Les nombres complexes comme modèles algébriques de similitudes directes : avec ou sans matrices ?

H. Rosseel, M. Schneider

Ladimath, ULg

Au congrès SBPM de 2012, nous avons présenté une approche des nombres complexes basée sur la modélisation de transformations géométriques du plan que sont les similitudes directes dont $O(0,0)$ est un point fixe.

Ayant déjà publié les enjeux et une analyse de cette approche (Rosseel et Schneider, 2003, 2004 et 2011), nous nous proposons ici de faire écho à l'article de Lartillier (2012) paru sur ce sujet dans le numéro 18 de *Losanges*. Dans une première partie, nous reviendrons effectivement sur la place que pourrait prendre, dans un cursus scolaire, la modélisation des transformations concernées y compris leur représentation matricielle. Nous en concluerons que la modélisation de ces transformations par les complexes, avec exploitation matricielle, a un coût qui questionne les programmes. Dans une seconde partie, nous reviendrons sur les choix que nous avons faits pour introduire les nombres complexes et résumerons notre argumentation de cette approche.

1 La question du coût et de la nécessité de la représentation matricielle pour introduire les complexes

A l'époque des mathématiques modernes, plusieurs manuels, en France et en Belgique (par exemple, Papy, 1967) présentaient les nombres complexes comme des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

L'approche préconisée par LARTILLIER s'y apparente et, dans la section 1.1, nous la décrivons dans les grandes lignes.

1.1 Une approche des complexes par les matrices

Le point de départ de LARTILLIER (Ib.) est la caractérisation matricielle d'une transformation linéaire t du plan à partir des images des vecteurs de la base choisie, $t(\overrightarrow{e_1}) = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}$; $t(\overrightarrow{e_2}) = c\overrightarrow{e_1} + d\overrightarrow{e_2}$, a, b, c et $d \in \mathbb{R}$. L'image $\overrightarrow{x'}(x'_1, x'_2)$ du vecteur $\vec{x}(x_1, x_2)$ s'écrit, dans ce cadre :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Cette représentation est ensuite particularisée, d'une part, aux homothéties de centre $(0, 0)$ et de rapport ρ codées par des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ et, d'autre part, aux rotations de centre $(0, 0)$ représentées par des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.

Les similitudes directes de centre $(0, 0)$ sont alors caractérisées par des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

laquelle se décompose en

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } a \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

ce qu'on note encore sous la forme $a + bi$.

Dans cette introduction, l'auteur voit apparaître ce qu'il appelle un “réel dictionnaire” entre nombres complexes, similitudes directes du plan, binômes $a + bi$, couples de réels (a, b) ou points d'un plan.

Cette élégante approche met en outre en évidence et justifie, à partir du produit matriciel, la forme du produit entre deux complexes ainsi que les formules d'addition du cosinus et du sinus.

Pourquoi pas ? Encore faut-il, d'après nous, initier les élèves aux transformations linéaires et à leur caractérisation matricielle. Ce qui n'est pas une si mince affaire et la question du sens, évoquée par Lartillier à propos des complexes, se reporte sur les transformations linéaires. Une introduction à celles-ci a été enseignée et analysée par Schneider (1981). Nous faisons ci-dessous une synthèse de cette approche et de ses étapes.

1.2 D'une modélisation de l'ombre solaire aux transformations linéaires et affines

Une première étape consiste à étudier en géométrie synthétique 3D ce qui se modifie ou, au contraire, reste invariant, des propriétés d'une figure géométrique dans son ombre au soleil. Une attention particulière est accordée à l'ombre d'un rectangle ou d'un parallélogramme.

Une modélisation de la figure observée, par projection sur un plan parallèlement à une droite qui ne lui est pas parallèle, rend compte des déformations obtenues et permet de les valider : sauf cas particuliers de positions de la figure initiale par rapport au plan de projection, l'ombre est un parallélogramme. Ce qui signifie que, de la figure à son ombre, le parallélisme des droites est conservé. L'alignement des points l'est aussi pourvu que l'ombre soit projetée sur un plan. Qui plus est, trois points alignés, par exemple sur un côté ou une diagonale du rectangle éclairé, ont des ombres alignées qui sont positionnées de la même manière les unes par rapport aux autres, les distances entre elles pouvant changer par rapport à celles des points éclairés mais non leurs rapports.

Une deuxième étape consiste à modéliser des transformations du plan sur base de leurs invariants. C'est l'occasion d'exploiter, voire d'introduire, la notion de vecteur. En effet, comment rendre compte du passage de points alignés A, B et C à leurs ombres ou images A', B' et C' (figure 1) ? La conservation du rapport des distances : $\frac{CA}{CB} = 2 = \frac{C'A'}{C'B'}$ n'y suffit pas : C' peut se trouver à deux positions sur la droite AB ou même en dehors. L'introduction à la notion de vecteur, ou sa remobilisation, trouve là sa place. Car, exiger la conservation, non plus du rapport de $\frac{CA}{CB}$, mais celui du rapport de section de C par rapport à A et B, soit $k = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$ (nous nous permettons cette écriture, les vecteurs étant colinéaires) entraîne, en vertu de la définition même des vecteurs, que A', B' et C' soient alignés et disposés de la même manière que A, B et C, C' étant à l'extérieur de l'intervalle $[A'B']$ (figure 1).

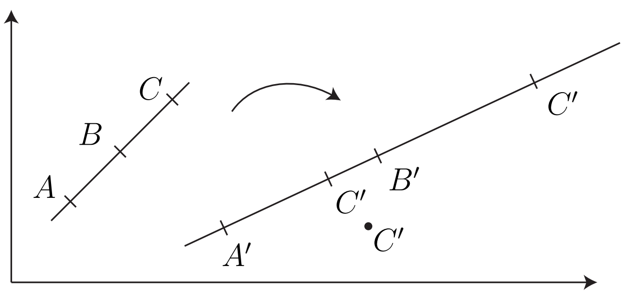

Figure 1

En outre, l'introduction ou l'usage des vecteurs permet d'exprimer la conservation des parallélogrammes : en effet, cette conservation est rendue par l'addition vectorielle, ainsi que l'illustre la figure 2 où l'égalité $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ est conservée au niveau des images : $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{A'B'}$.

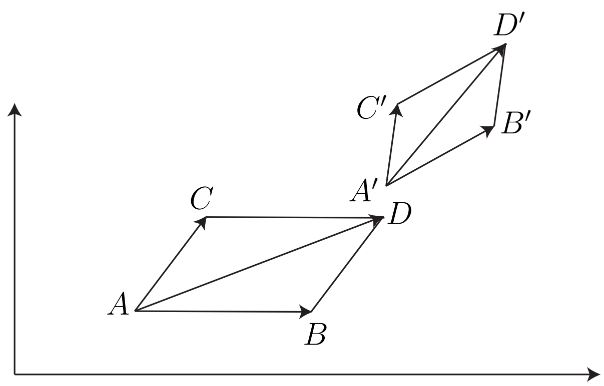

Figure 2

On tire de cette investigation une modélisation vectorielle exprimant les invariants et les changements observés sur les ombres au soleil et dont il faut tenir compte pour définir, dans le plan, des transformations géométriques qui déforment "pareillement" les figures géométriques. Comme l'illustre la figure 3, il faudra conserver les combinaisons linéaires de vecteurs : si $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{A'D'} = \lambda\overrightarrow{A'B'} + \mu\overrightarrow{A'C'}$, λ et $\mu \in \mathbb{R}$.

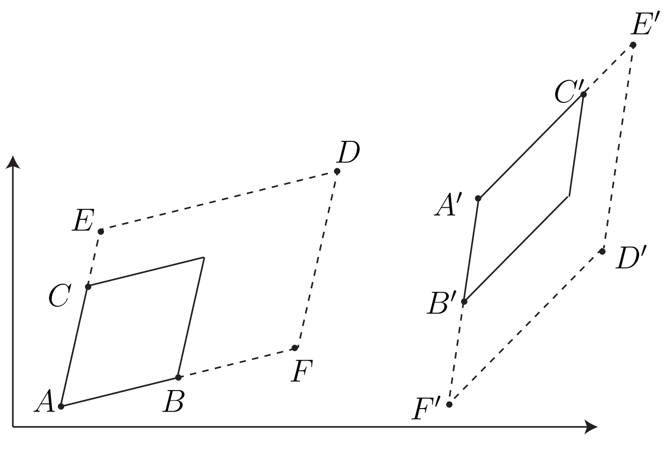

Figure 3

On se rapproche ici de la façon de définir, en algèbre linéaire, une transformation linéaire du plan t muni d'une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$:

$$t(\vec{x}) = t(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}) = x_1 t(\overrightarrow{e_1}) + x_2 t(\overrightarrow{e_2}), \quad x_1 \text{ et } x_2 \in \mathbb{R}.$$

C'est bien là effectivement une caractérisation qui conduit à l'écriture matricielle d'une telle transformation. En effet, si $t(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1'} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}$, $t(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2'} = c\overrightarrow{e_1} + d\overrightarrow{e_2}$ et $t(\vec{x}) = \overrightarrow{x'} = x_1'\overrightarrow{e_1} + x_2'\overrightarrow{e_2}$, on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x'} = t(\vec{x}) &= t(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}) \\
&= x_1 t(\overrightarrow{e_1}) + x_2 t(\overrightarrow{e_2}) \\
&= x_1(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}) + x_2(c\overrightarrow{e_1} + d\overrightarrow{e_2}) \\
&= a(x_1 + cx_2)\overrightarrow{e_1} + b(x_1 + dx_2)\overrightarrow{e_2} \\
&= x_1'\overrightarrow{e_1} + x_2'\overrightarrow{e_2}
\end{aligned}$$

et, par conséquent

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Cependant, comme l'illustre la figure 4, cette propriété matricielle s'applique aux composantes de vecteurs mais son transfert aux coordonnées de points suppose quelque attention.

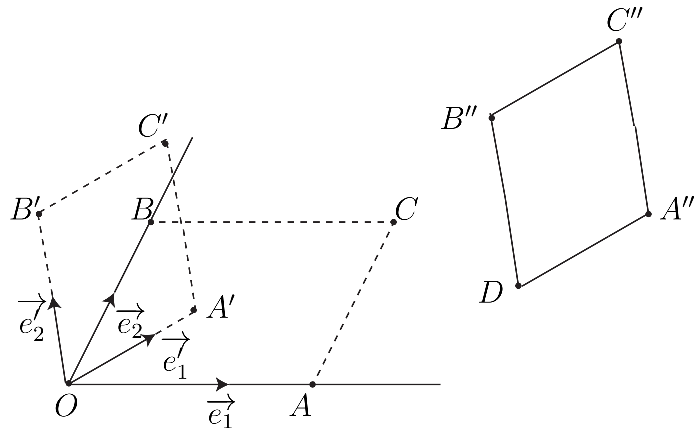

Figure 4

En effet, ce calcul matriciel envoie le couple $(0, 0)$ sur lui-même. Donc, il peut rendre compte du passage du parallélogramme $OACB$ au parallélogramme $OA'C'B'$ mais non au parallélogramme $DA''C''B''$: il faudra pour ce faire composer cette transformation linéaire avec une translation [1] (d_1, d_2) qui amène O sur D. Par conséquent, si les coordonnées (a'_1, a'_2) de A', par exemple, s'obtiennent à partir de celles de $A(a_1, a_2)$ par le calcul :

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

il faut leur ajouter (d_1, d_2) pour obtenir celles de $A''(a''_1, a''_2)$:

$$\begin{pmatrix} a''_1 \\ a''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

Pour nous, c'est tout cela qu'il faut comprendre pour gérer convenablement l'écriture matricielle d'une transformation linéaire. Car, comme montré par Schneider (1981), cet apprentissage des transformations linéaires et affines est semé d'embûches, à commencer par le fait que les élèves recourent à la représentation matricielle aussi bien pour les secondes que pour les premières ! L'enjeu devient alors de leur baliser le champ d'utilisation des matrices pour modéliser les transformations jusqu'aux frontières de celui-ci à ne pas franchir ...

Peut-on payer ce prix pour introduire les nombres complexes ? Et est-ce vraiment nécessaire dans cette perspective ? En se basant sur des programmes scolaires – qui risquent bien de s'appauvrir s'ils s'inspirent comme

1. Cette composée s'appelle transformation affine.

il se doit des nouveaux référentiels de compétences – LARTILLIER (2012) apporte à la première question des réponses qui nous semblent convaincantes en ce sens que l'étude des transformations linéaires y est programmée. Après tout, comme cet auteur le rappelle, on demande, dans ces programmes, “d'utiliser les matrices pour décrire les transformations linéaires”, “d'identifier ou caractériser la composée de deux transformations” et d'introduire les opérations de calcul matriciel “à partir de la géométrie et de contextes que l'on modélise”. Mais c'est surtout la deuxième question qui nous préoccupe et à laquelle nous tentons de répondre dans la section suivante.

1.3 Doit-on passer par une écriture matricielle pour modéliser les similitudes directes ?

Dans le parcours proposé par SCHNEIDER (1981), une question récurrente est posée pour chaque transformation du plan étudiée : “A quel nombre minimal de points faut-il attribuer une image pour déterminer entièrement une transformation donnée ?”. Pour ce qui est des transformations affines de façon générale, la réponse est : trois points non alignés, car il est alors possible de déterminer l'image de n'importe quel autre point en exploitant l'invariance du parallélisme et du rapport de section dans une figure qui “relie” le quatrième point D à ceux A, B et C dont on impose l'image. La figure 5 illustre cette idée dans un cas précis : la figure-clé est évidemment un parallélogramme !

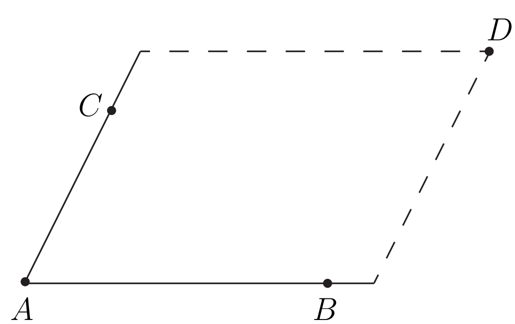

Figure 5

Notons, au passage, que Schneider (Ib.) montre l'intérêt de contraster, du point de vue de la question posée, les transformations affines et les projectivités lesquelles ne conservent plus que l'alignement (avec envoi éventuel d'un point sur un point à l'infini) et cet invariant qu'est le rapport anharmonique :

cela permettait de faire comprendre aux élèves que la figure emblématique de cette géométrie dite projective n'est plus le parallélogramme mais un "quadrangle complet", figure assez énigmatique formée par 6 droites joignant deux à deux 4 points du plan non alignés 3 à 3 : ceux auxquels on peut attribuer arbitrairement une image. Cela permettait aussi d'expliquer l'importance, pour étudier les transformations linéaires ou plus généralement affines, des repères affins constitués, dans le plan, d'une origine O et d'une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et déterminant trois points quelconques non alignés : $(0,0), (1,0)$ et $(0,1)$, ceux précisément auxquels on attribuera arbitrairement une image pour déterminer une transformation linéaire. C'est là, pour nous, la clé de la représentation matricielle puisque celle-ci donne l'image de n'importe quel autre point (ou vecteur lié) à partir de celles des vecteurs de base.

Revenons, avec ce point de vue à l'esprit, aux transformations linéaires particulières que sont, d'une part, les rotations de centre $O(0,0)$ et, d'autre part, les homothéties de même centre. On sait que, pour déterminer une rotation, il suffit de connaître l'image de deux points pourvu que les médiatrices des segments respectifs joignant chacun de ces points à son image soient sécantes : leur intersection est alors le centre de la rotation dont l'angle est déterminé par un point et son image. Mais on connaît le centre $O(0,0)$ des rotations qui nous intéressent dans la perspective d'une construction de l'ensemble des complexes. Donc l'image d'un seul point – le plus simple est sans doute le point $(1,0)$ – suffit à déterminer une telle rotation, l'angle θ étant l'angle tel que l'image de $(1,0)$ s'exprime sous la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$, [2]

En ce qui concerne les homothéties impliquées, c'est pareil : leur centre est $(0,0)$ et elles sont donc déterminées par leur rapport que nous considérons positif par référence aux agrandissements ou réductions des programmes scolaires. Or, l'image de $(1,0)$ par une telle homothétie, soit $(\rho, 0)$, donne ce rapport. Au total, l'image de $(1,0)$ par une similitude directe de centre $(0,0)$, soit $(a,b) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, nous précise de quelle similitude il s'agit et, comme nous le verrons, cela suffit comme indication pour déterminer l'image de n'importe quel autre point du plan hormis $(0,0)$.

Notre conclusion de cette première section est la suivante : le détour par les transformations linéaires et leur écriture matricielle a un coût didactique important si l'on veut qu'il fasse sens pour les élèves. Nous estimons qu'il

2. Nous supposons ici que le concept de rotation a été travaillé auparavant comme caractérisé par un centre et un angle dont la mesure appartient à $[0, 360[$ ou $[0, 2\pi[$ suivant que l'unité choisie est le degré ou le radian.

en vaut la peine si l'on passe du temps par ailleurs à développer les transformations linéaires et le rôle joué par les matrices dans leur étude. Sinon, pour caractériser les similitudes directes de centre $(0, 0,)$, il suffit de se polariser sur l'image d'un point : le point $(1, 0)$ par exemple. Point n'est donc besoin d'une écriture matricielle ; deux paramètres suffisent : a et b ou ρ et θ comme l'indique d'ailleurs la forme particulière des matrices associées aux similitudes en question. C'est le choix que nous avons fait, comme décrit à la section 2.

2 Articuler aspects géométriques et algébriques pour introduire les complexes

Ce titre résume assez bien notre position et les enjeux des expérimentations que nous avons menées dans les classes. Nous n'en rendrons pas complètement compte ici renvoyant le lecteur à Rosseel et Schneider (2003, 2004 et 2011) pour de plus amples développements. Nous nous contenterons, dans cet article, de montrer les risques d'une approche trop axée sur le seul registre algébrique (section 2.1) et de résumer ce que nous proposons pour l'approche géométrique (section 2.2).

2.1 Les risques d'approches essentiellement algébriques

Parmi les multiples approches possibles des nombres complexes que l'on rencontre dans l'enseignement secondaire en Belgique consiste à postuler d'emblée l'existence d'un nombre i dont le carré vaut -1 dans le but d'étendre le nombre d'équations solubles. Un nombre complexe est ainsi "défini" comme un nombre de la forme $a + bi$, a étant nommé partie réelle du nombre et b sa partie imaginaire. Et ce, sans que soient *a priori* définies les opérations d'addition et de multiplication en jeu dans cette écriture et *a fortiori* le carré.

L'addition de deux nombres complexes revient alors à additionner respectivement leurs parties réelles et imaginaires. Quant à leur produit, sa forme est dictée par la volonté de garder des propriétés des opérations usuelles sur les nombres réels, en particulier la double distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, ce qui donne :

$$(a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + (ab' + a'b)i.$$

Une autre approche, plus fréquente dans l'enseignement supérieur belge, consiste à définir un nombre complexe comme un couple (a, b) de nombres réels, les couples étant munis des lois

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{et} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc),$$

la forme donnée à la multiplication de couples n'étant pas vraiment motivée.

Une écriture trigonométrique fait suite à chacune de ces deux approches et débouche *in fine*, dans certains cas seulement, sur l'interprétation des nombres complexes et de leurs opérations en termes de transformations géométriques du plan.

Nous avons interviewé des élèves de l'enseignement secondaire ayant reçu un enseignement des nombres complexes postulant d'entrée de jeu l'existence d'un nombre i dont le carré vaut -1. Nombreuses sont les réactions récoltées qui témoignent d'un réel malaise. En voici un petit échantillon :

- *"J'ai du mal à cerner cette idée que $i^2 = -1$. J'aime bien les choses bien concrètes, réelles et j'aime faire des schémas et des dessins. Ici, c'est carrément le flou. Je ne comprends pas pourquoi on doit poser $i^2 = -1$. Pourquoi pas $i^2 = -0,97$? Pourquoi ça marche avec $i^2 = -1$?"*
- *"L'évocation de "nombre complexe" me fait penser à l'impossible, à des nombres sans doute compliqués et qui n'existent peut-être pas. Je pense aussi, en entendant ce groupe de mots résonner dans mes oreilles, que les hommes les ont inventés pour résoudre l'"irrésolvable", ce dont toute personne sensée dirait "c'est impossible" ou "cela n'existe pas". D'ailleurs, les professeurs des années inférieures vous diront tous que la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas. Et pourtant, lorsqu'on voit cette symphonie de "i" mélangés avec des a et des b, des cosinus et autres logarithmes, on se rend bien vite compte, soit que les professeurs des années inférieures nous ont menti, soit que le professeur de rhéto veut nous faire découvrir une nouvelle dimension des mathématiques inconnue de nous, élèves, jusqu'alors. La question que je me pose dès lors est la suivante : pourquoi les professeurs des années précédentes ont-ils agi de la sorte ?"*
- *"Premièrement, la notion de nombre complexe est quelque chose de flou dont visiblement personne ne connaît la ma-*

jeure partie de manière claire, quelque chose d'absurde et d'insignifiant puisqu'on ne peut se faire une idée réelle d'un fait imaginaire. Je ne vois pas l'intérêt de jouer avec des notions purement abstraites sans utilité et donc sans application. Il s'agit pour moi d'un truc pas drôle à apprendre, je n'y ai rien compris, absolument rien."

La question "quel intérêt à avoir inventé les nombres complexes ?" donne lieu à maintes réflexions exprimant le côté jugé absurde de ces nombres. Ainsi,

- *"Aucun intérêt à part pour les mathématiciens qui font ça de leur vie. Une prise de tête inutile."*
- *"Eh bien, je ne sais pas trop à quoi ça sert, à quoi bon se compliquer la vie ? Je vote pour la simplicité."*

Un tel malaise a été relevé dans d'autres recherches. En particulier, celles de Bagni (1997) qui observe que 2 % seulement d'élèves du secondaire acceptent la résolution de l'équation $x^2 = -1$ sous la forme $x = i$ et $x = -i$. On peut interpréter ce malaise en évoquant un obstacle épistémologique dont Schneider (1991 et 2008) montre les incidences sur de multiples apprentissages : si les élèves refusent les nombres complexes, c'est en raison d'une vision positiviste des concepts mathématiques qui se doivent être un prolongement d'une expérience concrète permettant de les appréhender par nos sens. Cet obstacle s'observe d'ailleurs dans l'histoire des mathématiques ainsi que développé dans Rosseel et Schneider (2011).

Cependant, ce malaise à l'égard des nombres complexes n'est pas toujours exprimé par les élèves lors de l'enseignement reçu. En effet, contrat didactique oblige, ceux-ci attendent de voir en quoi consistent les exercices du chapitre, sachant que c'est de leur maîtrise (souvent mécanique) que dépend leur réussite. Ainsi, à notre question "Que pensez-vous des exercices ?", ils répondent :

- *"Il faut résoudre des équations. Je ne trouve pas cela difficile."*
- *"Les exercices sont un peu plus difficiles que ceux qu'on faisait en 4^e^ (15-16 ans) avec le réalisant, mais ce n'est pas hyper compliqué ; c'est plus facile que les sinus et cosinus. Les exercices qu'on fait, c'est parfait."*

Car, interroger le professeur sur le sens des nombres complexes suppose de s'engager dans une attitude plus rationnelle dont les élèves peuvent craindre les retombées sur la manière de les évaluer.

Quant à l'approche par les couples, elle ne va pas de soi pour tous, loin s'en faut, comme nous avons pu le constater en interrogeant de futurs professeurs en formation initiale.

- *"On peut les représenter dans un espace de dimension* 2*. La représentation est concrète mais la signification ne l'est pas tellement. Dans le plan complexe, ce qui est concret, c'est la norme du nombre, sa distance à l'origine."*
- *"Pour moi, ce ne sont pas de vrais nombres parce que dans l'acception courante, un nombre est quelque chose que l'on peut "dénombrer". Ce n'est pas le cas des complexes."*
- *"Je pense que pour des élèves du secondaire, les nombres complexes restent un domaine fort calculatoire que des élèves ayant choisi une option mathématique acceptent assez facilement mais sans en voir l'utilité. Je pense aussi que l'analogie avec les coordonnées dans le plan peut faire sentir aux élèves l'intérêt d'avoir deux nombres pour exprimer un point. Mais je ne vois pas comment y relier le fait que* $i^2 = -1$*."*
- *"Moi aussi, j'ai du mal à m'imaginer un nombre complexe. Cela reste artificiel. Pourtant, je connais le plan de Gauss, mais on ne peut pas le comparer au plan* $\mathbb{R}^2$ *où on repère des positions. Et même si les couples représentent des transformations, je ne vois pas pourquoi ça aide à représenter. Le couple* $(1, 2)$ *je vois, mais il faut s'imaginer* $1 + 2i$ *et, pour moi, ce n'est pas qu'un changement d'écriture ..."*

Nous reviendrons plus loin sur ce dernier propos pour décrire, ci-dessous, les grandes lignes d'une approche géométrique des nombres complexes.

2.2 Les nombres complexes comme codages algébriques de similitudes

Cette approche fait des nombres complexes des modèles de similitudes directes de centre $(0, 0)$. Toutefois, conformément à la position que nous avons défendue à la section 1, nous n'exploiterons pas l'expression matricielle des similitudes pour nous polariser sur l'image qu'elles donnent au point $(1,0)$. Voici les grandes étapes de cette approche.

- *Quelques exemples numériques simples mais variés amènent à conclure que toute rotation de centre* $(0,0)$ *et d'amplitude* θ *envoie le point de coordonnées* $(1,0)$ *sur le point de coordonnées* $(\cos\theta, \sin\theta)$ *du cercle trigonométrique. De plus, l'angle d'une rotation de centre* $(0,0)$ *est déterminé dès que l'on connaît l'image* (a,b) *de* $(1,0)$ *par cette rotation : l'écriture* $(a,b) = (\cos\theta, \sin\theta)$ *permet de trouver* θ*.*
- *Une similitude directe de centre* $(0,0)$*, d'angle* θ *et de rapport* ρ *est définie comme la composée, dans un ordre quelconque, d'une rotation de centre* $(0,0)$ *et d'amplitude* θ *et d'une homothétie (agrandissement ou réduction) de centre* $(0,0)$ *et de rapport* $\rho > 0$*. On démontre que, si* $P(a,b)$ *est un point quelconque du plan tel que* a *et* b *ne sont pas tous deux nuls, deux cas peuvent se présenter :*
  - *Si* P *appartient au cercle trigonométrique, c'est-à-dire si* $d(O,P) = \rho = \sqrt{a^2+b^2} = 1$*, alors il existe une et une seule rotation de centre* $(0,0)$ *et d'amplitude* $\theta > 0$ *qui donne* P *comme image du point* $A(1,0)$*. Ceci s'écrit brièvement :* $P(\cos\theta, \sin\theta)$*.*
  - *Si* P *n'appartient pas au cercle trigonométrique, c'est-à-dire si* $\rho = \sqrt{a^2+b^2} \neq 1$*, alors* P *est l'image de* $(1,0)$ *par une similitude directe de centre* $(0,0)$ *et une seule. Le point* P *s'écrivant sous la forme* $P(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$*, cette similitude est composée d'une rotation d'angle* θ *et d'une homothétie de rapport* ρ*.*

  Tout point P *du plan, différent de l'origine du repère, a donc deux écritures :*
  - *En termes de coordonnées cartésiennes :* $P(a,b)$*.*
  - *Sous forme d'une écriture trigonométrique :* $P(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ *;* ρ *et* θ *sont encore appelées coordonnées polaires.*

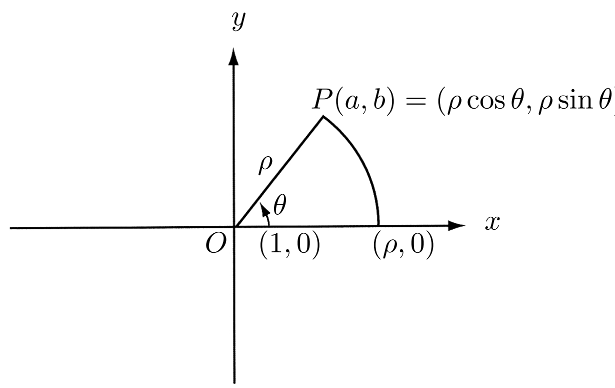

Figure 6

Par conséquent, tout couple de réels (a,b) peut coder une similitude directe dont le centre est $(0,0)$ et qu'il détermine entièrement. Ce couple est l'image de $(1,0)$ par cette similitude et son écriture trigonométrique livre l'angle de la rotation et le rapport d'homothétie en lesquelles la similitude se décompose.

- *La multiplication des couples découle alors de la composée de deux similitudes : soit s_1 une première similitude directe codée par $A'(a_1,b_1) = (\rho_1\cos\theta_1, \rho_1\sin\theta_1)$ et s_2 une seconde codée par $A''(a_2,b_2) = (\rho_2\cos\theta_2, \rho_2\sin\theta_2)$.*

  Par s_1, $A(1,0)$ est envoyé sur $A'(\rho_1\cos\theta_1, \rho_1\sin\theta_1)$ qui, à son tour, est envoyé par s_2 sur $A''(\rho_1\rho_2\cos(\theta_1+\theta_2), \rho_1\rho_2\sin(\theta_1+\theta_2))$, comme cela est illustré par la figure 7, où $\rho_1 > 1$ et $\rho_2 < 1$.

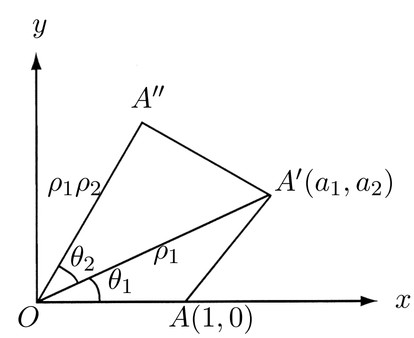

Figure 7

Le couple $(\rho_1\rho_2\cos(\theta_1+\theta_2), \rho_1\rho_2\sin(\theta_1+\theta_2))$ permet donc de coder la similitude s_3, composée de s_1 et de s_2.

On peut écrire ce couple en termes de coordonnées cartésiennes à condition de savoir exprimer les cosinus et sinus d'une somme de deux angles en fonction des sinus et cosinus de chacun de ces angles. Cela donne :

$$\begin{aligned}
&(\rho_1\rho_2\cos(\theta_1+\theta_2), \rho_1\rho_2\sin(\theta_1+\theta_2)) \\
&\quad = (\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2), \rho_1\rho_2(\sin\theta_1\cos\theta_2 \\
&\qquad + \cos\theta_1\sin\theta_2)) \\
&\quad = (\rho_1\cos\theta_1\rho_2\cos\theta_2 - \rho_1\sin\theta_1\rho_2\sin\theta_2, \rho_1\sin\theta_1\rho_2\cos\theta_2 \\
&\qquad + \rho_1\cos\theta_1\rho_2\cos\theta_2) \\
&\quad = (a_1a_2 - b_1b_2, b_1a_2 + a_1b_2).
\end{aligned}$$

Par conséquent, composer deux similitudes s_1 et s_2 revient à définir une nouvelle opération sur les couples qui les représentent :

$$\begin{aligned}
s_1 &\to (a_1, b_1) \\
s_2 &\to (a_2, b_2) \\
s_2 \circ s_1 &\to (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, b_1a_2 + a_1b_2).
\end{aligned}$$

- *Les couples de la forme $(a, 0)$ peuvent être assimilés au réel a, leur somme et produit se réduisant en somme et produit de réels :*

$$\begin{aligned}
(a, 0) + (a', 0) &= (a + a', 0) \\
(a, 0) \times (a', 0) &= (a \cdot a', 0).
\end{aligned}$$

- *Les couples de réels (a, b) s'additionnent et se multiplient. Pour cette raison, on les appelle également "nombres"' en spécifiant "complexes"' pour ne pas les confondre avec les nombres réels.*
- *Parmi ces nombres complexes, il y en a un, $(0, 1)$ qui, multiplié par lui-même, c'est-à-dire élevé au carré, donne le couple $(-1, 0)$:*

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0).$$

En assimilant le couple $(-1, 0)$ au réel -1 et en notant i le couple $(0, 1)$, le calcul précédent s'écrit :

$$i^2 = i \times i = -1.$$

Le "nombre" i fournit une nouvelle écriture des complexes :

$$\begin{aligned}
(a, b) &= (a, 0) + (0, b) \\
&= a(1, 0) + b(0, 1) \\
&= a + bi.
\end{aligned}$$

> *En conclusion, dans cet univers de couples, nous possédons au moins une solution à l'équation $x^2 = -1$ (vérifiée quand $x = i$). Or, cette équation est insoluble dans l'ensemble des nombres réels. Mais attention, il ne faut pas perdre de vue que i est un couple, que* 1 *représente le couple* $(1, 0)$ *et que le carré renvoie à la multiplication que nous avons définie sur les couples.*

Bien sûr, il s'agit d'une synthèse qui doit être ponctuée de phases d'exploration de tâches, somme toute, assez banales telles, par exemple, déterminer les coordonnées de l'image du point $(1, 0)$ par la rotation de centre $(0, 0)$ et d'angle 150°.

Cette approche est inspirée par l'histoire des mathématiques, d'une manière particulière en ce sens qu'elle prend comme point de départ l'aboutissement de la crise historique associée aux "imaginaires", crise résorbée par leur représentation gaussienne. Toutefois, comme le montre le propos d'un futur professeur en formation initiale, repris plus haut, tout n'est pas réglé. Un travail de type plus algébrique décrit dans Rosseel et Schneider (2011) et complémentaire de l'approche géométrique décrite ici, permet une réflexion de type épistémologique avec les élèves : quel questionnement suscite des écritures du type $\sqrt{-1}$, comment le règle-t-on dans l'histoire ?

Par ailleurs, l'investissement fait dans l'approche géométrique doit avoir quelque rentabilité dans la vie scolaire des élèves : des démonstrations de propriétés de figures géométriques exploitant les complexes trouvent là leur place.

Conclusion

Notre conclusion sera brève : quelle que soit l'approche, l'enseignement des nombres complexes suppose une "théâtralisation", sous une forme ou une autre, grâce à laquelle les élèves peuvent comprendre qu'il n'y a, tous comptes faits, aucun mystère caché et que, si l'on parle de nombres, c'est uniquement en raison des opérations auxquelles se prêtent les petites "bêtes" sur lesquelles on travaille. Comme le dit si bien Jacquard (2001) :

> *"En fait, il s'agit d'un malentendu. Le trop fameux nombre i n'est pas "un nombre". Tout devient facile si l'on admet que les manipulations auxquelles nous allons nous livrer à son propos concernent non pas des nombres mais des "couples de nombres".*

La fantasmagorie alors disparaît et chacun peut suivre un cheminement qui n'a plus rien de mystérieux."

Références

[1] Bagni G.-J., *History and didactics of mathematics : an experimental research*, Nucleo di ricerca in didattica della matematica, Bologne, 1997.

[2] Boutriau J.-Lievens J., *Mathématique d'Aujourd'hui*, Cours de deuxième de l'enseignement secondaire, sections Scientifique A, Latin-Mathématique, Dessain, 1972.

[3] Jacquard A., *La Science à l'usage des non-scientifiques*, Calmann-Lévy, Paris, 2001.

[4] Lartillier M., Pour une réhabilitation de l'enseignement des nombres complexes, *Losanges*, n°18, 2012, pp 33-39.

[5] Papy, *Mathématique Moderne 6*, Didier-Labor, 1967.

[6] Rosseel H. - Schneider M., Ces nombres qu'on dit "imaginaires", *Petit x*, n°63, 2003, pp. 53-71.

[7] Rosseel H. - Schneider M., Des nombres qui modélisent des transformations, *Petit x*, n°64, 2004, pp. 7-34.

[8] Rosseel H. - Schneider M., *Ces nombres qu'on dit imaginaires sont-ils vraiment des nombres ?*, Presses universitaires de Liège, 2011.

[9] Schneider M., Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 11, n°2.3, 1991, pp. 241-294.

[10] Schneider M., *Traité de didactique des mathématiques*, Presses ULg (première édition), 2008.

[11] Schneider M., Du réel au modèle mathématique : conceptualisation des transformations affines et projectives, in M. Pellerey (Ed.) *Processes of geometrisation and visualization*, Proceedings of the 33th CIEAEM'S meeting, Leberit, Roma, 1981, pp. 329-349.