

# MODELISATION ECOLOGIQUE D'UNE RIVIERE (LA SAMBRE) EN VUE DE L'OPTIMISATION DE L'EPURATION

---

Madame  
J. LECOMTE-BECKERS\*

---

ASSISTANTE A L'UNIVERSITE DE LIEGE, (BELGIQUE), LAUREATE DU 2<sup>e</sup> PRIX  
1978 DU DEVELOPPEMENT REGIONAL WALLON (POUR CE TRAVAIL).

---

## INTRODUCTION

Aujourd'hui, le plus haut intérêt est porté, dans tous les pays du monde, aux problèmes relatifs à l'eau, aussi bien du point de vue qualité que quantité. Il faut bien se rendre compte que la pollution des eaux n'est pas une simple préoccupation d'écologiste. Tous sont concernés : il faut éveiller l'intérêt et susciter l'action des politiciens, des économistes et des techniciens (physiciens, chimistes, biologistes, médecins et ingénieurs), pour résoudre la crise de l'eau douce.

Quelle est l'influence de la pollution sur la qualité de l'eau ? Cette question est primordiale. La possibilité de connaître quantitativement le cycle de biodégradation (c'est-à-dire la transformation des déchets par des décomposeurs comme les bactéries) d'une rivière permet de répondre à cette interrogation et ouvre la voie à l'étude de l'optimisation de l'épuration.

Nous proposons un modèle mathématique du phénomène de biodégradation naturelle des matières polluantes organiques provenant d'effluents urbains et industriels, appliqué au cas de la Sambre.

Les trois régions typiques de la Sambre sont bien mises en évidence, c'est-à-dire la Haute Sambre, peu polluée, la Sambre Moyenne (région de Charleroi), fortement polluée, et la Basse Sambre, en lente récupération. Ce modèle original a permis de mettre en évidence un cycle d'hystérésis : ce fait est très important, car il montre qu'à un même degré de pollution correspondent deux qualités de l'eau. En fait, la rivière se souvient de l'ensemble des perturbations qu'elle a subies, par excès de pollution.

---

ARTICLE PARU DANS «ETUDES & EXPANSION 1979», pp. 53-64. REPRODUCTION AUTORISEE.

Dans le cas de la Sambre, la pollution est trop avancée pour que des solutions partielles soient satisfaisantes (par exemple : épurer les fortes charges uniquement). Une solution globale est indispensable.

A partir des simulations sur ordinateur, nous avons analysé différentes solutions d'épuration. Il s'est avéré qu'une épuration globale de l'ordre de 65 % serait suffisante pour obtenir une qualité de l'eau d'au moins 80 %. Ainsi, nous avons démontré que le taux d'épuration n'est pas proportionnel à la qualité de l'eau obtenue. Un effort d'épuration plus important — et donc plus onéreux — n'aurait pas comme conséquence automatique une qualité de l'eau proportionnellement supérieure.

### MODELISATION ECOLOGIQUE D'UNE RIVIERE : LA SAMBRE

Nous avons envisagé un modèle mathématique de la biodégradation en rivière polluée (un modèle mathématique permet de chiffrer les conséquences des modifications apportées à l'état d'une rivière). Nous avons choisi le cas de la Sambre, qui nous semble bien représenter une rivière polluée type. Pour les faits expérimentaux, nous nous sommes fondés sur le rapport «*Projet Sambre*», rédigé en 1975 à l'initiative de la Commission Interministérielle de la Politique Scientifique. Ce rapport, résultant des recherches entreprises sous la direction de F. EDELIN (1975), fut établi dans le cadre du premier programme national de recherche et de développement sur l'environnement physique et biologique des eaux, mis en œuvre en 1970 par le Gouvernement belge.

#### 1. Les polluants

On peut grouper de plusieurs manières les nombreuses impuretés qui sont déversées dans les cours d'eau. Une division très large consiste à distinguer les polluants dégradables et les polluants non dégradables. Les polluants non dégradables ne sont pas modifiés par les processus biologiques qui se déroulent dans les eaux naturelles. Ce sont, pour la majorité, des produits chimiques inorganiques, tels que les chlorures, qui sont dilués par la rivière, mais dont la quantité n'est pratiquement pas réduite. Les origines de ces polluants sont nombreuses et diverses. Pour des raisons pratiques, on classe également comme non biodégradables les déchets radioactifs et les matières organiques stables (qui résistent à l'attaque des microorganismes des rivières) comme le D.D.T., les cyanures et les détergents synthétiques. Ces produits chimiques industriels, agricoles et pharmaceutiques posent de difficiles problèmes de traitement. De plus, ces rejets toxiques inhibent le processus de biodégradation naturelle.

La table I reproduit les charges journalières déversées dans la Sambre par les égouts, affluents et industries.

TABLEAU I.

### Charge journalière déversée par les égouts, les affluents et les industries.

(d'après le «*Projet Sambre*» (1975).

Liste des déchargements	DBO (kg/j)	DCO (kg/j)	Abscisse (km)
Egouts de La Buisnière	59,7		7,7
Egouts de Lobbes	188		16,75
Biesmelle (pdt la période sucrière)	9 120		19
Egouts de Thuin	317		19,5
Egouts de Landelies	67,8		29,5
Décharges A.M.S.		8 722	36
Egouts de Leernes	178		36
Egouts de Monceau	569		36,4
Egouts de Marchienne	948		36,2
Eau d'Heure	762		37
Providence (Cockerill)		2 822	38
Egouts de Couillet	752		38
Egouts de Marcinelle	1 346		38,75
Décharges Thy (F.T.M.M.)		251	38,75
La Louvoise	203		40,50
Egouts de Montignies	1 270		42
Egouts de Charleroi	1 976		43
Egouts de Châtelet	808		46
Egouts de Châtelineau	1 054		46,5
I.G.E.S.P.	1 282	1 602	48
Egouts de Pont-de-Loup	161		48,7
Egouts de Roselies	131		49
Egouts de Farciennes	541		49,5
Décharge agrégats légers		929	50,75
Egouts de Moignelée	128		56
Egouts d'Aiseau	226		56,5
Egouts de Tamines	441		57,5
Glaceries de Saint-Roch		353	59,5
Egouts d'Auvelais	443		62,75
Egouts de Ham-sur-Sambre	166		63,75
Solvay		10 109	65,75
Glaceries de Moustier		612	66
Orneau	346		67
Egouts de Mornimont	46,7		70
Glaceries de Franière		210	72
Egouts de Floreffe	153		75
Laiterie de Floreffe	4 890	6 112	75
Egouts de Malonne	221		79,75

*D.B.O.* (demande biologique d'oxygène) : définit la teneur en matières organiques biodégradables dans l'eau usée.

*D.C.O.* (demande chimique d'oxygène) : fournit la teneur en matières organiques totales, à la fois biodégradables et réfractaires.

Les *abscisses* sont définies à partir d'un point initial, qui est la frontière française.

#### 2. Auto-épuration

Les polluants dégradables sont modifiés par des phénomènes biologiques, chimiques et physiques caractéristiques des eaux naturelles. Les effluents domestiques (égouts) en sont l'origine la plus courante. Ces déchets organiques sont transformés en matières inorganiques stables (bicarbonates, nitrates, sulfates et phosphates) par les bactéries. Si l'eau n'est pas trop polluée, ce processus auquel est donné le nom d'auto-épuration — se déroule d'une manière aérobie (par l'action de bactéries utilisant l'oxygène dissous) et ne produit pas d'odeur désagréable. Mais, si les

eaux réceptrices sont polluées au-delà d'un certain degré, le processus de biodégradation devient anaérobie (par l'action de bactéries n'utilisant pas l'oxygène) et produit de l'hydrogène sulfuré, ainsi que d'autres gaz nocifs.

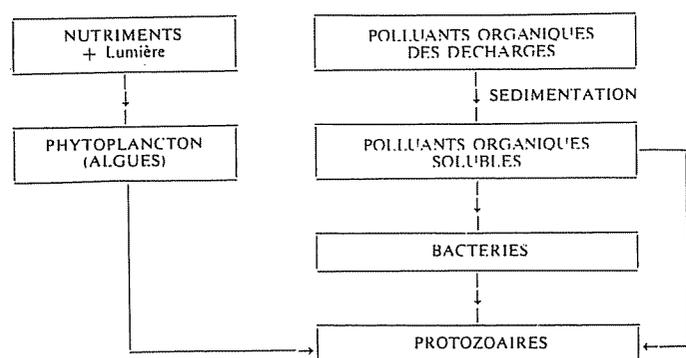
A côté d'une pollution chimique, il existe donc une pollution biologique. Les matières organiques contenues dans les eaux rejetées constituent la nourriture des bactéries, qui se multiplient très rapidement. Si la quantité de matière organique est trop importante, la prolifération microbienne devient excessive. On se préoccupe tout spécialement des bactéries qui causent des maladies infectieuses, telles typhoïde, dysenterie, choléra, hépatites virales... La pollution microbiologique a pour conséquence une recrudescence de ces affections.

Les bactéries sont les agents primaires dans le processus de biodégradation. Mais les protozoaires sont prédateurs des bactéries. Leur rôle est important : ils réduisent la croissance des bactéries et, par conséquent, l'utilisation des polluants dégradables (ou «substrat»). Ainsi, ils peuvent, sous certaines conditions, détruire la biomasse bactérienne. Mais ils sont également un facteur de contrôle, puisqu'ils empêchent l'explosion démographique des bactéries.

### 3. Chaîne alimentaire étudiée et conséquences

Nous avons utilisé un système d'équations semblable à celui de CANALE (1969, 1973), mais généralisé au cas d'une chaîne alimentaire de plus de trois populations, pour décrire la dynamique biologique d'une rivière.

C'est ainsi que nous avons examiné la chaîne alimentaire suivante :



Nous avons analysé les phénomènes les plus importants du point de vue épuration. En effet, le phénomène d'auto-épuration n'est pas uniquement conditionné par la présence de ces micro-organismes hétérotrophes, qui emploient le carbone organique comme source d'énergie (notamment pour la synthèse cellulaire), mais également par quantité d'autres phénomènes.

Ainsi, la chaîne alimentaire que nous avons considérée implique automatiquement l'étude des phénomènes suivants :

- sédimentation des matières polluantes;
- dégradation biologique des polluants en phase aqueuse;
- photosynthèse;
- prédation par les protozoaires.

#### a) Sédimentation

L'eau d'égout subit une décantation importante lors de son déversement dans la Sambre. Celle-ci, fort lente, peut être comparée à un décanteur. Une valeur raisonnable pour le traitement physique de décantation est un enlèvement de 28 % de la D.B.O. (Demande Biologique en Oxygène). Dans le modèle, il faut donc considérer les charges biodégradables qui subsistent après décantation.

#### b) Biodégradation

Lorsqu'on étudie la consommation de substrat par les bactéries, on s'aperçoit que le taux de croissance des bactéries varie en proportion inverse de la quantité de substrat initial. Il n'est pas simple d'avancer une explication théorique rigoureuse à cette constatation. On peut imaginer qu'à cause de la présence de substrat, il existe des substances inhibitrices. Ainsi, plus la quantité de substrat serait élevée, plus il y aurait de substances inhibitrices. Mais, que se passe-t-il lorsqu'un nouveau substrat est déversé, avant que le premier ne soit totalement disparu ? Il n'est pas aisé d'estimer la valeur du taux de croissance dans ce cas. Nous avons émis l'hypothèse qu'il serait inversement proportionnel à la somme des deux. Cette hypothèse vient d'être confirmée par un récent travail réalisé par BUET (voir EDELIN et BUET, 1978).

#### c) Photosynthèse

La production d'algues (phytoplancton) est essentiellement fonction du rayonnement solaire reçu au plan d'eau et de la température de l'eau. Plus la température et le rayonnement sont élevés, plus les conditions sont favorables au développement des algues. Cependant, il faut tenir compte également de la turbidité (= état d'une eau trouble) de l'eau, car elle empêche la pénétration des rayons lumineux au sein du liquide. Ainsi, en Moyenne et Basse Sambre, à cause de la grande quantité de matières en suspension et de matières flottantes, la turbidité de l'eau est tellement élevée qu'elle bloque la production de phytoplancton. Ce dernier ne se rencontre donc qu'en Haute Sambre.

#### d) Prédation par les protozoaires

Les protozoaires sont à la fois prédateurs des bactéries et du phytoplancton. Leur croissance est donc fonction de la quantité de ces deux proies. Par contre, leur taux de mortalité est fort influencé par la présence de substrat : ainsi, en zone polluée, il peut être de 5 à 7 fois plus élevé qu'en zone normale.

#### 4. Les équations

Un système de 5 équations différentielles a été considéré pour décrire le cycle de biodégradation d'une rivière, et, plus particulièrement, de la Sambre.

Le modèle est explicité en annexe. Dans celle-ci on trouvera également les valeurs initiales employées.

Le système a été résolu sur l'ordinateur IBM 370 du Centre de calcul de l'Université de Liège. La solution du système est illustrée par les figures des pages qui suivent.

Toutes les populations envisagées ont comme unité fondamentale: l'équivalent oxygène en  $\text{mg O}_2/\text{l}$ . C'est-à-dire la quantité d'oxygène nécessaire pour oxyder 1 mg de la population considérée.

Ainsi, par exemple, lorsque l'on prend pour composition chimique globale simplifiée pour la bactérie  $\text{C}_5\text{H}_7\text{NO}_2$ , l'oxydation chimique de 1 mg de bactéries (c'est-à-dire la transformation de la bactérie en composés minéraux) demande 1,42 mg d'oxygène.

#### SIMULATION DU MODELE ET OPTIMISATION DE L'EPURATION

Dans le modèle proposé, certains coefficients (notamment le taux de croissance de phytoplancton, des bactéries, le taux de respiration endogène...) dépendent explicitement de la température, ou, plutôt, de l'époque de l'année choisie, celle-ci conditionnant la température, le débit de la rivière et l'ensoleillement. Le facteur de conversion « abscisse-temps » est fonction du débit de la rivière (cf. E.G. ECKENFELDER, 1973). Ainsi, le choix de l'époque est important, car il influence plusieurs éléments.

#### ANALYSE DES SIMULATIONS

##### 1. Comportement du modèle en été et en hiver

La figure 1 reproduit le comportement de la Sambre en été, où l'ensoleillement et la température sont assez élevés, ce qui favorise le développement du phytoplancton, tandis que le débit reste assez faible.

La figure 2 concerne les mois d'octobre, novembre et décembre. A ce moment, la Sambre est polluée au maximum. En effet, la campagne sucrière bat son plein et la Biesmelle charrie alors les déchets des industries sucrières (cette pollution représente près du tiers des rejets déversés dans la Sambre).

Une première différence attendue saute aux yeux: en été, le phytoplancton est en quantité plus élevée. La Biesmelle n'est pas polluée en été. Elle n'engendre donc pas de croissance bactérienne. En pénétrant

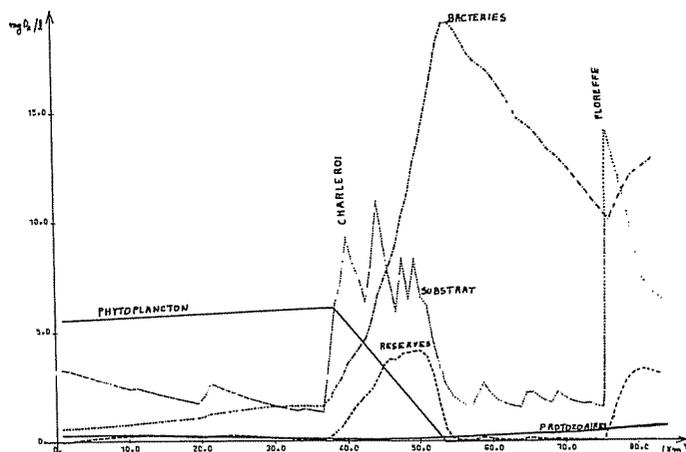


Figure 1. — Simulation du modèle en été.

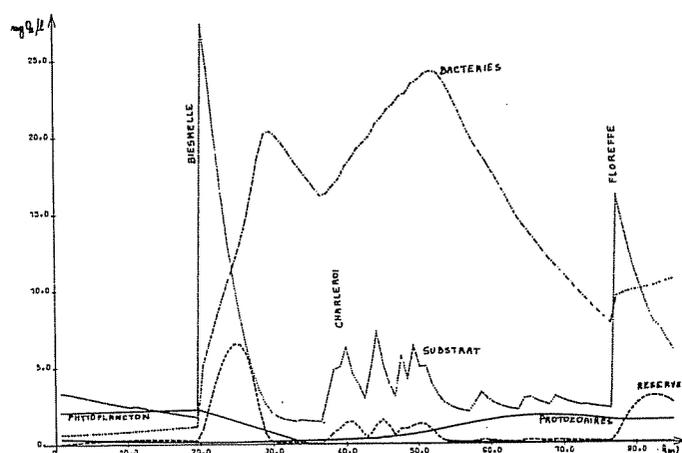


Fig. 2. — Simulation du modèle pour les mois d'octobre, novembre et décembre.

dans la région de Charleroi, fortement polluée, cette population bactérienne est faible, ce qui ne permet pas une bonne épuration. Il n'est donc pas étonnant de constater en été de plus fortes charges et un pic plus faible de bactéries en Sambre industrielle.

##### 2. Découpe de la Biesmelle en trois parties

Pour étudier l'effet de certaines épurations, nous avons choisi la situation où la Sambre reçoit les apports les plus importants. Dans ces simulations, nous avons supprimé les apports de la laiterie de Floreffe, qui — mise en faillite — n'existe plus actuellement.

Nous avons scindé la Biesmelle en trois parties et avons placé ses rejets à 5 km d'intervalle, soit en amont, soit en aval du confluent réel. Suivant que ces décharges se font en aval ou en amont, on observe un ou deux pics dans la variation de la population bactérienne.

Lorsque ces rejets se font en aval, les bactéries n'ont guère le temps de décroître avant leur proliféra-

tion au niveau de Charleroi. Leur maximum est donc légèrement plus élevé que lorsque les rejets sont plus éloignés de la région de Charleroi. Ce qui montre bien qu'il ne faut pas grouper les rejets, car il se produit un phénomène d'accumulation. Néanmoins, il semble que la position des rejets n'affecte pas beaucoup la réponse finale de la rivière : dans les deux cas, les solutions en bout de parcours sont à peu près identiques.

### 3. La fonction « qualité de l'eau »

Lorsque l'on trace le graphique de la qualité de l'eau (la fonction qualité de l'eau est calculée à partir de l'indice de fluctuation  $D_0$  proposé par D. DUBOIS, 1974, 1975) en fonction du substrat présent, on met en évidence un cycle d'hystérésis. Ce résultat est très important. A des quantités *identiques* de substrat, correspondent des qualités d'eau *différentes*. Ceci montre bien que l'état d'une rivière en un point dépend de son histoire antérieure et que les populations biologiques ne rétablissent leur équilibre que très lentement.

Etudions quelque peu ce cycle d'hystérésis. Il se découpe en quatre parties (figure 3) :

- Une première zone peu polluée, où l'apport de pollution organique est inférieur à la capacité auto-épuratrice de l'eau. La qualité de l'eau est très bonne, l'écosystème est en équilibre. C'est la Haute Sambre (segment AB).
- Une deuxième partie fortement polluée. La qualité de l'eau décroît brusquement pour une petite variation de substrat. La pollution organique n'a pas fortement augmenté, vu la prolifération des bactéries (d'où une importante pollution bactérienne). L'écosystème est fortement perturbé. C'est la Sambre Moyenne (segment BC).
- Une troisième zone, où la qualité de l'eau est constamment mauvaise malgré la diminution de substrat dans la rivière. L'écosystème a été trop perturbé et n'a pas encore eu le temps de récupérer. Nous sommes au début de la Basse Sambre (segment CD).
- Une quatrième phase : de récupération. L'écosystème normal se rétablit : la qualité de l'eau s'améliore rapidement pour une valeur faible de substrat. Cette partie correspond au reste de la Basse Sambre (segment DE).

Par conséquent, nous pouvons schématiser ce processus comme suit :

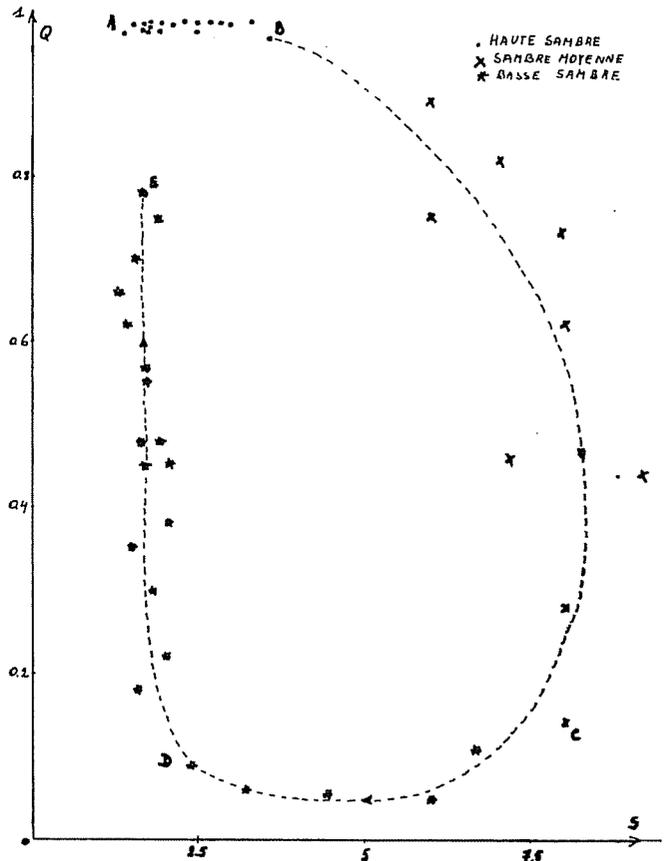
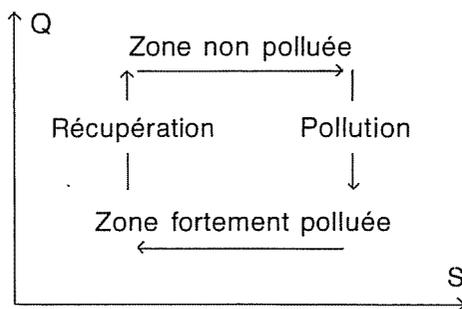


Fig. 3. — Cycle d'hystérésis de Q, fonction de S, dans le cas de non-épuración.

Q = qualité de l'eau.

S = rejets polluants biodégradables (substrat)

$50 = D_0$

$Q = \frac{50}{50}$

[ $D_0$  indice de fluctuation (Dubois, 1974, 1975)].

La Sambre n'a pas le temps de s'épurer complètement. C'est pourquoi le cycle ne se boucle pas et s'arrête au point E, avant de retrouver la zone d'équilibre. Il est d'ailleurs probable que ce point E se situe encore plus bas dans la réalité. En effet, nous n'avons pas tenu compte du déficit en oxygène dans la rivière. L'inclusion du terme  $O_2$  n'aurait d'ailleurs pas beaucoup d'influence sur la variation qualitative de l'indice de fluctuation, mais l'accentuerait.

Dans le cas de la Sambre, la pollution est trop avancée pour que des solutions partielles soient satisfaisantes (par exemple : épurer les fortes charges uniquement). Une épuration globale est indispensable.

Quel est le pourcentage d'épuration globale nécessaire pour améliorer de façon sensible la qualité de l'eau ? Les cas d'épuration à 33 %, 66 % et 90 % ont été examinés.

A 33 % (voir figure 4), le cycle d'hystérésis se marque toujours, mais est réduit.

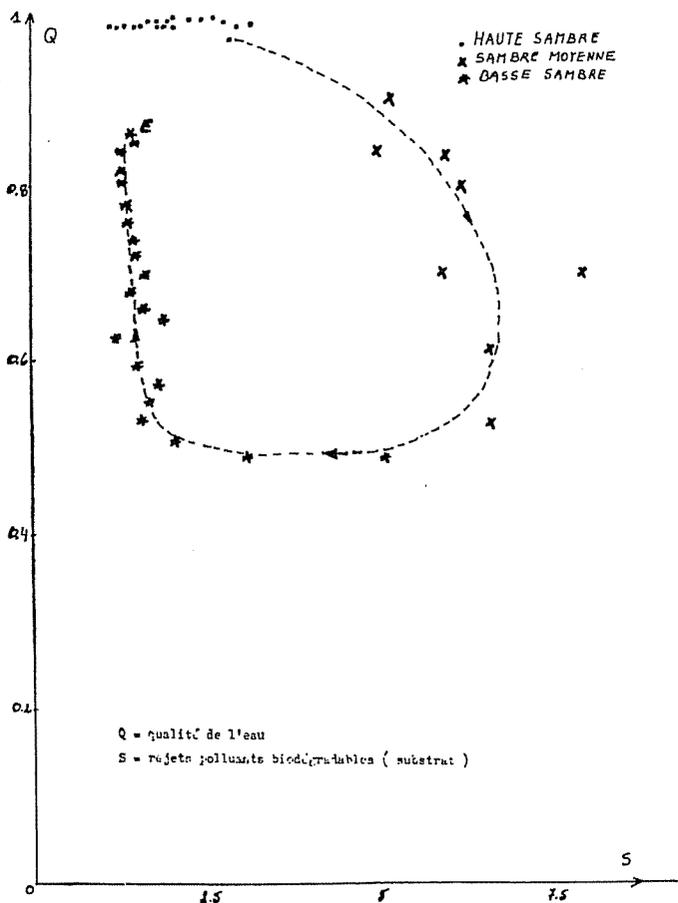


Fig. 4. — Cycle d'hystérésis de Q, fonction de S, dans le cas d'une épuration à 33 %.

On peut remarquer qu'une épuration globale à 66 % (figure 5) apporte une amélioration appréciable. La qualité de l'eau varie de 0,99 à 0,8. Il semble que ce

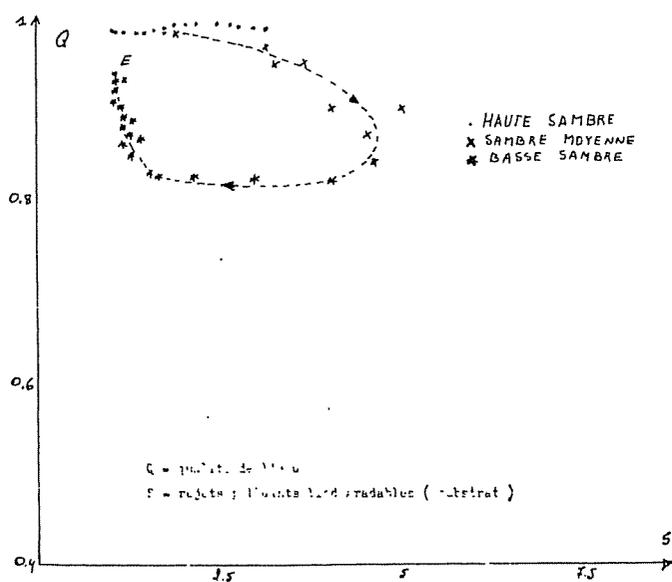


Fig. 5. — Cycle d'hystérésis de Q, fonction de S, dans le cas d'une épuration à 66 %.

soit suffisant pour ramener la rivière dans un état admissible. Une épuration plus élevée serait excessive, étant donné la disproportion entre les coûts supplémentaires entraînés et les résultats obtenus. En effet, la figure 6 montre que la diminution du cycle d'hystérésis, et donc l'amélioration de la qualité de l'eau, n'est pas proportionnelle à la dépollution effectuée. Il ne faut pas oublier que le coût de l'épuration augmente lorsque l'épuration est plus poussée (voir figure 7). Plus la dépollution augmente, moins les effets supplémentaires obtenus sont importants, et plus le prix de cette dépollution augmente.

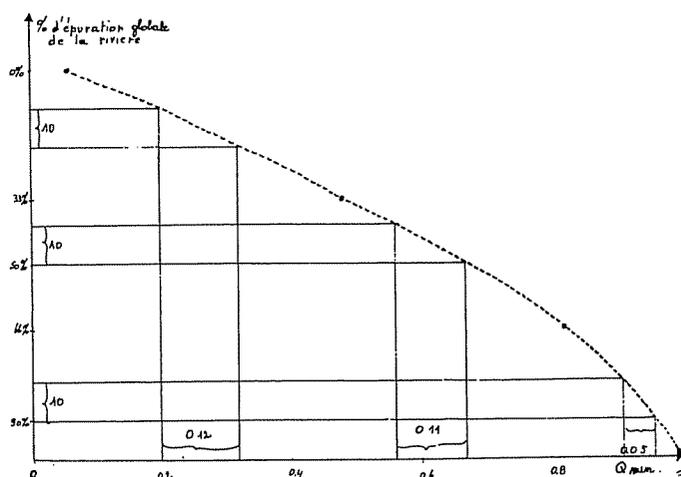


Fig. 6. — Q minimum en fonction du % d'épuration globale. Q = qualité de l'eau.

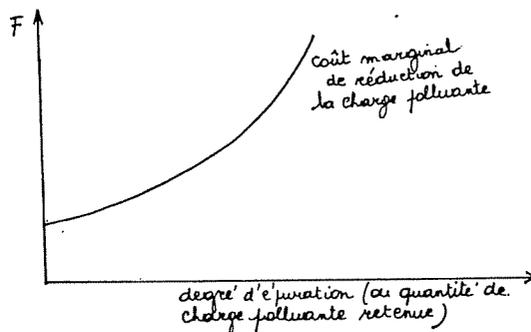


Fig. 7

## CONCLUSIONS

Le problème de l'eau n'est pas simple et il convient de le poser dans son contexte. La structure et le fonctionnement de l'économie industrielle contemporaine sont sources de perturbations, qui tendent à rompre l'équilibre spontané de l'écosystème. Il existe également une perte de diversité, cause importante de déséquilibre, qui s'est accompagnée de la modification des cycles de l'énergie et de la matière.

L'eau douce est relativement rare, compte tenu de la croissance des besoins humains. La plupart des pays industrialisés, comme le nôtre, sont déjà victimes d'une grave pénurie d'eau douce, encore aggravée par la pollution croissante de nos fleuves, capital hydrogéologique régional.

Ce problème des ressources est très sérieux en Wallonie, où l'état de la pollution de la Sambre et de la Meuse dépasse déjà le seuil critique.

Dans cette optique, nous avons voulu examiner l'influence de la pollution sur la qualité de l'eau d'une rivière. Nous avons présenté et analysé un modèle mathématique de la biodégradation en rivière polluée. En effet, la possibilité de connaître quantitativement le cycle d'auto-épuration d'une rivière ouvre la voie à l'étude de l'optimisation de l'épuration.

Le cas de la Sambre, rivière polluée, a été analysé.

Il existe un seuil critique d'auto-épuration. Si les quantités d'eau polluée rejetées dans le cours d'eau sont telles que ce seuil soit dépassé, la situation devient brusquement catastrophique.

Nous avons montré l'existence d'un cycle d'hystérésis : à une même quantité de polluant contenu dans la rivière, correspondent deux qualités de l'eau. Ceci prouve que les rivières ont une mémoire. Elles se souviennent toujours des perturbations qu'elles ont reçues par l'excès de pollution.

La possession d'un modèle mathématique permet de traiter le problème de l'optimisation de l'épuration. Nous avons montré qu'il existe un taux d'épuration suffisant pour ramener la rivière dans un état admissible. Au-delà, l'épuration est excessive, étant donné les coûts supplémentaires entraînés par rapport aux résultats obtenus. Plus la dépollution augmente, moins les effets supplémentaires récoltés sont importants, et plus le prix de cette dépollution augmente.

## REMERCIEMENTS

Le présent travail constitue une synthèse du mémoire, intitulé « Modélisation écologique d'une rivière en vue de l'optimisation de l'épuration », que nous avons réalisé dans le Service du Professeur F. Monfort et présenté en juillet 1978 à la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Liège, pour l'obtention du grade d'Ingénieur Civil Physicien.

C'est sous la direction du Docteur Daniel M. Dubois, Maître de Conférences à l'Université de Liège, que la présente étude a été réalisée, dans le cadre de son cours de BIOMATHEMATIQUE.

Nous remercions chaleureusement M. Dubois pour l'aide constante et efficace qu'il nous a apportée tout

au long de la réalisation de ce travail. Nous remercions également M. Edeline, Directeur de Recherches du CEBEDEAU, pour les précieux conseils qu'il nous a prodigués.

J. LECOMTE-BECKERS.

## ANNEXE

### 1. Le système d'équations

A la suite de nos conclusions sur les phénomènes principaux décrivant la dynamique biologique d'une rivière polluée, nous avons été amenés à considérer le système d'équations suivantes où  $S_2$  représente les apports biodégradables,  $S_1$  la somme des apports biodégradables et non biodégradables,  $S$  la concentration en substrat,  $P$  la concentration en phytoplancton,  $B$  la concentration en bactéries,  $Z$  la concentration en protozoaires et  $R$  la réserve de stock [réserves endogènes = substrat stocké par les bactéries. Voir le modèle en deux phases de Edeline et Lambert (1975)].

$$\frac{dS_2}{dt} = \text{entrées biodégradables} \quad (\text{IV - 1})$$

$$\frac{dS_1}{dt} = \text{entrées biodégradables} \\ \text{et non biodégradables} \quad (\text{IV - 2})$$

Taux de variation de la concentration en phytoplancton :

$$\frac{dP}{dt} = k_1 \left( 1 - \frac{S_1^2}{S_0^2 + S_1^2} \right) P \\ - \frac{k_2}{a_2} P Z \quad (\text{IV - 3})$$

Le second terme représente le taux de prédation par les protozoaires et le premier le taux de croissance du phytoplancton. Cette croissance est modulée par la

$$\text{fonction} \left( 1 - \frac{S_1^2}{S_0^2 + S_1^2} \right).$$

Celle-ci s'annule pour des valeurs de  $S_1$  supérieures à  $S_0$  (qui représente la concentration moyenne existant en Haute-Sambre).

Taux de variation de la concentration en substrat :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_2}{dt} - \frac{k_4}{a_4 S_2} S B - \frac{k_4}{a_4 S_2} B S \\ \left( 1 - \frac{R^2}{F^2 + R^2} \right) \frac{S^2}{G^2 + S^2} \\ - \frac{k_6}{a_6} \left( 1 - \frac{S^2}{D^2 + S^2} \right) Z S - \frac{k_8}{a_8} B \quad (\text{IV - 4})$$

$$\text{où } F = 0,15 S_2 \\ G = 0,5 S_2 \\ D = 0,02 S_2$$

Le second terme représente le taux de consommation par les bactéries, et le troisième le taux de stockage. Ce terme est modulé par deux fonctions. L'une

$\left(1 - \frac{R^2}{F^2 + R^2}\right)$  s'annule si on dépasse un certain niveau de stock, tandis que l'autre  $\left(\frac{S^2}{G^2 + S^2}\right)$  s'annule lorsqu'il n'y a plus assez de substrat pour stocker.

L'avant-dernier terme envisage le taux de prédation par les protozoaires. Ceux-ci ne consomment du substrat que s'il est en faible quantité. C'est pourquoi ce facteur est modulé par la fonction

$$\left(1 - \frac{S^2}{D^2 + S^2}\right)$$

Quant au dernier, il représente le taux de bactéries mortes qui deviennent du substrat utilisable.

Taux de variation de la concentration en réserves endogènes :

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} = & \frac{k_4}{S_2} B S \left(1 - \frac{R^2}{F^2 + R^2}\right) \frac{S^2}{G^2 + S^2} \\ & - \frac{k_5}{a_5} \left(1 - \frac{S^2}{C^2 + S^2}\right) B R \\ & - \frac{k_7}{a_7} R Z \end{aligned} \quad (IV - 5)$$

où  $C = 0,65 S_2$

Le second terme représente le taux de consommation des réserves par les bactéries. Ce terme est modulé par la fonction  $\left(1 - \frac{S^2}{C^2 + S^2}\right)$  qui est annulée lorsque le substrat externe est en forte densité.

Le premier terme représente le taux de croissance et est modulé par deux fonctions, pour les mêmes raisons que celles formulées dans l'équation précédente.

Quant au dernier facteur, il traduit la consommation par les protozoaires.

Taux de variation de la concentration en bactéries :

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} = & \text{entrée} + \frac{k^1}{S_2} S B \\ & + k_5 \left(1 - \frac{S^2}{C^2 + S^2}\right) B R \\ & - \frac{k_7}{a_7} B Z - k_8 B \end{aligned} \quad (IV - 6)$$

Les deuxième et troisième termes constituent des taux de croissance (consommation du substrat externe et du substrat interne), l'avant-dernier : un taux de prédation par les protozoaires, et le dernier : un taux de mortalité.

Taux de variation de la concentration en protozoaires :

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} = & - Z \left(k_3 + k_9 \frac{S_1^2}{S_0^2 + S_1^2}\right) \\ & + k_2 P Z + k_6 \left(1 - \frac{S^2}{D^2 + S^2}\right) Z S \\ & + k_7 B Z + k_7 R Z \end{aligned} \quad (IV - 7)$$

Le premier terme représente le taux de mortalité des protozoaires. En zone faiblement polluée, le coefficient de mortalité vaut  $k_3$  et, en zone fortement polluée,  $k_3 + k_9$ , car, dans ce cas, la fonction de modulation  $\frac{S_1^2}{S_0^2 + S_1^2}$  vaut 1.

Les autres termes traduisent des taux de croissance dus, respectivement; au phytoplancton, au substrat, aux bactéries et aux réserves endogènes.

Dans ces équations, les coefficients  $k$  sont des taux de croissance spécifique et les  $a$  des rendements.

- $k_1$  = taux de croissance spécifique du phytoplancton
- $k_2$  = taux de croissance spécifique des protozoaires se nourrissant de phytoplancton
- $k_3$  = taux de mortalité des protozoaires
- $k_4$  = taux de croissance spécifique des bactéries
- $k_5$  = taux de respiration endogène
- $k_6$  = taux de croissance spécifique des protozoaires se nourrissant de substrat exogène
- $k_7$  = taux de croissance spécifique des protozoaires se nourrissant de bactéries (et de réserve endogène)
- $k_8$  = taux de mortalité des bactéries
- $a_2$  = coefficient d'utilisation du phytoplancton par les protozoaires
- $a_4$  = rendement des bactéries lors de la respiration exogène
- $a_5$  = rendement des bactéries lors de la respiration endogène
- $a_6$  = coefficient d'utilisation du substrat exogène par les protozoaires
- $a_7$  = coefficient d'utilisation des bactéries (et du substrat endogène) par les protozoaires
- $a_8$  = coefficient de transformation des bactéries mortes en substrat.

## 2. Les valeurs initiales

A l'entrée en Haute Sambre, la valeur de la biomasse bactérienne est prise égale à 0,615 mg  $O_2/l$  en équivalent oxygène, et celle des protozoaires égale à 0,314 mg  $O_2/l$  en équivalent oxygène (moyennes de l'ensemble des déterminations à Lobbes).

La valeur de la biomasse algale dépend de l'époque de l'année considérée et est donnée par la moyenne des déterminations à Lobbes pour cette époque.

La valeur de la quantité de stock emmagasinée par la biomasse bactérienne est inconnue, et d'ailleurs impossible à déterminer dans l'état actuel de nos connaissances. Plutôt que de choisir une valeur positive arbitraire, nous avons posé comme valeur initiale la valeur nulle.

A l'entrée de la Haute Sambre, la rivière charrie une charge  $S_0$  inconnue, qui est prise comme condition initiale, au même titre que le débit et la température (tous deux liés à l'époque considérée).

Aux points de décharges ultérieures, les quantités de DCO et de DBO déversées sont connues (voir table 1). Lorsqu'il s'agit d'un égout, on considère qu'une masse bactérienne s'y est déjà formée et vaut 0,12 % de la charge de cet égout.

Il existe cependant un problème à résoudre : les charges sont données en  $\text{kg O}_2/\text{j}$  (voir table 1), tandis que, dans nos équations, nous avons choisi de travailler en  $\text{mg O}_2/\text{l}$ . Il y a donc lieu d'effectuer la conversion suivante :

$$S = \frac{1\,000\,X}{24 \times 3\,600\,Q} \text{ mg O}_2/\text{l}$$

où S est la DCO (ou DBO) déversée en  $\text{mg O}_2/\text{l}$ , X la DCO (ou DBO) journalière en  $\text{kg O}_2/\text{j}$  rejetée et Q le débit (en  $\text{m}^3/\text{s}$ ) au point considéré.

## BIBLIOGRAPHIE

- CANALE R.P. (1969). « Predator-prey relationship in a model for the activated process ». *Biotechnology and Bioengineering*, Vol. XI, pages 887-907.
- CANALE R.P., LUSTIG T.D., KEHRBERGEE P.M. and SALO J.E. (1973). « Experimental and mathematical modeling studies of protozoan predation on bacteria ». *Biotechnology and Bioengineering*, Vol. XV, pages 707-728.
- DUBOIS D.M. (1975). « Learning, adaptation and evolution of the environment - ecosystem couple ». *J. of Cybernetics*, 5, 2, pp. 109-125.
- DUBOIS D.M. (1974). An index of fluctuations  $D_0$  connected with diversity and stability of ecosystems : applications in the Volterra-Lotka model and in an experimental distribution of species. Belgian Natl. R.-D. Program on the environment, WATER, Sea Project. Mathematical Model, CIPS, Annual Report III, pp. 320-345.
- DUBOIS D.M. (1975). Hydrodynamic aspects in environmental and ecological enhancement. Proceedings second world congress, International Water Resources Association, New Delhi, vol. V, pp. 413-419.
- DUBOIS D.M. (1978). Limits to modelling and stochastic simulation of biological systems in seas, lakes and rivers. Proceedings of the IFIP Working conference on modelling and simulation of Land, Air and Water Resources, Ghent 1977, North-Holland Publ. Company, Ed. by G.C. Vansteenkiste.
- ECKENFELDER W.W.Jr (1973). « L'eau dans l'industrie, pollution, traitement, recherche de la qualité », traduit de l'américain par Pierre CLAVIER, ingénieur E.N.S.C.P., Technique et Documentation, Paris.

EDELIN F. (1964). « La recherche opérationnelle et l'épuration des rivières », *Tribune du CEBEDEAU*, n° 248-249, pp. 334-335.

EDELIN F. (1972). « Les difficultés de l'établissement d'un modèle mathématique de rivière », *Tribune du CEBEDEAU*, n° 339, pp. 60-65.

EDELIN F. et LAMBERT G. (1975). « Self-epuration of river : a two phase model for bacterial biodegradation ». *Modèle mathématique de la Sambre, Rapport de synthèse, Annexe III, Aspects biologiques de la Sambre*, pp. 581-610, C.I.P.S.

EDELIN F. et BUET (1978). *Tribune du CEBEDEAU*.

XXX, « Modèle mathématique de pollution d'eaux intérieures, rapport de synthèse », Journées d'Études des 11-14 février 1974 — Commission Interministérielle de la Politique Scientifique.

XXX, (1975). « Modèle mathématique de la Sambre », Rapport de synthèse, C.I.P.S.

XXX, (1975). « Modèle mathématique de la Sambre ».

Annexe I, Aspects physiques de la Sambre.

Annexe II, Aspects chimiques de la Sambre.

Annexe III, Aspects biologiques de la Sambre.