). \end{aligned}$$

De plus,

$$1 - x^5 + x^{10} = (1 - x + x^2)(1 + x - x^3 - x^4 - x^5 + x^7 + x^8),$$
$$1 - x^2 + x^6 - x^8 + x^{10} - x^{14} + x^{16} =$$
$$(1 - x + x^3 - x^4 + x^5 - x^7 + x^8)(1 + x - x^3 - x^4 - x^5 + x^7 + x^8);$$

donc enfin

$$X_1 = (1 - x + x^2)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4)$$
$$(1 + x - x^3 - x^4 - x^5 + x^7 + x^8)(1 - x + x^3 - x^4 + x^5 - x^7 + x^8).$$

Il résulte, de cette dernière décomposition, que les racines imaginaires de $x^{30} - 1 = 0$ sont déterminées par les équations :

$$1 + x + x^2 = 0,\quad 1 - x + x^2 = 0,\quad 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 0,$$
$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 = 0,\quad 1 + x - x^3 - x^4 - x^5 + x^7 + x^8 = 0,$$
$$1 - x + x^3 - x^4 + x^5 - x^7 + x^8 = 0.$$

Ces résultats connus servent de vérification aux calculs précédents.

Liége, février 1870.

Note sur la nature du soleil, par M. G. Bernaerts.

L'étude de la constitution physique du soleil a fait de grands progrès depuis quelques années. Grâce à la brillante théorie de M. Faye et du R. P. Secchi, une lumière toute nouvelle est venue se répandre sur cette question; les véritables principes, longtemps méconnus, se sont fait jour et ont écarté les idées anciennes qui n'expliquaient ni la vive lumière, ni la longue période d'incandescence du soleil. Mais cette hypothèse, quel que soit d'ailleurs son mérite, a néanmoins donné lieu à une grave objection : Une sphère gazeuse élevée à une haute température doit être diaphane et à travers les éclaircies de la tache on doit voir la partie opposée et brillante de la photosphère.

Pour échapper à cette difficulté et expliquer la couleur sombre des taches, M. Faye suppose que les couches,