

**UNIVERSITE DE LIEGE**  
**FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES**

**Modélisation du champ magnétique et des  
courants induits dans des systèmes  
tridimensionnels non linéaires**

par

**Patrick DULAR**

Ingénieur civil électricien  
Docteur en Sciences appliquées  
de l'Université de Liège

**1996**

Thèse défendue, avec succès, le 24 novembre 1994, pour l'obtention du grade scientifique de Docteur en Sciences appliquées de l'Université de Liège.

Jury : G. CANTRINE, Université de Liège, Président  
R. BELMANS, Katholieke Universiteit Leuven  
W. GEYSEN, Katholieke Universiteit Leuven  
J.P. JEUKENNE, Université de Liège  
W. LEGROS, Université de Liège  
M. PAVELLA, Université de Liège  
A. RAZEK, Universités de Paris VI et Paris XI

© Tout droit de reproduction réservé à la Collection des Publications de la Faculté des Sciences appliquées de l'Université de Liège.

Liège (Belgique) – Septembre 1996

Dépôt légal : D/1996/0480/17

ISSN 0075-9333

# Introduction

---

Les équations aux dérivées partielles de Maxwell décrivent le comportement électromagnétique de tout système. Lorsqu'elles sont appliquées à des structures complexes, leur résolution analytique n'est, à l'heure actuelle, pas concevable. Il est alors nécessaire de recourir à des méthodes de résolution numériques, qui font appel à des techniques de discrétisation. Ces méthodes transforment les équations aux dérivées partielles en systèmes d'équations algébriques dont la solution fournit une approximation des champs électromagnétiques.

En toute rigueur, tout système électromagnétique est tridimensionnel. Cependant, beaucoup de machines et appareils électriques ou magnétiques privilégient une direction particulière d'établissement des champs ou des courants et peuvent ainsi être étudiés par des modèles bidimensionnels. Par contre, il existe des systèmes qui, par leur structure (circuits magnétiques ou électriques ouverts) ou leurs dimensions (micromachines), doivent être représentés par des modèles réellement tridimensionnels.

Les moyens de calcul informatique sans cesse en évolution ont conduit de nombreux ingénieurs à utiliser l'ordinateur comme aide à la conception, et ce avec des modélisations de plus en plus précises des phénomènes. C'est réellement au début des années 80 que la modélisation numérique de systèmes électrotechniques tridimensionnels a pu se développer. Ainsi, du fait de son jeune âge, offre-t-elle de nombreuses perspectives de recherches.

La méthode numérique la plus couramment utilisée est la **méthode des éléments finis**. D'une part, elle s'adapte aisément à des géométries complexes, contrairement à la méthode des différences finies, et d'autre part, elle permet le traitement de matériaux à caractéristiques non linéaires, à la différence de la méthode des éléments frontière. Elle est basée sur une double discrétisation : celle du domaine géométrique étudié et celle des champs scalaires et vectoriels inconnus. La précision de la solution obtenue est directement liée à la finesse de discrétisation.

Notre recherche consiste en l'étude et le développement de **modèles mathématiques et numériques tridimensionnels** destinés à l'analyse de problèmes de l'électromagnétisme, et en particulier de **problèmes de l'électrotechnique**. Ces modèles doivent permettre le calcul de la répartition tridimensionnelle des champs électromagnétiques et des effets qu'ils engendrent, tels que les courants induits, ou courants de Foucault, dans des dispositifs électrotechniques. Les applications sont nombreuses et visent toutes à faciliter les phases de conception et d'optimisation de ces dispositifs (réduction du nombre de prototypes, optimisation de géométrie, contrôles non destructifs, ...). Selon les applications, les courants induits peuvent être désirés ou non. Ils peuvent être générés intentionnellement, comme dans le chauffage par induction ou dans certains types de moteurs, ou bien être néfastes, comme dans les tôles des transformateurs et des stators d'alternateurs. Dans tous les cas, leur prédétermination par le calcul est un problème important.

Les bases de la modélisation en électrotechnique sont présentées au **chapitre I**. Le modèle de départ est celui des **équations de Maxwell**, qui régissent l'ensemble des phénomènes électromagnétiques classiques. Les hypothèses de travail en électrotechnique permettent d'en extraire un modèle dynamique qui constitue le **problème de la magnétodynamique**. Sa solution permet de caractériser l'évolution temporelle des champs électromagnétiques dans

l'espace et, en particulier, celle des courants induits dans les matériaux conducteurs, en présence de certaines sources. Pour cette raison, nous l'appelons aussi **problème des courants induits**. Le régime statique correspondant est également considéré et constitue le **problème de la magnéto-statique**. Le fait que ce dernier soit un cas particulier du problème dynamique va nous permettre une analyse progressive des problèmes envisagés.

Nous commençons ainsi par étudier plusieurs formulations du problème de la magnéto-statique, toutes équivalentes au modèle de départ mais qui se distinguent par l'utilisation de divers potentiels, scalaires et vecteur. Ces potentiels sont des outils mathématiques et sont des intermédiaires pour la détermination des champs électromagnétiques. La définition générale des potentiels scalaires nécessite l'introduction de la **notion de coupure**, afin de traiter les potentiels multivoques, alors que celle des potentiels vecteur nécessite l'introduction de la **notion de jauge**, afin d'assurer l'unicité de ces potentiels. Le problème de la magnétodynamique est ensuite envisagé et diverses formulations sont encore établies. Certaines sont basées sur des potentiels scalaires et vecteur, d'autres sont directement exprimées en termes de champs physiques, tel que le champ magnétique. Les avantages et inconvénients de toutes les formulations exposées sont discutés.

Les formulations établies jusque-là sont exprimées sous des formes, dites fortes, qui ne se prêtent pas encore à une discrétisation aisée. C'est précisément le but du **chapitre II** de conduire à une discrétisation des modèles magnéto-statiques et magnétodynamiques. Ce chapitre comporte deux parties consacrées respectivement aux formulations continues et discrètes de modèles aux dérivées partielles, tels que celui des équations de Maxwell.

La première partie traite des outils permettant de transformer les formes fortes considérées en **formes**, dites **faibles**, qui seront bien adaptées à une discrétisation par la méthode des éléments finis. Dans ce but, des **espaces fonctionnels** sont construits sur mesure pour les champs électromagnétiques et les potentiels associés. Les propriétés des **opérateurs différentiels** qui s'appliquent à ces champs, le gradient, le rotationnel et la divergence, sont étudiées. Les espaces fonctionnels et les opérateurs constituent une **structure mathématique continue** dont les propriétés sont remarquables pour les modèles considérés.

La seconde partie vise à une **discrétisation** de la structure mathématique continue. Un ensemble d'outils permettant la discrétisation des espaces fonctionnels définis, et donc la discrétisation des champs et des potentiels, est présenté en détail. Notre souci est de conserver au niveau discret certaines des propriétés remarquables des espaces et des opérateurs du niveau continu. Cette partie présente la méthode des éléments finis. Sont développés des éléments finis spéciaux, nodaux, d'arête, de facette et de volume, associés à des assemblages d'éléments géométriques différents, qui peuvent être des tétraèdres, des hexaèdres et des prismes à base triangulaire. Ils sont une généralisation des éléments finis classiques, nodaux, et diffèrent les uns des autres par les entités géométriques auxquelles sont associés les inconnues ou degrés de liberté. Les fonctions de base des espaces d'approximation relatifs à ces éléments finis sont définies et leurs propriétés sont établies. De plus, les notions de coupure et de jauge peuvent être définies dans ces espaces de façon naturelle et sont développées de manière approfondie. Les espaces d'approximation définis apparaissent être très bien adaptés à l'approximation des champs électromagnétiques et des potentiels associés éventuels.

Ce chapitre est présenté sous une forme assez générale en ce sens que les équations de Maxwell n'y sont pas considérées explicitement. Néanmoins, par le rappel de notions déjà introduites au chapitre précédent, telles que les notions de potentiel multivoque et de coupure, et par les notations utilisées pour caractériser les champs scalaires et vectoriels, les applications directes à ces équations apparaîtront souvent comme immédiates.

C'est aux **chapitres III et IV** que les outils mathématiques développés sont appliqués respectivement aux modèles magnétostatiques et magnétodynamiques. Ces chapitres sont de nouveau divisés en deux parties, consacrées respectivement aux formulations continues et discrètes de chaque modèle. Notons que ces deux chapitres peuvent être consultés indépendamment l'un de l'autre, la plupart des outils mathématiques nécessaires à chaque problème ayant été établis antérieurement, au chapitre II.

Dans la première partie du **chapitre III**, le **problème de la magnétostatique** est posé de façon précise avant d'être exprimé sous diverses **formes faibles**. La seconde partie présente la **discrétisation des formulations en potentiel scalaire magnétique et en potentiel vecteur magnétique** par la méthode des éléments finis.

Le **chapitre IV**, relatif au **problème des courants induits**, est bâti sur la même structure que le chapitre précédent. C'est la forte ressemblance entre les deux problèmes qui rend naturelle ces présentations équivalentes. Dans la première partie, le problème est exprimé sous diverses formes faibles. La seconde partie présente la **discrétisation des formulations en champ magnétique et en potentiel vecteur magnétique modifié**.

Sur base des formulations discrètes développées, nous avons mis au point un **logiciel de calcul de champ magnétique et de courants induits dans des structures tridimensionnelles**. Ces dernières peuvent comporter des matériaux magnétiques linéaires et non linéaires. Les matériaux peuvent être conducteurs ou non conducteurs. S'ils sont conducteurs, ils peuvent être le siège de courants imposés et de courants induits. Les **régimes dynamiques transitoires et sinusoïdaux** ainsi que le **régime statique** peuvent être traités.

Le **dernier chapitre** est consacré aux **résultats** obtenus lors de l'étude de structures tridimensionnelles à l'aide du logiciel développé. Les problèmes choisis sont des **problèmes-test internationaux** pour lesquels nous disposons soit d'une solution analytique, soit de résultats expérimentaux. Une analyse de la précision des solutions numériques peut ainsi être effectuée. Ces problèmes permettent d'illustrer les diverses possibilités du logiciel et peuvent conduire à leur validation. Ils permettent également d'analyser les caractéristiques des solutions, propres aux discrétisations réalisées. Chaque problème est présenté en détail afin de mettre en évidence les différentes étapes qui interviennent dans sa modélisation.

*Les conventions de numérotation des chapitres, des parties, des sections, des formules, des figures et des tableaux sont données à la fin de cet ouvrage. Les notations mathématiques utilisées y figurent également.*



# Chapitre I

## Modélisation en électrotechnique

---

### 1. Position du problème

#### 1.1 Modélisation

**Modéliser** consiste à construire une structure mathématique apte à représenter une certaine partie de la réalité. Les éléments essentiels d'une telle structure sont des objets mathématiques, appelés équations, qui définissent un problème et à partir desquels il s'agit de déterminer, sous certaines conditions, un certain nombre d'entités, qui représentent la solution des équations.

Notre objectif est de modéliser les **phénomènes électromagnétiques classiques**, c'est-à-dire non quantiques, afin de pouvoir déterminer les grandeurs physiques qui caractérisent l'état des systèmes électromagnétiques, en particulier des **dispositifs électrotechniques**. Une telle modélisation vise à une prédiction précise des performances de ces dispositifs lors de leur conception. Les phénomènes électromagnétiques sont certes au centre de la modélisation en électrotechnique, mais ils sont liés aux phénomènes thermiques, qui sont responsables de la modification des caractéristiques magnétiques et électriques des matériaux. Les phénomènes mécaniques doivent également être pris en compte, en particulier, pour l'étude des dispositifs comportant des pièces en mouvement. Dans cette étude, nous nous intéresserons aux seuls phénomènes électromagnétiques, tout en conservant la possibilité de réaliser d'éventuels couplages avec des modèles thermiques et mécaniques.

#### 1.2 Grandeurs physiques locales et globales

Les équations de base à résoudre, pour une telle modélisation, sont les équations de Maxwell. Leur solution, pour un problème donné, constitue des **grandeurs physiques locales** à partir desquelles il est possible de déterminer d'autres grandeurs, **globales**, permettant d'effectuer le bilan de fonctionnement du dispositif étudié. Si ces dernières grandeurs peuvent être facilement mesurables, il n'en est pas de même des premières, dont le caractère local empêche en général toute mesure (par exemple, à l'intérieur d'un conducteur ou de tout corps matériel). Et c'est l'intérêt de la modélisation envisagée de fournir, comme résultat naturel de calcul, ces grandeurs locales, telles que le champ magnétique et la densité de courant. Il est alors possible de visualiser ces grandeurs dans tout le domaine étudié et ainsi de mieux comprendre certains phénomènes. Les grandeurs globales, telles que les courants, les pertes, les forces, calculées a posteriori, permettent quant à elles un rapprochement entre calcul et mesure.

Nous nous intéresserons principalement au calcul du **champ magnétique** et de la **densité de courant induit** dans des **structures tridimensionnelles** pouvant comporter des matériaux non linéaires, ou saturables, en régime permanent, sinusoïdal ou transitoire. Une telle analyse tridimensionnelle doit permettre, en particulier, de tenir compte de la complexité géométrique des structures qui peuvent être étudiées.

Nous débuterons pour cela par un rappel des équations de Maxwell et nous en extrairons les équations qui permettent le calcul envisagé, en **magnétostatique** et en **magnétodynamique**. La suite de ce chapitre va consister à exposer les différentes **formulations mathématiques** développées sur base de ces équations et ce ne sera que lorsque ces formulations auront été définies en détail, avec leurs principales propriétés, que nous entamerons leur discrétisation afin de les résoudre numériquement.

## 2. Equations de Maxwell

### 2.1 Equations de Maxwell dans le vide

L'ensemble des phénomènes électromagnétiques classiques est régi par les **équations de Maxwell** (Fournet, 1985 ; Vassallo, 1980). Celles-ci constituent un système d'équations aux dérivées partielles qui lient les **phénomènes magnétiques** aux **phénomènes électriques**, et qui unifient tous les principes de l'électromagnétisme. Ces équations sont les suivantes :

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{b}}{\mu_0} = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{e} , \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = - \partial_t \mathbf{b} , \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0 , \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon_0 \mathbf{e} = \rho_v , \quad (4)$$

où  $\mathbf{b}$  est l'**induction magnétique** (T, i.e. tesla) ,

$\mathbf{e}$  est le **champ électrique** (V/m) ,

$\mathbf{j}$  est la **densité de courant de conduction** (A/m<sup>2</sup>) ,

$\rho_v$  est la **densité volumique de charge électrique** (C/m<sup>3</sup>) .

Les grandeurs  $\mu_0$  et  $\varepsilon_0$  sont des constantes caractéristiques du vide appelées respectivement **constantes magnétique et électrique primaires**. Elles valent

$$\mu_0 = 4 \pi 10^{-7} \text{ H/m} , \quad \varepsilon_0 = 8.854 10^{-12} \text{ F/m} . \quad (5a-b)$$

Notons que  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \approx 2.998 10^8 \text{ m/s}$  est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.

L'espace physique est représenté par un espace euclidien à trois dimensions et nous y choisissons un repère orthonormé direct. Les champs scalaires et vectoriels considérés — ces derniers sont notés en caractères gras — sont définis en tout point  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  de l'espace et à chaque instant  $t \in \mathbb{R}_t$ . Dans un souci d'alléger les expressions, nous omettrons en général d'indiquer cette dépendance de façon explicite et nous noterons par exemple simplement par  $\mathbf{e}$  le champ  $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}(x, y, z, t)$ . La notation  $\partial_t$  représente la dérivée temporelle.

Les phénomènes électromagnétiques dans le vide peuvent ainsi être décrits à l'aide des deux champs vectoriels  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{e}$  définis sur tout l'espace  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_t$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ . Ces champs, appelés **champs électromagnétiques**, sont reliés par les équations de Maxwell (1-4) au champ scalaire  $\rho_v$  et au champ vectoriel  $\mathbf{j}$  définis également sur  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_t$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^3$ , respectivement.

Nous pourrions dès maintenant discuter de certaines propriétés des équations (1-4) mais il nous paraît plus intéressant d'établir d'abord les équations telles que nous les utiliserons dans la suite, qui sont les équations de Maxwell appliquées aux milieux continus.



## 2.2 Equations de Maxwell des milieux continus

Les équations (1-4) peuvent également s'appliquer aux milieux continus, c'est-à-dire dans la matière (Vassallo, 1980). Ces milieux sont en effet principalement constitués de vide car les dimensions des noyaux des atomes sont très faibles par rapport aux distances qui les séparent. Il s'agit cependant de lisser les variations des champs  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{b}$ , variations importantes à l'échelle atomique, pour ainsi ne considérer que leurs valeurs moyennes, et donc travailler à l'échelle macroscopique. Il est pour cela intéressant de décomposer  $\mathbf{j}$  et  $\rho_v$  en deux parties (Dautray & Lions, 1987a), c'est-à-dire

$$\mathbf{j} = \tilde{\mathbf{j}} + \mathbf{j}' \quad \text{et} \quad \rho_v = \tilde{\rho}_v + \rho_v',$$

où les densités  $\tilde{\mathbf{j}}$  et  $\tilde{\rho}_v$  sont définies à l'échelle atomique (on peut considérer qu'elles sont créées dans la matière par le champ électromagnétique et qu'elles créent à leur tour un champ électromagnétique), alors que les densités  $\mathbf{j}'$  et  $\rho_v'$  sont définies à l'échelle macroscopique (elles peuvent être relatives à des charges libres) ; ces dernières sont rebaptisées  $\mathbf{j}$  et  $\rho_v$ . Les équations (1) et (4) deviennent alors

$$\text{rot} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{j}} + \mathbf{j} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{e}, \quad \text{div} \varepsilon_0 \mathbf{e} = \tilde{\rho}_v + \rho_v. \quad (6-7)$$

Définissons les champs  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{p}$  liés aux densités  $\tilde{\mathbf{j}}$  et  $\tilde{\rho}_v$  par les relations

$$\text{rot} \mathbf{m} + \partial_t \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{j}}, \quad -\text{div} \mathbf{p} = \tilde{\rho}_v. \quad (8-9)$$

Ils peuvent être considérés comme les champs magnétique et électrique créés par  $\tilde{\mathbf{j}}$  et  $\tilde{\rho}_v$  (à un facteur constant près), par comparaison de (8) et (9) avec (1) et (4) ; on ne suppose toutefois pas que les équations (2) et (3) sont vérifiées par  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{p}$ . Ces champs sont appelés respectivement **champ d'aimantation** et **champ de polarisation**. Définissons ensuite les champs  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{d}$ , que l'on appellera **champ magnétique** et **déplacement électrique**, par

$$\mathbf{h} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{b} - \mathbf{m}, \quad \mathbf{d} = \varepsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{p}. \quad (10-11)$$

L'introduction du champ  $\mathbf{h}$  permet de séparer les contributions au champ  $\mathbf{b}$  dues aux courants réels (de conduction) de celles dues aux mouvements des électrons au sein des atomes. De même, l'introduction du champ  $\mathbf{d}$  permet de séparer les contributions au champ  $\mathbf{e}$  dues aux charges libres de celles dues à la polarisation de la matière. En portant alors les expressions (8-9) dans (6-7) en tenant compte de (10-11), et en reprenant les équations inchangées (2) et (3), nous obtenons les **équations de Maxwell des milieux continus**, qui sont

$$\text{rot} \mathbf{h} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{d}, \quad (12)$$

$$\text{rot} \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b}, \quad (13)$$

$$\text{div} \mathbf{b} = 0, \quad (14)$$

$$\text{div} \mathbf{d} = \rho_v, \quad (15)$$

où  $\mathbf{h}$  est le **champ magnétique** (A/m),

$\mathbf{b}$  est l'**induction magnétique** (T, i.e. tesla),

$\mathbf{e}$  est le **champ électrique** (V/m),

$\mathbf{d}$  est le champ de **déplacement électrique** (C/m<sup>2</sup>),

$\mathbf{j}$  est la **densité de courant de conduction** (A/m<sup>2</sup>),

$\rho_v$  est la **densité volumique de charge électrique** (C/m<sup>3</sup>).

L'équation (12) est une généralisation de la **loi d'Ampère**, i.e.  $\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j}$ , et l'équation (13) est appelée la **loi de Faraday**. Elles constituent toutes deux les équations dites de couplage électromagnétique, alors que les équations (14) et (15) constituent des équations dites de conservation.

Il convient d'ajouter à ces équations, les relations qui expriment les propriétés des matériaux, c'est-à-dire les **lois de comportement** ou **relations constitutives** (Vassallo, 1980). Sans elles, le système (12-15) serait indéterminé. Il s'agit de

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h} , \quad (16)$$

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e} , \quad (17)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} , \quad (18)$$

où  $\mu$  est la **perméabilité magnétique** (H/m) ,

$\varepsilon$  est la **permittivité électrique** (F/m) ,

$\sigma$  est la **conductivité électrique** ( $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ) .

En toute généralité,  $\mu$ ,  $\varepsilon$  et  $\sigma$  ont un caractère tensoriel et leur valeur n'est pas constante (saturation, hystérésis, dépendance vis-à-vis de la température, fonction de la position dans l'espace, ...). La relation (18) est appelée **loi d'Ohm locale**. Nous définirons les domaines d'application de chacune de ces lois dans une prochaine section.

L'équation (13) entraîne

$$0 = \text{div rot } \mathbf{e} = - \partial_t \text{div } \mathbf{b} ,$$

et donc  $\text{div } \mathbf{b}$  est une constante. Ainsi, si  $\text{div } \mathbf{b}$  est nulle à l'instant initial, elle le restera à tout instant ultérieur. L'équation (14) n'est donc pas complètement indépendante de (13), mais cela uniquement en régime dynamique.

La conservation de la charge électrique peut s'exprimer par la relation

$$\text{div } \mathbf{j} = - \partial_t \rho_v , \quad (19)$$

qui est implicite dans les équations de Maxwell. En effet, les équations (12) et (15) mènent à

$$0 = \text{div rot } \mathbf{h} = \text{div } \mathbf{j} + \partial_t \text{div } \mathbf{d} = \text{div } \mathbf{j} + \partial_t \rho_v .$$

Le terme  $\partial_t \mathbf{d}$  dans l'équation (12) est appelé densité de courant de déplacement. Ce terme est au centre de la théorie des radiations des ondes électromagnétiques (Ramo, Whinnery & Van Duzer, 1984 ; Wait, 1987). Sa présence dans l'équation (12) implique qu'une variation du champ électrique crée une variation du champ magnétique ; l'équation (13) implique, quant à elle, qu'une variation du champ magnétique crée une variation du champ électrique. Les champs électriques et magnétiques sont donc intimement liés et l'on parle de couplage électromagnétique. Il y aurait une symétrie complète entre phénomènes électriques et magnétiques si ce n'était qu'il n'existe pas de densité de charge magnétique, ni par conséquent de densité de courant magnétique.

Cependant, dans les applications où le champ  $\mathbf{e}$  est faible, ou confiné dans des structures de faible dimension, le courant de déplacement est faible comparé au courant de conduction. C'est le cas lorsque la fréquence des phénomènes étudiés reste dans des limites raisonnables, de telle façon que les dimensions du domaine d'étude soient négligeables devant la longueur d'onde correspondante ( $\lambda = c/f$  où  $c$  est la vitesse de la lumière et  $f$  est la fréquence) (Nayfeh & Brussel, 1985 ; Perry, 1985). Cette condition est vérifiée dans les applications de l'électrotechnique, qui font intervenir des fréquences de quelques hertz à quelques centaines de kilohertz ; par exemple, à la fréquence de 50 Hz, la longueur d'onde est de  $6 \cdot 10^6$  m et est

donc largement supérieure aux dimensions courantes des appareils étudiés. Mathématiquement, l'approximation qui consiste à négliger les courants de déplacement revient à remplacer un problème hyperbolique du second ordre, caractérisant les phénomènes de propagation, par un problème elliptique ou parabolique, caractérisant les phénomènes d'une nature proche des phénomènes de diffusion. On parle d'**approximation de l'électrotechnique**, ou encore d'**approximation quasi-stationnaire**.

Dans l'approximation de l'électrotechnique, l'équation (12) se réduit à

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \mathbf{j}, \quad (20)$$

et est connue sous le nom de **loi d'Ampère**. La conservation de la charge (19) se réduit alors à

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (21)$$

Un problème couramment rencontré en électrotechnique est le problème du calcul des **courants induits** (par variation de champ magnétique), ou **courants de Foucault**, dont l'étude est l'objet de la **magnétodynamique**. Lorsque les phénomènes étudiés sont invariants dans le temps, les dérivées temporelles s'annulent dans les équations de Maxwell et il apparaît un découplage entre phénomènes magnétiques et électriques. L'étude des phénomènes magnétiques est l'objet de la **magnétostatique** (Durand, 1953, 1958 ; Stratton, 1941), et celle des phénomènes électriques est l'objet de l'**électrostatique** (Durand, 1953 ; Stratton, 1941).

### 2.3 Forme intégrale des équations de Maxwell

L'application du théorème de Stokes aux équations (12) et (13), sur une surface  $\Sigma$  de contour  $\partial\Sigma$ , donne

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} (\mathbf{j} + \partial_t \mathbf{d}) \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{e} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\Sigma} \partial_t \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad (22-23)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire à  $\Sigma$  et oriente  $\partial\Sigma$  (Fig. 1). Il s'agit des formes intégrales des lois d'Ampère et de Faraday. Elles relient les circulations de  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{e}$ , le long d'une courbe fermée, respectivement aux flux de  $\mathbf{j} + \partial_t \mathbf{d}$  et  $-\partial_t \mathbf{b}$ , au travers d'une surface quelconque qui s'appuie sur cette courbe. Notons que le flux de  $\mathbf{j}$  au travers d'une surface représente le **courant** (de conduction) qui la traverse. Le flux de  $\mathbf{b}$  est, quant à lui, appelé **flux magnétique**.

L'application du théorème de la divergence aux équations (14) et (15), sur un volume  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ , donne, quant à elle, les formes intégrales associées

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0, \quad \oint_{\partial\Omega} \mathbf{d} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Omega} \rho_v \, dv, \quad (24-25)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire à  $\partial\Omega$  orientée vers l'extérieur de  $\Omega$ . Ces formes indiquent que le flux de  $\mathbf{b}$  à travers une surface fermée est nul, alors que le flux de  $\mathbf{d}$  à travers cette même surface est égal à la charge totale contenue dans le volume intérieur.

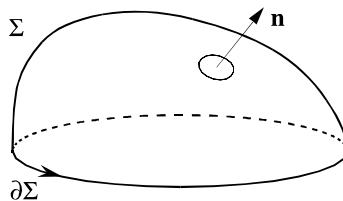


Fig. 1. Orientation de  $\partial\Sigma$  liée à celle de  $\Sigma$ .

## 2.4 Conditions de transmission

Lors du passage d'un milieu à un autre, les champs électromagnétiques subissent des discontinuités et ne sont par conséquent pas différentiables. Cependant, il est possible de dériver des conditions dites de transmission des champs (Dautray & Lions, 1987a).

Considérons une surface  $\Sigma$  entre deux milieux continus, représentés par les sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (Fig. 2). Nous ne faisons pas d'hypothèse concernant les propriétés de ces deux milieux afin d'obtenir des relations tout à fait générales. La normale  $\mathbf{n}$  à  $\Sigma$  est orientée de  $\Omega_1$  vers  $\Omega_2$ . Les valeurs d'un champ de part et d'autre de  $\Sigma$  dans les milieux  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont respectivement désignées à l'aide des indices 1 et 2 ; par exemple,  $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}(\mathbf{x})$  pour  $\mathbf{x} \in \Omega_1$  et  $\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}(\mathbf{x})$  pour  $\mathbf{x} \in \Omega_2$ . Des densités de charge  $\rho_s$  et de courant  $\mathbf{j}_s$  peuvent se trouver concentrées sur la surface  $\Sigma$ . C'est, par exemple, le cas à la surface d'un conducteur parfait, i.e. dont la conductivité est infinie, ou encore lorsque la fréquence d'excitation est infinie.

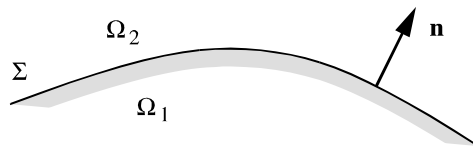


Fig. 2. Surface  $\Sigma$  entre deux milieux continus  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

Les équations (12), (13), (14) et (15) peuvent être intégrées sur des volumes incluant des portions de la surface  $\Sigma$ . L'application du théorème de la divergence ou du théorème de Stokes implique alors les **conditions de transmission**, ou conditions d'interface, suivantes :

$$\mathbf{n} \wedge (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \Big|_{\Sigma} = \mathbf{j}_s, \quad \mathbf{n} \wedge (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) \Big|_{\Sigma} = 0, \quad (26-27)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \Big|_{\Sigma} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) \Big|_{\Sigma} = \rho_s. \quad (28-29)$$

Celles-ci sont relatives soit à la composante tangentielle, soit à la composante normale des champs. Elles entraînent que la composante normale de  $\mathbf{b}$  et la composante tangentielle de  $\mathbf{e}$  sont continues à la traversée de  $\Sigma$ . Par contre, si  $\rho_s$  et  $\mathbf{j}_s$  sont différents de zéro, la composante normale de  $\mathbf{d}$  et la composante tangentielle de  $\mathbf{h}$  sont discontinues. Les composantes qui ne figurent pas dans (26-29) sont discontinues. Nous considérerons en général le cas où  $\rho_s$  et  $\mathbf{j}_s$  sont nuls, c'est-à-dire que nous n'effectuerons pas le passage à la limite  $\sigma \rightarrow \infty$  ou  $\omega \rightarrow \infty$ . La composante tangentielle de  $\mathbf{h}$  et la composante normale de  $\mathbf{d}$  sont alors continues.

**Remarque** — La décomposition d'un vecteur  $\mathbf{h}$  selon ses composantes tangentielle et normale en un point d'une surface est donnée par

$$\mathbf{h} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) \mathbf{n} + (\mathbf{n} \wedge \mathbf{h}) \wedge \mathbf{n};$$

sa composante tangentielle est donc  $(\mathbf{n} \wedge \mathbf{h}) \wedge \mathbf{n}$ , mais nous y ferons en général directement référence par le vecteur  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{h}$ , qui lui est orthogonal et de même norme, tout en restant tangent à la surface.

## 2.5 Lois de comportement

Les lois de comportement (16), (17) et (18) sont caractéristiques des milieux considérés et sont données par l'expérience (Vassallo, 1980). Elles n'expriment pas des lois de la physique mais permettent simplement de décrire le comportement de certains matériaux. Elles complètent les équations de Maxwell (12-15) et permettent de déterminer l'évolution de tous les champs inconnus  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{d}$ .

### 2.5.1 Loi de comportement magnétique

Le champ magnétique a été défini par (10), i.e.

$$\mathbf{h} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{b} - \mathbf{m} .$$

Dans certains matériaux, il existe une relation de proportionnalité entre  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{m}$  (Gardiol, 1979 ; Jiles, 1991 ; Nayfeh & Brussel, 1985), et l'on peut alors écrire

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h} \quad \text{ou} \quad \mathbf{m} = \chi \mathbf{h} , \quad (30-31)$$

où  $\mu$  est la **perméabilité magnétique** du matériau et  $\chi$  est sa **susceptibilité magnétique**. On parle de matériaux **linéaires**. On appelle **réductivité** l'inverse de la perméabilité et on la note  $\nu = \mu^{-1}$ . On définit également la **perméabilité magnétique relative** par

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} , \quad (32)$$

qui est alors liée à  $\chi$  par la relation

$$\mu_r = \chi + 1 . \quad (33)$$

Les relations (30) ou (31) sont en particulier vérifiées par les **matériaux diamagnétiques** et **paramagnétiques**. Les matériaux diamagnétiques sont caractérisés par une faible aimantation qui est opposée au champ magnétique, et donc par une faible valeur de  $\chi$  négative ( $\mu_r < 1$ ), typiquement  $\chi \approx -10^{-5}$ . Les matériaux paramagnétiques sont également caractérisés par une faible aimantation qui est, par contre, dans le sens du champ magnétique, ce qui donne une faible valeur de  $\chi$  positive ( $\mu_r > 1$ ), typiquement  $\chi \approx 10^{-3}$  à  $10^{-5}$ . Notons que le diamagnétisme existe toujours mais peut être masqué par d'autres phénomènes, par exemple, par le paramagnétisme. La perméabilité relative de quelques matériaux diamagnétiques et paramagnétiques est donnée dans le tableau 1. On peut en réalité souvent négliger leur susceptibilité et donc,  $\mu_r \approx 1$ .

Matériaux	$\mu_r$ (à 20°C)
<i>Matériaux diamagnétiques</i>	
Argent	$1 - 1.9 \cdot 10^{-7}$
Paraffine	$1 - 5.8 \cdot 10^{-7}$
Eau	$1 - 9.0 \cdot 10^{-6}$
Cuivre	$1 - 1.0 \cdot 10^{-5}$
<i>Matériaux paramagnétiques</i>	
Ebonite	$1 + 1.1 \cdot 10^{-6}$
Aluminium	$1 + 6.5 \cdot 10^{-7}$
Air (1 atm)	$1 + 4.0 \cdot 10^{-7}$

Tableau 1. Perméabilité magnétique relative de différents matériaux (la notation met en évidence la susceptibilité associée) (Gardiol, 1979 ; Nayfeh & Brussel, 1985).

La relation (30) peut encore être valable pour d'autres types de matériaux, à condition de la généraliser au cas où  $\mu$  n'est plus une constante mais est une fonction de  $\mathbf{h}$  (ou de  $\mathbf{b}$ ), i.e.

$$\mathbf{b} = \mu(\mathbf{h}) \mathbf{h} , \quad (34)$$

où  $h$  est le module de  $\mathbf{h}$ . C'est le cas pour les **matériaux ferromagnétiques**, que l'on qualifie de **matériaux non linéaires** ou encore **saturables**. Leur perméabilité relative peut être très élevée. Les propriétés des matériaux ferromagnétiques dépendent non seulement du champ  $\mathbf{h}$

au moment même mais de toutes les valeurs prises antérieurement par ce champ. Cet effet de mémoire est caractérisé par le nom d'**hystérésis** et donne lieu à une dissipation d'énergie du fait de son irréversibilité (Jiles, 1991 ; Nayfeh & Brussel, 1985). Les lieux de points  $(b, h)$  obtenus lors de variations de  $h$  sont appelés des **cycles d'hystérésis** (Fig. 3 ; le cycle est en fait décrit par les courbes b et c). Lorsque le champ magnétique appliqué à un tel matériau s'annule, son aimantation ne disparaît pas totalement et il y subsiste une **induction dite rémanente**, notée  $b_r$ . Le champ magnétique nécessaire à l'annulation de l'aimantation est appelé **champ coercitif**, noté  $h_c$ . Aux valeurs élevées du champ  $h$ , le matériau sature, c'est-à-dire que l'aimantation a atteint son maximum (aimantation de saturation  $m_s$ ). Ainsi, au delà de la valeur de  $h$  correspondante,  $h_s$ , une augmentation de  $b$  est seulement due à une augmentation de  $h$ , au facteur  $\mu_0$  près.

Un **aimant permanent** doit de préférence être caractérisé par une induction rémanente et par un champ coercitif élevés ; on parle de matériau magnétique dur. L'aimant permanent idéal est caractérisé par un champ coercitif infini de sorte qu'il n'est pas possible de le démagnétiser. Par contre, les matériaux dont le champ coercitif est faible, et dont le cycle d'hystérésis est étroit, sont appelés matériaux magnétiques doux. Dans leur cas, il est souvent possible de négliger la largeur du cycle d'hystérésis et de considérer une caractéristique magnétique appelée **courbe de saturation**, qui s'apparente à la **courbe de première aimantation** (Fig. 3, courbe a).

Nous nous limiterons à une branche particulière des cycles d'hystérésis, pouvant être caractérisée par une induction rémanente  $b_r$  et modélisée par la relation

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_r + \mu(h) \mathbf{h} . \quad (35)$$

Nous parlerons de courbe  $b$ - $h$ . L'allure typique de la perméabilité relative en fonction de  $h$  pour un matériau ferromagnétique est illustrée à la figure 4. Les caractéristiques magnétiques de divers matériaux ferromagnétiques sont données ci-après (Tableau 2). Notons finalement que les propriétés de certains matériaux peuvent varier avec la direction des champs, et l'on parle alors d'**anisotropie**. La perméabilité est, dans ce cas, tensorielle.

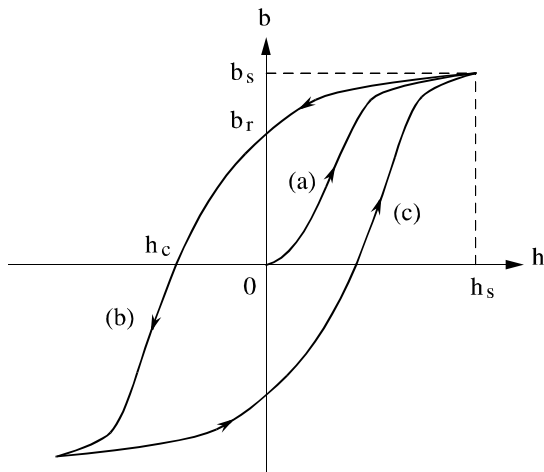


Fig. 3. Cycle d'hystérésis.

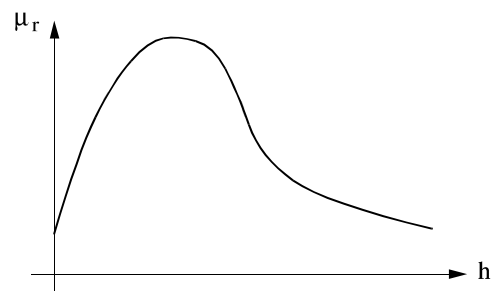


Fig. 4. Allure typique de  $\mu = \mu(h)$  pour un matériau ferromagnétique.

Matériaux	$\mu_r$ (maximum)	$b_s$ (tesla)	$h_c$ (A/m)
<i>Matériaux ferromagnétiques (composition %)</i>			
Acier	2000	2.10	144
Fer (99.90 Fe)	5000	2.15	80
Fer pur (99.95 Fe)	180000	2.15	4
Fer au silicium (96 Fe, 4 Si)	7000	1.97	40
Mu métal (18 Fe, 75 Ni, 2 Cr, 5 Cu)	100000	0.65	4
Permalloy (21.2 Fe, 78.5 Ni, 0.3 Mn)	100000	1.07	4
Supermalloy (15.7 Fe, 79 Ni, 5 Mo, 0.3 Mn)	800000	0.80	0.16

Tableau 2. Caractéristiques magnétiques de différents matériaux ferromagnétiques (Jiles, 1991 ; Nayfeh & Brussel, 1985).

### 2.5.2 Loi de comportement électrique

Le déplacement électrique a été défini par (11), i.e.

$$\mathbf{d} = \epsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{p} .$$

Il existe une classe de matériaux pour laquelle la polarisation  $\mathbf{p}$  est proportionnelle au champ électrique  $\mathbf{e}$  (Gardiol, 1979 ; Nayfeh & Brussel, 1985), et l'on peut alors écrire

$$\mathbf{d} = \epsilon \mathbf{e} , \quad (36)$$

où  $\epsilon$  est la **permittivité électrique** du matériau. Ces matériaux sont dits **linéaires**. On définit également la **permittivité électrique relative** par

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} . \quad (37)$$

Dans le vide, et approximativement dans l'air, la polarisation  $\mathbf{p}$  est nulle et il en résulte que  $\epsilon_r = 1$ , i.e.  $\epsilon = \epsilon_0$ . La permittivité électrique relative  $\epsilon_r$  de divers matériaux est donnée dans le tableau 3.

Matériaux	$\epsilon_r$ (à 20°C)
Air	1.00059
Téflon	2.1
Paraffine	2.2
Verre	5 à 10
Porcelaine	5 à 10
Mica	7.0
Ethanol	24.3
Méthanol	32.6
Eau	78.5

Tableau 3. Permittivité électrique relative de différents matériaux (Nayfeh & Brussel, 1985).

### 2.5.3 Loi d'Ohm

La loi d'Ohm locale (18), i.e.  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}$ , est d'application dans les milieux contenant des charges libres, qui sont par exemple les métaux et les semi-conducteurs (Gardiol, 1979 ; Nayfeh & Brussel, 1985). Elle traduit une proportionnalité entre le champ électrique et la densité de courant. L'application d'un champ électrique dans un tel milieu produit en effet une force sur ses charges libres. En raison de l'interaction de ces charges avec le reste du milieu,

celles-ci se déplacent alors dans la direction du champ à une vitesse moyenne qui lui est proportionnelle, ce qui se traduit par un courant électrique.

Les **métaux** ont une conductivité électrique  $\sigma$  de l'ordre de  $10^5$  à  $10^8 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ , qui décroît lorsque la température augmente. D'autres matériaux peuvent avoir une conductivité de l'ordre de  $10^{22}$  fois inférieure à celle des métaux. Ils sont appelés **isolants** et leur conductivité est en général négligée, c'est-à-dire que l'on y fait l'hypothèse d'absence de courant. La conductivité électrique  $\sigma$  de divers matériaux, ainsi que leur résistivité  $\rho = 1/\sigma$ , sont données dans le tableau 4.

Matériaux	Conductivité ( $\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ ) (à 20°C)	Résistivité ( $\Omega \text{m}$ ) (à 20°C)
Argent	$6.2 \cdot 10^7$	$1.6 \cdot 10^{-8}$
Cuivre	$5.8 \cdot 10^7$	$1.7 \cdot 10^{-8}$
Or	$4.1 \cdot 10^7$	$2.4 \cdot 10^{-8}$
Chrome	$3.9 \cdot 10^7$	$2.6 \cdot 10^{-8}$
Aluminium	$3.8 \cdot 10^7$	$2.6 \cdot 10^{-8}$
Laiton	$2.6 \cdot 10^7$	$3.8 \cdot 10^{-8}$
Zinc	$1.7 \cdot 10^7$	$5.9 \cdot 10^{-8}$
Nickel	$1.5 \cdot 10^7$	$6.7 \cdot 10^{-8}$
Fer	$1.1 \cdot 10^7$	$9.1 \cdot 10^{-8}$
Acier	$2 \cdot 10^6$	$5.0 \cdot 10^{-7}$
Carbone	$1 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^{-4}$
Eau	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^3$
Verre	$10^{-11}$	$10^{11}$
Huile	$10^{-14}$	$10^{14}$

Tableau 4. Conductivité et résistivité de différents matériaux (Gardiol, 1979 ; Nayfeh & Brussel, 1985).

## 2.6 Formalisme complexe

Lorsqu'un système est soumis à une excitation sinusoïdale et qu'il y répond de façon linéaire (c'est le cas lorsque les équations du système ne comportent que des opérateurs linéaires et lorsque les matériaux sont linéaires), il est intéressant de substituer au modèle transitoire un modèle écrit dans le **formalisme complexe** afin d'étudier le **régime sinusoïdal établi**.

Pour une excitation sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , un champ quelconque décrivant le système, par exemple le champ magnétique, est de la forme générale

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{h}_m(\mathbf{x}) \cos(\omega t + \varphi), \quad (38)$$

où  $\varphi$  est une phase (exprimée en radians) pouvant dépendre de la position, i.e.  $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ . Le formalisme complexe consiste à définir ce champ physique comme étant la partie réelle d'un champ complexe, c'est-à-dire

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} [ \mathbf{h}_m(\mathbf{x}) e^{j\varphi} e^{j\omega t} ], \quad (39)$$

où  $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$  (Silvester & Ferrari, 1990) ; il s'agit de ne pas confondre le nombre imaginaire pur  $j$  avec le module de la densité de courant. Le champ complexe

$$\mathbf{h}_p(\mathbf{x}) = \mathbf{h}_m(\mathbf{x}) e^{j\varphi} = \mathbf{h}_r(\mathbf{x}) + j \mathbf{h}_i(\mathbf{x}) \quad (40)$$



qui apparaît dans la relation (39) est appelé **phaseur** ;  $\mathbf{h}_r$  et  $\mathbf{h}_i$  sont respectivement ses parties réelle et imaginaire. Tous les champs réels peuvent être exprimés sous la forme (39) et leur substitution dans les équations du système conduit à des équations complexes dont les inconnues sont des phaseurs. Par la relation (39), l'opérateur de dérivée temporelle  $\partial_t$  devient un produit par le facteur  $j \omega$ .

Les équations de Maxwell (12-15) en régime sinusoïdal établi s'écrivent alors

$$\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j} + j \omega \mathbf{d} , \quad (41)$$

$$\text{rot } \mathbf{e} = -j \omega \mathbf{b} , \quad (42)$$

$$\text{div } \mathbf{b} = 0 , \quad (43)$$

$$\text{div } \mathbf{d} = \rho_v , \quad (44)$$

où les différents champs sont maintenant des phaseurs (l'indice  $p$  a été omis, ce qui ne doit pas prêter à confusion).

### 3. Formulations magnétostatiques

La magnétostatique consiste en l'étude des phénomènes magnétiques en **régime stationnaire**. Le champ magnétique est alors invariant dans le temps et n'est dû qu'à des courants stationnaires imposés ou à des aimants permanents. Les équations à considérer sont issues des équations de Maxwell (2.12-15) dont les dérivées temporelles sont annulées. Elles sont

$$\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j} , \quad \text{div } \mathbf{b} = 0 , \quad (1-2)$$

et il convient d'y ajouter la loi de comportement magnétique (2.16), i.e.

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h} , \quad (3)$$

avec éventuellement  $\mu = \mu(\mathbf{h})$  pour les matériaux non linéaires.

Des conditions aux limites adéquates doivent être données sur la frontière du domaine d'étude. Elles sont relatives soit à la composante tangentielle de  $\mathbf{h}$ , soit à la composante normale de  $\mathbf{b}$ , de façon à assurer l'unicité de la solution. Dans un souci de simplification, nous ne les poserons cependant pas dans cette présentation des formulations. Elles seront par contre explicitées dans la suite.

La densité de courant  $\mathbf{j}$  est donnée et constitue une source de champ magnétique. Des aimants permanents peuvent être considérés comme autre source grâce à la loi (3) réécrite de façon à mettre en évidence le magnétisme rémanent de ces matériaux, c'est-à-dire sous la forme (2.35).

Les concepts de champ magnétique  $\mathbf{h}$  ou d'induction  $\mathbf{b}$  sont bien sûr suffisants pour caractériser un état magnétique dans l'espace. Néanmoins, l'introduction de la notion de **potentiel magnétique** peut se révéler intéressante. Différents potentiels sont envisageables et conduisent ainsi à diverses formulations.

#### 3.1 Formulation magnétostatique en potentiel scalaire

##### 3.1.1 Potentiel scalaire total

Dans une région de l'espace où il n'existe pas de courants, l'équation (1) devient  $\text{rot } \mathbf{h} = 0$ , ce qui permet de dériver  $\mathbf{h}$  d'un **potentiel scalaire magnétique**  $\phi$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{h} = - \text{grad } \phi . \quad (4)$$

Ce potentiel est défini à une constante arbitraire près et est souvent appelé **potentiel scalaire total**. Portant alors (3) et (4) dans (2), nous obtenons l'équation

$$\boxed{\text{div} (\mu \text{ grad } \phi) = 0} . \quad (5)$$

Celle-ci se réduit en particulier à l'équation de Laplace  $\Delta\phi = 0$  si  $\mu$  est une constante, c'est-à-dire dans les matériaux linéaires. L'équation (5) constitue une **formulation magnétostatique en potentiel scalaire**. Ce potentiel suffit à caractériser un état magnétique ; on peut en déduire le champ  $\mathbf{h}$  par (4) et ensuite le champ  $\mathbf{b}$  par (3). Notons que par la relation (4), la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique est assurée si le potentiel scalaire est continu. La condition de continuité de la composante normale de l'induction est, quant à elle, implicite dans l'équation (5).

Soulevons dès maintenant un problème. La relation (4) entraîne que la circulation de  $\mathbf{h}$  le long d'un chemin  $\gamma_{AB}$ , reliant deux points A et B, est égale à la différence des valeurs du potentiel scalaire entre l'origine et l'extrémité de ce chemin, i.e.

$$\int_{\gamma_{AB}} \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma_{AB}} - \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{l} = \phi_A - \phi_B . \quad (6)$$

En particulier, lorsque le chemin d'intégration est fermé, i.e.  $A \equiv B$ , la circulation de  $\mathbf{h}$  est nulle puisque  $\phi_A = \phi_B$ . Si la région étudiée est un tore  $\Omega$ , par exemple, et si celui-ci est traversé par un fil conducteur parcouru par un courant I (Fig. 1), alors la circulation de  $\mathbf{h}$  le long d'une génératrice  $\gamma$  du tore ne peut être que nulle si l'on s'en tient à la relation (6), et donc à (4).

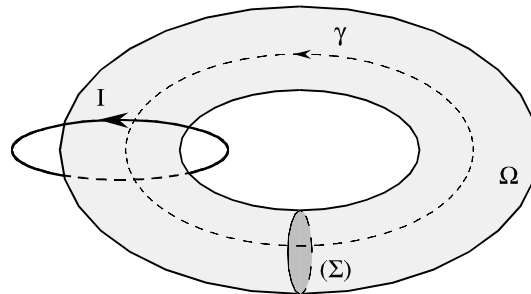


Fig. 1. Domaine d'étude toroïdal.

Cependant, d'après le théorème d'Ampère, cette circulation doit être égale au courant I. La relation (4) ne peut donc pas être valable partout. En réalité, c'est le lemme de Poincaré qui nous permet de faire dériver un champ à rotationnel nul d'un potentiel, mais cela en général seulement localement. Et le tore est justement un exemple de non-application globale de ce lemme parce qu'il présente un "trou", et donc parce qu'il existe une famille de contours sur lesquels il n'est pas possible d'appuyer une surface qui soit complètement dans le tore. Plus précisément, on dit que le tore est un domaine **multiplement connexe**, par opposition aux domaines **simplement connexes**.

En un point de  $\Omega$ , il y a une infinité de valeurs du potentiel, leurs différences deux à deux étant des multiples de I. On parle de **potentiel multivoque** (Bossavit, 1991c). Une solution consiste à définir une **coupure** dans le tore de façon à le rendre simplement connexe (surface  $\Sigma$  sur la figure 1), et à imposer sur cette coupure une **discontinuité** du potentiel scalaire égale au courant I (Dautray & Lions, 1988b). Ainsi, il ne pourra plus exister de contour mettant à défaut le théorème d'Ampère.

### 3.1.2 Potentiel scalaire partiel

Lorsque des sources de courant sont présentes dans le domaine d'étude  $\Omega$ , il n'est pas possible d'utiliser un potentiel scalaire défini par (4) partout. Il est toutefois possible de conserver une formulation en potentiel scalaire. Dans ce but, décomposons le champ magnétique en deux parties  $\mathbf{h}_s$  et  $\mathbf{h}_r$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_s + \mathbf{h}_r , \quad (7)$$

où le champ  $\mathbf{h}_s$  est choisi tel que

$$\text{rot } \mathbf{h}_s = \mathbf{j} . \quad (8)$$

Par conséquent, le champ complémentaire  $\mathbf{h}_r$  est irrotationnel, i.e.

$$\text{rot } \mathbf{h}_r = 0 , \quad (9)$$

et peut donc dériver d'un **potentiel scalaire**  $\phi$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{h}_r = - \text{grad } \phi , \quad (10)$$

Ce potentiel est souvent appelé **potentiel scalaire partiel**. Le champ  $\mathbf{h}$ , dit **total**, est donc défini par

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_s - \text{grad } \phi . \quad (11)$$

Portant alors (3) et (11) dans (2), nous obtenons l'équation

$$\boxed{\text{div} (\mu (\mathbf{h}_s - \text{grad } \phi)) = 0} . \quad (12)$$

Par la relation (10), la continuité de la composante tangentielle du champ  $\mathbf{h}_r$  est assurée si le potentiel scalaire partiel est également continu. L'équation (12) entraîne, quant à elle, la continuité de la composante normale de l'induction associée au champ total.

Notons que la relation (10) n'est valable que si le domaine d'étude est simplement connexe, à moins qu'il n'y ait aucune source de courant extérieure à ce domaine ; s'il en existe, elles peuvent être prises en compte par  $\mathbf{h}_s$  et il n'y a alors pas de problème. Un domaine multiplement connexe pourra toutefois être rendu simplement connexe grâce à l'introduction de coupures. Nous considérerons qu'une telle transformation a été réalisée de façon à pouvoir définir la relation (10) dans tous les cas.

Le champ  $\mathbf{h}_s$  peut être choisi comme créé par les seules sources de courant en l'absence de tout matériau magnétique (i.e.  $\mu = \mu_0$  partout). Il est dans ce cas donné par la loi de Biot-Savart (Nayfeh & Brussel, 1985), qui est la solution intégrale du problème de la magnétostatique dans le vide, i.e.

$$\mathbf{h}_s(\mathbf{x}_P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{j} \wedge \mathbf{r}}{r^3} d\mathbf{x}_Q , \quad (13)$$

où  $\mathbf{r}$  est le vecteur position du point d'évaluation  $\mathbf{x}_P$  par rapport au point d'intégration  $\mathbf{x}_Q$ , i.e.  $\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q$ , et  $r$  est la distance entre ces points, i.e.  $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q|$ . Le support du champ  $\mathbf{j}$  se réduit bien entendu aux domaines conducteurs de  $\Omega$ . Ce champ  $\mathbf{h}_s$  est appelé **champ source** et le champ  $\mathbf{h}_r$  est alors appelé **champ de réaction**, puisqu'il est engendré par le phénomène d'aimantation dans les matériaux magnétiques. Le potentiel partiel  $\phi$ , associé à  $\mathbf{h}_r$ , est aussi appelé **potentiel de réaction**.

Le champ  $\mathbf{h}_s$ , défini par (13), est à divergence nulle. Il s'agit d'une contrainte, implicite dans (13), dont on pourrait se passer. Il existe en réalité toute une famille de champs  $\mathbf{h}_s$  vérifiant  $\text{rot } \mathbf{h}_s = \mathbf{j}$  et le champ (13) n'est qu'un de ses éléments, fixé par la condition de divergence. Choisir d'autres champs de cette famille, qui n'ont cependant plus de signification

physique, peut être intéressant. Cela constitue une généralisation des formulations en potentiel scalaire, connue sous le nom de formulation  $\mathbf{T}\text{-}\Omega$ , où  $\mathbf{T}$  est connu. Nous parlerons encore, mais ce sera un abus de langage, de champs source et de réaction. Le champ  $\mathbf{h}_s$  défini diffère du champ source réel (13) par le gradient d'un potentiel scalaire  $\eta$  ; le champ de réaction s'adapte en conséquence et diffère ainsi du champ de réaction réel. Le potentiel de réaction qui est alors défini ne diffère du potentiel réel qu'au potentiel  $\eta$  près. On pourrait parler de **champs source et de réaction généralisés**.

Par exemple, on peut se contenter de choisir un champ  $\mathbf{h}_s$  nul presque partout à l'extérieur des conducteurs, sauf dans le voisinage des coupures qui leur sont associées, avec toutefois des conditions de transmission correctes sur les interfaces (Kladas & Tegopoulos, 1992 ; Nakata, Takahashi, Fujiwara & Okada, 1988). Dans ce cas, la relation (11) se ramène à (4), et l'on peut, en quelque sorte, parler de **couplage des potentiels partiel et total**. Un potentiel total est en effet défini implicitement presque partout à l'extérieur des conducteurs. Nous verrons au point suivant quel avantage particulier cela peut apporter.

Un couplage des potentiels peut aussi être défini explicitement.

### 3.1.3 Couplage des potentiels partiel et total

Un potentiel partiel peut être défini dans certaines régions, dont les régions conductrices, et un potentiel total peut être défini dans les autres régions. Il s'agit du couplage, explicite, des potentiels partiel et total.

Des conditions de transmission appropriées doivent alors être établies aux interfaces entre ces deux groupes de régions. Notons  $\psi$  le potentiel total défini par (4) et  $\phi$  le potentiel partiel défini par (10). Si ces deux potentiels sont définis de part et d'autre d'une interface  $\Sigma$  — et sur  $\Sigma$  elle-même par prolongement —, alors la continuité de la composante tangentielle du champ  $\mathbf{h}$  est assurée si la relation

$$\psi|_{\Sigma} = \phi|_{\Sigma} - \int_{\gamma_{PQ}} \mathbf{h}_s \cdot d\mathbf{l} \quad (14)$$

a lieu en tout point  $Q$  de  $\Sigma$  ;  $\gamma_{PQ}$  est un chemin sur  $\Sigma$  reliant un point  $P$  fixé quelconque, où l'égalité de  $\phi$  et  $\psi$  est posée, au point  $Q$ .

Le couplage des potentiels est en général réalisé afin d'éviter l'utilisation d'un potentiel partiel dans les matériaux à forte perméabilité magnétique, dans lesquels le champ  $\mathbf{h}$  est en général très faible ( $\mathbf{h}$  tend vers 0 lorsque  $\mu$  tend vers l'infini,  $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$  restant fini et n'étant pas faible). En effet, les champs  $\mathbf{h}_s$  et  $\mathbf{h}_r$ , s'ils étaient définis dans de tels matériaux, auraient le même ordre de grandeur et seraient de sens opposés, ce qui engendrerait une forte imprécision numérique sur le champ total, d'où une erreur importante sur l'induction  $\mathbf{b}$  (Bossavit, 1989d ; Nakata, Takahashi, Fujiwara & Imai, 1990).

Cette erreur est particulièrement importante lorsque  $\mathbf{h}_s$  et  $\mathbf{h}_r$  sont calculés de façon différente. Cependant, elle peut être réduite par un choix adéquat de l'espace fonctionnel d'approximation de  $\mathbf{h}_s$ . C'est le cas lorsque cet espace contient l'image, par le gradient, de l'espace du potentiel scalaire (Biro et al., 1993 ; Webb & Forghani, 1989). Dans tous les cas, l'utilisation d'un potentiel total dans les régions à forte perméabilité, couplé à un potentiel partiel ailleurs, permet d'éviter ce type d'imprécision (Bedrosian et al., 1993 ; Magele et al., 1988). Notons qu'un potentiel total implicite, comme dans l'exemple de la sous-section précédente, doit également permettre d'éviter ce genre d'erreur.

Dans les régions à potentiel partiel, le champ  $\mathbf{h}_s$  peut être défini par (13). Dans ce cas, l'évaluation de la circulation de ce champ, dans la condition de transmission (14), demande en général un effort de calcul particulièrement important. Le choix d'un autre champ  $\mathbf{h}_s$  peut, par

contre, conduire à simplifier l'expression des conditions de transmission (Kladas & Tegopoulos, 1992 ; Webb & Forghani, 1989, 1990).

### 3.2 Formulation magnétostatique en potentiel vecteur

L'équation (2), i.e.  $\text{div } \mathbf{b} = 0$ , permet de dériver  $\mathbf{b}$  d'un **potentiel vecteur magnétique**  $\mathbf{a}$  (Stratton, 1941), c'est-à-dire

$$\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a} . \quad (15)$$

Ce potentiel vecteur est cependant déterminé au gradient d'une fonction scalaire arbitraire près, et plus encore si le domaine d'étude est multiplement connexe, et n'est donc pas unique. En effet, si  $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \text{grad } f$ , alors  $\text{rot } \mathbf{a}' = \text{rot } \mathbf{a}$ . Portant (3) et (15) dans (1), nous obtenons l'équation

$$\boxed{\text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{a}) = \mathbf{j}} , \quad (16)$$

qui constitue une **formulation magnétostatique en potentiel vecteur**. Notons que, par la relation (15), la continuité de la composante normale de  $\mathbf{b}$  est assurée si la composante tangentielle de  $\mathbf{a}$  est continue. La condition de continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{h}$  est, quant à elle, implicite dans l'équation (16). Notons également que, par la relation (15), le flux de  $\mathbf{b}$  à travers une surface  $\Sigma$  est égal à la circulation de  $\mathbf{a}$  le long de son contour  $\partial\Sigma$ , i.e.

$$\Phi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} . \quad (17)$$

Un inconvénient de cette formulation, par rapport aux formulations en potentiel scalaire, est le caractère vectoriel de l'inconnue, qui conduit à une résolution plus "lourde". Un autre inconvénient est qu'elle nécessite d'imposer des conditions supplémentaires pour assurer l'unicité de la solution. Cependant, nous verrons dans la suite qu'elle ne peut pas être abandonnée pour la cause. Elle fournit en effet au niveau numérique une solution qui a ses avantages propres, tout comme la solution scalaire a les siens. Mais n'anticipons pas davantage sur le niveau discret.

Il est possible de définir un **potentiel vecteur partiel** d'une façon similaire à la définition d'un potentiel scalaire partiel. Notons qu'une telle définition n'est toutefois pas nécessaire, elle conduit juste à une autre formulation. Décomposons pour cela le potentiel vecteur  $\mathbf{a}$  en deux parties  $\mathbf{a}_s$  et  $\mathbf{a}_r$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_s + \mathbf{a}_r , \quad (18)$$

où le potentiel  $\mathbf{a}_s$  est choisi tel que

$$\text{rot } \mathbf{a}_s = \mathbf{b}_s , \quad (19a)$$

avec

$$\mathbf{b}_s = \mu_0 \mathbf{h}_s , \quad \text{rot } \mathbf{h}_s = \mathbf{j} . \quad (19b-c)$$

Les relations (19abc) entraînent que

$$\text{rot } (\mu_0^{-1} \text{rot } \mathbf{a}_s) = \mathbf{j} , \quad (20)$$

et l'équation (16) devient alors

$$\text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{a}_r) = \text{rot } ((\mu_0^{-1} - \mu^{-1}) \text{rot } \mathbf{a}_s) . \quad (21)$$

Le potentiel  $\mathbf{a}_s$  peut être choisi comme associé au champ magnétique créé par les seules sources de courant, en l'absence de tout matériau magnétique, c'est-à-dire qu'il peut être défini par

$$\mathbf{a}_s(\mathbf{x}_P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{j}}{r} d\mathbf{x}_Q, \quad (22)$$

avec les mêmes notations que dans (13). On peut vérifier que le rotationnel de (22) donne bien (13), au facteur  $\mu_0$  près. Le potentiel  $\mathbf{a}_s$  ainsi défini est appelé **potentiel vecteur source** et le potentiel complémentaire  $\mathbf{a}_r$  est appelé **potentiel vecteur de réaction**, puisqu'il est associé au phénomène d'aimantation dans les matériaux magnétiques.

Le potentiel  $\mathbf{a}_s$  défini par (22) est à divergence nulle. Rien n'empêche cependant, comme pour le champ source dans la formulation en potentiel scalaire, de choisir d'autres formes pour  $\mathbf{a}_s$ , qui vérifient toutefois (19). C'est la non-unicité du potentiel vecteur qui rend cela possible.

### Condition de jauge

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'équation (16) (resp. (21)) n'a pas une solution unique  $\mathbf{a}$  (resp.  $\mathbf{a}_r$ ). En effet, si  $\mathbf{a}$  est solution de (16), alors tout champ du type  $\mathbf{a} + \text{grad } \eta$ , où  $\eta$  est une fonction scalaire quelconque, est également solution de (16). Nous considérons que le domaine d'étude est un domaine simplement connexe, auquel tout domaine multiplement connexe peut toujours se ramener grâce à l'introduction de coupures. Il manque en réalité une équation scalaire, appelée **condition de jauge**, pour assurer l'unicité du potentiel vecteur, en fixant en quelque sorte la fonction  $\eta$ . Il s'agit également de définir des conditions aux limites adéquates, relatives au potentiel vecteur  $\mathbf{a}$ , sur la frontière du domaine d'étude.

Une jauge possible est la **jauge de Coulomb** (Biro & Preis, 1989), c'est-à-dire

$$\text{div } \mathbf{a} = 0. \quad (23)$$

Notons que cette jauge entraîne la continuité de la composante normale du potentiel vecteur  $\mathbf{a}$ . D'autres jauges, mieux adaptées à certaines méthodes de résolution, sont également envisageables.

Considérons la condition

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (24)$$

où  $\mathbf{w}$  est un champ de vecteurs dont les lignes de champ ne sont pas fermées et sont telles qu'elles peuvent relier toute paire de points quelconque du domaine d'étude (Albanese & Rubinacci, 1990a). Ainsi, si  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  sont tels que  $\text{rot } \mathbf{a}_1 = \text{rot } \mathbf{a}_2$ , alors  $\text{rot } \delta\mathbf{a} = \text{rot } (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) = 0$ . Si de plus, ils vérifient la condition (24), i.e.  $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{w} = 0$  et  $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{w} = 0$ , alors  $\delta\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0$  et

$$0 = \int_{\gamma_{PQ}} \delta\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma_{PQ}} \text{grad } \eta \cdot d\mathbf{l} = \eta(\mathbf{x}_Q) - \eta(\mathbf{x}_P), \quad \forall \mathbf{x}_P, \mathbf{x}_Q \in \Omega,$$

où  $\gamma_{PQ}$  est un chemin qui suit les lignes de champ de  $\mathbf{w}$ , i.e. auquel  $\mathbf{w}$  est en tout point tangent. Il en résulte que la fonction  $\eta$  est constante et donc que  $\delta\mathbf{a} = \text{grad } \eta = 0$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  sont identiques. La condition (24) est donc bien une condition de jauge. Un exemple de champ  $\mathbf{w}$  est le champ radial  $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ . Nous verrons qu'au niveau discret, le champ  $\mathbf{w}$  peut ne pas être continu.

### 3.3 Comparaison des formulations en potentiels scalaire et vecteur

Le problème de la magnétostatique demande la résolution des équations (1) et (2), et l'introduction de la notion de potentiel magnétique apparaît être un outil pratique pour cette résolution. Chacun des potentiels considérés est défini en relation avec une de ces équations afin de la rendre implicite. Les formulations qui en résultent peuvent alors être classées en deux catégories : la famille des formulations construites à partir de l'équation (1),  $\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j}$ , et

celle des formulations construites à partir de l'équation (2),  $\text{div } \mathbf{b} = 0$ . La première famille est directement basée sur le champ magnétique alors que la seconde est directement basée sur l'induction magnétique. Nous parlons respectivement de famille de formulations en  $\mathbf{h}$  et de famille de formulations en  $\mathbf{b}$ . Nous verrons que ces deux familles sont généralisables pour le problème de la magnéto-dynamique.

Nous pouvons nous demander laquelle de ces formulations est préférable pour un problème donné. Il est clair que les problèmes qui admettent une solution analytique seront de préférence résolus à l'aide de la formulation qui apparaît la mieux adaptée, en ce qui concerne les outils mathématiques à mettre en oeuvre, sans qu'il n'y ait d'influence sur la qualité de la solution finale. Par contre, au niveau discret, les propriétés d'une solution numérique dépendent en général du type de la formulation utilisée. Une solution numérique d'un problème donné n'est en effet qu'une approximation de la solution exacte de ce problème et cette approximation est directement liée à la formulation mise en oeuvre.

Le potentiel scalaire présente l'avantage, par rapport au potentiel vecteur, d'avoir un **caractère scalaire** plutôt que vectoriel, ce qui réduit considérablement la dimension du problème à résoudre. Il peut cependant être **multiforme**, dans des domaines multiples connexes, et nécessiter alors un traitement spécifique (définition de coupures, imposition de discontinuités de potentiel). Le potentiel vecteur n'entraîne quant à lui pas ce genre de problème mais nécessite par contre la définition d'une **condition de jauge** afin d'assurer son unicité. Il apparaît donc que les difficultés, ou inconvénients, propres au potentiel scalaire n'ont pas lieu pour le potentiel vecteur, de même que les difficultés propres au potentiel vecteur n'ont pas lieu pour le potentiel scalaire.

Les problèmes qui présentent une invariance de leur solution dans une certaine direction (c'est le cas lorsqu'il y a une symétrie de translation ou de révolution), appelés problèmes bidimensionnels, peuvent être posés en terme d'un potentiel vecteur dont la direction peut être fixée a priori et dont seule la norme constitue alors une inconnue. Ce choix permet de fixer l'unicité du potentiel vecteur, grâce à la définition implicite correspondante d'une condition de jauge. De tels problèmes peuvent donc être résolus plus facilement avec un potentiel vecteur qu'avec un potentiel scalaire, car ce dernier nécessiterait en plus un traitement particulier des domaines multiples connexes. C'est ainsi que la formulation en potentiel vecteur est souvent utilisée dans les problèmes bidimensionnels (Nicolet, 1991), en priorité sur la formulation en potentiel scalaire. Notons toutefois que cette dernière formulation ne devrait pas être abandonnée pour la cause. Nous verrons plus tard qu'elle a ses avantages propres au niveau discret.

Dans les problèmes tridimensionnels, au niveau discret, on a souvent tendance à préférer la formulation en potentiel scalaire, parce qu'elle réduit considérablement leur dimension. Il s'agit toutefois de ne pas abandonner la formulation en potentiel vecteur. Nous verrons en effet qu'elle a aussi ses avantages propres et qu'elle est, en quelque sorte, complémentaire à la formulation en potentiel scalaire.

Les formulations établies dans cette section ne sont pas encore bien adaptées à une résolution numérique, autre que la méthode des différences finies (que nous ne développerons pas à cause de son impossibilité d'être appliquée à des géométries complexes). Le but du chapitre suivant est de définir les outils qui permettront de les exprimer sous d'autres formes, en particulier adaptées à la méthode des éléments finis.

## 4. Formulations magnétodynamiques

La magnétodynamique consiste en l'étude des phénomènes magnétiques et électriques en **régime dynamique**, en négligeant toutefois les courants de déplacement, c'est-à-dire sous l'hypothèse de l'électrotechnique. Les champs électromagnétiques sont alors variables, soit par variation de courants d'excitation, soit par mouvement d'aimants permanents. Le mouvement n'est cependant pas pris en compte ici et seul le premier cas sera étudié. Les équations à considérer sont issues des équations de Maxwell (2.12-15). Elles sont

$$\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j}, \quad \text{rot } \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b}, \quad \text{div } \mathbf{b} = 0, \quad (1-2-3)$$

et il convient d'y ajouter la loi de comportement magnétique (2.16), ainsi que la loi d'Ohm (2.18), i.e.

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}, \quad (4-5)$$

avec éventuellement  $\mu = \mu(\mathbf{h})$  pour les matériaux non linéaires.

Il s'agit également de fixer des conditions aux limites adéquates sur la frontière du domaine d'étude. Elles sont relatives soit à la composante tangentielle de  $\mathbf{h}$ , soit à la composante normale de  $\mathbf{b}$ , de façon à assurer l'unicité de la solution. Notons qu'elles sont également respectivement associées à la composante normale de  $\mathbf{j}$  et à la composante tangentielle de  $\mathbf{e}$ . Dans un souci de simplification, nous ne les poserons cependant pas explicitement dans cette présentation des formulations.

Les équations (1) et (2) sont respectivement l'équation d'Ampère et l'équation de Faraday. Notons, comme nous l'avons déjà fait remarquer, que l'équation (3) n'est pas tout à fait indépendante de l'équation (2), en ce sens que si elle est vérifiée à l'instant initial, elle le reste à tout instant ultérieur.

La densité de courant  $\mathbf{j}$  peut se décomposer en deux contributions, l'une  $\mathbf{j}_s$  relative aux courants imposés et connue, l'autre  $\mathbf{j}_r$  due aux courants induits et inconnue, i.e.

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_r. \quad (6)$$

Les supports de  $\mathbf{j}_s$  et  $\mathbf{j}_r$  sont parfois disjoints.

Les équations du problème des courants induits suffisent à déterminer les champs  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{j}$  partout dans le domaine d'étude. Par contre, elles ne permettent pas de déterminer de façon unique le champ électrique  $\mathbf{e}$  dans les régions non conductrices. En effet, on peut toujours lui ajouter le champ grad  $\psi$ , avec  $\psi$  constant dans les régions conductrices, sans affecter les autres champs. On pourra en réalité souvent se passer de calculer le champ  $\mathbf{e}$  dans les régions non conductrices. Sa détermination est toutefois possible à condition de tenir compte, en plus, de l'équation (2.15) et de la loi de comportement (2.17).

Les champs  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{j}$  sont suffisants pour caractériser un état électromagnétique dans l'espace. Des formulations peuvent directement s'exprimer en fonction de ces champs. Néanmoins, tout comme en magnétostatique, l'introduction de la notion de potentiel peut se révéler intéressante. Différents potentiels peuvent être définis pour conduire à d'autres formulations.

### 4.1 Formulation magnétodynamique en champ magnétique

Dans une **région conductrice** ( $\sigma \neq 0$ ), portant (5) et (4), i.e.  $\mathbf{e} = \sigma^{-1} \mathbf{j}$  et  $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$ , puis (1), i.e.  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{h}$ , dans (2), nous obtenons l'équation



$$\boxed{\text{rot} (\sigma^{-1} \text{rot} \mathbf{h}) + \partial_t (\mu \mathbf{h}) = 0} \quad . \quad (7)$$

Cette équation s'exprime uniquement en fonction du champ magnétique  $\mathbf{h}$  et est appelée **formulation en  $\mathbf{h}$**  du problème des courants induits. Elle admet une solution unique si elle est accompagnée de conditions aux limites adéquates.

Dans les **régions non conductrices**, il n'est pas nécessaire de déterminer le champ électrique  $\mathbf{e}$ . Dans ce cas, l'équation (2) peut être abandonnée à condition d'être remplacée par l'équation (3). De plus, dans ces régions, le champ magnétique est irrotationnel, et peut donc, comme en magnétostatique, dériver d'un **potentiel scalaire magnétique**  $\phi$ , i.e.

$$\mathbf{h} = - \text{grad} \phi \quad . \quad (8)$$

Un champ source  $\mathbf{h}_s$  peut aussi être défini afin de permettre la prise en compte des régions à courant imposé. Ainsi,

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_s - \text{grad} \phi \quad , \quad (9a)$$

avec

$$\text{rot} \mathbf{h}_s = \mathbf{j}_s \quad . \quad (9b)$$

Portant (4) et (9a) dans (3), nous obtenons l'équation

$$\boxed{\text{div} (\mu (\mathbf{h}_s - \text{grad} \phi)) = 0} \quad , \quad (10)$$

qui est équivalente à l'équation (3.12) du problème de la magnétostatique et qui ne s'applique qu'aux régions non conductrices.

La formulation en champ magnétique, caractérisée par les équations (7) et (10), est appelée **formulation  $\mathbf{h}$ - $\phi$** . Afin de coupler les régions conductrices et non conductrices, il faut définir des conditions de transmission entre  $\mathbf{h}$  et  $\phi$  aux interfaces entre ces régions. Au niveau discret, nous verrons qu'un certain choix des espaces fonctionnels d'approximation de  $\mathbf{h}$  et  $\phi$  permet d'exprimer aisément ces conditions. Notons que l'espace d'approximation de  $\mathbf{h}$  devra permettre la continuité de sa composante tangentielle et devra laisser libre sa composante normale. Il s'agit d'une contrainte liée au caractère physique de cette inconnue.

## 4.2 Formulation magnétodynamique en potentiel vecteur électrique

Un **potentiel vecteur électrique**  $\mathbf{t}$  (Carpenter, 1977 ; Renhart et al., 1988) peut être défini par

$$\text{rot} \mathbf{t} = \mathbf{j} \quad , \quad (11)$$

de sorte que l'équation de conservation du courant,  $\text{div} \mathbf{j} = 0$ , est vérifiée.

De (1) et (11), on déduit que

$$\text{rot} \mathbf{h} = \text{rot} \mathbf{t} \quad ,$$

et donc,

$$\mathbf{h} = \mathbf{t} - \text{grad} \omega \quad , \quad (12)$$

où  $\omega$  est un **potentiel scalaire magnétique** défini dans le domaine d'étude rendu simplement connexe. Notons qu'un potentiel vecteur magnétique source  $\mathbf{t}_s$  pourrait également être défini, i.e.

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_s + \mathbf{t}_r \quad , \quad (13a)$$

avec

$$\text{rot } \mathbf{t}_s = \mathbf{j}_s . \quad (13b)$$

Dans une **région conductrice** ( $\sigma \neq 0$ ), portant (5) et (4), i.e.  $\mathbf{e} = \sigma^{-1} \mathbf{j}$  et  $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$ , puis (11) et (12), dans (2), nous obtenons l'équation

$$\boxed{\text{rot } (\sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{t}) + \partial_t (\mu (\mathbf{t} - \text{grad } \omega)) = 0} . \quad (14)$$

Dans une **région non conductrice**, portant (4) et (12) dans (3), nous obtenons l'équation

$$\boxed{\text{div } (\mu (\mathbf{t} - \text{grad } \omega)) = 0} . \quad (15)$$

On pose en général  $\mathbf{t} = 0$  (ou bien  $\mathbf{t}_r = 0$ , si on a défini  $\mathbf{t}_s$ ) dans une telle région, et donc

$$\text{div } (\mu \text{grad } \omega) = 0 . \quad (16)$$

La formulation en potentiel vecteur électrique, caractérisée par les équations (14) et (15), est appelée **formulation  $\mathbf{t}$ - $\omega$**  (aussi notée **T- $\Omega$** ). La continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{h}$  est assurée si à la fois  $\omega$  et la composante tangentielle de  $\mathbf{t}$  sont continues. Il en résulte que le passage de (15) à (16) nécessite l'annulation de la composante tangentielle de  $\mathbf{t}$  aux interfaces entre les régions conductrices et non conductrices. Une telle condition entraîne alors l'annulation de la composante normale de  $\mathbf{j}$  sur ces interfaces. La continuité de la composante normale de  $\mathbf{b}$  est implicite dans (14) et (15).

La formulation en  $\mathbf{h}$  ( **$\mathbf{h}$ - $\phi$** ) apparaît être un cas particulier de la formulation en potentiel vecteur électrique ( **$\mathbf{t}$ - $\omega$** ). En effet, en annulant  $\omega$ , on a  $\mathbf{h} = \mathbf{t}$ , dont on peut redéfinir un potentiel scalaire  $\phi$  dans certaines régions.

#### Condition de jauge

Dans le cas général, il s'agit d'imposer une condition de jauge sur le potentiel vecteur électrique. On peut définir des conditions similaires à celles utilisées pour le potentiel vecteur magnétique du problème de la magnétostatique, i.e. (3.23) ou (3.24). Il s'agit également de définir des conditions aux limites adéquates, relatives au potentiel vecteur  $\mathbf{t}$ , sur la frontière du domaine d'étude.

### 4.3 Formulation magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique

Un **potentiel vecteur magnétique**  $\mathbf{a}$  peut être défini par

$$\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a} . \quad (17)$$

et, par conséquent, l'équation (3) est vérifiée. Portant (17) dans (2), nous obtenons

$$\text{rot } (\mathbf{e} + \partial_t \mathbf{a}) = 0 ,$$

et il en résulte que

$$\mathbf{e} = - \partial_t \mathbf{a} - \text{grad } v , \quad (18)$$

où  $v$  est un **potentiel scalaire électrique**. Portant alors (4) et (5), i.e.  $\mathbf{h} = \mu^{-1} \mathbf{b}$  et  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}$ , puis (17) et (18), dans (1), nous obtenons l'équation

$$\boxed{\text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{a}) + \sigma (\partial_t \mathbf{a} + \text{grad } v) = 0} , \quad (19)$$

qui constitue une **formulation magnétodynamique en potentiel vecteur**. Plus précisément, elle est appelée **formulation  $\mathbf{a}$ - $v$** . Le potentiel scalaire électrique n'a besoin d'être défini que

dans les régions conductrices, si on ne vise au calcul du champ  $\mathbf{e}$  que dans ces régions. Nous verrons qu'il est même possible de l'annuler.

La relation (17) entraîne que la continuité de la composante normale de  $\mathbf{b}$  est assurée si la composante tangentielle de  $\mathbf{a}$  est continue. La continuité de la composante tangentielle du champ magnétique est, quant à elle, implicite dans l'équation (19). Il en est de même de la continuité de la composante normale de la densité de courant.

#### Condition de jauge

Tout comme pour la formulation magnétostatique en potentiel vecteur, il s'agit de définir une condition de jauge, associée au potentiel vecteur, afin d'assurer l'unicité de la solution de l'équation (19). Ici encore, les conditions (3.23) ou (3.24) constituent des jauges possibles. Il s'agit également de définir des conditions aux limites adéquates, relatives au potentiel vecteur  $\mathbf{a}$ , sur la frontière du domaine d'étude (Biro & Preis, 1989).

### 4.4 Formulation magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique modifié

Définissons un **potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{a}^*$** , dit **modifié** (Emson & Simkin, 1983 ; Kameari, 1990), tel que

$$\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a}^*, \quad \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{a}^*. \quad (20-21)$$

Cette dernière relation est un cas particulier de (18), où le potentiel scalaire électrique est annulé ( $v = 0$ ). La loi de Faraday (2) est par conséquent également vérifiée dans ce cas. Par la relation (21), le potentiel vecteur  $\mathbf{a}^*$  peut être considéré comme une primitive temporelle du champ électrique  $\mathbf{e}$ , i.e.

$$\mathbf{a}^*(t) = -\int_0^t \mathbf{e}(t') dt'. \quad (22)$$

Portant (4) et (5), i.e.  $\mathbf{h} = \mu^{-1} \mathbf{b}$  et  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}$ , puis (20) et (21), dans (1), nous obtenons l'équation

$$\boxed{\text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{a}^*) + \sigma \partial_t \mathbf{a}^* = 0}, \quad (23)$$

qui constitue une **formulation magnétodynamique en potentiel vecteur modifié** ou **formulation en  $\mathbf{a}^*$** . Il s'agit bien entendu d'un cas particulier de la formulation (19). Il est intéressant de remarquer, en prenant la divergence de l'équation (23), que l'on obtient

$$\partial_t \text{div } (\sigma \mathbf{a}^*) = 0,$$

et donc que, si  $\mathbf{a}^* = 0$  en  $t = 0$ ,

$$\text{div } (\sigma \mathbf{a}^*) = 0. \quad (24)$$

Il s'agit d'une **jauge implicite** dans (23) qui n'apparaît cependant que dans les régions conductrices ( $\sigma \neq 0$ ). Dans les régions non conductrices, une condition de jauge doit alors être imposée explicitement. On définira par exemple (3.23) ou (3.24). Notons que la relation (24) entraîne la continuité du produit de la conductivité par la composante normale du potentiel vecteur modifié, i.e.  $\sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}^*$ . Par conséquent, à la surface de séparation entre deux matériaux de conductivité différente, la composante normale de  $\mathbf{a}^*$  est discontinue. Sa composante tangentielle doit, par contre, d'après la relation (20), être continue afin d'assurer la continuité de la composante normale de  $\mathbf{b}$ . Le potentiel vecteur  $\mathbf{a}$ , de la formulation  $\mathbf{a}$ - $v$ , peut, quant à lui, être entièrement continu ; c'est le cas lorsque la jauge de Coulomb est adoptée. C'est la composante normale du champ grad  $v$ , de l'expression (18), qui peut subir une discontinuité.

## 4.5 Comparaison des formulations magnétodynamiques

Des potentiels scalaires et vecteur ont été définis pour le problème de la magnétodynamique. Les caractéristiques qui ont déjà été énoncées pour de tels potentiels en magnétostatique (Section 3.3) sont encore d'application.

La formulation en champ magnétique ainsi que la formulation en potentiel vecteur électrique font partie de la famille des formulations en  $\mathbf{h}$ . Les formulations en potentiels vecteur magnétiques, modifié ou non, appartiennent à la famille des formulations en  $\mathbf{b}$ . Notons qu'il apparaît une certaine similitude entre la formulation en champ magnétique (7) et la formulation en potentiel vecteur magnétique modifié (23), ainsi qu'entre la formulation en potentiel vecteur électrique (14) et la formulation en potentiel vecteur magnétique (19). Il apparaît d'une part une dualité entre  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{a}^*$ , et d'autre part une dualité entre  $\mathbf{t}-\omega$  et  $\mathbf{a}-v$ . Dans les deux cas, les rôles de la conductivité  $\sigma$  et de la perméabilité  $\mu$  sont interchangés mais il y a une différence essentielle :  $\sigma$  peut s'annuler alors que  $\mu$  est toujours supérieur ou égal à un.

Pour les problèmes tridimensionnels, au niveau discret, nous ne privilégierons a priori aucune des formulations car nous verrons qu'elles ont chacune leurs avantages propres et qu'elles sont complémentaires.

## 4.6 Vers une discrétisation des formulations

Les formulations établies seront bientôt exprimées sous d'autres formes, adaptées à une discrétisation par la méthode des éléments finis, et c'est le but du chapitre suivant de définir les outils nécessaires à une telle transformation.

Pour ce faire, nous définirons des espaces fonctionnels construits sur mesure pour les champs électromagnétiques et les potentiels. Nous étudierons ensuite les principales propriétés des opérateurs différentiels utilisés, le gradient, le rotationnel et la divergence. Les notions introduites jusqu'ici, telles que les notions de multiple connexité et de coupure, seront approfondies.

Nous développerons ensuite un ensemble d'outils permettant la discrétisation des espaces fonctionnels définis, et donc la discrétisation des champs et des potentiels, en tâchant de conserver, au niveau discret, les propriétés des espaces et des opérateurs. En particulier, nous tâcherons de pouvoir exprimer aisément les conditions d'interface et les conditions aux limites.

# Chapitre II

## Modèles aux dérivées partielles

---

### Partie A

### Structure mathématique continue

#### 1. Position du problème

Considérons un ensemble  $\Omega$  ouvert et borné de l'espace euclidien affine à trois dimensions (Fig. 1), dont les éléments sont appelés des points. Cet ensemble est appelé **domaine**  $\Omega$  ; il peut être connexe, c'est-à-dire d'un seul tenant, ou non connexe. Sa **frontière**  $\partial\Omega$  est notée  $\Gamma$ . Il s'agit de résoudre, dans ce domaine  $\Omega$ , des **équations aux dérivées partielles** qui font intervenir les **opérateurs différentiels particuliers**, le gradient, le rotationnel et la divergence. De telles équations régissent la répartition spatiale de **champs** vectoriels (champ magnétique, champ électrique, potentiel vecteur, ...) ou scalaires (potentiel scalaire, ...). Dans ce but, nous allons définir une **structure mathématique** apte à accueillir ce genre d'équations et qui va réunir des outils permettant leur étude. Il s'agira principalement des opérateurs et de leurs domaines de définition ; ces derniers sont des espaces fonctionnels de champs scalaires et vectoriels définis sur  $\Omega$  qu'il faudra caractériser de façon précise.

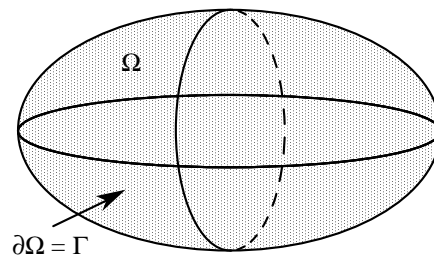


Fig. 1. Domaine étudié.

#### 2. Outils de base

##### 2.1 Espaces fonctionnels

Nous considérons l'espace fonctionnel  $L^2(\Omega)$ , qui est l'espace des fonctions, ou champs scalaires, de carré intégrable sur  $\Omega$  (Bass, 1971 ; Wait & Mitchell, 1985). Nous lui associons le produit interne, ou **produit scalaire**, de deux de ses éléments,  $u$  et  $v$ , noté  $(u, v)$  et défini par

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) dx \quad , \quad u, v \in L^2(\Omega) \quad , \quad (1)$$

où  $\mathbf{x}$  est un point de l'espace et  $d\mathbf{x}$  est un élément de volume. La **norme** correspondante d'un élément  $u$  de  $L^2(\Omega)$  est notée  $\|u\|_{L^2(\Omega)}$  et est définie par

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = (u, u)^{1/2} = \left( \int_{\Omega} u^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/2}, \quad u \in L^2(\Omega). \quad (2)$$

Elle est toujours finie. La **distance** entre deux fonctions,  $u$  et  $v \in L^2(\Omega)$ , est définie comme étant la norme de leur différence, i.e.  $\|u - v\|$ . Un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz (Bass, 1968a), i.e.

$$|(u, v)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega),$$

et nous constatons alors que  $(u, v)$  est bien défini, c'est-à-dire que l'intégrale (1) existe si  $u$  et  $v \in L^2(\Omega)$ .

Nous considérons également l'espace  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , qui est l'espace des champs de vecteurs dont le carré de la norme euclidienne (dans  $\mathbb{R}^3$ ) est intégrable sur  $\Omega$ . Nous lui associons le **produit scalaire** de deux de ses éléments,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , noté  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  et défini par

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega). \quad (3)$$

La **norme** correspondante est

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2} = \left( \int_{\Omega} u^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/2}, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad (4)$$

où  $u$  est la norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{u}$  ( $u = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ ). Elle est toujours finie.

Nous utiliserons la notation  $(u, v)_{\Omega_c}$  (resp.  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_c}$ ) lorsque le support de  $u$  (resp.  $\mathbf{u}$ ) ou de  $v$  (resp.  $\mathbf{v}$ ) se réduit à un sous-domaine  $\Omega_c$  de  $\Omega$ .

Deux éléments  $u, v \in L^2(\Omega)$  (resp.  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ ) sont dits **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul, i.e.  $(u, v) = 0$  (resp.  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ ). Deux espaces fonctionnels sont dits orthogonaux si tous leurs éléments sont orthogonaux deux à deux.

Un espace vectoriel, dans lequel un produit scalaire est défini, est un espace de pré-Hilbert. De plus, s'il est complet, c'est-à-dire si toute suite fondamentale  $\{u_n\}$  dans cet espace converge selon la norme qui y est définie vers un de ses éléments  $u$ , alors il est un **espace de Hilbert** (Bass, 1971 ; Wait & Mitchell, 1985). Pour rappel, une suite  $\{u_n\}$  est une suite fondamentale si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre entier  $N$  tel que  $\|u_i - u_j\| < \varepsilon$  si  $i, j > N$  ; de plus,  $u_i$  converge vers  $u$  si  $\|u - u_i\| \rightarrow 0$  lorsque  $i \rightarrow \infty$ .

Les espaces  $L^2(\Omega)$  et  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  sont des espaces de Hilbert. Ils peuvent accueillir des champs physiques, caractérisés par une énergie finie. De plus, ils sont bien adaptés aux formulations variationnelles. Des sous-espaces de  $L^2(\Omega)$  et  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , pour lesquels toutes les dérivées partielles du premier ordre des champs sont également de carré intégrable, sont appelés **espaces de Sobolev** (Dautray & Lions, 1987c ; Wait & Mitchell, 1985).

Les espaces fonctionnels définis sont réels mais on peut, sans grande difficulté, les généraliser pour les rendre complexes (Bass, 1968a).

Afin d'alléger les expressions, nous définissons les notations suivantes, relatives à des intégrales sur une surface  $\Gamma$  :

$$\langle u, v \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) ds, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) ds,$$

avec  $u, v, \mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  définis sur  $\Gamma$  tels que ces intégrales aient un sens.

## 2.2 Les opérateurs gradient, rotationnel, divergence

### 2.2.1 Définition des opérateurs gradient, rotationnel, divergence

Nous allons étudier les propriétés des opérateurs différentiels linéaires qui sont le **gradient** (grad), le **rotationnel** (rot) et la **divergence** (div).

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ . Soient  $f$  un champ scalaire de type  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $\mathbf{f}$  un champ vectoriel de type  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Les coordonnées cartésiennes sont utilisées. Les coordonnées d'un point  $\mathbf{x} \in \Omega$  sont notées  $(x, y, z)$ , et les composantes d'un champ vectoriel  $\mathbf{f}$  sont notées  $(f_x, f_y, f_z)$ , avec  $f_x, f_y, f_z$  de type  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Le gradient du champ scalaire  $f$  est défini par

$$\text{grad } f = \nabla f \stackrel{\text{def}}{=} (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f). \quad (5)$$

Le rotationnel du champ vectoriel  $\mathbf{f}$  est défini par

$$\text{rot } \mathbf{f} = \nabla \wedge \mathbf{f} \stackrel{\text{def}}{=} (\partial_y f_z - \partial_z f_y, \partial_z f_x - \partial_x f_z, \partial_x f_y - \partial_y f_x). \quad (6)$$

La divergence du champ vectoriel  $\mathbf{f}$  est définie par

$$\text{div } \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z. \quad (7)$$

Au sens classique, ces opérateurs ne sont définis qu'à l'intérieur des domaines où les champs auxquels ils s'appliquent sont différentiables. En un point de l'interface entre deux domaines, ces champs peuvent en effet ne pas être différentiables, ni même continus. Il s'agit alors de préciser ce qui se passe sur une telle interface, en général à l'aide de conditions de transmission. Cependant, grâce à la notion de distribution, ces opérateurs peuvent être définis partout et, en particulier, les conditions de transmission deviennent implicites.

Nous définissons les espaces de Sobolev, de champs scalaire et vectoriel, suivants :

$$\mathbf{H}^1(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) ; \partial_x \mathbf{v}, \partial_y \mathbf{v}, \partial_z \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \}, \quad (8)$$

$$\mathbf{H}^1(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) ; \partial_x \mathbf{v}, \partial_y \mathbf{v}, \partial_z \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \}. \quad (9)$$

### 2.2.2 Définition des domaines et des noyaux des opérateurs

Nous allons étudier les espaces qui correspondent aux réalisations des opérateurs grad, rot et div, et qui sont respectivement les espaces suivants :

$$\mathbf{H}(\text{grad}, \Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) ; \text{grad } \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \}, \quad (10)$$

$$\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) ; \text{rot } \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \}, \quad (11)$$

$$\mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) ; \text{div } \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \}. \quad (12)$$

Ces espaces constituent les **domaines** (dom) des opérateurs considérés. Nous pouvons noter que  $\mathbf{H}(\text{grad}, \Omega)$  correspond à  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ .

Nous pouvons également définir les sous-espaces associés suivants, où des **conditions aux limites homogènes** sont introduites,

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \mathbf{H}_0(\text{grad}, \Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{grad}, \Omega) ; \mathbf{v}|_{\Gamma} = 0 \}, \quad (13)$$

$$\mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) ; \mathbf{n} \wedge \mathbf{v} |_{\Gamma} = 0 \}, \quad (14)$$

$$\mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) ; \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} |_{\Gamma} = 0 \}. \quad (15)$$

Nous notons  $\mathbf{n}$  le champ des vecteurs unitaires normaux à  $\Gamma$  et orientés vers l'extérieur de  $\Omega$ . Nous l'appelons aussi champ de normales.

Les noyaux des opérateurs grad, rot et div, sont notés  $\ker(\cdot)$  et sont définis respectivement par

$$\ker(\text{grad}) = \mathbf{H}(\text{grad } 0, \Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) ; \text{grad } \mathbf{v} = 0 \}, \quad (16)$$

$$\ker(\text{rot}) = \mathbf{H}(\text{rot } 0, \Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) ; \text{rot } \mathbf{v} = 0 \}, \quad (17)$$

$$\ker(\text{div}) = \mathbf{H}(\text{div } 0, \Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) ; \text{div } \mathbf{v} = 0 \}. \quad (18)$$

Le noyau d'un opérateur  $A$  est le sous-espace du domaine de cet opérateur dont l'image est nulle, c'est-à-dire

$$\ker(A) = \{ x \in \text{dom}(A) ; Ax = 0 \}.$$

Nous définissons finalement des sous-espaces de  $\ker(\text{rot})$  (17) et  $\ker(\text{div})$  (18), associés à des conditions aux limites homogènes,

$$\mathbf{H}_0(\text{rot } 0, \Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) ; \text{rot } \mathbf{v} = 0, \mathbf{n} \wedge \mathbf{v} |_{\Gamma} = 0 \}, \quad (19)$$

$$\mathbf{H}_0(\text{div } 0, \Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) ; \text{div } \mathbf{v} = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} |_{\Gamma} = 0 \}. \quad (20)$$

### 2.2.3 Formules de Green

La relation d'analyse vectorielle

$$\mathbf{u} \cdot \text{grad } \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{u} = \text{div}(\mathbf{v} \mathbf{u}),$$

intégrée sur le domaine  $\Omega$ , et après application du théorème de la divergence, donne la **formule de Green** dite de **type grad-div** dans  $\Omega$ , i.e.

$$(\mathbf{u}, \text{grad } \mathbf{v}) + (\text{div } \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (21)$$

La relation d'analyse vectorielle

$$\mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v} - \text{rot } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \text{div}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}),$$

intégrée sur le domaine  $\Omega$ , et après application du théorème de la divergence, donne la **formule de Green** dite de **type rot-rot** dans  $\Omega$ , i.e.

$$(\mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{v}) - (\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (22)$$

Notons que le terme d'intégrale de surface qui apparaît dans cette dernière formule peut prendre les formes équivalentes suivantes :

$$\langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = \langle \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle_{\Gamma} = - \langle \mathbf{v} \wedge \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle_{\Gamma}.$$

Il est possible de définir une **formule de Green** dite **généralisée** (Morse & Feshbach, 1953a) par

$$(L\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{u}, L^*\mathbf{v}) = \int_{\Gamma} Q(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \, ds, \quad \forall \mathbf{u} \in \text{dom}(L) \text{ et } \forall \mathbf{v} \in \text{dom}(L^*), \quad (23)$$



où  $L$  et  $L^*$  sont des opérateurs différentiels d'ordre  $n$  qui s'appliquent respectivement à des fonctions  $u$  et  $v$  définies sur  $\overline{\Omega}$  ;  $Q$  est une fonction bilinéaire en  $u$  et  $v$ . L'opérateur  $L^*$  est appelé l'**adjoint** de  $L$ . Lorsque  $L$  et  $L^*$  sont égaux,  $L$  est dit **auto-adjoint**.

On remarque aisément que les formules (21) et (22) sont des cas particuliers de (23).

#### 2.2.4 Formulation faible

Considérons un problème aux dérivées partielles de la forme

$$Lu = f \quad \text{dans } \Omega, \quad Bu = g \quad \text{sur } \Gamma, \quad (24a-b)$$

où  $L$  est un opérateur différentiel d'ordre  $n$ ,  $B$  est un opérateur qui définit une condition à la limite,  $f$  et  $g$  sont des fonctions respectivement définies sur  $\Omega$  et  $\Gamma$ , et  $u$  est une fonction inconnue d'un espace fonctionnel  $U$  et définie sur  $\overline{\Omega}$ , i.e.  $u \in U(\overline{\Omega})$ . Notons que  $f$  peut éventuellement dépendre de  $u$ . Le problème (24) constitue ce que l'on appelle une **formulation forte**, ou encore classique. Une fonction  $u \in U(\overline{\Omega})$  qui vérifie ce problème est appelée **solution forte**, ou classique. En particulier, puisque  $L$  est d'ordre  $n$ , la fonction  $u$  doit être  $n-1$  fois continûment dérivable, i.e.  $u \in C^{n-1}(\Omega)$ . Une **formulation faible** du problème (24) est définie comme étant de la forme

$$(u, L^*v) - (f, v) + \int_{\Gamma} Q_g(v) ds = 0, \quad \forall v \in V(\Omega), \quad (25)$$

où  $L^*$  est l'opérateur adjoint de  $L$  tel qu'il est défini par la formule de Green généralisée (23),  $Q_g$  est une forme linéaire en  $v$  qui dépend de  $g$ , et l'espace  $V(\Omega)$  est un espace de **fonctions-test** qu'il s'agit de définir en rapport avec l'opérateur  $L^*$  et en particulier en rapport avec la condition à la limite (24b). Une fonction  $u$  qui satisfait cette équation pour toute fonction-test  $v \in V(\Omega)$  est appelée **solution faible**. Des définitions équivalentes des formulations forte et faible peuvent être obtenues dans (Brezis, 1983) ou dans (Johnson, 1987), par exemple.

La formule de Green généralisée (23) peut s'appliquer à la formulation (25) de façon à passer de  $L^*$  à  $L$ , ce qui revient en général à effectuer une intégration par partie. Il est alors possible de retrouver, grâce à un choix judicieux des fonctions-test, les différents éléments de la forme forte du problème, i.e. l'équation (24a) et la condition à la limite (24b).

Il est souvent facile de vérifier qu'une solution forte est également une solution faible. Il n'est par contre pas toujours immédiat qu'une solution faible soit aussi une solution forte car elle doit être suffisamment régulière pour être définie au sens classique (Brezis, 1983). Un avantage mathématique des formulations faibles est qu'elles permettent en général de prouver l'existence d'une solution plus aisément que les formulations fortes. Il s'agit de prouver que la solution faible trouvée est suffisamment régulière pour être également une solution forte. Un autre avantage des formulations faibles est qu'elles sont bien adaptées à la discrétisation par éléments finis (Johnson, 1987), ce qui apparaîtra lors de l'étude des formulations discrètes correspondantes. Les formulations fortes, par contre, se prêtent moins bien à une résolution numérique. Notons que dans certains cas, il est possible de définir un problème de minimisation équivalent à la formulation faible (25). C'est le cas lorsque le théorème de Lax-Milgram (Brezis, 1983) est d'application. Dans ce cas, il fournit même une preuve d'existence et d'unicité d'une solution. Notons aussi que la notion de formulation faible fait intervenir comme outils de base les espaces de Sobolev. On peut trouver une bonne introduction à la notion de formulation faible, appliquée aux problèmes de l'électrotechnique, dans (Bossavit, 1989d).

**Exemple de formulation faible pour le problème de la magnétostatique**

De façon à illustrer la notion de formulation faible, considérons le problème de la magnétostatique, limité au domaine  $\Omega$ , dont les équations sont

$$\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} = \mu \mathbf{h}, \quad (26a-b-c)$$

et dont les conditions aux limites sur des portions complémentaires  $\Gamma_h$  et  $\Gamma_e$  de  $\Gamma$  sont

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{h} \big|_{\Gamma_h} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} \big|_{\Gamma_e} = 0. \quad (26d-e)$$

Cette forme initiale du problème constitue sa **formulation forte**. Considérons la formule de Green de type grad-div dans  $\Omega$  (21) appliquée au champ  $\mathbf{b}$  et à un champ scalaire  $\phi'$  à définir, c'est-à-dire

$$(\mathbf{b}, \text{grad } \phi') + (\text{div } \mathbf{b}, \phi') = \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}, \phi' \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \phi' \in \Phi(\Omega). \quad (27)$$

Si nous définissons l'espace  $\Phi(\Omega)$  tel que

$$\Phi(\Omega) = \{ \phi \in H^1(\Omega); \phi \big|_{\Gamma_h} = 0 \}, \quad (28)$$

alors le dernier terme de l'équation (27) se réduit à  $\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}, \phi' \rangle_{\Gamma_e}$  et s'annule si l'on y introduit la condition (26e). De même, le deuxième terme de cette équation s'annule lorsque l'on y introduit l'équation (26b). L'équation (27) se réduit alors à

$$(\mathbf{b}, \text{grad } \phi') = 0, \quad \forall \phi' \in \Phi(\Omega). \quad (29)$$

C'est cette forme que l'on nomme **formulation faible** du problème. Nous l'avons établie au départ d'une formule de Green mais nous pouvons maintenant la considérer en temps que forme posée a priori pour ensuite en déduire les informations qu'elle renferme. En réalité, la formulation faible (29) contient à la fois l'**équation** (26b) et la **condition à la limite** (26e). En effet, en lui appliquant la formule de Green de type grad-div, nous obtenons

$$(\text{div } \mathbf{b}, \phi') = \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}, \phi' \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \phi' \in \Phi(\Omega). \quad (30)$$

Cette équation est vérifiée pour toute fonction-test  $\phi' \in \Phi(\Omega)$  et donc en particulier pour toute fonction  $\phi'$  de trace nulle sur  $\Gamma$ , i.e.  $\phi' \in \Phi_0(\Omega)$  puisque  $\Phi_0(\Omega) \subset \Phi(\Omega)$ . Il en résulte que  $(\text{div } \mathbf{b}, \phi') = 0$  pour toute fonction  $\phi'$  de ce genre et par conséquent que  $\text{div } \mathbf{b} = 0$  dans  $\Omega$ , c'est-à-dire que l'équation (26b) est vérifiée. Ainsi, l'équation (30) se réduit à  $\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}, \phi' \rangle_{\Gamma} = 0$ , et en considérant maintenant toutes les fonctions  $\phi' \in \Phi(\Omega)$  sans restriction, qui peuvent donc varier librement sur  $\Gamma_e$ , il en résulte finalement que  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} \big|_{\Gamma_e} = 0$ , c'est-à-dire que la condition (26e) est vérifiée.

Il est possible d'obtenir plus d'informations encore de la formulation faible, particulièrement en ce qui concerne les **conditions de transmission** qui apparaissent sur des surfaces intérieures à  $\Omega$ . Considérons pour cela deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  de  $\Omega$  séparés par une interface  $\Sigma$  (Fig. 1).

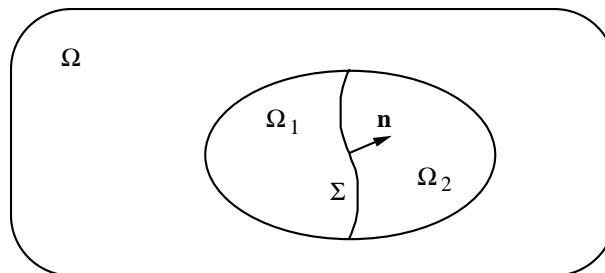


Fig. 1. Interface  $\Sigma$  entre deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

Appliquons la formule de Green de type grad-div (21) aux champs  $\mathbf{b}$  et  $\phi'$  successivement dans les deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . En tenant compte du fait que  $\text{div } \mathbf{b} = 0$  dans  $\Omega$ , et donc en particulier dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , puis en sommant les relations obtenues, nous avons finalement la relation

$$(\mathbf{b}, \text{grad } \phi')_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = \langle \mathbf{n} \cdot (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2), \phi' \rangle_{\Sigma} + \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}, \phi' \rangle_{\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2)}, \quad \forall \phi' \in \Phi(\Omega), \quad (31)$$

où  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  représentent le champ  $\mathbf{b}$  de part et d'autre de  $\Sigma$  dans les domaines respectifs  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . En considérant les fonctions-test  $\phi'$  de support  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  et nulles sur  $\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ , il subsiste de (31) la condition de transmission bien connue  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)|_{\Sigma} = 0$ . Notons que le premier terme de (31) s'annule grâce à l'équation (29) : le domaine d'intégration  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  peut en effet s'étendre à  $\Omega$  grâce aux fonctions-test choisies.

Nous avons décrit la façon d'établir une formulation faible pour l'équation (26b) et nous avons mis en évidence la richesse des informations qu'elle renferme. Selon une procédure équivalente, nous pourrions également établir une formulation faible associée à l'équation (26a), mais procédons autrement de façon à conserver des équations fortes.

Si nous décomposons le champ  $\mathbf{h}$  selon une composante source donnée  $\mathbf{h}_s$ , telle que  $\text{rot } \mathbf{h}_s = \mathbf{j}$ , et une composante de réaction  $\mathbf{h}_r$ , alors  $\text{rot } \mathbf{h}_r = 0$  et  $\mathbf{h}_r$  est par conséquent de la forme  $\mathbf{h}_r = -\text{grad } \phi$  (si  $\Omega$  est simplement connexe). Cela revient à satisfaire l'équation (26a) au sens fort. En tenant compte de la loi de comportement (26c), nous pouvons alors écrire  $\mathbf{b} = \mu (\mathbf{h}_s - \text{grad } \phi)$  et porter cette dernière expression dans (29) pour obtenir

$$(\mu (\mathbf{h}_s - \text{grad } \phi), \text{grad } \phi') = 0, \quad \forall \phi' \in \Phi(\Omega). \quad (32)$$

Cette formulation renferme alors le problème (26) dans sa totalité. Le potentiel  $\phi$  en est l'inconnue et les autres champs peuvent être déduits de  $\phi$  grâce aux équations qui sont restées sous forme forte. Il apparaît que le potentiel  $\phi$  appartient au même espace que les fonctions-test ou tout au moins à un espace  $\Phi_r(\Omega)$  qui lui est parallèle, c'est-à-dire où la condition à la limite de  $\phi$  sur  $\Gamma_h$  n'est pas nécessairement homogène, i.e.  $\phi|_{\Gamma_h} = \text{constante}$ .

La formulation (32) peut être considérée comme un système d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues. Nous verrons dans la suite comment il est possible d'approximer un tel problème afin de permettre sa résolution numérique. Cette approximation constituera la phase de discrétisation.

Il est possible de définir un **problème de minimisation** associé à (32). Définissons pour cela la fonctionnelle

$$W(\phi) = \frac{1}{2} (\mu (\mathbf{h}_s - \text{grad } \phi), \mathbf{h}_s - \text{grad } \phi), \quad (33)$$

et posons le problème de minimisation suivant :

$$\text{trouver } \phi \in \Phi_r(\Omega) \text{ tel que } W(\phi) \leq W(\phi'), \quad \forall \phi' \in \Phi_r(\Omega). \quad (34)$$

Nous considérons ici des matériaux à caractéristiques magnétiques linéaires. Plus tard, nous généraliserons la fonctionnelle (33) à des problèmes non linéaires. En stationnarisant la fonctionnelle (33) par rapport à  $\phi$  (Johnson, 1987), on peut vérifier que l'on obtient (32). Nous pouvons aussi vérifier que la solution  $\phi$  de (32) minimise cette fonctionnelle. En effet, supposons que  $\phi \in \Phi_r(\Omega)$  soit solution de (32) et considérons une fonction quelconque  $\psi \in \Phi_r(\Omega)$  ; posons alors  $\eta = \psi - \phi$ , qui entraîne  $\eta \in \Phi(\Omega)$  ; nous avons

$$W(\psi) = W(\phi + \eta) = \frac{1}{2} (\mu (\mathbf{h}_s - \text{grad } (\phi + \eta)), \mathbf{h}_s - \text{grad } (\phi + \eta))$$

et donc

$$W(\psi) = W(\phi) + \frac{1}{2} (\mu \operatorname{grad} \eta, \operatorname{grad} \eta) + (\mu (\mathbf{h}_s - \operatorname{grad} \phi), -\operatorname{grad} \eta).$$

Etant donné que le deuxième terme de la somme est positif ou nul et que le troisième terme est nul, vu (32), il en résulte que  $W(\psi) \geq W(\phi)$ . Les formulations (32) et (34) sont donc équivalentes. Notons que la quantité  $W(\phi)$  est la coénergie magnétique et que le problème revient en réalité à minimiser cette coénergie.

### 2.2.5 Simple ou multiple connexité

Un domaine  $\Omega$  est **simplement connexe** si tout contour simple qui y est tracé peut être le support d’une surface située entièrement dans  $\Omega$ , ou encore peut se réduire à un point de  $\Omega$  par déformation continue (Bass, 1968a). Par exemple dans  $\mathbb{R}^3$ , une sphère est simplement connexe. C’est également le cas de tout ouvert homéomorphe à l’intérieur d’une sphère, c’est-à-dire en correspondance biunivoque avec une sphère (Fig. 2).

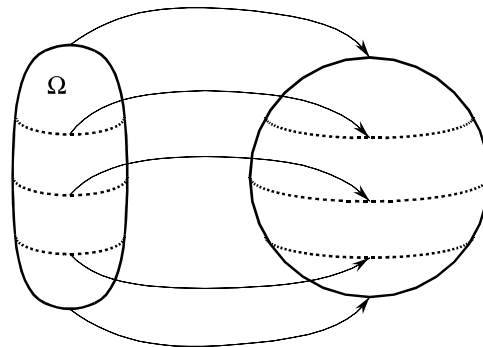


Fig. 2. Homéomorphisme entre un domaine  $\Omega$  et une sphère.

Dans le cas contraire, le domaine  $\Omega$  est dit **multiplement connexe**. C’est par exemple le cas d’un tore ou de tout ouvert homéomorphe à un tore. C’est également le cas du domaine représenté à la figure 3 et caractérisé par deux “trous”. Nous allons voir à quoi peut correspondre cette notion intuitive de trou.

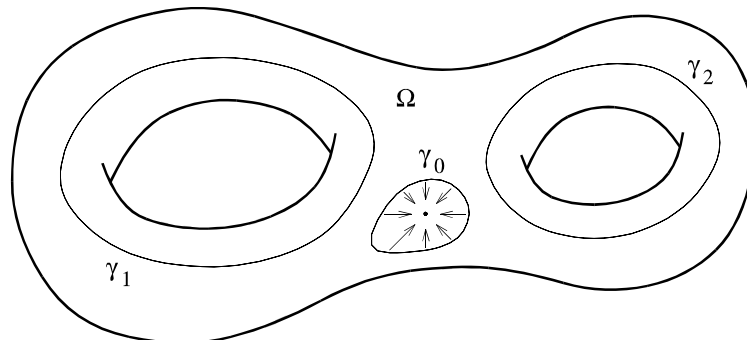


Fig. 3. Domaine multiplement connexe.

Il est possible de quantifier la multiple connexité d’un domaine  $\Omega$  par le nombre de types de contours que l’on peut y tracer, ce nombre étant directement lié au nombre de “trous” du domaine. En effet, il existe toujours des courbes fermées réductibles à un point par déformation continue ; elles sont dites du type  $\gamma_0$  (Fig. 3). Il peut également exister d’autres courbes fermées qui entourent les trous de  $\Omega$ , qui ne sont par conséquent pas réductibles à un point, et qui ne sont pas réductibles l’une à l’autre par déformation continue ; ces courbes sont caractérisées par les types  $\gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , où  $N$  est le nombre de trous de  $\Omega$ . Une courbe qui entoure à la fois deux trous peut par contre se déformer jusqu’à devenir un “8”, qui est

réunion de deux courbes  $\gamma_i$  et  $\gamma_j$ ,  $1 \leq i, j \leq N$ ,  $i \neq j$ . L'ordre de multiple connexité est  $N+1$ , et l'on peut parler de domaines simplement ( $N+1 = 1$ ) ou doublement ( $N+1 = 2$ ) connexes, ou en général  $(N+1)$ -connexes. Cette notion de simple ou multiple connexité sera importante dans l'étude du noyau du rotationnel. Elle peut également être définie pour des surfaces, encore grâce à la propriété de réduction de contours.

### 2.2.6 Lemme de Poincaré

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $\mathbf{u} \in C^1(\Omega)$ .

- a) Si  $\mathbf{u}$  est tel que  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$  (sous-entendu dans  $\Omega$ ), alors pour tout pavé  $\vartheta \subset \Omega$ , il existe une fonction  $\phi \in C^1(\vartheta)$  telle que  $\mathbf{u} = \text{grad } \phi$ . Le champ scalaire  $\phi$  est appelé **potentiel scalaire** et l'on dit que  $\mathbf{u}$  dérive de  $\phi$ .
- b) Si  $\mathbf{u}$  est tel que  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ , alors pour tout pavé  $\vartheta \subset \Omega$ , il existe une fonction vectorielle  $\mathbf{v} \in C^1(\vartheta)$  telle que  $\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{v}$ . Le champ vectoriel  $\mathbf{v}$  est appelé **potentiel vecteur** et l'on dit que  $\mathbf{u}$  dérive de  $\mathbf{v}$ .

Selon ce lemme, si  $\mathbf{u}$  est tel que  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$  (resp.  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ ), alors  $\mathbf{u}$  est **localement** de la forme  $\mathbf{u} = \text{grad } \phi$  (resp.  $\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{v}$ ) (Dautray & Lions, 1988b). Ce lemme a aussi des conséquences **globales**. Si  $\Omega$  est un ouvert connexe et simplement connexe, alors dans le cas où  $\mathbf{u}$  est tel que  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ , on peut recoller les diverses fonctions  $\phi = \phi_\vartheta$  (pour tout pavé  $\vartheta \subset \Omega$ ) telles que  $\mathbf{u} = \text{grad } \phi$ , par simple addition de constantes. Par contre, dans le cas d'un domaine multiplement connexe, un champ à rotationnel nul peut ne plus être un gradient. Il peut donc ne pas dériver d'un potentiel scalaire, tout au moins au sens classique, c'est-à-dire dans le domaine considéré. De même, un champ à divergence nulle peut ne pas être globalement un rotationnel. Ces deux types particuliers de champs seront caractérisés lors de l'étude des noyaux des opérateurs associés. Il apparaîtra que le nombre de champs linéairement indépendants de chacun des deux types est, en réalité, fini et entièrement déterminé par la topologie du domaine d'étude  $\Omega$ .

## 2.3 Noyaux et images des opérateurs grad, rot et div

### 2.3.1 Noyau du gradient

Le noyau de l'opérateur grad est constitué des fonctions constantes sur chacune des composantes connexes du domaine  $\Omega$ . Sa dimension est égale au nombre de composantes connexes de  $\Omega$ , i.e.  $n_{c,\Omega}$ . Il est noté

$$\mathbb{H}_0(\Omega) = \{ v, v |_{\Omega_i} = c_i \text{ (constante)}, 1 \leq i \leq n_{c,\Omega} \} , \tag{35}$$

avec

$$\dim(\mathbb{H}_0(\Omega)) = n_{c,\Omega} .$$

### 2.3.2 Image du gradient

L'espace image du gradient, son codomaine, est noté  $\text{grad } H^1(\Omega)$ . Il est intéressant, pour la suite, de déterminer l'espace qui lui est orthogonal, et qui est noté  $(\text{grad } H^1(\Omega))^\perp$ . Soit  $\mathbf{u} \in (\text{grad } H^1(\Omega))^\perp$ , c'est-à-dire  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  orthogonal à l'espace  $\text{grad } H^1(\Omega)$ ; alors, par définition,

$$(\mathbf{u}, \text{grad } v) = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega) .$$

L'application de la formule de Green de type grad-div (21) donne

$$(\mathbf{u}, \text{grad } v) = -(\text{div } \mathbf{u}, v) + \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}, v \rangle_\Gamma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{36}$$

et entraîne les relations

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \big|_{\Gamma} = 0.$$

L'espace des fonctions  $\mathbf{u}$  qui satisfont ces relations a déjà été défini et a été noté  $\mathbf{H}_0(\operatorname{div} 0, \Omega)$  (20). Nous avons ainsi la caractérisation

$$(\operatorname{grad} H^1(\Omega))^\perp = \mathbf{H}_0(\operatorname{div} 0, \Omega).$$

Les développements précédents permettent également de caractériser l'espace orthogonal à  $\operatorname{grad} H^1_0(\Omega)$  comme étant

$$(\operatorname{grad} H^1_0(\Omega))^\perp = \mathbf{H}(\operatorname{div} 0, \Omega).$$

Le terme d'intégrale de surface de (36) s'annule directement car  $\mathbf{v} \big|_{\Gamma} = 0$ . De plus, les espaces images considérés et les espaces orthogonaux associés sont supplémentaires dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  (Dautray & Lions, 1988b). Il en découle que l'espace  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  admet les décompositions orthogonales suivantes :

$$\boxed{\mathbf{L}^2(\Omega) = \operatorname{grad} H^1(\Omega) \oplus \mathbf{H}_0(\operatorname{div} 0, \Omega)} \quad , \quad (37)$$

$$\boxed{\mathbf{L}^2(\Omega) = \operatorname{grad} H^1_0(\Omega) \oplus \mathbf{H}(\operatorname{div} 0, \Omega)} \quad . \quad (38)$$

Tout élément  $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  peut donc être décomposé suivant les espaces  $\operatorname{grad} H^1(\Omega)$  et  $\mathbf{H}_0(\operatorname{div} 0, \Omega)$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \operatorname{grad} \phi, \quad \phi \in H^1(\Omega), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div} 0, \Omega).$$

### 2.3.3 Noyau du rotationnel

L'identité

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = 0, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega),$$

entraîne que l'espace image du gradient est dans le noyau du rotationnel, c'est-à-dire

$$\operatorname{grad} H^1(\Omega) \subset \mathbf{H}(\operatorname{rot} 0, \Omega).$$

D'après le lemme de Poincaré, cette inclusion devient une égalité lorsque l'ouvert  $\Omega$  est simplement connexe. Par contre, si  $\Omega$  est multiplement connexe, le supplémentaire de  $\operatorname{grad} H^1(\Omega)$  dans  $\mathbf{H}(\operatorname{rot} 0, \Omega)$  ne se réduit pas à l'ensemble vide. Il est noté  $\mathbb{H}_1(\Omega)$  et est, d'après (37), caractérisé par

$$\mathbb{H}_1(\Omega) = \mathbf{H}_0(\operatorname{div} 0, \Omega) \cap \mathbf{H}(\operatorname{rot} 0, \Omega),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\mathbb{H}_1(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \big|_{\Gamma} = 0 \}} \quad . \quad (39)$$

Les éléments de l'espace  $\mathbb{H}_1(\Omega)$  sont à rotationnel nul, mais ne sont pas des gradients. Le noyau du rotationnel est par conséquent caractérisé par

$$\boxed{\ker(\operatorname{rot}) = \mathbf{H}(\operatorname{rot} 0, \Omega) = \operatorname{grad} H^1(\Omega) \oplus \mathbb{H}_1(\Omega)} \quad . \quad (40)$$

L'espace  $\mathbb{H}_1(\Omega)$  est de dimension finie, égale au nombre de coupures nécessaires pour rendre  $\Omega$  simplement connexe. Ce nombre est égal au nombre de "boucles" dans  $\Omega$ . Nous allons vérifier cette propriété en construisant une base pour l'espace  $\mathbb{H}_1(\Omega)$ .

### Détermination de l'espace $\mathbb{H}_1(\Omega)$

Soit  $\Omega$  un ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^3$  (Fig. 4), de frontière  $\Gamma$  lipschitzienne (Dautray & Lions, 1988b) ;  $\Omega$  est situé localement d'un seul côté de  $\Gamma$ . La frontière  $\Gamma$  a un nombre fini de composantes connexes, notées  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_m$ . L'ouvert  $\Omega$  peut être multiplement connexe. Dans ce cas, il peut être rendu simplement connexe grâce à un nombre fini de coupures régulières  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ , telles que  $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ , et qui ne sont pas tangentes à  $\Gamma$ . Ainsi, l'ouvert

$$\dot{\Omega} = \Omega \setminus \Sigma, \quad \text{avec } \Sigma = \bigcup_{i=1}^N \Sigma_i,$$

est simplement connexe.

Notons qu'en toute rigueur, l'introduction de coupures dans une région tridimensionnelle  $\Omega$  ne rend pas nécessairement  $\dot{\Omega}$  simplement connexe. C'est le cas du complémentaire d'un domaine "noué" (Bossavit, 1989e ; Kotiuga, 1990 ; Vourdas & Binns, 1989), dont les coupures sont multiplement connexes (ce qui est rare dans les problèmes pratiques). Les propriétés qui vont être établies resteront néanmoins valables dans ce cas.

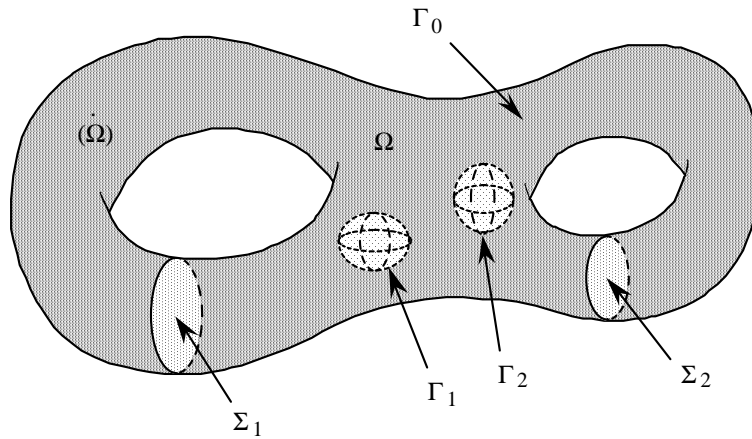


Fig. 4. Exemple de domaine d'étude  $\Omega$  connexe, multiplement connexe, avec cavités. Sa surface extérieure est  $\Gamma_0$ , et sa surface intérieure est constituée des surfaces  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  relatives à des cavités ( $m=2$ ). Les surfaces de coupure  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  ( $N=2$ ) transforment le domaine  $\Omega$  en un domaine simplement connexe  $\dot{\Omega}$ .

Soit  $\mathbf{v} \in \mathbb{H}_1(\Omega)$ . Alors,  $\mathbf{v}$  est localement le gradient d'une fonction harmonique  $q$  et donc, par prolongement analytique, il existe une fonction  $q$  harmonique dans l'ouvert simplement connexe  $\dot{\Omega}$ , telle que  $\mathbf{v} = \text{grad } q$  dans  $\dot{\Omega}$ . La condition  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  dans  $\Omega$  se traduit par

$$\Delta q = 0 \quad \text{dans } \dot{\Omega},$$

et la condition  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} |_{\Gamma} = 0$  devient

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} |_{\Gamma} = \frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} |_{\Gamma} = 0.$$

Cherchons maintenant l'expression des conditions sur  $q$ , à imposer sur les parties restantes de la frontière de  $\dot{\Omega}$ , c'est-à-dire sur les coupures  $\Sigma_i$ . Les deux côtés de la coupure  $\Sigma_i$  sont désignés par  $\Sigma_i^+$  et  $\Sigma_i^-$ , et la normale  $\mathbf{n}$  à  $\Sigma_i$  est orientée de  $\Sigma_i^+$  vers  $\Sigma_i^-$  (Fig. 5). La discontinuité au travers des coupures de toute fonction  $\phi$  définie sur  $\dot{\Omega}$  est notée

$$[\phi]_{\Sigma_i} = \phi|_{\Sigma_i^+} - \phi|_{\Sigma_i^-}.$$

En particulier, nous avons

$$[\mathbf{v}]_{\Sigma_i} = 0, \quad i = 1 \text{ à } N,$$

puisque  $\mathbf{v}$  est défini dans  $\Omega$ , ce qui entraîne

$$[q]_{\Sigma_i} = c_i \text{ (constante) sur } \Sigma_i, \quad i = 1 \text{ à } N.$$

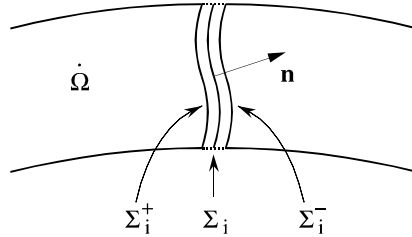


Fig. 5. Les deux côtés d'une coupure  $\Sigma_i$  et la normale associée.

Enfin, la formule de Green de type grad-div dans  $\Omega$  (21), appliquée au champ  $\mathbf{v}$  et à une fonction quelconque  $\phi \in H^1(\Omega)$ , donne

$$(\mathbf{v}, \text{grad } \phi) + (\text{div } \mathbf{v}, \phi) = \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}, \phi \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

Seul le premier terme de cette relation subsiste vu les propriétés du champ  $\mathbf{v}$ . Ainsi, elle devient

$$(\mathbf{v}, \text{grad } \phi) = 0, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega),$$

et peut ensuite s'exprimer par l'intermédiaire de la fonction  $q$  sous la forme

$$(\text{grad } q, \text{grad } \phi)_{\dot{\Omega}} = 0, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

Par une nouvelle application de la formule de Green, mais cette fois dans  $\dot{\Omega}$ , cette dernière forme devient

$$\int_{\partial \dot{\Omega}} \frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} \phi \, ds = 0, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega),$$

pour finalement donner

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Sigma_i} \left[ \frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Sigma_i} \phi \, ds = 0, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega),$$

et donc

$$\left[ \frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Sigma_i} = 0, \quad i = 1 \text{ à } N.$$

Ainsi, la fonction  $q \in H^1(\dot{\Omega})$  cherchée doit être solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta q = 0 & \text{dans } \dot{\Omega} \\ \frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = 0 \\ [q]_{\Sigma_i} = c_i \text{ (constante)}, \quad i = 1 \text{ à } N \\ \left[ \frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Sigma_i} = 0, \quad i = 1 \text{ à } N. \end{cases} \quad (41)$$



Les solutions de ce problème dépendent linéairement des  $N$  valeurs  $c_i = [q]_{\Sigma_i}$  des sauts de  $q$  à travers  $\Sigma_i$ . L'espace des solutions  $q$  est donc de dimension  $N+1$  au plus. Les  $N$  fonctions  $q_j$ ,  $j = 1$  à  $N$ , solutions respectivement de chacun des problèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta q = 0 \quad \text{dans } \dot{\Omega} \\ \frac{\partial q}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \\ [q]_{\Sigma_i} = \delta_{ij} \quad , \quad i = 1 \text{ à } N \\ \left[ \frac{\partial q}{\partial n} \right]_{\Sigma_i} = 0 \quad , \quad i = 1 \text{ à } N \end{array} \right. \quad (42)$$

pour  $j = 1$  à  $N$ , sont linéairement indépendantes ; elles existent et sont uniques à une constante additive près. L'espace  $\mathbb{H}_1(\Omega)$  est donc de dimension  $N$ , i.e.

$$\dim(\mathbb{H}_1(\Omega)) = N.$$

### 2.3.4 Image du rotationnel

L'espace image du rotationnel est noté  $\text{rot } \mathbf{H}^1(\Omega)$ . Déterminons l'espace qui lui est orthogonal, et qui est noté  $(\text{rot } \mathbf{H}^1(\Omega))^\perp$ . Soit  $\mathbf{u} \in (\text{rot } \mathbf{H}^1(\Omega))^\perp$ , c'est-à-dire  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  orthogonal à l'espace  $\text{rot } \mathbf{H}^1(\Omega)$  ; alors, par définition,

$$(\mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega).$$

L'application de la formule de Green de type rot-rot (22) donne

$$(\mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{v}) = (\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega),$$

et entraîne les relations

$$\text{rot } \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n} \wedge \mathbf{u} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

L'espace des fonctions  $\mathbf{u}$  qui satisfont ces relations a déjà été défini et a été noté  $\mathbf{H}_0(\text{rot } 0, \Omega)$  (19). Nous avons ainsi la caractérisation

$$(\text{rot } \mathbf{H}^1(\Omega))^\perp = \mathbf{H}_0(\text{rot } 0, \Omega).$$

Cet espace est le supplémentaire de  $\text{rot } \mathbf{H}^1(\Omega)$  dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . L'espace  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  admet alors la décomposition orthogonale suivante :

$$\boxed{\mathbf{L}^2(\Omega) = \text{rot } \mathbf{H}^1(\Omega) \oplus \mathbf{H}_0(\text{rot } 0, \Omega)} \quad (43)$$

Il est possible de déterminer une autre caractérisation de l'espace  $\mathbf{H}_0(\text{rot } 0, \Omega)$ . Si  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\text{rot } 0, \Omega)$ , il existe une fonction  $\phi \in H^1(\dot{\Omega})$  telle que  $\mathbf{u} = \text{grad } \phi$  ; cela résulte du lemme de Poincaré appliqué au domaine simplement connexe  $\dot{\Omega}$ . De ce fait, la condition de surface  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{u} \Big|_{\Gamma} = 0$  présente dans la définition de  $\mathbf{H}_0(\text{rot } 0, \Omega)$  s'exprime par  $\mathbf{n} \wedge \text{grad } \phi \Big|_{\Gamma} = 0$ . La fonction  $\phi$  est donc constante sur chaque composante connexe  $\Gamma_i$  de  $\Gamma$ , et il s'en suit qu'elle ne subit aucune discontinuité au travers des coupures  $\Sigma_j$ , i.e.  $[\phi]_{\Sigma_j} = 0$ ,  $j = 1$  à  $N$ . Il en résulte que  $\phi \in H^1(\Omega)$  et que l'espace  $\mathbf{H}_0(\text{rot } 0, \Omega)$  peut être caractérisé par

$$\mathbf{H}_0(\text{rot } 0, \Omega) = \{ \mathbf{u} = \text{grad } \phi, \phi \in H^1(\Omega), \phi \Big|_{\Gamma_i} = c_i (\text{const.}), 0 \leq i \leq m \}. \quad (44)$$

### 2.3.5 Noyau de la divergence

L'identité

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega),$$

entraîne que l'espace image du rotationnel est dans le noyau de la divergence, c'est-à-dire

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^1(\Omega) \subset \mathbf{H}(\operatorname{div} 0, \Omega).$$

Cette inclusion peut parfois devenir une égalité. Cependant, en général, il existe des éléments à divergence nulle, mais qui ne sont pas des rotationnels. Ils appartiennent à un espace, noté  $\mathbb{H}_2(\Omega)$ , que nous allons déterminer. Cet espace est en fait le supplémentaire de  $\operatorname{rot} \mathbf{H}^1(\Omega)$  dans  $\mathbf{H}(\operatorname{div} 0, \Omega)$ , c'est-à-dire d'après (43),

$$\mathbb{H}_2(\Omega) = \mathbf{H}_0(\operatorname{rot} 0, \Omega) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div} 0, \Omega). \quad (45)$$

Il est donc caractérisé par

$$\boxed{\mathbb{H}_2(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{n} \wedge \mathbf{v} |_{\Gamma} = 0 \}}. \quad (46)$$

Le noyau de la divergence est par conséquent caractérisé par

$$\boxed{\ker(\operatorname{div}) = \mathbf{H}(\operatorname{div} 0, \Omega) = \operatorname{rot} \mathbf{H}^1(\Omega) \oplus \mathbb{H}_2(\Omega)}. \quad (47)$$

### Détermination de l'espace $\mathbb{H}_2(\Omega)$

La caractérisation (44) de  $\mathbf{H}_0(\operatorname{rot} 0, \Omega)$ , associée à (45), conduit à

$$\mathbb{H}_2(\Omega) = \{ \mathbf{u} = \operatorname{grad} \phi, \phi \in H^1(\Omega), \Delta \phi = 0, \phi |_{\Gamma_i} = c_i \text{ (const.)}, 0 \leq i \leq m \}. \quad (48)$$

Sa dimension est finie et est égale au nombre de "cavités" dans  $\Omega$ , c'est-à-dire

$$\dim(\mathbb{H}_2(\Omega)) = m.$$

### 2.3.6 Image de la divergence

L'espace image de la divergence est noté  $\operatorname{div} \mathbf{H}^1(\Omega)$ . On peut montrer (Dautray & Lions, 1988b) que l'on a

$$\boxed{\mathbf{L}^2(\Omega) = \operatorname{div} \mathbf{H}^1(\Omega)}. \quad (49)$$

## 2.4 Décomposition de l'espace $\mathbf{L}^2(\Omega)$

Les décompositions orthogonales de sous-espaces de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , établies précédemment, peuvent se retrouver résumées dans la figure 6 (Bossavit, 1988c ; Dautray & Lions, 1988b). La décomposition de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  en somme directe de cinq sous-espaces mutuellement orthogonaux y apparaît alors.

Les noyaux et les images des opérateurs  $\operatorname{grad}$ ,  $\operatorname{rot}$  et  $\operatorname{div}$  dans  $\Omega$  sont mis en évidence par la figure 7. Les espaces  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  et  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  y sont représentés par des axes horizontaux sur quatre niveaux (ordres 0, 1, 2, 3, pour  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , respectivement), et certains de leurs sous-espaces sont représentés par des subdivisions de ces axes. Les axes relatifs à  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  présentent les mêmes subdivisions que celles de l'axe de la figure précédente (Fig. 6) ; l'axe du niveau 2 doit cependant se lire de droite à gauche. Les flèches tracées correspondent aux applications des opérateurs  $\operatorname{grad}$ ,  $\operatorname{rot}$  ou  $\operatorname{div}$ , suivant le niveau. Un sous-espace situé entre les origines de deux flèches a comme image par l'opérateur associé le sous-espace situé entre les extrémités de ces flèches. Les noyaux et les images des opérateurs apparaissent alors clairement.

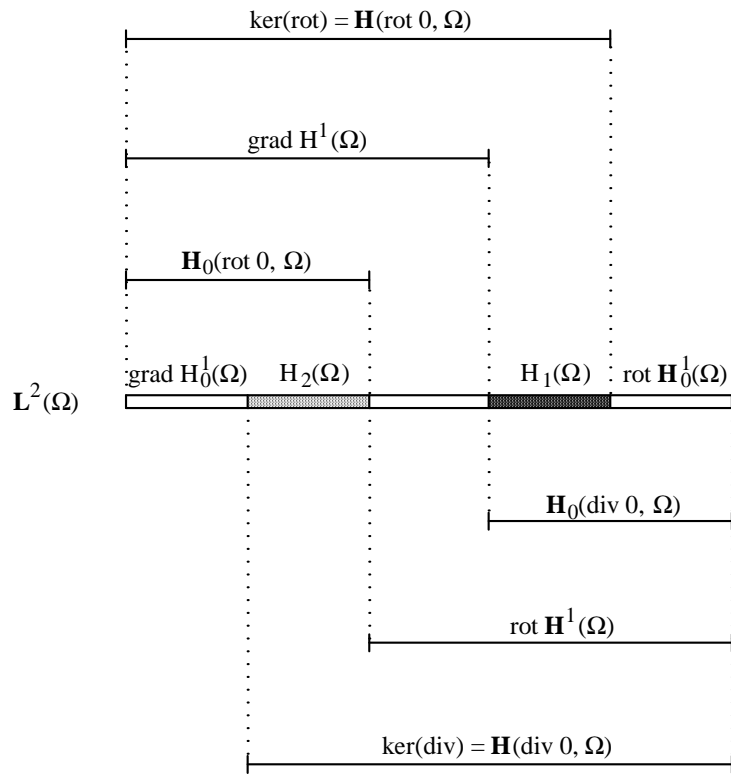


Fig. 6. Décompositions orthogonales de  $L^2(\Omega)$ .

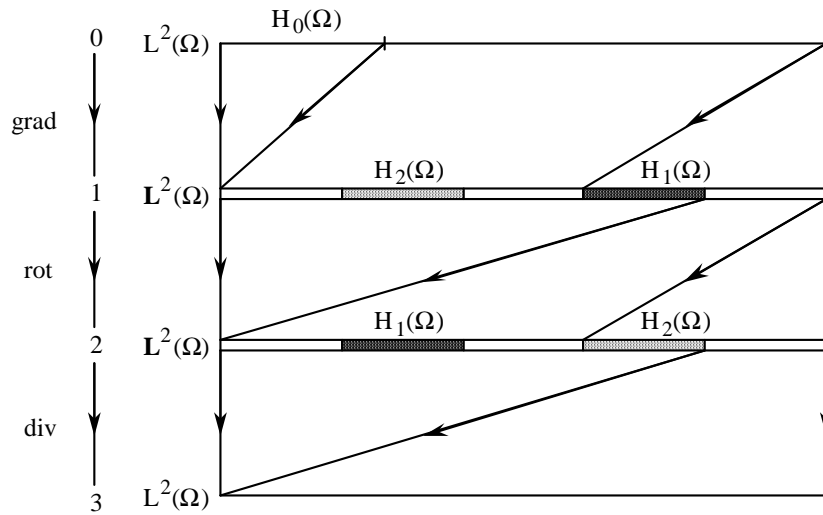


Fig. 7. Noyaux et images des opérateurs  $\text{grad}$ ,  $\text{rot}$  et  $\text{div}$  dans  $\Omega$ .

### 3. Structure mathématique

#### 3.1 Domaine d'étude

Nous considérons un **domaine**  $\Omega$  ouvert et borné de l'espace euclidien affine à trois dimensions (Fig. 1). Sa **frontière**  $\partial\Omega$  est notée  $\Gamma$ . Elle se compose de deux parties complémentaires,  $\Gamma_h$  et  $\Gamma_e$ , qui peuvent être non connexes.

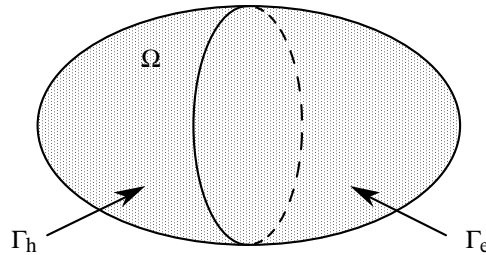


Fig. 1. Domaine étudié.

#### 3.2 Structure de base

On considère une structure formée de **quatre espaces fonctionnels** et de **trois opérateurs différentiels**. Les quatre espaces sont deux copies de  $L^2(\Omega)$  et deux copies de  $L^2(\Omega)$ . Ils sont notés  $F^p$ ,  $p = 0, 1, 2, 3$ . Les trois opérateurs sont le **gradient** ( $\text{grad}$ ), le **rotationnel** ( $\text{rot}$ ) et la **divergence** ( $\text{div}$ ). Ils sont des opérateurs différentiels linéaires et non bornés. Leurs domaines de définition sont définis de façon restrictive, en ce sens qu'ils sont des sous-espaces de  $L^2(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)$ , pour lesquels des conditions aux limites données doivent être satisfaites. Les opérateurs dépendent donc de la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$ . Leurs domaines sont définis dans le tableau 1.

Les quatre espaces fonctionnels définis et limités aux domaines des opérateurs sont notés  $F_h^p$ ,  $p = 0, 1, 2, 3$ ; rigoureusement, il faudrait les noter  $F_h^p(\Omega)$ , mais on se permettra souvent de simplifier ainsi la notation;  $p$  est appelé le degré de l'opérateur associé. Nous notons  $\mathbf{n}$  le champ des vecteurs unitaires normaux à  $\Gamma$  et orientés vers l'extérieur de  $\Omega$ . La structure ainsi définie est appelée **complexe** (Bossavit, 1988d, 1989b).

Degré	Opérateur	Domaine
0	$\text{grad}_h$	$F_h^0 = \{ u \in L^2(\Omega) ; \text{grad } u \in L^2(\Omega) , u _{\Gamma_h} = 0 \}$
1	$\text{rot}_h$	$F_h^1 = \{ \mathbf{h} \in L^2(\Omega) ; \text{rot } \mathbf{h} \in L^2(\Omega) , \mathbf{n} \wedge \mathbf{h} _{\Gamma_h} = 0 \}$
2	$\text{div}_h$	$F_h^2 = \{ \mathbf{b} \in L^2(\Omega) ; \text{div } \mathbf{b} \in L^2(\Omega) , \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} _{\Gamma_h} = 0 \}$

Tableau 1. Les trois opérateurs et leurs domaines.

Les domaines des opérateurs ont été construits de façon à satisfaire les relations

$$\text{grad}_h F_h^0 \subset F_h^1, \quad \text{rot}_h F_h^1 \subset F_h^2; \tag{1}$$

c'est-à-dire  $\text{cod}(\text{grad}_h) \subset \text{dom}(\text{rot}_h)$  et  $\text{cod}(\text{rot}_h) \subset \text{dom}(\text{div}_h)$ . C'est en effet le cas puisque, grâce aux conditions aux limites introduites, nous avons les implications

$$u|_{\Gamma_h} = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \wedge \text{grad } u|_{\Gamma_h} = 0, \quad \mathbf{n} \wedge \mathbf{h}|_{\Gamma_h} = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{h}|_{\Gamma_h} = 0.$$

Ainsi, les opérateurs définissent des applications de  $F_h^p$  dans  $F_h^{p+1}$ , et sont dits du type  $F_h^p \rightarrow F_h^{p+1}$ . De ce fait, ils “lient” les espaces fonctionnels entre eux de façon à former une **suite** (Fig. 2).

$$F_h^0 \xrightarrow{\text{grad}_h} F_h^1 \xrightarrow{\text{rot}_h} F_h^2 \xrightarrow{\text{div}_h} F_h^3$$

Fig. 2. Suite des espaces  $F_h^p$ .

En général, on a les inclusions

$$\text{grad}_h F_h^0 \subset \ker(\text{rot}_h), \quad \text{rot}_h F_h^1 \subset \ker(\text{div}_h); \quad (3-4)$$

mais dans le cas où  $\Omega$ ,  $\Gamma_h$  et  $\Gamma_e$  sont connexes et simplement connexes, ces inclusions deviennent des égalités et la suite est dite **exacte**, i.e.

$$\text{grad}_h F_h^0 = \ker(\text{rot}_h), \quad \text{rot}_h F_h^1 = \ker(\text{div}_h). \quad (5-6)$$

### 3.3 Structure duale

#### 3.3.1 Opérateurs adjoints

L'opérateur adjoint  $A^*$  de domaine  $D_{A^*}$ , d'un opérateur  $A$  de domaine  $D_A$ , est défini par

$$(A u, v) = (u, A^* v), \quad \forall u \in D_A, \quad \forall v \in D_{A^*}.$$

Dans la définition générale d'un opérateur adjoint, un terme d'intégrale de surface peut apparaître dans la relation précédente mais nous tâcherons ici de l'annuler. Cela est possible grâce aux conditions aux limites homogènes définies. Notons que la généralisation à des conditions aux limites non homogènes ne doit toutefois pas poser de problème. Nous allons déterminer les opérateurs adjoints des opérateurs  $\text{grad}_h$ ,  $\text{rot}_h$  et  $\text{div}_h$ .

##### Opérateur adjoint du gradient

L'opérateur adjoint de  $\text{grad}_h$ , soit  $(\text{grad}_h)^*$ , doit vérifier

$$(\text{grad}_h u, \mathbf{v}) = (u, (\text{grad}_h)^* \mathbf{v}), \quad \forall u \in \text{dom}(\text{grad}_h), \quad \forall \mathbf{v} \in \text{dom}(\text{grad}_h)^*,$$

ce dernier domaine devant être défini.

La formule de Green de type grad-div dans  $\Omega$  (2.21) peut s'appliquer aux champs  $u$  et  $\mathbf{v}$  définis pour donner

$$(\text{grad } u, \mathbf{v}) + (u, \text{div } \mathbf{v}) = \langle u, \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \rangle_{\Gamma}. \quad (7)$$

Si nous avons les conditions

$$u \in \text{dom}(\text{grad}_h) \quad (\text{i.e. } u|_{\Gamma_h} = 0) \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{\Gamma_e} = 0,$$

alors, l'intégrale de surface dans (7) s'annule, et nous pouvons écrire

$$(\text{grad}_h u, \mathbf{v}) = (u, -\text{div}_e \mathbf{v}). \quad (8)$$

L'opérateur adjoint de  $\text{grad}_h$  apparaît donc être

$$(\text{grad}_h)^* = -\text{div}_e, \quad (9)$$

avec

$$F_e^2 = \text{dom}(\text{div}_e) = \{ \mathbf{b} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \text{div } \mathbf{b} \in L^2(\Omega), \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|_{\Gamma_e} = 0 \}. \quad (10)$$

##### Opérateur adjoint du rotationnel

L'opérateur adjoint de  $\text{rot}_h$ , soit  $(\text{rot}_h)^*$ , doit vérifier

$$(\text{rot}_h \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, (\text{rot}_h)^* \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u} \in \text{dom}(\text{rot}_h), \forall \mathbf{v} \in \text{dom}(\text{rot}_h)^* .$$

La formule de Green de type rot-rot dans  $\Omega$  (2.22) peut s'appliquer aux champs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  définis pour donner

$$(\text{rot} \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{u}, \text{rot} \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle_\Gamma (= \langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma = -\langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_\Gamma) . \quad (11)$$

Si nous avons les conditions

$$\mathbf{u} \in \text{dom}(\text{rot}_h) \quad (\text{i.e. } \mathbf{n} \wedge \mathbf{u} |_{\Gamma_h} = 0) \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \wedge \mathbf{v} |_{\Gamma_e} = 0 ,$$

alors, l'intégrale de surface dans (11) s'annule, et nous pouvons écrire

$$(\text{rot}_h \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \text{rot}_e \mathbf{v}) . \quad (12)$$

L'opérateur adjoint de  $\text{rot}_h$  est donc

$$(\text{rot}_h)^* = \text{rot}_e , \quad (13)$$

avec

$$F_e^1 = \text{dom}(\text{rot}_e) = \{ \mathbf{h} \in \mathbf{L}^2(\Omega) ; \text{rot} \mathbf{h} \in \mathbf{L}^2(\Omega) , \mathbf{n} \wedge \mathbf{h} |_{\Gamma_e} = 0 \} . \quad (14)$$

### Opérateur adjoint de la divergence

L'opérateur adjoint de  $\text{div}_h$ , soit  $(\text{div}_h)^*$ , doit vérifier

$$(\text{div}_h \mathbf{v}, u) = (\mathbf{v}, (\text{div}_h)^* u), \quad \forall \mathbf{v} \in \text{dom}(\text{div}_h), \forall u \in \text{dom}(\text{div}_h)^* .$$

Nous pouvons reprendre la relation (7)

$$(\text{div} \mathbf{v}, u) + (\mathbf{v}, \text{grad} u) = \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}, u \rangle_\Gamma ,$$

et, si nous avons les conditions

$$\mathbf{v} \in \text{dom}(\text{div}_h) \quad (\text{i.e. } \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} |_{\Gamma_h} = 0) \quad \text{et} \quad u |_{\Gamma_e} = 0 ,$$

alors, l'intégrale de surface s'annule. Nous pouvons donc écrire

$$(\text{div}_h \mathbf{v}, u) = (\mathbf{v}, -\text{grad}_e u) . \quad (15)$$

L'opérateur adjoint de  $\text{div}_h$  est donc

$$(\text{div}_h)^* = -\text{grad}_e , \quad (16)$$

avec

$$F_e^0 = \text{dom}(\text{grad}_e) = \{ u \in L^2(\Omega) ; \text{grad} u \in \mathbf{L}^2(\Omega) , u |_{\Gamma_e} = 0 \} . \quad (17)$$

### 3.3.2 Structure duale

Les domaines des opérateurs adjoints, donnés par (10), (14) et (17), sont repris dans le tableau 2. Les espaces  $F_e^p$ ,  $p=0, 1, 2, 3$ , sont encore les quatre espaces fonctionnels  $F^p$  définis mais limités aux domaines des opérateurs adjoints.

Degré	Opérateur	Domaine
2	$(\text{grad}_h)^* = -\text{div}_e$	$F_e^2 = \{ \mathbf{b} \in \mathbf{L}^2(\Omega) ; \text{div} \mathbf{b} \in L^2(\Omega) , \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}  _{\Gamma_e} = 0 \}$
1	$(\text{rot}_h)^* = \text{rot}_e$	$F_e^1 = \{ \mathbf{h} \in \mathbf{L}^2(\Omega) ; \text{rot} \mathbf{h} \in \mathbf{L}^2(\Omega) , \mathbf{n} \wedge \mathbf{h}  _{\Gamma_e} = 0 \}$
0	$(\text{div}_h)^* = -\text{grad}_e$	$F_e^0 = \{ u \in L^2(\Omega) ; \text{grad} u \in \mathbf{L}^2(\Omega) , u  _{\Gamma_e} = 0 \}$

Tableau 2. Les opérateurs adjoints et leurs domaines.

On peut remarquer que les conditions aux limites sont maintenant relatives à la portion de surface complémentaire à  $\Gamma_h$ , c'est-à-dire  $\Gamma_e$ . Pour cette structure duale, nous avons encore des relations similaires à celles de la structure de base, i.e.

$$\text{grad}_e F_e^0 \subset F_e^1, \quad \text{rot}_e F_e^1 \subset F_e^2; \tag{18-19}$$

c'est-à-dire  $\text{cod}(\text{grad}_e) \subset \text{dom}(\text{rot}_e)$  et  $\text{cod}(\text{rot}_e) \subset \text{dom}(\text{div}_e)$ . Ainsi, nous pouvons encore placer les espaces fonctionnels  $F_e^p$ ,  $p=0, 1, 2, 3$ , selon une suite (Fig. 3).

$$F_e^3 \xleftarrow{\text{div}_e} F_e^2 \xleftarrow{\text{rot}_e} F_e^1 \xleftarrow{\text{grad}_e} F_e^0$$

Fig. 3. Suite des espaces  $F_e^p$ .

### 3.4 Structure générale

Nous avons donc maintenant quatre paires d'espaces fonctionnels, en dualité, et trois paires d'opérateurs, mutuellement adjoints, organisés selon deux structures. Le rapprochement de ces deux structures peut se faire grâce à un diagramme que l'on appelle **diagramme de Tonti** (Fig. 4) (Bossavit, 1988b, 1989b, 1991c).

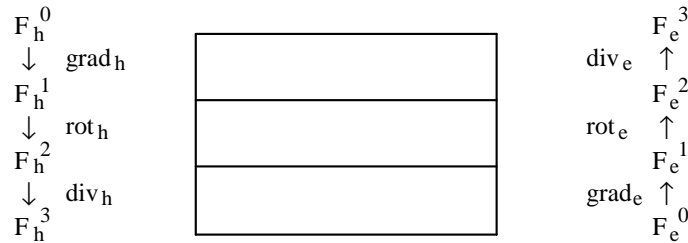


Fig. 4. Diagramme de Tonti représentant les deux structures en dualité.

Cette structure globale peut accueillir une grande variété de modèles aux dérivées partielles. Les conditions aux limites sont prises en compte au niveau de la définition des opérateurs différentiels des suites. Ce sera notamment le cas pour le modèle de la magnétostatique, ainsi que pour le modèle des courants induits, comme nous le verrons dans les chapitres III et IV.

Notons que le diagramme de Tonti schématisé ci-avant peut être généralisé aux problèmes d'évolution temporelle en y ajoutant une troisième dimension. Cette transformation sera effectuée lors de l'étude du problème des courants induits.

#### Remarque

La structure étudiée est construite sur un ouvert de l'espace euclidien à trois dimensions et est basée sur le formalisme vectoriel. En réalité, elle peut être encore plus générale, c'est-à-dire qu'elle peut être définie sur un continuum à  $n$  dimensions, appelé variété. Le formalisme utilisé est alors celui des formes différentielles, dont l'étude constitue l'objet de la géométrie différentielle (Deschamps, 1970, 1981 ; Ingarden & Jamiolkowski, 1985 ; Schutz, 1980). Notre but n'est pas ici de procéder à une telle généralisation. Nous travaillons en effet dans une espace à trois dimensions et les champs scalaire et de vecteurs, qui y sont définis, apparaissent être des représentations de formes différentielles, définies sur la variété correspondante (Bossavit, 1988c, 1988e, 1989b).

# Partie B

## Structure mathématique discrète

### 1. Discrétisation

#### 1.1 Méthode des éléments finis

Une formulation continue d'un problème ne peut en général pas être résolue analytiquement et il faut avoir recours à des méthodes numériques si l'on veut disposer d'informations quantitatives sur la solution. Les fonctions inconnues d'un problème continu donné appartiennent à des espaces fonctionnels continus qui sont en général de dimensions infinies, c'est-à-dire qu'elles sont décrites par un nombre infini de paramètres. Le principe de base de toute méthode numérique est de discrétiser un tel problème afin d'obtenir un **problème discret** analogue, caractérisé par un nombre fini d'inconnues que l'on appelle degrés de liberté. Ce processus de discrétisation consiste à remplacer les espaces fonctionnels continus impliqués par des **espaces fonctionnels discrets**, i.e. de dimensions finies, qui en constituent en général des sous-ensembles. Ces espaces sont aussi appelés **espaces d'approximation** et leurs éléments sont appelés fonctions d'approximation (Johnson, 1987).

Les espaces fonctionnels sont définis sur un certain domaine d'étude. Si celui-ci est discrétisé, c'est-à-dire s'il est défini comme étant la réunion d'éléments géométriques de formes simples, et si les espaces fonctionnels discrets sont construits de telle façon que leurs éléments soient définis par morceaux, alors la méthode numérique d'approximation porte le nom de **méthode des éléments finis** (Dautray & Lions, 1988c ; Dhatt & Touzot, 1981 ; Dwoyer et al., 1988 ; Johnson, 1987 ; Wait & Mitchell, 1985). C'est à ce type de méthode que nous allons nous intéresser. Nous voyons donc que la méthode des éléments finis repose sur un double processus de discrétisation : une discrétisation des espaces fonctionnels et une discrétisation de l'espace géométrique constituant le domaine d'étude (maillage). Ces deux types de discrétisation apparaissent en réalité être intimement liés.

Les **formulations faibles**, telles qu'elles ont été définies dans la première partie de ce chapitre, se révèlent être bien adaptées pour la méthode des éléments finis. Cela apparaîtra dans les chapitres ultérieurs. Nous pouvons déjà noter que si les espaces fonctionnels continus sont ramenés à des espaces discrets, et si les fonctions-test impliquées sont limitées à ces espaces, alors les informations contenues dans une formulation faible ne pourront être satisfaites que de façon approchée. Nous dirons qu'elles sont satisfaites faiblement et nous ne confondrons cependant pas ce sens faible au niveau discret avec le sens faible mathématique initial.

Afin d'illustrer le principe de base de la discrétisation des formulations faibles, considérons la formulation faible du problème de la magnétostatique (II.A.2.32), i.e.

$$(\mu(\mathbf{h}_s - \text{grad } \phi), \text{grad } \phi') = 0, \quad \forall \phi' \in \Phi(\Omega), \quad (1)$$

avec  $\phi \in \Phi(\Omega)$ . Il s'agit de remplacer l'espace  $\Phi(\Omega)$  par un espace discret  $\Phi_h(\Omega)$  qui en est un sous-ensemble, i.e.  $\Phi_h(\Omega) \subset \Phi(\Omega)$ . Cet espace est de dimension finie, soit  $N$ , et il peut donc être défini par  $N$  fonctions de base linéairement indépendantes. Le principe est alors de chercher la fonction  $\phi$  dans  $\Phi_h(\Omega)$ , ce qui revient à déterminer  $N$  paramètres inconnus. Cette



fonction ne sera donc qu'une approximation de la solution réelle  $\phi \in \Phi(\Omega)$ , d'autant meilleure que les fonctions de  $\Phi(\Omega)$  sont bien approchées par celles de  $\Phi_h(\Omega)$ . Chaque fonction-test  $\phi$  va donner lieu à une équation de la forme (1) et, si nous voulons autant d'équations que d'inconnues, il faut choisir  $N$  fonctions-test linéairement indépendantes. Ce choix peut se porter sur les fonctions de base de  $\Phi_h(\Omega)$  et l'on parle dans ce cas de **méthode de Galerkin** (par exemple, Johnson, 1987).

## 1.2 Objectif poursuivi

Un grand nombre de modèles aux dérivées partielles, tels le problème des courants de Foucault ou le problème de la magnétostatique, peuvent être décrits à l'aide d'une structure mathématique qui permet une expression rigoureuse des équations différentielles. Si les propriétés de cette structure sont conservées au niveau discret, les équations, alors rendues algébriques, peuvent s'exprimer d'une façon tout aussi rigoureuse. C'est ainsi que le complexe de Whitney (Bossavit, 1988b, 1988e, 1989b, 1990e) a connu et connaît toujours un grand intérêt auprès des adeptes des éléments mixtes, en particulier des éléments d'arête (Albanese & Rubinacci, 1988, 1990a, 1990b ; Ren & Razek, 1990, 1992 ; Takahashi et al., 1992 ; Webb, 1993 ; Webb & Forghani, 1989, 1990, 1993).

Notre objectif est ici de définir une structure discrète analogue à la structure continue présentée au chapitre II.A. Le processus de discrétisation utilisé consiste à déterminer ce que l'on appelle des **éléments finis**. Nous en donnons une définition générale tant au niveau local (éléments finis) que global (espaces d'éléments finis). Les différents outils qui nous sont nécessaires sont ainsi mis en évidence. Une suite d'espaces d'éléments finis  $S^i$ ,  $i=0$  à  $3$ , analogues discrets des espaces  $F^i$ ,  $i=0$  à  $3$  (Section II.A.3), est alors définie.

Nous présentons ensuite une généralisation du complexe de Whitney, associée non plus seulement à des simplexes, c'est-à-dire à des tétraèdres en dimension trois, mais à des **assemblages de trois types d'éléments géométriques : des tétraèdres, des hexaèdres et des prismes**. La suite ainsi définie vérifie des propriétés analogues à celles du complexe de Whitney. Elle généralise ce qui a été développé dans le domaine des éléments d'arête construits sur des hexaèdres (Kameari, 1990 ; Sakiyama et al., 1990 ; van Welij, 1985) et conduit à des éléments d'arête construits sur des prismes. La généralisation est également établie pour les éléments de facette. Nous présentons donc des **éléments finis nodaux, d'arête, de facette et de volume**, qui sont des **éléments mixtes**, associés à des assemblages d'éléments géométriques différents. Les **fonctions de base** des espaces d'approximation relatifs à ces éléments finis sont définies et leurs **propriétés** sont établies.

## 2. Eléments finis

### 2.1 Définition d'un élément fini

Un **élément fini** est défini par le **triplet**  $(K, P_K, \Sigma_K)$  où :

- $K$  est un **domaine** de l'espace appelé **élément géométrique** (généralement de forme simple, par exemple un tétraèdre, un hexaèdre, un prisme) ;
- $P_K$  est un **espace fonctionnel** de dimension finie  $n_K$ , défini sur  $K$  ;
- $\Sigma_K$  est un ensemble de  $n_K$  degrés de liberté représentés par  $n_K$  fonctionnelles linéaires  $\phi_i$ ,  $1 \leq i \leq n_K$ , définies sur l'espace  $P_K$ , et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ;

de plus, il faut qu'une fonction quelconque  $u \in P_K$  puisse être déterminée de façon unique grâce aux degrés de liberté de  $\Sigma_K$ . Cette dernière condition définit l'**unisolvance** de l'élément fini  $(K, P_K, \Sigma_K)$ .

Le rôle d'un élément fini est d'interpoler un champ dans un espace fonctionnel de dimension finie, et ce, localement, et le plus souvent dans un domaine de l'espace de topologie simple, un élément géométrique. Plusieurs éléments finis peuvent être définis sur un même élément géométrique et l'on peut alors parler, sous certaines conditions, d'éléments finis mixtes. La figure 1 schématise les différents espaces qui interviennent dans la définition d'un élément fini ; la définition du sous-ensemble de points  $\kappa \subset K$  est associée à celle des fonctionnelles.

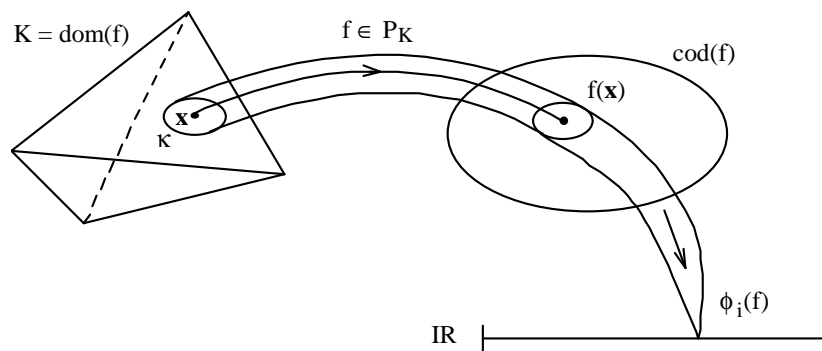


Fig. 1. Espaces associés à un élément fini.

Pour les éléments finis les plus couramment utilisés et les plus connus, les degrés de liberté sont associés aux noeuds de  $K$  et les fonctionnelles  $\phi_i$  se réduisent à des fonctions des coordonnées dans  $K$  ; nous les appelons éléments finis nodaux. Mais la définition que nous présentons ici est plus générale grâce à la liberté laissée dans le choix des fonctionnelles. Notons qu'elle est très rarement présentée sous la forme donnée (un des rares exemples, Dautray & Lions, 1988c) et que, même dans l'affirmative, elle n'est appliquée qu'aux éléments nodaux. C'est à la section 3 de ce chapitre que nous définirons d'autres formes de fonctionnelles. Elles pourront être, en plus de valeurs nodales, des intégrales le long de segments, sur des surfaces et sur des volumes ; ces formes peuvent être bien adaptées à différents types de champs à interpoler. Il s'agit de remarquer que le sous-ensemble  $\kappa \subset K$  (Fig. 1) peut alors se ramener respectivement à un point, à un segment, à une surface, ou à un volume.

## 2.2 Élément fini unisolvant

L'élément fini  $(K, P_K, \Sigma_K)$  est **unisolvant** si

$$\forall p \in P_K, \phi_i(p) = 0 ; \forall \phi_i \in \Sigma_K \Rightarrow p \equiv 0 .$$

Si tel est le cas, alors, pour une fonction quelconque  $u$  assez régulière, on peut définir une **interpolation unique**  $u_K$ , appelée  **$P_K$  - interpolante**, telle que

$$\phi_i(u - u_K) = 0, \forall \phi_i \in \Sigma_K ; u_K \in P_K . \tag{1}$$

L'ensemble  $\Sigma_K$  est dit  $P_K$  - unisolvant.

**Preuve :**

Tout élément  $p \in P_K$  peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des éléments d'une base de  $P_K$ , soit  $\{p_i, 1 \leq i \leq n_K\}$ , i.e.

$$p = \sum_{i=1}^{n_K} a_i p_i ,$$

où les  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq n_K$ , sont appelés **fonctions de base**. Puisque les fonctionnelles  $\phi_j$ ,  $1 \leq j \leq n_K$ , sont linéaires, nous avons

$$\phi_j(p) = \sum_{i=1}^{n_K} a_i \phi_j(p_i) , \quad 1 \leq j \leq n_K .$$

Et puisque  $\phi_j(p) = 0$ ,  $1 \leq j \leq n_K$ , entraîne  $p \equiv 0$ , le déterminant de la matrice  $\Phi$  ( $\Phi_{ji} = \phi_j(p_i)$ ,  $1 \leq i, j \leq n_K$ ) est non nul ; la solution du système correspondant doit en effet être identiquement nulle (i.e.  $a_i = 0$ ,  $1 \leq i \leq n_K$ ). Par conséquent, le système

$$\phi_j(u) = \phi_j(u_K) \Leftrightarrow \phi_j(u) = \sum_{i=1}^{n_K} a_i \phi_j(p_i) , \quad 1 \leq j \leq n_K ,$$

a une solution unique ( $a_i$ ,  $1 \leq i \leq n_K$ ).

### 2.3 Degrés de liberté

L'interpolation d'une fonction  $u$ , dans l'espace  $P_K$  et sur  $K$ , est donnée par l'expression

$$u_K = \sum_{i=1}^{n_K} a_i p_i , \quad u_K \in P_K ,$$

où les  $n_K$  coefficients  $a_i$  des fonctions de base  $p_i \in P_K$  peuvent être déterminés grâce aux relations (1), c'est-à-dire grâce à la résolution du système linéaire

$$\phi_j(u) = \sum_{i=1}^{n_K} a_i \phi_j(p_i) , \quad 1 \leq j \leq n_K ,$$

à condition que la fonction  $u$  soit suffisamment régulière pour que les  $\phi_j(u)$ ,  $1 \leq j \leq n_K$ , existent. Cette résolution est simplifiée au maximum si nous définissons les fonctionnelles de façon à ce que

$$\boxed{\phi_j(p_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n_K} , \quad (2)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker, i.e.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} .$$

La matrice du système est alors la matrice unité et la solution est

$$a_j = \phi_j(u) , \quad 1 \leq j \leq n_K .$$

Dans ce cas, l'interpolation  $u_K \in P_K$  s'exprime par

$$\boxed{u_K = \sum_{j=1}^{n_K} \phi_j(u) p_j} , \quad (3)$$

où les coefficients  $\phi_j(u) = \phi_j(u_K)$ ,  $1 \leq j \leq n_K$ , portent le nom de **degrés de liberté**.

## 2.4 Espaces d'éléments finis

Un **espace d'éléments finis**  $X_h$  peut être construit sur un ensemble d'éléments géométriques et d'éléments finis associés (Dautray & Lions, 1988c). Sa définition dépend du maillage  $M_h$  du domaine  $\Omega$  considéré, ainsi que de la donnée de l'élément fini  $(K, P_K, \Sigma_K)$  associé à tout domaine  $K \in M_h$ .

Etant donnée une fonction  $u$  définie sur  $\Omega$ , assez régulière, son interpolante  $u_h \in X_h$  est définie, de manière unique, comme suit :

- la restriction  $u_h|_K$  appartient à l'espace  $P_K$  ;
- la restriction  $u_h|_K$  est entièrement déterminée par la donnée de l'ensemble de valeurs  $\Sigma_K(u)$  des degrés de liberté de la fonction  $u$  — c'est une conséquence de l'unisolvance — ;
- il est nécessaire d'assurer des conditions de continuité au travers des interfaces entre éléments géométriques.

L'espace d'éléments finis  $X_h$  est un espace de dimension finie, soit  $D_h$ . On peut lui associer un ensemble de degrés de liberté  $\Sigma_h$  lié aux ensembles  $\Sigma_K, \forall K \in M_h$ , soit

$$\Sigma_h = \{\phi_{h,j}, 1 \leq j \leq D_h\} .$$

Il est également possible de définir les fonctions de base  $p_{h,i}, 1 \leq i \leq D_h$ , de l'espace  $X_h$  à partir des fonctions de base des espaces  $P_K, \forall K \in M_h$ . Elles doivent vérifier les relations

$$\boxed{\phi_{h,j}(p_{h,i}) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq D_h} , \quad (4)$$

analogues aux relations (2). Elles sont en général définies par morceaux et de supports aussi "petits" que possible, c'est-à-dire constitués d'un nombre restreint d'éléments géométriques. Ainsi, à toute fonction  $u$  suffisamment régulière pour que les degrés de liberté  $\phi_{h,j}(u), 1 \leq j \leq D_h$ , soient bien définis, nous pouvons associer la fonction  $u_h$ , appelée  **$X_h$ -interpolante**, définie par

$$\boxed{u_h = \sum_{j=1}^{D_h} \phi_{h,j}(u) p_{h,j}} . \quad (5)$$

## 3. Une suite d'espaces d'éléments finis

### 3.1 Introduction

La construction d'espaces d'éléments finis nécessite avant tout une discrétisation spatiale, ou maillage, du domaine étudié. Nous utilisons pour cela trois types d'éléments géométriques : des tétraèdres, des hexaèdres et des prismes à base triangulaire. Ensuite, des fonctions ou champs de vecteurs associés aux différentes entités géométriques du maillage (noeuds, arêtes, facettes et volumes) sont définis. Ceux-ci constituent des bases pour des espaces d'approximation  $S^i, i = 0$  à 3, qui sont des analogues discrets des espaces  $F^i, i = 0$  à 3 (Section II.A.3).

### 3.2 Éléments géométriques

Considérons un maillage d'un domaine, réalisé par un assemblage d'éléments géométriques pouvant être des tétraèdres, des hexaèdres et des prismes à base triangulaire

(Fig. 1). Ces éléments sont appelés volumes et leurs sommets constituent les noeuds. Les ensembles des noeuds, des arêtes, des facettes et des volumes de ce maillage sont notés  $N$ ,  $A$ ,  $F$  et  $V$ , respectivement. Ils sont de dimensions  $\#N$ ,  $\#A$ ,  $\#F$  et  $\#V$ . Les éléments de ces ensembles sont appelés des entités géométriques ; quatre types d'entités géométriques sont ainsi considérés. Dans un maillage, deux éléments géométriques quelconques ont en commun, soit une facette, ou une arête, ou un noeud, ou bien sont disjoints. Nous désignons le  $i^{\text{me}}$  noeud du maillage par  $n_i$  ou  $\{i\}$ , ou simplement  $i$  à condition de définir son appartenance à l'ensemble des noeuds, c'est-à-dire  $i \in N$ . Les arêtes et facettes peuvent être définies par des ensembles ordonnés de noeuds. Ainsi, nous désignons une arête par  $a_{ij}$  ou  $\{i, j\}$ , une facette triangulaire par  $f_{ijk}$  ou  $\{i, j, k\}$ , et une facette quadrangulaire par  $f_{ijkl}$  ou  $\{i, j, k, l\}$ . Ces entités géométriques sont représentées à la figure 2.

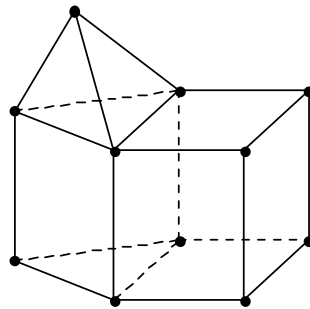


Fig. 1. Assemblage d'éléments géométriques différents.

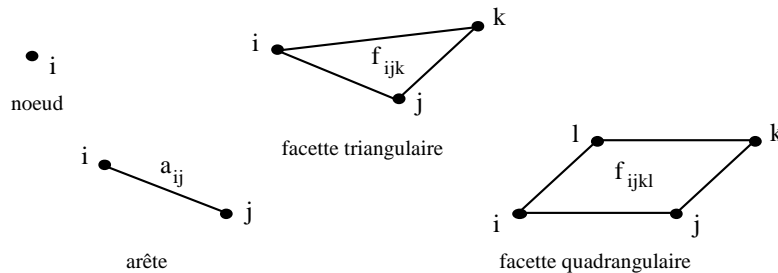


Fig. 2. Entités géométriques : noeud, arête et facettes ( $i, j, k, l \in N$ ).

### 3.3 Fonctions de base

#### 3.3.1 Fonctions de base nodales

Considérons la fonction  $p_i(\mathbf{x})$  des coordonnées du point  $\mathbf{x}$  et relative au noeud  $n_i$ , qui prend la valeur 1 en ce noeud, varie continûment dans les éléments géométriques ayant ce noeud en commun, et s'annule dans les autres éléments sans subir de discontinuité. Les coordonnées cartésiennes du point  $\mathbf{x}$  sont notées  $(x, y, z)$ . Cette fonction n'est autre que la fonction de base, associée au noeud  $n_i$ , de l'espace fonctionnel des éléments finis nodaux, dits isoparamétriques et de type I, construits sur les éléments géométriques considérés. Les sous-espaces fonctionnels associés à chaque élément fini sont de dimensions respectives 4, 8 et 6, pour les tétraèdres (4 noeuds), les hexaèdres (8 noeuds) et les prismes (6 noeuds) (Dautray & Lions, 1988c ; Dhatt & Touzot, 1981).

Un élément géométrique quelconque  $K$ , dit réel, peut se ramener à un élément de référence  $K_r$ , i.e. dans un système de coordonnées de référence  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , grâce à des fonctions de transformation, i.e.  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in K$ . C'est en général la transformation inverse que l'on utilise, c'est-à-dire que l'on paramétrise chaque élément réel à l'aide de coordonnées de référence  $\mathbf{u} \in K_r$ , i.e.  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{x} \in K$  (Annexe II.1). Dans le cas d'un élément isoparamétrique,

ces fonctions de transformation  $\mathbf{x}(\cdot)$  s'expriment à l'aide des fonctions de base définies dans l'élément  $K_r$  (qui s'expriment plus facilement que dans  $K$ ) ; ceci permet d'assurer les conditions de continuité demandées. Les éléments finis nodaux considérés sont décrits ci-après ; les éléments de référence associés sont détaillés dans l'annexe II.2.

**Tétraèdre de type I**

L'élément fini associé est défini par le triplet  $(K, P_K, \Sigma_K)$  où :

- $K$  est un tétraèdre (Fig. 3 ; les noeuds sont notés  $n_i$  et sont représentés par des points noirs), ou simplexe de dimension 3 ;
- $P_K = P_1$ ,  $\dim P_K = n_K = 4$ , où  $P_1$  est l'espace des polynômes en  $x, y, z$  de degré inférieur ou égal à 1 ; une base de  $P_K$  peut donc être  $\{1, x, y, z\}$  ;
- $\Sigma_K = \{p_i, 1 \leq i \leq 4\}$  ; ces fonctionnelles sont associées aux noeuds de l'élément.

**Hexaèdre de type I**

L'élément fini associé est défini par le triplet  $(K, P_K, \Sigma_K)$  où :

- $K$  est un hexaèdre (Fig. 4) ;
- $P_K = Q_1$ ,  $\dim P_K = n_K = 8$ , où  $Q_1$  est l'espace des polynômes en  $x, y, z$  de degré inférieur ou égal à 1 par rapport à chaque variable  $x, y, z$  ; une base de  $P_K$  peut donc être  $\{1, x, y, z, xy, xz, yz, xyz\}$  ;
- $\Sigma_K = \{p_i, 1 \leq i \leq 8\}$  ; ces fonctionnelles sont associées aux noeuds de l'élément.

**Prisme à base triangulaire de type I**

L'élément fini associé est défini par le triplet  $(K, P_K, \Sigma_K)$  où :

- $K$  est un prisme à base triangulaire (Fig. 5) ;
- $P_K = P_1(x,y) \otimes P_1(z)$ ,  $\dim P_K = n_K = 6$  ;  
une base de  $P_K$  peut donc être  $\{1, x, y, z, xz, yz\}$  ;
- $\Sigma_K = \{p_i, 1 \leq i \leq 6\}$  ; ces fonctionnelles sont associées aux noeuds de l'élément.

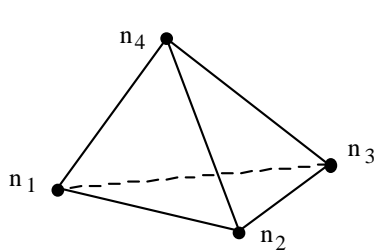


Fig. 3. Tétraèdre de type I.

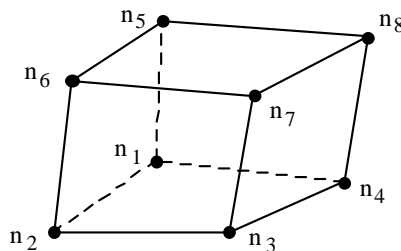


Fig. 4. Hexaèdre de type I.

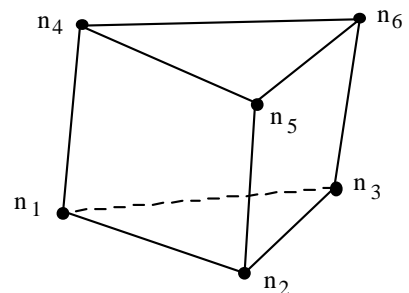


Fig. 5. Prisme à base triangulaire de type I.

**3.3.2 Fonctions de base d'une structure discrète**

A un **noeud**  $n_i = \{i\}$ , nous associons la fonction

$$\boxed{s_{n_i}(\mathbf{x}) = p_i(\mathbf{x})} \quad . \quad (1)$$

Nous appelons  $S^0$ , l'espace de dimension finie engendré par les  $s_n, \forall n \in N$ .

Dans un souci d'alléger les expressions, nous omettrons souvent de mentionner, de façon explicite, le point d'évaluation  $\mathbf{x}$  des champs scalaires ou vectoriels.

A une **arête**  $a_{ij} = \{i, j\}$ , nous associons le champ de vecteurs

$$\mathbf{s}_{a_{ij}} = p_j \operatorname{grad} \sum_{r \in N_{F, j\bar{i}}} p_r - p_i \operatorname{grad} \sum_{r \in N_{F, i\bar{j}}} p_r, \quad (2)$$

où  $N_{F, m\bar{n}}$ ,  $m, n \in N$  ( $\{m, n\} = \{i, j\}$  ou  $\{j, i\}$ ), est un ensemble de noeuds défini comme suit. Pour un point d'évaluation  $\mathbf{x}$  qui appartient à un élément géométrique adjacent à l'arête  $a_{mn}$ ,  $N_{F, m\bar{n}}$  est l'ensemble des noeuds de la facette qui appartient à cet élément et qui comprend le noeud  $m$  mais pas le noeud  $n$ . Une telle facette est définie de façon unique pour les éléments qui ont trois arêtes issues de chaque noeud. Sa détermination est montrée à la figure 6, où une facette soit triangulaire, soit quadrangulaire, est impliquée, et où les arêtes apparentes appartiennent à l'élément géométrique contenant le point  $\mathbf{x}$ . L'ensemble défini des noeuds  $y$  apparaît comme étant soit  $\{\{m\}, \{o\}, \{p\}\}$ , soit  $\{\{m\}, \{o\}, \{p\}, \{q\}\}$ . Les directions des arêtes en pointillés peuvent être modifiées pour schématiser un tétraèdre, un hexaèdre ou un prisme. En tout autre point d'évaluation, extérieur aux éléments adjacents à l'arête  $a_{mn}$ , l'ensemble  $N_{F, m\bar{n}}$  est vide. Par conséquent, le champ  $\mathbf{s}_{a_{ij}}$  est nul dans tous les éléments non adjacents à l'arête  $a_{ij}$ . Son support se réduit alors aux éléments adjacents à l'arête  $a_{ij}$  (Fig. 7) ; il est noté  $\operatorname{supp}(\mathbf{s}_{a_{ij}})$ . Ce champ peut être considéré comme défini par morceaux, c'est-à-dire par élément géométrique, du fait que les ensembles  $N_{F, i\bar{j}}$  et  $N_{F, j\bar{i}}$  dépendent des éléments.

Nous appelons  $S^1$ , l'espace des champs de vecteurs engendré par les  $\mathbf{s}_a$ ,  $\forall a \in A$ .

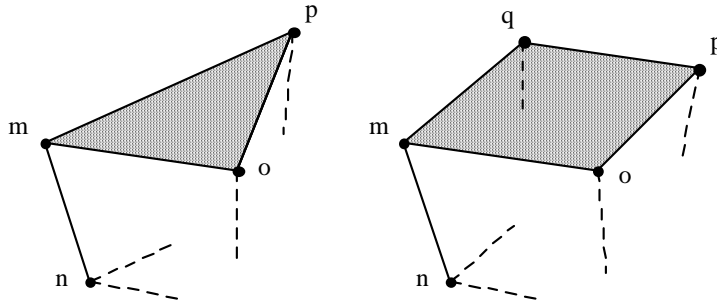


Fig. 6. Détermination de la facette associée à  $N_{F, m\bar{n}}$ .

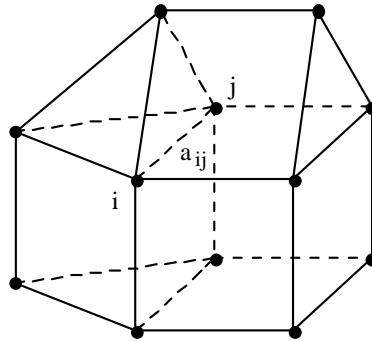


Fig. 7. Eléments adjacents à l'arête  $a_{ij}$  constituant le support du champ  $\mathbf{s}_{a_{ij}}$ .

A une **facette**  $f = f_{ijk} = \{i, j, k\} = \{q_1, q_2, q_3\}$  ou  $f = f_{ijkl} = \{i, j, k, l\} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ , nous associons le champs de vecteurs

$$\mathbf{s}_f = a_f \sum_{c=1}^{\#N_f} p_{q_c} \operatorname{grad} \left( \sum_{r \in N_{F, q_c \bar{q}_{c+1}}} p_r \right) \wedge \operatorname{grad} \left( \sum_{r \in N_{F, q_c \bar{q}_{c-1}}} p_r \right), \quad (3)$$

où •  $\#N_f$  est le nombre de noeuds de la facette  $f$  ;

- $a_f = 2$  si  $\#N_f = 3$ ,  $a_f = 1$  si  $\#N_f = 4$  ;
- la liste des  $q_i$  est rendue circulaire en posant  $q_0 \equiv q_{\#N_f}$  et  $q_{\#N_f+1} \equiv q_1$ .

Ce champ est lui aussi défini par morceaux, et son support,  $\text{supp}(\mathbf{s}_f)$ , se réduit à l'ensemble des éléments géométriques adjacents à la facette  $f$ . Les champs de vecteurs  $\mathbf{s}_f$ ,  $\forall f \in F$ , engendrent un espace noté  $S^2$ .

A un **volume**  $v$ , nous associons la fonction

$$s_v = \frac{1}{\text{vol}(v)} \quad , \quad (4)$$

de support  $v$ , et où  $\text{vol}(v)$  est le volume de l'élément géométrique  $v$ . L'espace  $S^3$  est engendré par les fonctions  $s_v$ ,  $\forall v \in V$ .

Quelques développements permettent d'établir les propriétés suivantes :

- la fonction  $s_n$  est égale à 1 au noeud  $n$ , et à 0 aux autres noeuds, c'est-à-dire

$$s_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \quad , \quad \forall i, j \in N \quad , \quad (5)$$

où  $\mathbf{x}_j$  représente les coordonnées du noeud  $j \in N$  ;

- la circulation de  $\mathbf{s}_a$  est égale à 1 le long de l'arête  $a$ , et à 0 le long des autres arêtes, c'est-à-dire

$$\int_j \mathbf{s}_i \cdot d\mathbf{l} = \delta_{ij} \quad , \quad \forall i, j \in A \quad ; \quad (6)$$

- le flux de  $\mathbf{s}_f$  est égal à 1 à travers la facette  $f$ , et à 0 à travers les autres facettes, c'est-à-dire

$$\int_j \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{n} \, ds = \delta_{ij} \quad , \quad \forall i, j \in F \quad ; \quad (7)$$

- l'intégrale volumique de  $s_v$  est égale à 1 sur le volume  $v$ , et à 0 sur les autres volumes, c'est-à-dire

$$\int_j s_i \, dv = \delta_{ij} \quad , \quad \forall i, j \in V \quad . \quad (8)$$

Ces propriétés mettent en évidence différentes fonctionnelles pour lesquelles des relations de la forme (2.2) ou (2.4) sont satisfaites. Les fonctionnelles linéaires liées aux degrés de liberté, et introduites dans la définition des éléments finis, sont ainsi des **évaluations ponctuelles**, des **intégrales curvilignes**, des **intégrales de surface** et des **intégrales de volume**. Il résulte des propriétés (5-8) que les fonctions  $s_n$ ,  $\mathbf{s}_a$ ,  $\mathbf{s}_f$  et  $s_v$ , constituent des bases pour les espaces qu'elles génèrent. Nous les appelons **fonctions de base nodales, d'arête, de facette et de volume**. Les éléments finis associés sont appelés **éléments nodaux, d'arête, de facette et de volume**.

Notons que l'expression  $s_i$ , ou  $\mathbf{s}_i$ , définit sans ambiguïté une des quatre fonctions de base à condition que l'entité  $i$  soit définie, c'est-à-dire que son domaine d'appartenance soit spécifié. Notons également qu'il faudrait écrire  $S^i(\Omega)$  plutôt que  $S^i$ , mais nous utilisons en général la seconde notation lorsque cet espace fonctionnel est défini dans le domaine global.

### 3.3.3 Interprétation géométrique des fonctions de base

Une interprétation géométrique des fonctions de base peut nous aider à vérifier certaines de leurs propriétés. Il est pour cela utile de commencer par analyser le champ de vecteurs

$$\text{grad } P_{F, m\bar{n}} = \text{grad} \sum_{r \in N_{F, m\bar{n}}} p_r \quad , \quad (9)$$



qui est impliqué dans les expressions (2) et (3). Le champ scalaire continu qui y apparaît, c'est-à-dire

$$P_{F,m\bar{n}} = \sum_{r \in N_{F,m\bar{n}}} P_r \quad (10)$$

a la caractéristique d'être égal à 1 en tout point de la facette associée à  $N_{F,m\bar{n}}$ . C'est une propriété des fonctions de base nodales utilisées. Par conséquent, le champ de vecteurs (9) est orthogonal à cette facette en tout point (Fig. 8).

Considérons maintenant le champ de vecteurs obtenu par multiplication de  $p_m$  et (9), c'est-à-dire

$$p_m \text{ grad} \sum_{r \in N_{F,m\bar{n}}} P_r \quad (11)$$

Dans la suite, celui-ci est dit associé à l'arête  $\{m, n\}$ . La fonction  $p_m$  est égale à 0 le long de toutes les arêtes de l'élément géométrique comprenant le point  $\mathbf{x}$ , à l'exception de celles qui sont issues du noeud  $\{m\}$ . Ainsi, la circulation du champ (11) est égale à 0 le long de toutes les arêtes à l'exception de  $a_{mn}$ ; le champ (11) est en fait soit identiquement nul le long de certaines de ces arêtes, soit orthogonal à d'autres. La combinaison de deux champs de la forme (11) associés aux arêtes  $\{j, i\}$  et  $\{i, j\}$ , comme dans l'expression (2) de  $\mathbf{s}_a$ , donne un champ de vecteurs qui a les mêmes propriétés que le champ (11), et qui a par conséquent les propriétés annoncées pour  $\mathbf{s}_a$ , i.e. (6) (Fig. 8). Le fait que sa circulation le long de l'arête  $a_{ij}$  soit égale à 1 peut être vérifié par calcul.

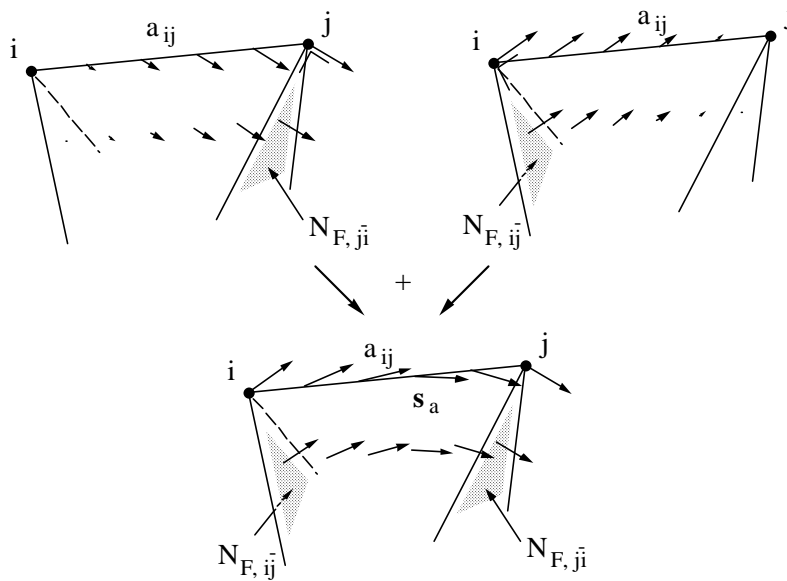


Fig. 8. Interprétation géométrique de la fonction de base d'arête  $\mathbf{s}_a$  (2).

Considérons maintenant le champ de vecteurs qui apparaît dans l'expression (3) de  $\mathbf{s}_f$ ,

$$p_{q_c} \text{ grad} P_{F,q_c \bar{q}_{c+1}} \wedge \text{grad} P_{F,q_c \bar{q}_{c-1}} \quad (12)$$

Les deux gradients qui y apparaissent sont représentés à la figure 9. Chacun est orthogonal à sa facette associée, et leur produit vectoriel ( $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  sur la figure 9) est donc parallèle aux deux facettes associées. Son flux, et par conséquent celui du champ (12), est alors égal à 0 au travers de celles-ci. Le terme  $p_{q_c}$  dans l'expression du champ (12) permet d'annuler son flux au travers de toutes les autres facettes à l'exception de la facette  $f$ . La sommation effectuée dans l'expression (3) de  $\mathbf{s}_f$  conserve la même propriété. Le flux de  $\mathbf{s}_f$  au travers de la facette  $f$

est donc le seul à différer de 0 et il est possible de vérifier par calcul qu'il vaut 1. Les relations (7) sont donc bien vérifiées (Fig. 10).

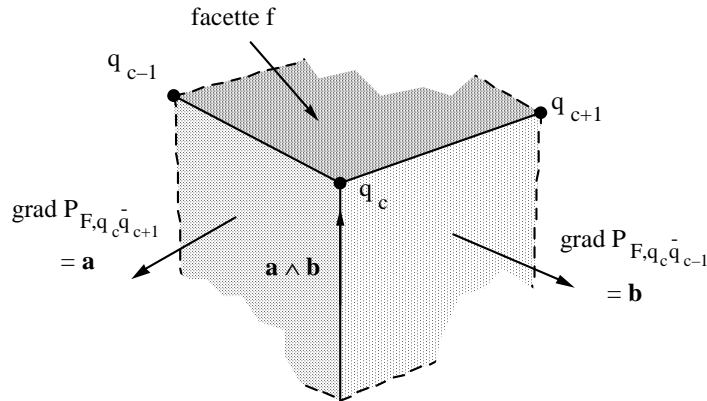


Fig. 9. Champ de vecteurs  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  impliqué dans l'expression de  $\mathbf{s}_f$ .

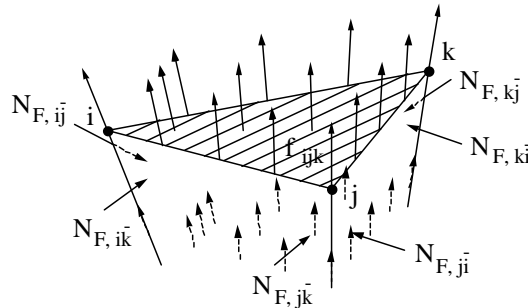


Fig. 10. Interprétation géométrique de la fonction de base de facette  $\mathbf{s}_f$  (3).

### 3.4 Degrés de liberté

L'expression d'un champ dans la base d'un espace  $S^i$  —  $S^0$  ou  $S^3$  pour un champ scalaire,  $S^1$  ou  $S^2$  pour un champ de vecteurs — fait apparaître des coefficients qui sont appelés **degrés de liberté**. Nous pouvons exprimer des champs  $\phi \in S^0$ ,  $\mathbf{h} \in S^1$ ,  $\mathbf{j} \in S^2$  et  $\rho \in S^3$ , sous les formes respectives

$$\phi = \sum_{n \in N} \phi_n s_n, \quad \phi \in S^0, \quad \mathbf{h} = \sum_{a \in A} h_a \mathbf{s}_a, \quad \mathbf{h} \in S^1, \quad (13-14)$$

$$\mathbf{j} = \sum_{f \in F} j_f \mathbf{s}_f, \quad \mathbf{j} \in S^2, \quad \rho = \sum_{v \in V} \rho_v s_v, \quad \rho \in S^3, \quad (15-16)$$

où les coefficients scalaires  $\phi_n$ ,  $h_a$ ,  $j_f$  et  $\rho_v$ , sont les degrés de liberté. Grâce aux propriétés (5), (6), (7) et (8), ceux-ci vérifient les relations

$$\phi_n = \phi(\mathbf{x}_n), \quad n \in N, \quad h_a = \int_a \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l}, \quad a \in A, \quad (17-18)$$

$$j_f = \int_f \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} ds, \quad f \in F, \quad \rho_v = \int_v \rho dv, \quad v \in V. \quad (19-20)$$

Ces degrés de liberté sont donc respectivement les valeurs aux noeuds, les circulations le long des arêtes, les flux au travers des facettes ou les intégrales sur les volumes, des champs associés.

### 3.5 Continuité des fonctions de base

Des propriétés de continuité aux intersections entre éléments, c'est-à-dire à travers les facettes, peuvent être établies.

- La fonction  $s_n$ ,  $n \in N$ , est continue à travers les facettes.  
C'est une propriété déjà énoncée de la fonction de base nodale  $s_n = p_n$ .
- La composante tangentielle de  $s_a$ ,  $a \in A$ , est continue à travers les facettes.  
En effet, considérons l'arête  $a = \{i, j\} \in A$ , la fonction  $s_a$  donnée par (2), et une facette  $f \in F$  de normale  $\mathbf{n}$ .  
Si  $f \notin \text{supp}(s_a)$ , on a  $s_a|_f = 0$  des deux côtés de  $f$ . Si  $f \in \text{supp}(s_a)$ , on a :  
Si  $i \notin f$  et  $j \notin f$ , alors  $s_a|_f = 0$  ; si  $i \in f$  ou  $j \in f$ , mais  $a \notin f$ , alors  $s_a \perp f$  et donc  $\mathbf{n} \wedge s_a|_f = 0$ .  
Pour chacun de ces cas, la facette  $f$  est à la frontière de  $\text{supp}(s_a)$  et il y a donc bien continuité de  $\mathbf{n} \wedge s_a|_f$  (qui est même nulle).  
Si  $a \in f$ , i.e.  $f$  est à l'intérieur de  $\text{supp}(s_a)$ , la continuité de  $\mathbf{n} \wedge s_a|_f$  est assurée grâce au fait que  $\nabla p_k|_f \perp f$ , i.e.  $\mathbf{n} \wedge \nabla p_k|_f = 0$ ,  $\forall k \notin f$ , et que  $\mathbf{n} \wedge \nabla p_l|_f = 0$ ,  $\forall l \in f$ , ne dépend que de  $f$ .
- La composante normale de  $s_f$ ,  $f \in F$ , est continue à travers les facettes.  
En effet, considérons la facette  $f \in F$  de normale  $\mathbf{n}$ , et la fonction  $s_f$  donnée par (3). La composante normale de  $s_f$  sur  $f' \in F$  est non nulle uniquement lorsque  $f'$  est intérieure à  $\text{supp}(s_f)$ , et donc  $f' = f$ .  
Si  $k, l \notin f$ , alors  $\nabla p_k|_f = \nabla p_l|_f (\perp f)$ , et donc  $\nabla p_k \wedge \nabla p_l|_f = 0$  ; si  $k \in f$  et  $l \notin f$ , alors  $\nabla p_l|_f \perp f$ , et donc  $\nabla p_k \wedge \nabla p_l|_f // f$ , i.e.  $\mathbf{n} \cdot (\nabla p_k \wedge \nabla p_l)|_f = 0$  ; si  $k \in f$  et  $l \in f$ , alors  $\mathbf{n} \cdot (\nabla p_k \wedge \nabla p_l)|_f = \mathbf{n} \cdot (\nabla_t p_k \wedge \nabla_t p_l)|_f$  ne dépend que de  $f$  (l'indice  $t$  associé à  $\nabla$  est relatif à sa composante tangentielle sur  $f$ ) et est donc continu au passage de  $f$ .  
Ces propriétés permettent de vérifier la continuité de la composante normale au travers de  $f$  de chacun des termes qui apparaissent dans l'expression (3) de  $s_f$ .
- La fonction  $s_v$ ,  $v \in V$ , est, quant à elle, discontinue.

Ces propriétés définissent ce que l'on appelle la conformité. Elle permettent la prise en compte exacte des conditions d'interface de différentes grandeurs utilisées dans la modélisation de problèmes physiques. Par exemple, dans les problèmes électromagnétiques, les champs de vecteurs de  $S^1$  peuvent représenter des champs de vecteurs comme le champ magnétique  $\mathbf{h}$  ou le champ électrique  $\mathbf{e}$  dont les composantes tangentielles sont continues au travers des interfaces entre matériaux. Les champs de vecteurs de  $S^2$  peuvent, quant à eux, représenter des champs comme le champ d'induction  $\mathbf{b}$  ou le champ de densité de courant  $\mathbf{j}$ , dont les composantes normales sont continues au travers des interfaces.

### 3.6 Suite des espaces d'éléments finis

#### 3.6.1 Notion d'incidence

Définissons tout d'abord la notion d'**incidence** (Bossavit, 1990e).

**L'incidence d'un noeud  $n$  dans une arête  $a$** , notée  $i(n, a)$ , vaut 1 si  $n$  est l'extrémité de  $a$ ,  $-1$  si  $n$  est l'origine de  $a$ , et 0 si  $n$  n'appartient pas à  $a$ . Par exemple,

$$i(n, \{m, n\}) = 1, \quad i(m, \{m, n\}) = -1, \quad i(q, \{m, n\}) = 0.$$

De même, **l'incidence d'une arête  $a$  dans une facette  $f$** , notée  $i(a, f)$ , vaut 1 ou  $-1$  suivant que,  $a$  appartenant à  $f$ , la liste ordonnée des noeuds de  $a$  apparaît comme une sous-liste directe ou inverse dans la liste circulaire des noeuds de  $f$ , et vaut 0 si  $f$  ne contient pas  $a$ . Par exemple,

$$\begin{aligned} i(\{m, n\}, \{m, n, o\}) &= 1, \quad i(\{o, m\}, \{m, n, o\}) = 1, \\ i(\{o, n\}, \{m, n, o\}) &= -1, \quad i(\{p, q\}, \{m, n, o\}) = 0. \end{aligned}$$

Enfin, l'**incidence d'une facette f dans un volume v**, notée  $i(f, v)$ , vaut 1 ou  $-1$  suivant que, f appartenant à v, la normale à f définie grâce à la liste circulaire de ses noeuds (règle de la main droite) est extérieure ou intérieure à v, et vaut 0 si f n'appartient pas à v.

Des matrices rectangulaires  $\mathbf{G}_{AN}$ ,  $\mathbf{R}_{FA}$  et  $\mathbf{D}_{VF}$ , dont les éléments sont définis par

$$\mathbf{G}_{an} = i(n, a), \quad \forall a \in A, \quad \forall n \in N, \quad (21)$$

$$\mathbf{R}_{fa} = i(a, f), \quad \forall f \in F, \quad \forall a \in A, \quad (22)$$

$$\mathbf{D}_{vf} = i(f, v), \quad \forall v \in V, \quad \forall f \in F, \quad (23)$$

sont appelées **matrices d'incidence**. Elles sont de dimensions (nombre de lignes  $\times$  nombre de colonnes) respectives  $\#A \times \#N$ ,  $\#F \times \#A$  et  $\#V \times \#F$ . Pour un domaine connexe, le rang de  $\mathbf{G}_{AN}$  est égal à  $\#N - 1$  et celui de  $\mathbf{R}_{FA}$  est égal à  $\#A - \#N + 1$  (Boite & Neiryck, 1976). Pour un domaine non connexe, constitué de p domaines disjoints, ces rangs sont respectivement égaux à  $\#N - p$  et  $\#A - \#N + p$ .

### 3.6.2 Suite des espaces

Les relations suivantes, dans lesquelles intervient la notion d'incidence, peuvent être démontrées :

$$\boxed{\sum_{a \in A} i(n, a) s_a = \text{grad } s_n}, \quad \boxed{\sum_{f \in F} i(a, f) s_f = \text{rot } s_a}, \quad \boxed{\sum_{v \in V} i(f, v) s_v = \text{div } s_f}. \quad (24-25-26)$$

Ainsi, grâce à la relation (24), le gradient d'un champ scalaire  $\phi$  de  $S^0$ , i.e. de la forme (13), définit le champ vectoriel

$$\mathbf{h} = \text{grad } \phi = \sum_{n \in N} \phi_n \text{ grad } s_n = \sum_{n \in N} \phi_n \sum_{a \in A} i(n, a) s_a,$$

et donc,

$$\mathbf{h} = \text{grad } \phi = \sum_{a \in A} \left( \sum_{n \in N} i(n, a) \phi_n \right) s_a, \quad \phi \in S^0. \quad (27)$$

Ce champ  $\mathbf{h}$  est de la forme (14) et est, par conséquent, un élément de  $S^1$ . Ses composantes ( $h_a$ ) sont des différences de valeurs nodales de  $\phi$ , i.e.  $\phi_{q_a} - \phi_{p_a}$  pour  $a = \{p_a, q_a\}$ . Si  $\{\phi_n\}$  est le vecteur colonne des composantes de  $\phi$ , alors le vecteur des composantes de  $\mathbf{h} = \text{grad } \phi$ , noté  $\{h_a\}$ , est donné par la formule matricielle

$$\{h_a\} = \mathbf{G}_{AN} \{\phi_n\}. \quad (28)$$

La matrice  $\mathbf{G}_{AN}$  apparaît ainsi comme l'équivalent discret du gradient.

De même, grâce à la relation (25), le rotationnel d'un champ vectoriel  $\mathbf{h}$  de  $S^1$ , i.e. de la forme (14), définit le champ vectoriel

$$\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{h} = \sum_{f \in F} \left( \sum_{a \in A} i(a, f) h_a \right) s_f, \quad \mathbf{h} \in S^1, \quad (29)$$

qui appartient à l'espace  $S^2$ , puisqu'il est de la forme (15). Ses composantes ( $j_f$ ) sont les circulations de  $\mathbf{h}$  le long des contours de chacune des facettes. Le vecteur des composantes de  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{h}$ , noté  $\{j_f\}$ , peut être obtenu à partir du vecteur  $\{h_a\}$  des composantes de  $\mathbf{h}$  grâce à la formule matricielle

$$\{j_f\} = \mathbf{R}_{FA} \{h_a\}. \quad (30)$$

La matrice  $\mathbf{R}_{FA}$  apparaît alors comme l'équivalent discret du rotationnel. En particulier, on peut vérifier que la relation vectorielle  $\text{rot grad } \phi = 0$  est bien vérifiée au niveau discret, i.e. que  $\mathbf{R}_{FA} \mathbf{G}_{AN} = 0$ .

Finalement, grâce à la relation (26), la divergence d'un champ vectoriel  $\mathbf{b}$  de  $S^2$ , i.e. de la forme (15), définit le champ scalaire

$$\eta = \text{div } \mathbf{b} = \sum_{v \in V} \left( \sum_{f \in F} i(f, v) b_f \right) s_v, \quad \mathbf{b} \in S^2, \quad (31)$$

qui appartient à l'espace  $S^3$ , puisqu'il est de la forme (16). Ses composantes  $(\eta_v)$  sont les flux de  $\mathbf{b}$  au travers des facettes de chacun des volumes. Le vecteur des composantes de  $\eta = \text{div } \mathbf{b}$ , noté  $\{\eta_v\}$ , peut être obtenu à partir du vecteur  $\{b_f\}$  des composantes de  $\mathbf{b}$  grâce à la formule matricielle

$$\{\eta_v\} = \mathbf{D}_{VF} \{b_f\}. \quad (32)$$

La matrice  $\mathbf{D}_{VF}$  apparaît alors comme l'équivalent discret de la divergence. En particulier, on peut vérifier que la relation vectorielle  $\text{div rot } \mathbf{h} = 0$  est bien vérifiée au niveau discret, i.e. que  $\mathbf{D}_{VF} \mathbf{R}_{FA} = 0$ .

Les relations (24), (25) et (26) entraînent les inclusions

$$\text{grad}(S^0) \subset S^1, \quad \text{rot}(S^1) \subset S^2, \quad \text{div}(S^2) \subset S^3. \quad (33-34-35)$$

Il en résulte que les espaces  $S^i$ ,  $i=0$  à 3, forment une **suite**. Celle-ci peut être schématisée à l'aide du diagramme ci-dessous (Fig. 11).

$$S^0 \xrightarrow{\text{grad}} S^1 \xrightarrow{\text{rot}} S^2 \xrightarrow{\text{div}} S^3$$

Fig. 11. La suite des espaces  $S^i$ .

Ces espaces peuvent donc constituer des espaces d'approximation des espaces continus  $F^i$ ,  $i=0$  à 3, définis à la section II.A.3. Les éléments finis associés peuvent être qualifiés d'**éléments mixtes**.

Les **conditions aux limites** qui peuvent être définies dans les espaces  $F^i$ ,  $i=0$  à 2 (Tableaux II.A.3.1-2), s'introduisent de façon naturelle dans les espaces correspondants  $S^i$ ,  $i=0$  à 2. Ces conditions peuvent en effet être imposées par l'intermédiaire des degrés de liberté (17-19) qui sont associés aux entités géométriques de la surface correspondante : valeur pour un noeud, circulation pour une arête, flux pour une facette.

Nous voudrions insister sur le fait que toutes les propriétés établies des fonctions de base sont **valables pour tout assemblage des éléments géométriques considérés**, c'est-à-dire pour tout mélange de tétraèdres, d'hexaèdres et de prismes.

## 4. Sous-espaces particuliers de l'espace des éléments d'arête

Un champ  $\mathbf{h}$  de l'espace fonctionnel  $S^1(\Omega)$  peut s'exprimer sous la forme (3.14),

$$\mathbf{h} = \sum_{a \in A} h_a \mathbf{s}_a, \quad \mathbf{h} \in S^1(\Omega), \quad (1)$$

- où •  $A$  est l'ensemble des arêtes du domaine global  $\Omega$ ,
- $\mathbf{s}_a$  est la fonction (vectorielle) de base associé à l'arête  $a$ ,
  - $h_a$  est la circulation de  $\mathbf{h}$  le long de l'arête  $a$ , c'est-à-dire

$$h_a = \int_a \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l} \quad , \quad a \in A . \quad (2)$$

Les fonctions de base d'arête  $s_a$ ,  $a \in A$ , sont linéairement indépendantes si elles couvrent tout l'espace  $S^1(\Omega)$ . Elles sont en nombre égal à la dimension de  $S^1(\Omega)$ , donnée par le nombre d'arêtes de  $\Omega$ . Par contre, ces fonctions sont trop riches pour ne couvrir qu'un sous-espace de  $S^1(\Omega)$ , de dimension inférieure. Elles sont dans ce cas linéairement dépendantes. La construction d'une nouvelle base doit être réalisée et nous allons voir à quel point les propriétés des espaces d'éléments finis introduits facilitent cette construction.

Notons qu'une **condition à la limite**, essentielle, sur une portion  $\Gamma_h$  de la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$ , du type

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{h} \big|_{\Gamma_h} = 0 ,$$

définit un sous-espace de  $S^1(\Omega)$  dont les fonctions de base ne sont plus associées qu'aux arêtes qui ne sont pas situées sur  $\Gamma_h$ . Nous considérerons souvent ces conditions aux limites comme étant implicites et nous continuerons à écrire le sous-espace défini par  $S^1(\Omega)$ .

Notre étude va porter sur des sous-espaces de  $S^1(\Omega)$  couramment rencontrés. Il s'agit de noyaux, total ou réduit, de l'opérateur rotationnel, ainsi que de sous-espaces "jaugés", c'est-à-dire dans lesquels une condition de jauge est définie.

## 4.1 Noyaux de l'opérateur rotationnel

Nous pouvons être amenés à caractériser le **noyau de l'opérateur rotationnel** relatif à  $\Omega$  ou à un sous-domaine  $\Omega_c^C$  de  $\Omega$  — dont le complémentaire dans  $\Omega$  est  $\Omega_c$  —, c'est-à-dire

$$\ker(\text{rot}, \Omega) = \{ \mathbf{h} \in S^1(\Omega) ; \text{rot } \mathbf{h} = 0 \} , \quad (3)$$

$$\ker_r(\text{rot}, \Omega, \Omega_c^C) = \{ \mathbf{h} \in S^1(\Omega) ; \text{rot } \mathbf{h} = 0 \text{ dans } \Omega_c^C \} . \quad (4)$$

Nous parlons de **noyau** ( $\ker$ ) et de **noyau réduit** ( $\ker_r$ ). Ceux-ci vérifient les inclusions

$$\ker_r(\text{rot}, \Omega, \Omega_c^C) \subset \ker(\text{rot}, \Omega) \subset \text{dom}(\text{rot}) .$$

En particulier, nous avons l'égalité

$$\ker_r(\text{rot}, \Omega, \Omega_c^C) = \ker(\text{rot}, \Omega) \quad \text{si } \Omega_c^C = \Omega .$$

Les développements qui suivent vont conduire à la détermination d'une base de l'espace  $H = \ker_r(\text{rot}, \Omega, \Omega_c^C)$ . Une base de  $\ker(\text{rot}, \Omega)$  peut en être déduite si le domaine  $\Omega_c^C$  est étendu au domaine global  $\Omega$ . Notons que par l'équation d'Ampère,  $\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j}$ , de tels noyaux sont définis dans les régions non conductrices, où  $\mathbf{j} = 0$ .

### 4.1.1 Cas des domaines simplement connexes

Par les propriétés de l'espace  $H = \ker_r(\text{rot}, \Omega, \Omega_c^C)$ , les coefficients  $h_a$ ,  $a \in A$ , dans l'expression (1), ne sont pas tous indépendants. En effet, l'équation  $\text{rot } \mathbf{h} = 0$  dans le domaine **simplement connexe**  $\Omega_c^C$  entraîne que la circulation de  $\mathbf{h}$  le long d'un contour quelconque contenu dans  $\Omega_c^C$  est nulle, et donc que la somme des coefficients  $h_a$  associés aux arêtes d'un tel contour est nulle. Il y a donc des **contraintes** globales sur les coefficients  $h_a$ ,  $a \in A$ , et il faut exprimer  $\mathbf{h}$  d'une autre façon pour faire apparaître les fonctions de base de l'espace  $H$ . Pour cela, classons les arêtes du domaine global  $\Omega$  en deux sous-ensembles complémentaires :

- $A_c$ , qui comprend les arêtes internes au domaine  $\Omega_c$ ,
- $A_c^C$ , qui comprend les arêtes internes au domaine  $\Omega_c^C$  ainsi que les arêtes situées sur sa frontière  $\partial\Omega_c^C$ .

Définissons également deux sous-ensembles complémentaires de noeuds :

- $N_c$ , qui est l'ensemble des noeuds internes au domaine  $\Omega_c$ ,
- $N_c^C$ , qui est l'ensemble des noeuds de  $\Omega_c^C$  et de sa frontière  $\partial\Omega_c^C$ .

Une portion du domaine  $\Omega$  au voisinage de la frontière  $\partial\Omega_c$  est représentée ci-après (Fig. 1). Les ensembles définis y sont mis en évidence. L'expression (1) peut alors se décomposer comme suit :

$$\mathbf{h} = \sum_{k \in A_c} h_k \mathbf{s}_k + \sum_{l \in A_c^C} h_l \mathbf{s}_l . \quad (5)$$

La condition  $\text{rot } \mathbf{h} = 0$  dans  $\Omega_c^C$ , qui est simplement connexe, entraîne que le champ  $\mathbf{h}$  y dérive d'un **potentiel scalaire**  $\phi$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{h} = -\text{grad } \phi \quad \text{dans } \Omega_c^C . \quad (6)$$

Grâce à la relation (3.33), ce potentiel peut être défini dans l'espace  $S^0(\Omega_c^C)$ . Par continuité, il est également défini sur  $\partial\Omega_c$ . Par la relation (3.27), il vient alors que

$$h_l = \phi_{a_l} - \phi_{b_l} \quad (7a)$$

pour toute arête  $l_{ab} \in A_c^C$ ,  $a_l$  et  $b_l$  étant respectivement ses noeuds origine et extrémité. Notons que nous pouvons aussi écrire

$$h_l = \int_{l_{ab}} \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_{ab}} -\text{grad } \phi \cdot d\mathbf{l} = \phi_{a_l} - \phi_{b_l} . \quad (7b)$$

Ainsi, l'expression (5) devient

$$\mathbf{h} = \sum_{k \in A_c} h_k \mathbf{s}_k + \sum_{l \in A_c^C} (\phi_{a_l} - \phi_{b_l}) \mathbf{s}_l . \quad (8)$$

En regroupant les termes en  $\phi_n$  dans cette dernière expression, elle devient

$$\boxed{\mathbf{h} = \sum_{k \in A_c} h_k \mathbf{s}_k + \sum_{n \in N_c^C} \phi_n \mathbf{v}_n} , \quad (9)$$

où nous avons posé

$$\mathbf{v}_n = \sum_{nj \in A_c^C} \mathbf{s}_{nj} . \quad (10)$$

La figure 1 peut aider à comprendre cette dernière sommation. Il est suggéré, pour cela, d'y considérer les noeuds tels que  $n$  et  $n'$ , dont les potentiels associés sont  $\phi_n$  et  $\phi_{n'}$ . Grâce à la propriété (3.24) liant les éléments des espaces  $S_0$  et  $S_1$ , on peut vérifier que l'expression (10) de  $\mathbf{v}_n$  peut se simplifier pour devenir

$$\mathbf{v}_n = -\text{grad } p_n \quad \text{dans } \Omega_c^C , \quad (11)$$

où  $p_n$  est la fonction de base nodale associée au noeud  $n$  ( $p_n = s_n$ ). Cela ne peut effectivement être le cas que si toutes les arêtes incidentes au noeud  $n$  sont impliquées dans la sommation (10). C'est ce que permettent tous les noeuds de  $N_c^C$  lorsque  $\mathbf{v}_n$  est évaluée dans  $\Omega_c^C$ . Par contre, il n'en est pas de même des noeuds de  $N_c^C$  situés sur  $\partial\Omega_c$  lorsque  $\mathbf{v}_n$  est évaluée dans  $\Omega_c$ .

Dans le cas où le domaine  $\Omega_c^C$  est **simplement connexe**, nous avons ainsi construit une **base** de l'espace  $H$ . Celle-ci est constituée des fonctions linéairement indépendantes  $\mathbf{s}_k$ ,  $k \in A_c$ , et  $\mathbf{v}_n$ ,  $n \in N_c^C$ , qui apparaissent dans l'expression (9).

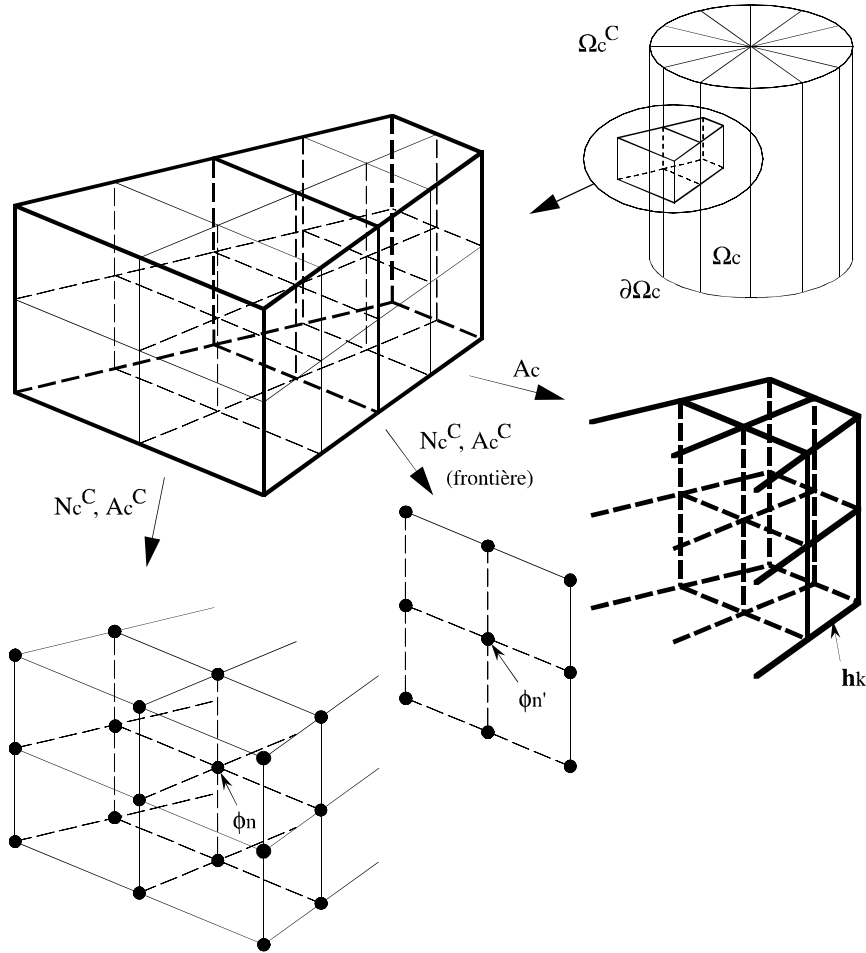


Fig. 1. Voisinage de la frontière  $\partial\Omega_c$ .

#### 4.1.2 Cas des domaines multiplement connexes

Un domaine  $\Omega_c^C$  **multiplement connexe** peut être rendu simplement connexe par l'introduction de **coupures**. Il devient alors possible d'y définir, comme précédemment, un potentiel scalaire duquel le champ  $\mathbf{h}$  peut dériver, et d'établir l'expression (9). Cependant, celle-ci ne fait pas encore apparaître explicitement une base pour les éléments de  $H$ . Il nous faut en effet expliciter les **contraintes** relatives aux coupures. Dans ce but, considérons l'ensemble  $C$  des coupures  $\Gamma_{ec_i}$ ,  $\forall i \in C$ , du domaine  $\Omega_c^C$ , et appelons  $N_{ec_i}$  l'ensemble des noeuds de  $\Gamma_{ec_i}$ . Nous pouvons décomposer le potentiel  $\phi$  en **deux parties**,

$$\phi = \phi^{\text{cont}} + \phi^{\text{disc}} , \tag{12}$$

dont l'une,  $\phi^{\text{cont}}$ , est **continue** dans le domaine  $\Omega_c^C$  originel, c'est-à-dire multiplement connexe, et l'autre,  $\phi^{\text{disc}}$ , est **discontinue** au travers des coupures qui ont rendu  $\Omega_c^C$  simplement connexe. En effet, le potentiel  $\phi$  subit de telles **discontinuités** qui, en particulier, sont **constantes** et caractéristiques de la forme du champ  $\mathbf{h}$  dans le domaine complémentaire de  $\Omega_c^C$ , c'est-à-dire dans  $\Omega_c$ . Elles sont ainsi reprises par  $\phi^{\text{disc}}$  et peuvent être mises en évidence en écrivant

$$\phi^{\text{disc}} = \sum_{i \in C} I_i q_i , \tag{13}$$

où  $I_i$  est la valeur de la discontinuité associée à la coupure  $\Gamma_{ec_i}$ , et  $q_i$  est une fonction définie dans  $\Omega_c^C$  qui subit une discontinuité unitaire au travers de la coupure  $\Gamma_{ec_i}$ . Notons qu'une telle fonction  $q_i$  ne dépend que de la topologie du domaine  $\Omega_c^C$ .



Construisons une fonction  $q_i$  ayant les propriétés définies. Nous pouvons fixer la valeur de  $q_i$  à 1 en tout point d'un côté de la coupure, appelé côté '+', et à 0 de l'autre côté, appelé côté '-'. Nous pouvons ensuite choisir de réaliser la transition de  $q_i$ , entre ces deux valeurs, sur la couche d'éléments géométriques de  $\Omega_c^C$  adjacents au côté '+' de la coupure. La fonction  $q_i$  s'annulera donc au travers des facettes qui permettent de quitter cette **couche de transition**.

Si nous appelons  $\phi^+$  et  $\phi^-$  les **traces** de  $\phi$  sur les côtés '+' et '-' des coupures, nous avons pour  $\Gamma_{eci}$ ,

$$\phi^+ - \phi^- = \phi \Big|_{\Gamma_{eci}^+} - \phi \Big|_{\Gamma_{eci}^-} = [\phi]_{\Gamma_{eci}} = I_i, \quad (14)$$

avec, conformément à la forme donnée à  $q_i$ ,

$$\phi^+ = \phi_{cont} + I_i, \quad \phi^- = \phi_{cont}. \quad (15-16)$$

Une coupe, dans une structure tridimensionnelle présentant une coupure, est représentée ci-après (Fig. 2) et fait apparaître les différents éléments qui viennent d'être définis. Une portion du domaine  $\Omega$ , au voisinage d'une coupure et de la frontière  $\partial\Omega_c$ , est également représentée ci-après (Fig. 3) et met en évidence les ensembles de noeuds et d'arêtes définis et à définir, ainsi que la couche de transition relative à la coupure.

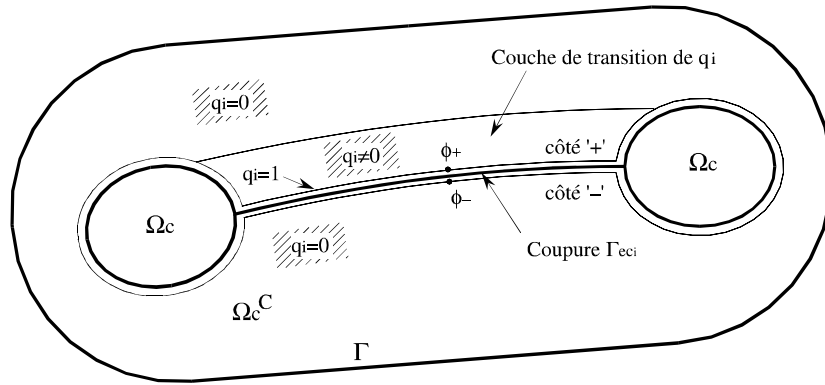


Fig. 2. Coupure, fonction  $q_i$ , traces du potentiel.

En termes de valeurs nodales, nous pouvons remarquer que les discontinuités  $I_i$ ,  $\forall i \in C$ , n'accompagnent que les potentiels des noeuds des côtés '+', et donc que  $\phi_n$  est équivalent à  $\phi_n^{cont}$  pour tout autre noeud  $n$ . Ainsi,

$$\phi_n^+ = \phi_n^{cont} + I_i, \quad \forall n \in N_{eci}, \quad \forall i \in C,$$

$$\phi_n^- = \phi_n^{cont}, \quad \forall n \in N_{ec},$$

$$\phi_n = \phi_n^{cont}, \quad \forall n \in N_c \setminus N_{ec}.$$

L'expression (9) devient alors

$$\mathbf{h} = \sum_{k \in A_c} h_k \mathbf{s}_k + \sum_{n \in N_c^C} \phi_n^{cont} \mathbf{v}_n + \sum_{i \in C} I_i \mathbf{c}_i, \quad (17)$$

où la fonction  $\mathbf{c}_i$  est définie comme suit pour la coupure  $\Gamma_{eci}$ . Son support est composé de la couche, dite de transition, des éléments géométriques de  $\Omega_c^C$  qui sont adjacents au côté '+' de la coupure  $\Gamma_{eci}$ , ainsi que des éléments géométriques de  $\Omega_c$  qui touchent cette couche par une arête de surface issue du bord  $\partial\Gamma_{eci}$  de la coupure. En fait, cette fonction résulte de la sommation de fonctions, appelées  $\mathbf{v}_n^+$ , associées à tous les noeuds de  $N_{eci}$ ,

$$\mathbf{c}_i = \sum_{n \in N_{eci}} \mathbf{v}_n^+. \quad (18)$$

La figure 3, déjà introduite, peut aider à comprendre cette expression ; il est suggéré d'y observer particulièrement les noeuds  $n$  et  $n'$  situés du côté '+' de la coupure et dont les traces des potentiels associés  $y$  sont  $\phi^+_n$  et  $\phi^-_n$ .

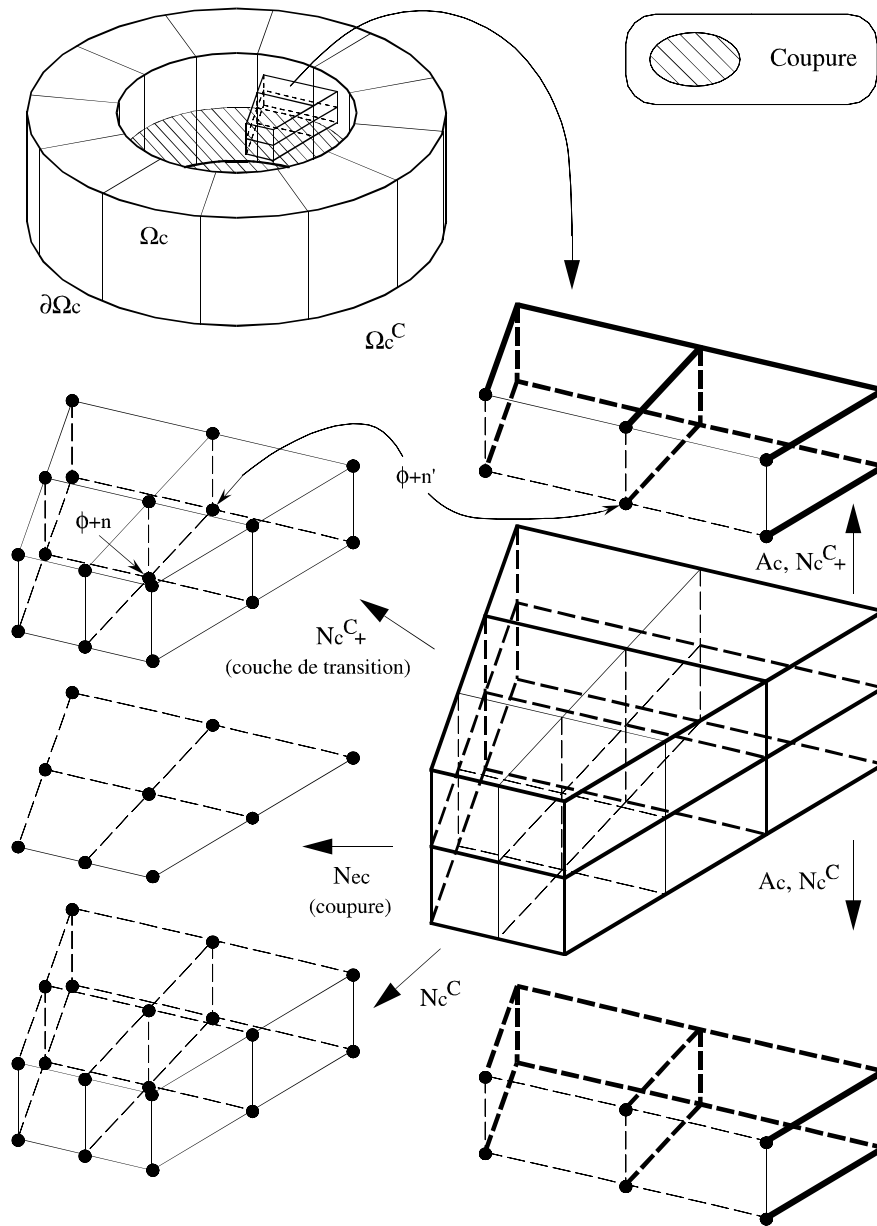


Fig. 3. Voisinage d'une coupure et de la frontière  $\partial\Omega_c$ .

Dans la couche de  $\Omega_c^C$ , il est aisé de voir que

$$\mathbf{v}^+_n = \mathbf{v}_n = -\text{grad } p_n \quad (\text{dans } \Omega_c^C); \quad (19)$$

c'est le support défini qui a permis de faire intervenir le  $\phi^+_n$  uniquement du côté '+'. Dans les éléments de  $\Omega_c$ , l'expression de  $\mathbf{v}^+_n$  est moins immédiate :

$$\mathbf{v}^+_n = \sum_{\substack{n_j \in A_c^C \\ \text{avec } j \in N_c^{C+}, j \notin N_{ec_i}}} \mathbf{s}_{nj} \quad (\text{dans } \Omega_c), \quad (20)$$

où  $N_c^{C+}$  est l'ensemble des noeuds de la couche de transition. Elle résulte du fait que seules les arêtes en surface issues du noeud  $n$  et situées du côté '+' doivent être considérées pour

“introduire” la contribution de la discontinuité  $I_i$  dans  $\Omega_c$ . Ce  $\mathbf{v}_n^+$  n'est plus qu'une partie réduite du  $\mathbf{v}_n$  exprimé par (10).

Grâce aux propriétés liant les espaces  $S_0$  et  $S_1$ , la fonction  $\mathbf{c}_i$  peut aussi s'exprimer par

$$\mathbf{c}_i = \sum_{nj \in A_c^C} \mathbf{s}_{nj} \quad , \quad (21)$$

avec  $n \in N_{ec_i}$ ,  $j \in N_c^C$ ,  $j \notin N_{ec_i}$

partout dans son domaine de définition. Les arêtes impliquées dans cette sommation sont représentées sur la figure ci-dessous (Fig. 4), où est schématisée la portion de couche de transition de la figure 3.

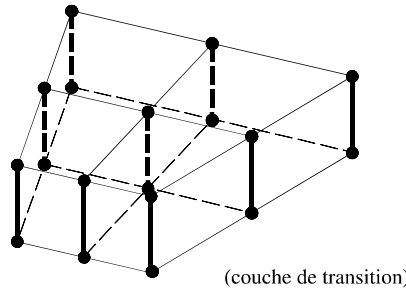


Fig. 4. Arêtes — en traits épais — de la couche de transition qui contribuent à la fonction  $\mathbf{c}_i$ .

La **base de l'espace H** apparaît explicitement dans l'expression (17). Elle est constituée des fonctions de base d'arête  $\mathbf{s}_k$  des arêtes de  $A_c$ , des fonctions de base nodales  $\mathbf{v}_n$  des noeuds de  $N_c^C$ , et des fonctions de base  $\mathbf{c}_i$  des coupures de  $C$ .

Dans la suite, nous nous permettrons d'utiliser la notation  $\phi$  à la place de  $\phi^{\text{cont}}$ . La discontinuité du potentiel scalaire a en effet été extraite du potentiel pour apparaître explicitement dans les expressions ; les potentiels que nous considérerons seront donc tous continus.

### 4.2 Sous-espaces jaugés

Nous pouvons être amenés à définir un **potentiel vecteur a**, duquel un champ **b** peut dériver selon la relation

$$\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a} \quad , \quad (22)$$

avec  $\mathbf{a} \in S^1(\Omega)$  et  $\mathbf{b} \in S^2(\Omega)$ , afin d'assurer l'annulation de la divergence de ce champ **b**. La relation (3.34) justifie une telle définition. Les champs **a** et **b** peuvent s'exprimer, dans les espaces définis, sous les formes (3.14) et (3.15), c'est-à-dire

$$\mathbf{a} = \sum_{a \in A} a_a \mathbf{s}_a \quad , \quad \mathbf{a} \in S^1(\Omega) \quad , \quad \mathbf{b} = \sum_{f \in F} b_f \mathbf{s}_f \quad , \quad \mathbf{b} \in S^2(\Omega) \quad , \quad (23-24)$$

où  $a_a$  est la circulation de **a** le long de l'arête a (3.18), et  $b_f$  est le flux de **b** à travers la facette f (3.19).

Notons que le champ **b** appartient en fait à un sous-espace de  $S^2(\Omega)$  qui est dans le noyau de la divergence. Il existe alors des relations entre les composantes  $b_f$ ,  $f \in F$ . En effet, la somme des composantes  $b_f$  relatives à tout groupe de facettes constituant une surface fermée est nulle du fait qu'elle représente le flux du champ **b** à travers cette surface. La relation (3.31) permet de justifier cette propriété, au niveau discret. Toutes les relations de ce type sont en réalité implicitement vérifiées si le champ **b** est défini par l'intermédiaire d'un potentiel vecteur, tel que **a**, c'est-à-dire sous la forme (3.29). Le potentiel vecteur magnétique, modifié

ou non, ainsi que le potentiel vecteur électrique, sont des exemples d'application de potentiel vecteur (Chapitre I). En particulier, c'est aussi le cas pour un champ source généralisé,  $\mathbf{h}_s$ , qui doit vérifier  $\text{rot } \mathbf{h}_s = \mathbf{j}$ , où  $\mathbf{j}$  est un champ connu à divergence nulle (Section I.3.1.2).

Nous savons que de tels potentiels ne sont pas uniques et que, pour assurer leur unicité, une condition de **jauge** doit être imposée. Une jauge, qui a déjà été introduite au chapitre I, définie par (I.3.24), va se révéler être naturelle dans l'espace des éléments d'arête,  $S^1(\Omega)$ . Il s'agit de la condition

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (25)$$

où  $\mathbf{w}$  est un champ de vecteurs dont les lignes de champ ne sont pas fermées et sont telles qu'elles peuvent relier toute paire de points quelconque du domaine d'étude (Albanese & Rubinacci, 1990a). Cette condition est définie au niveau continu et nous allons voir à quoi elle peut correspondre au niveau discret.

#### 4.2.1 Jauge dans le domaine global

Par la relation (3.29), appliquée à  $\mathbf{a} \in S^1(\Omega)$  et  $\mathbf{b} \in S^2(\Omega)$ , et avec les notations définies dans la section correspondante, nous avons

$$b_f = \sum_{a \in A} i(a, f) a_a, \quad f \in F, \quad (26)$$

ou, sous forme matricielle,

$$\{\mathbf{b}_f\} = \mathbf{R}_{FA} \{\mathbf{a}_a\}, \quad (27)$$

où  $\{\mathbf{b}_f\}$  est le vecteur des composantes de  $\mathbf{b}$  dans  $S^2(\Omega)$  et  $\{\mathbf{a}_a\}$  est le vecteur des composantes de  $\mathbf{a}$  dans  $S^1(\Omega)$ . La matrice  $\mathbf{R}_{FA}$  est la matrice d'incidence facette - arête relative au maillage du domaine global (3.22). Ses dimensions sont  $\#F \times \#A$  et son rang est égal à  $\#A - \#N + 1$ . Notons que  $\#F < \#A$ .

La relation (27) traduit bien, au niveau discret, la non-unicité du potentiel vecteur  $\mathbf{a}$  associé à un champ  $\mathbf{b}$  qui, lui, doit être unique. Le rang de la matrice  $\mathbf{R}_{FA}$  est en effet égal à  $\#A - \#N + 1$ , ce qui donne la possibilité de fixer arbitrairement  $\#N - 1$  composantes de  $\mathbf{a}$  dans  $S^1(\Omega)$ , à condition toutefois que ces composantes soient bien choisies.

Afin de nous guider dans ce choix, introduisons la notion d'arbre, issue de la théorie des graphes (Boite & Neiryck, 1976). Un **arbre**, construit sur les arêtes d'un maillage d'un domaine connexe, est un ensemble d'arêtes qui relient tous les noeuds du maillage entre eux sans former de chemin fermé (Fig. 5). Il existe dans un arbre un seul parcours entre toute paire de noeuds. Le nombre d'arêtes d'un arbre est donc égal à  $\#N - 1$  ou, plus généralement,  $\#N - p$ , pour un domaine à  $p$  composantes connexes. Les arêtes du maillage qui ne sont pas dans l'arbre constituent le **co-arbre** associé. Elles sont en nombre égal à  $\#A - \#N + 1$ .

On peut montrer que les arêtes d'un co-arbre donnent lieu à une sous-matrice carrée, dans la matrice  $\mathbf{R}_{FA}$ , qui est régulière (Boite & Neiryck, 1976). De plus, il s'agit de remarquer que l'ordre de cette sous-matrice, égal au nombre d'arêtes du co-arbre, est aussi égal au rang de  $\mathbf{R}_{FA}$ . Les facettes relatives aux lignes de cette sous-matrice sont qualifiées d'indépendantes ; il leur correspond des composantes  $b_f$  indépendantes. Aux autres facettes sont associées des composantes  $b_f$  dépendantes des précédentes, par la condition  $\text{div } \mathbf{b} = 0$  au niveau discret.

Par conséquent, les composantes du potentiel vecteur  $\mathbf{a}$  qui peuvent être fixées a priori sont associées aux arêtes d'un arbre. Nous pouvons décider d'annuler ces composantes et la condition ainsi définie constitue une jauge. On remarque alors l'analogie qui existe entre cette jauge et la jauge (25) : le champ de vecteurs  $\mathbf{w}$ , défini au niveau continu, a une direction qui peut être identifiée, au niveau discret, à celle des arêtes d'un arbre.

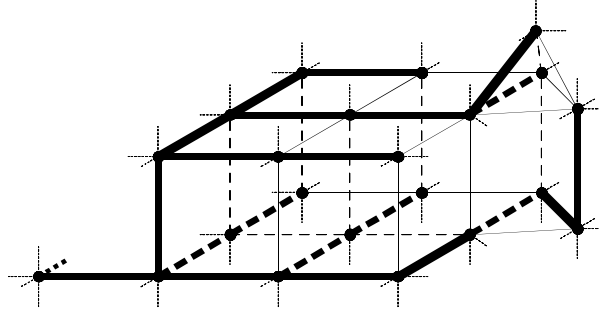


Fig. 5. Arbre et co-arbre sur une portion du maillage  
(les arêtes de l'arbre apparaissent en traits épais, celles du co-arbre en traits fins)

Ainsi, classons les arêtes du domaine global  $\Omega$  en deux sous-ensembles complémentaires dans  $A$  :

- $\hat{A}$ , qui comprend les arêtes d'un **arbre** construit dans le domaine  $\Omega$ , avec  $\#\hat{A} = \#N - 1$ ,
- $\check{A}$ , qui comprend les arêtes du **co-arbre** associé à l'arbre défini, i.e.  $\check{A} = A \setminus \hat{A}$ , avec  $\#\check{A} = \#A - \#\hat{A} = \#A - \#N + 1$ .

Un **sous-espace jaugé** de  $S^1(\Omega)$ , noté  $\check{S}^1(\Omega)$ , peut alors être caractérisé par

$$\check{S}^1(\Omega) = \{ \mathbf{a} \in S^1(\Omega) ; a_j = 0, \forall j \in \hat{A} \} . \tag{28}$$

Sa dimension est donc égale au nombre d'arêtes du co-arbre, c'est-à-dire

$$\dim \check{S}^1(\Omega) = \#\check{A} = \#A - \#N + 1 , \tag{29}$$

et les fonctions  $s_i$ ,  $i \in \check{A}$ , associées aux arêtes du co-arbre, constituent une base pour cet espace. Les composantes du potentiel vecteur  $\mathbf{a}$  dans cette base, ou degrés de liberté, sont donc associées aux arêtes du co-arbre. Le potentiel vecteur  $\mathbf{a}$  peut ainsi s'exprimer sous la forme

$$\mathbf{a} = \sum_{i \in \check{A}} a_i s_i , \quad \mathbf{a} \in \check{S}^1(\Omega) . \tag{30}$$

Chaque composante  $a_i$ ,  $i \in \check{A}$ , relative à une arête du co-arbre, représente le flux de  $\text{rot } \mathbf{a}$  au travers d'un ensemble de facettes qui s'appuient sur le contour, unique, constitué de l'arête en question et des arêtes de l'arbre qui relient ses deux extrémités. Le signe de ce flux dépend de l'orientation de l'arête considérée. L'espace  $\check{S}^1(\Omega)$  défini est en correspondance biunivoque avec son image par le rotationnel,  $\text{rot } \check{S}^1(\Omega)$ , ce qui n'était pas le cas de  $S^1(\Omega)$  et  $\text{rot } S^1(\Omega)$ .

**Prise en compte de conditions aux limites**

Nous n'avons jusqu'ici pas tenu compte des **conditions aux limites** qui peuvent être définies sur la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$ . Considérons maintenant une portion  $\Gamma_e$  de  $\Gamma$  où une condition à la limite homogène relative à la composante normale du champ  $\mathbf{b}$  est fixée, c'est-à-dire

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} |_{\Gamma_e} = 0 . \tag{31}$$

La généralisation à des conditions non homogènes ne doit pas poser de problème. Nous nous limitons cependant à considérer les conditions aux limites, essentielles, que nous serons amenés à utiliser dans la suite. La condition (31) est assurée si nous imposons une condition, sur la composante tangentielle de  $\mathbf{a}$ , telle que

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{a} |_{\Gamma_e} = 0 . \tag{32}$$

Nous pourrions alors penser qu'il suffit d'annuler les composantes  $a_i$ ,  $i \in A$ , relatives aux arêtes qui sont sur  $\Gamma_e$ . Cela n'est en réalité applicable que si toutes les facettes situées sur  $\Gamma_e$

sont indépendantes. Un moyen d'assurer cette condition est de construire l'arbre sur  $\Gamma_e$  avant de l'étendre au domaine restant. Un tel **arbre** est dit **complet** sur  $\Gamma_e$  (Fig. 6). Notons que si la surface  $\Gamma_e$  est non connexe, il s'agit de définir un arbre complet sur chacune de ses parties connexes.

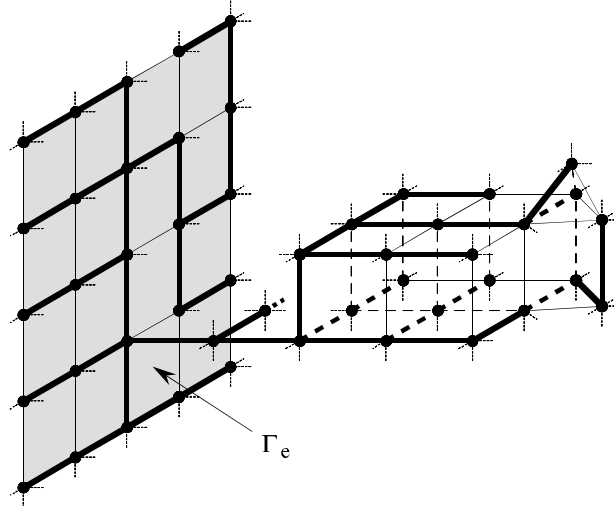


Fig. 6. Arbre complet sur une surface  $\Gamma_e$ .

Si la surface  $\Gamma_e$  est **simplement connexe**, nous sommes alors amenés à annuler toutes les composantes  $a_i, i \in A$ , relatives à  $\Gamma_e$  : celles qui sont relatives aux arêtes de l'arbre, par (28), et celles qui sont relatives aux arêtes du co-arbre sur  $\Gamma_e$ , par (32). Nous pouvons remarquer que nous imposons ainsi un nombre de contraintes sur les éléments de  $\tilde{S}^1(\Omega)$  égal au nombre de facettes de  $\Gamma_e$ . Par contre, si la surface  $\Gamma_e$  est **multiplement connexe** (Fig. 7), il doit subsister des degrés de liberté associés à certaines arêtes du co-arbre sur  $\Gamma_e$ .

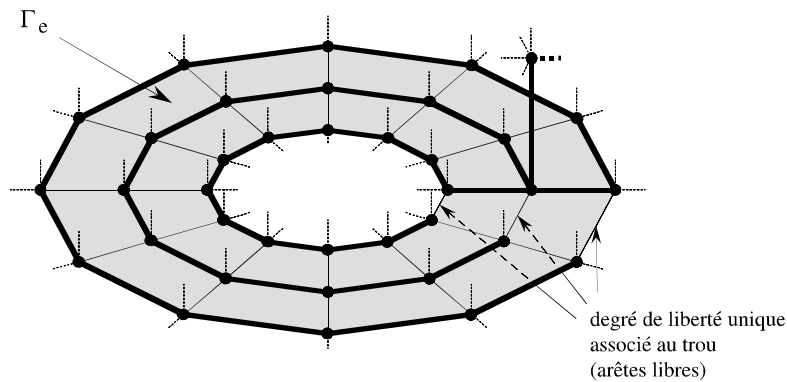


Fig. 7. Arbre complet sur une surface  $\Gamma_e$  multiplement connexe et mise en évidence des arêtes libres sur  $\Gamma_e$ .

Le nombre de ces degrés de liberté est égal au nombre de trous dans  $\Gamma_e$  et chaque fonction de base associée est une somme de fonctions  $s_i, i \in \tilde{A}$ , relatives à des arêtes bien déterminées, dites libres, du co-arbre sur  $\Gamma_e$ . Ces degrés de liberté sont directement liés au flux de  $\text{rot } \mathbf{a}$  au travers de chacun des trous.

Nous utilisons encore la notation  $\tilde{A}$  pour représenter l'ensemble des arêtes du co-arbre qui restent associées à des degrés de liberté, après la prise en compte des conditions aux limites.

### 4.2.2 Jauge dans un sous-domaine

Une condition de jauge qui n'est définie que dans un sous-domaine  $\Omega_c^C$  de  $\Omega$  est appelée **jauge réduite**. Notons que  $\Omega_c^C$  est défini par l'intermédiaire d'un domaine  $\Omega_c$  et est son complémentaire dans  $\Omega$ . Une telle jauge est définie lorsque d'autres conditions permettent d'assurer l'unicité du potentiel vecteur  $\mathbf{a}$  dans  $\Omega_c$ . Les conditions définies précédemment pour une jauge dans le domaine global sont applicables à condition, toutefois, de les restreindre à  $\Omega_c^C$  et de définir des conditions spécifiques sur la frontière commune à  $\Omega_c^C$  et  $\Omega_c$ , qui est en général un portion de  $\partial\Omega_c$ , que nous notons  $\Gamma_c$ .

Considérons que le potentiel vecteur  $\mathbf{a}$  est défini de façon unique dans  $\Omega_c$ . Par continuité, il est aussi défini sur  $\partial\Omega_c$  et donc, sur  $\Gamma_c$ , mais seule sa composante tangentielle est continue au passage de cette interface. Il n'y a alors pas de condition à imposer sur les composantes  $a_i$ ,  $i \in A$ , relatives aux arêtes de  $\Gamma_c$  et il s'agit de ne pas étendre l'arbre à cette surface. Nous notons :

- $\widehat{A}_J$ , l'ensemble des arêtes de l'arbre dans  $\Omega_c^C$ ,
- $\widetilde{A}_J$ , le complémentaire de  $\widehat{A}_J$  dans  $A$ , i.e.  $\widetilde{A}_J = A \setminus \widehat{A}_J$ .

L'espace **jauge réduit** défini est noté  $\widetilde{S}^1(\Omega, \Omega_c^C)$ . Il vérifie les inclusions

$$\widetilde{S}^1(\Omega) \subset \widetilde{S}^1(\Omega, \Omega_c^C) \subset S^1(\Omega) \quad (33)$$

et admet la caractérisation suivante :

$$\widetilde{S}^1(\Omega, \Omega_c^C) = \{ \mathbf{a} \in S^1(\Omega) ; a_j = 0, \forall j \in \widehat{A}_J \}. \quad (34)$$

Le potentiel vecteur  $\mathbf{a}$  peut ainsi s'exprimer sous la forme

$$\mathbf{a} = \sum_{i \in \widetilde{A}_J} a_i \mathbf{s}_i, \quad \mathbf{a} \in \widetilde{S}^1(\Omega, \Omega_c^C). \quad (35)$$

# Annexe

## 1. Transformations géométriques

### 1.1 Paramétrisation de l'élément réel

Considérons un **élément volumique**  $K$ , dit **réel**, et notons  $(x, y, z)$  les coordonnées d'un point quelconque  $\mathbf{x}$  dans cet élément. Une certaine paramétrisation de cet élément, i.e.

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u}), \quad (1-2)$$

où  $\mathbf{u} = (u, v, w) \in K_r$ , permet de faire correspondre de façon biunivoque, tout point  $(x, y, z)$  de  $K$  avec un point  $(u, v, w)$  de  $K_r$ , alors appelé **élément de référence** (Fig. 1). La transformation inverse est notée

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (3)$$

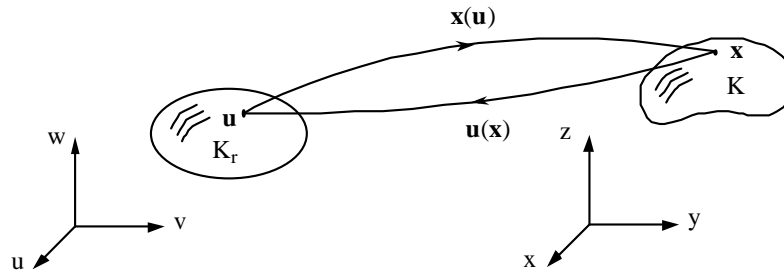


Fig. 1. Correspondance biunivoque entre  $K$  et  $K_r$ .

### 1.2 Expression des dérivées – matrice jacobienne de transformation

Les dérivées directionnelles selon les coordonnées réelles et de référence, i.e. dans  $K$  et  $K_r$ , sont reliées selon les relations matricielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} \partial_u \\ \partial_v \\ \partial_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_u y & \partial_u z \\ \partial_v x & \partial_v y & \partial_v z \\ \partial_w x & \partial_w y & \partial_w z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_x v & \partial_x w \\ \partial_y u & \partial_y v & \partial_y w \\ \partial_z u & \partial_z v & \partial_z w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_u \\ \partial_v \\ \partial_w \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_u \\ \partial_v \\ \partial_w \end{pmatrix}. \quad (5)$$

La matrice  $\mathbf{J}$  est appelée **matrice jacobienne de transformation**. Les relations (4) et (5) peuvent être écrites sous les formes respectives

$$\partial_u = \mathbf{J} \partial_x, \quad \text{avec} \quad \mathbf{J} = \partial_u \mathbf{x}, \quad (6)$$

$$\partial_x = \mathbf{J}^{-1} \partial_u, \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}^{-1} = \partial_x \mathbf{u}. \quad (7)$$



Il est intéressant de remarquer que les colonnes de  $\mathbf{J}^{-1}$  (5) sont les gradients, par rapport aux coordonnées réelles  $\mathbf{x}$ , des fonctions  $u(\mathbf{x})$ ,  $v(\mathbf{x})$  et  $w(\mathbf{x})$ , i.e.  $\text{grad}_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x})$ ,  $\text{grad}_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x})$  et  $\text{grad}_{\mathbf{x}} w(\mathbf{x})$ . Ces gradients peuvent alors être obtenus à partir des éléments de la matrice  $\mathbf{J}$ , et plus précisément à partir des lignes de  $\mathbf{J}$ , qui sont  $\partial_u \mathbf{x}^T$ ,  $\partial_v \mathbf{x}^T$  et  $\partial_w \mathbf{x}^T$  (4), et qui sont en général plus faciles à exprimer. Ainsi, nous avons

$$\text{grad}_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) = (\partial_v \mathbf{x} \wedge \partial_w \mathbf{x}) / \det \mathbf{J} , \quad (8a)$$

$$\text{grad}_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}) = (\partial_w \mathbf{x} \wedge \partial_u \mathbf{x}) / \det \mathbf{J} , \quad (8b)$$

$$\text{grad}_{\mathbf{x}} w(\mathbf{x}) = (\partial_u \mathbf{x} \wedge \partial_v \mathbf{x}) / \det \mathbf{J} , \quad (8c)$$

où  $\det \mathbf{J}$  est le déterminant de  $\mathbf{J}$ , i.e.

$$\det \mathbf{J} = \partial_u \mathbf{x} \cdot (\partial_v \mathbf{x} \wedge \partial_w \mathbf{x}) . \quad (9)$$

### 1.3 Expression des intégrales volumiques

L'intégration volumique d'une fonction  $f$  sur l'élément  $K$  peut se ramener à une intégration sur l'élément  $K_r$ , donnée par la formule suivante :

$$\int_K f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{K_r} f(\mathbf{x}(\mathbf{u})) \det \mathbf{J} d\mathbf{u} . \quad (10)$$

## 2. Éléments finis

### 2.1 Éléments isoparamétriques

Un **élément isoparamétrique** est un élément fini dont les fonctions de base nodales, qui permettent l'interpolation des champs scalaires, sont aussi utilisées pour paramétrer l'élément géométrique associé (Chari & Silvester, 1980).

Les fonctions de base sont généralement définies par morceaux, sur chacun des éléments géométriques qui remplissent le domaine étudié, et il s'agit alors d'assurer leur continuité aux interfaces entre éléments. Ainsi, il n'y aura pas de discontinuité ni des champs scalaires interpolés, ni des coordonnées après transformation des éléments de référence vers les éléments réels. De telles fonctions de base sont dites **conformes**.

Considérons un élément fini nodal  $(K, P_K, \Sigma_K)$ . Si  $N_K$  est l'ensemble des noeuds de  $K$ , de coordonnées  $\mathbf{x}_i$ ,  $i \in N$ , et si les  $p_i(\mathbf{u})$ ,  $i \in N_K$ , sont ses fonctions de base exprimées dans les coordonnées  $\mathbf{u}$  de l'élément de référence  $K_r$  associé à  $K$ , alors la paramétrisation de  $K$  (i.e.  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$ ) est donnée par

$$\mathbf{x} = \sum_{i \in N_K} \mathbf{x}_i p_i(\mathbf{u}) , \quad (1)$$

avec  $\mathbf{x} \in K$ ,  $\mathbf{u} \in K_r$  ; cet élément est isoparamétrique.

### 2.2 Éléments de référence

Nous définissons ci-après les éléments de référence qui sont associés aux trois types d'éléments géométriques considérés, c'est-à-dire aux tétraèdres, aux hexaèdres et aux prismes à base triangulaire. Des éléments finis nodaux, d'arête, de facette et de volume, sont définis sur ces éléments géométriques.

### 2.2.1 Tétraèdre de référence de type I

Le tétraèdre de référence de type I est un élément à 4 noeuds dont les coordonnées sont données sur la figure 1. Les entités géométriques associées, ainsi que leur numérotation, sont mises en évidence sur la figure 2. Les fonctions de base nodales et d'arête de cet élément sont données dans les tableaux 1 et 2. Le tableau 3 reprend la numérotation des facettes. Les matrices d'incidence sont données par (2), (3) et (4).

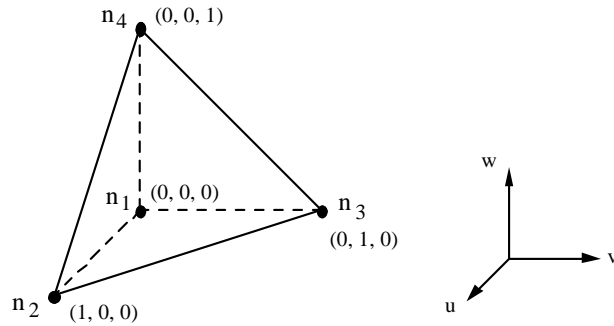
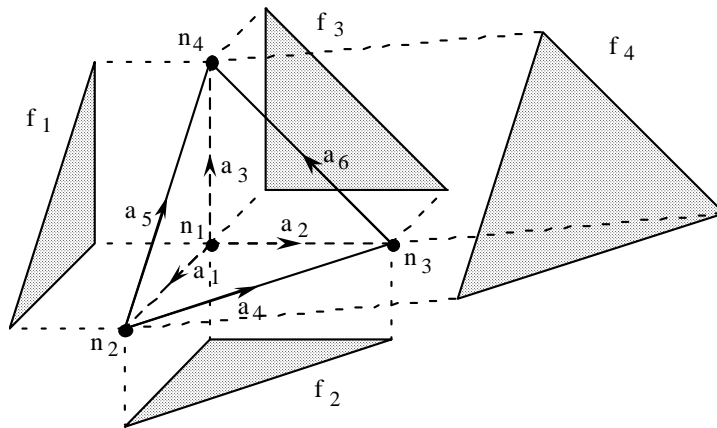


Fig. 1. Tétraèdre de référence de type I.



Entité	Noeud ( $n_i$ )	Arête ( $a_i$ )	Facette ( $f_i$ )	Volume
Nombre	4	6	4	1

Fig. 2. Entités géométriques définies sur un tétraèdre de type I.

Noeud $i \in N$	Fonction de base nodale $p_i(u, v, w) = s_i(u, v, w)$
1	$1 - u - v - w$
2	$u$
3	$v$
4	$w$

Tableau 1. Fonctions de base nodales du tétraèdre de type I.

Arête a ∈ A	a = {i, j}		s <sub>a</sub> (u), u = (u, v, w)		
	i ∈ N	j ∈ N	s <sub>a,u</sub>	s <sub>a,v</sub>	s <sub>a,w</sub>
1	1	2	1 - v - w	u	u
2	1	3	v	1 - u - w	v
3	1	4	w	w	1 - u - v
4	2	3	-v	u	0
5	2	4	-w	0	u
6	3	4	0	-w	v

Tableau 2. Numérotation des arêtes du tétraèdre de type I et fonctions de base d'arête associées (s<sub>a</sub>).

Facette f ∈ F	f = {i, j, k}		
	i ∈ N	j ∈ N	k ∈ N
1	1	2	4
2	1	3	2
3	1	4	3
4	2	3	4

Tableau 3. Numérotation des facettes du tétraèdre de type I.

Matrice d'incidence arête - noeud

Matrice d'incidence facette - arête

$$\mathbf{G}_{AN} = \begin{matrix} a \cdot \cdot n \\ \begin{array}{c|cccc} 1 & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 2 & -1 & \cdot & 1 & \cdot \\ 3 & -1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 4 & \cdot & -1 & 1 & \cdot \\ 5 & \cdot & -1 & \cdot & 1 \\ 6 & \cdot & \cdot & -1 & 1 \end{array} \end{matrix}, \quad \mathbf{R}_{FA} = \begin{matrix} f \cdot \cdot a \\ \begin{array}{c|cccccc} 1 & 1 & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot \\ 2 & -1 & 1 & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot & -1 \\ 4 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & 1 \end{array} \end{matrix} \quad (2-3)$$

Matrice d'incidence volume - facette

$$\mathbf{D}_{VF} = \begin{matrix} v \cdot \cdot f \\ \begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & (1 & 1 & 1 & 1) \end{array} \end{matrix} \quad (4)$$

### 2.2.2 Hexaèdre de référence de type I

L'hexaèdre de référence de type I est un élément à 8 noeuds dont les coordonnées sont données sur la figure 3. Les entités géométriques associées, ainsi que leur numérotation, sont mises en évidence sur la figure 4. Les fonctions de base nodales (dites trilineaires) et d'arête de cet élément sont données dans les tableaux 4 et 5. Le tableau 6 reprend la numérotation des facettes. Les matrices d'incidence sont données par (5), (6) et (7).

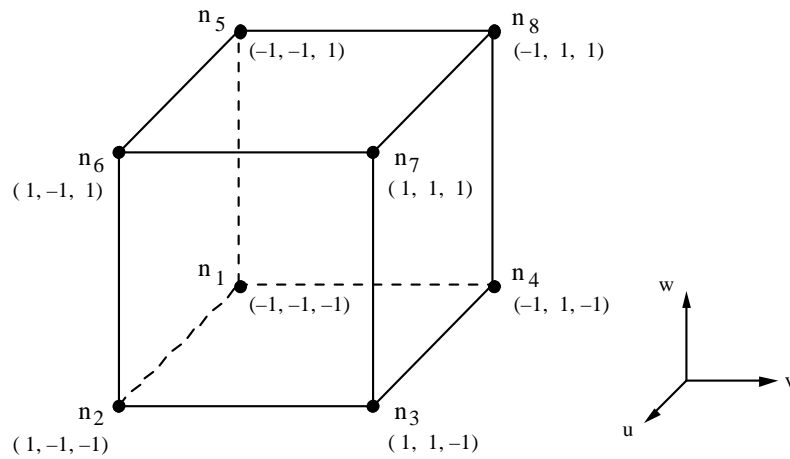
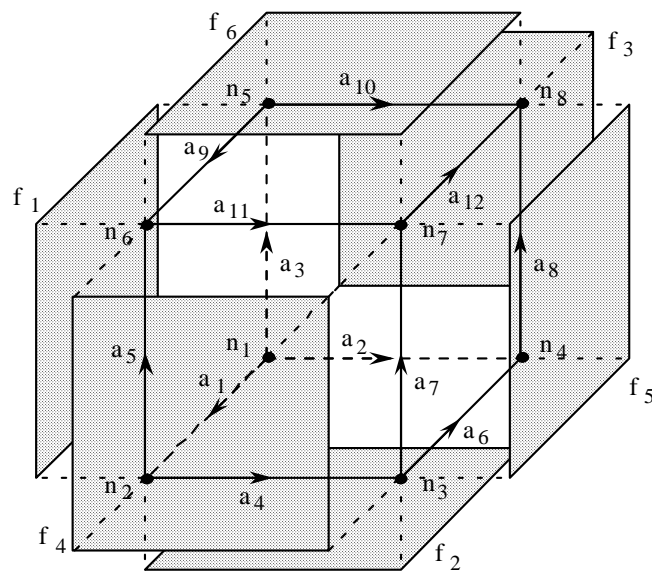


Fig. 3. Hexaèdre de référence de type I.



Entité	Noeud ( $n_i$ )	Arête ( $a_i$ )	Facette ( $f_i$ )	Volume
Nombre	8	12	6	1

Fig. 4. Entités géométriques définies sur un hexaèdre de type I.

Noeud $i \in N$	Fonction de base nodale $p_i(u, v, w) = s_i(u, v, w)$
1	$(1 - u)(1 - v)(1 - w) / 8$
2	$(1 + u)(1 - v)(1 - w) / 8$
3	$(1 + u)(1 + v)(1 - w) / 8$
4	$(1 - u)(1 + v)(1 - w) / 8$
5	$(1 - u)(1 - v)(1 + w) / 8$
6	$(1 + u)(1 - v)(1 + w) / 8$
7	$(1 + u)(1 + v)(1 + w) / 8$
8	$(1 - u)(1 + v)(1 + w) / 8$

Tableau 4. Fonctions de base nodales de l'hexaèdre de type I.

Arête $a \in A$	$a = \{i, j\}$		$s_a(\mathbf{u}), \mathbf{u} = (u, v, w)$		
	$i \in N$	$j \in N$	$s_{a,u}$	$s_{a,v}$	$s_{a,w}$
1	1	2	$(1-v)(1-w)/8$	0	0
2	1	4	0	$(1-u)(1-w)/8$	0
3	1	5	0	0	$(1-u)(1-v)/8$
4	2	3	0	$(1+u)(1-w)/8$	0
5	2	6	0	0	$(1+u)(1-v)/8$
6	3	4	$-(1+v)(1-w)/8$	0	0
7	3	7	0	0	$(1+u)(1+v)/8$
8	4	8	0	0	$(1-u)(1+v)/8$
9	5	6	$(1-v)(1+w)/8$	0	0
10	5	8	0	$(1-u)(1+w)/8$	0
11	6	7	0	$(1+u)(1+w)/8$	0
12	7	8	$-(1+v)(1+w)/8$	0	0

Tableau 5. Numérotation des arêtes de l'hexaèdre de type I et fonctions de base d'arête associées ( $s_a$ ).

Facette $f \in F$	$f = \{i, j, k, l\}$			
	$i \in N$	$j \in N$	$k \in N$	$l \in N$
1	1	2	6	5
2	1	4	3	2
3	1	5	8	4
4	2	3	7	6
5	3	4	8	7
6	5	6	7	8

Tableau 6. Numérotation des facettes de l'hexaèdre de type I.

**Matrice d'incidence arête - noeud**

$$\mathbf{G}_{AN} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \cdot & \cdot & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \left( \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 6 & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 7 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 8 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 9 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot \\ 10 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ 11 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \\ 12 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{matrix} \right) \end{matrix} \tag{5}$$

**Matrice d'incidence facette - arête**

$$\mathbf{R}_{FA} = \begin{matrix} & \begin{matrix} f \cdot a \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & . & -1 & . & 1 & . & . & . & -1 & . & . & . \\ -1 & 1 & . & -1 & . & -1 & . & . & . & . & . & . \\ . & -1 & 1 & . & . & . & . & -1 & . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & -1 & . & 1 & . & . & . & -1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 & -1 & 1 & . & . & . & -1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (6)$$

**Matrice d'incidence volume - facette**

$$\mathbf{D}_{VF} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v \cdot f \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ 1 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (7)$$

**2.2.3 Prisme à base triangulaire de référence de type I**

Le prisme à base triangulaire de référence de type I est un élément à 6 noeuds dont les coordonnées sont données sur la figure 5. Les entités géométriques associées, ainsi que leur numérotation, sont mises en évidence sur la figure 6. Les fonctions de base nodales et d'arête de cet élément sont données dans les tableaux 7 et 8. Le tableau 9 reprend la numérotation des facettes. Les matrices d'incidence sont données par (8), (9) et (10).

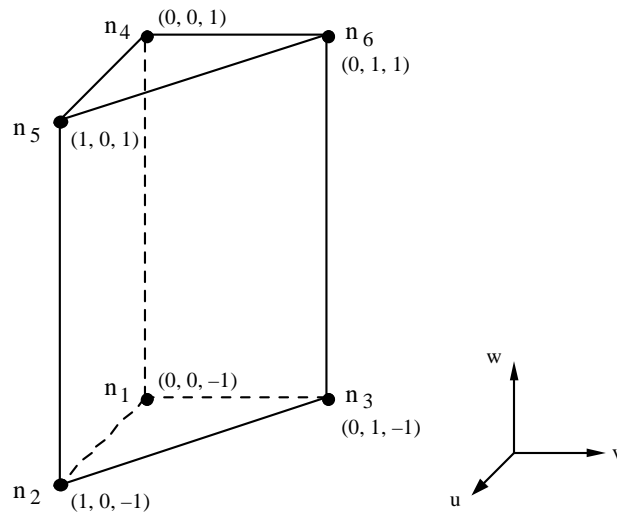
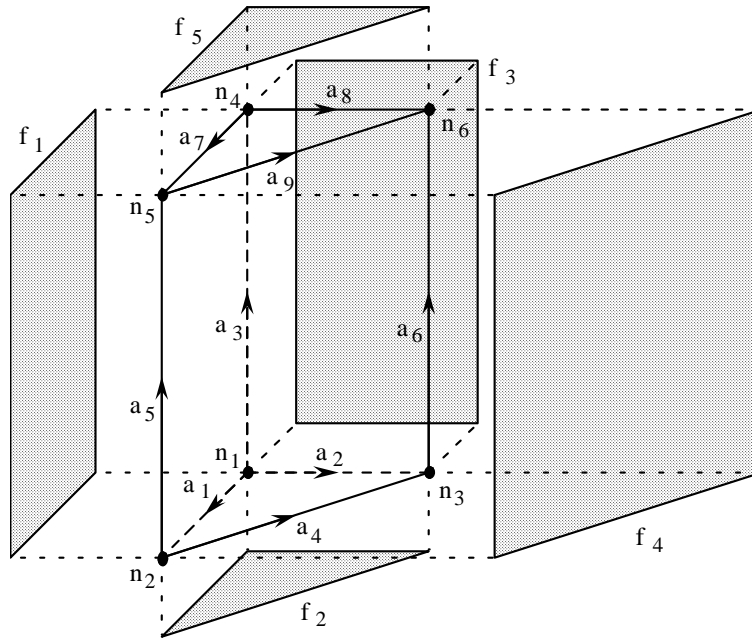


Fig. 5. Prisme à base triangulaire de référence de type I.



Entité	Noeud ( $n_i$ )	Arête ( $a_i$ )	Facette ( $f_i$ )	Volume
Nombre	6	9	5	1

Fig. 6. Entités géométriques définies sur un prisme de type I.

Noeud $i \in N$	Fonction de base nodale $p_i(u, v, w) = s_i(u, v, w)$
1	$(1 - u - v)(1 - w) / 2$
2	$u(1 - w) / 2$
3	$v(1 - w) / 2$
4	$(1 - u - v)(1 + w) / 2$
5	$u(1 + w) / 2$
6	$v(1 + w) / 2$

Tableau 7. Fonctions de base nodales du prisme de type I.

Arête $a \in A$	$a = \{i, j\}$		$s_a(\mathbf{u}), \mathbf{u} = (u, v, w)$		
	$i \in N$	$j \in N$	$s_{a,u}$	$s_{a,v}$	$s_{a,w}$
1	1	2	$(1 - v)(1 - w) / 2$	$u(1 - w) / 2$	0
2	1	3	$v(1 - w) / 2$	$(1 - u)(1 - w) / 2$	0
3	1	4	0	0	$(1 - u - v) / 2$
4	2	3	$-v(1 - w) / 2$	$u(1 - w) / 2$	0
5	2	5	0	0	$u / 2$
6	3	6	0	0	$v / 2$
7	4	5	$(1 - v)(1 + w) / 2$	$u(1 + w) / 2$	0
8	4	6	$v(1 + w) / 2$	$(1 - u)(1 + w) / 2$	0
9	5	6	$-v(1 + w) / 2$	$u(1 + w) / 2$	0

Tableau 8. Numérotation des arêtes du prisme de type I et fonctions de base d'arête associées ( $s_a$ ).

Facette $f \in F$	$f = \{i, j, k, l\}$			
	$i \in N$	$j \in N$	$k \in N$	$l \in N$
1	1	2	5	4
2	1	3	2	-
3	1	4	6	3
4	2	3	6	5
5	4	5	6	-

Tableau 9. Numérotation des facettes du prisme de type I.

**Matrice d'incidence arête - noeud**

$$\mathbf{G}_{AN} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & \begin{matrix} | & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & (-1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & (-1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & (-1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 4 & (\cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & (\cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 6 & (\cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 7 & (\cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot \\ 8 & (\cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & 1 \\ 9 & (\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1) \end{matrix} \end{matrix} \tag{8}$$

**Matrice d'incidence facette - arête**

$$\mathbf{R}_{FA} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \\ \begin{matrix} f \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & \begin{matrix} | & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & (1 & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ 2 & (-1 & 1 & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & (\cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot \\ 4 & (\cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & 1 & \cdot & \cdot & -1 \\ 5 & (\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & 1) \end{matrix} \end{matrix} \tag{9}$$

**Matrice d'incidence volume - facette**

$$\mathbf{D}_{VF} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & \begin{matrix} | & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & (1 & 1 & 1 & 1 & 1) \end{matrix} \end{matrix} \tag{10}$$



### 2.3 Fonctions de base d'arête dans les éléments réels

L'expression générale des fonctions de base d'arête pour les éléments de type I est (II.B.3.2)

$$\mathbf{s}_{a_{ij}}(\mathbf{x}) = p_j \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} \sum_{r \in N_{F,ji}} p_r(\mathbf{x}) - p_i \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} \sum_{r \in N_{F,ij}} p_r(\mathbf{x}),$$

pour une arête  $a_{ij}=\{i, j\}$  dont les noeuds origine et extrémité sont respectivement  $i$  et  $j$ ; l'indice associé à l'opérateur  $\operatorname{grad}$  indique le système de coordonnées utilisé.

Les fonctions de base étant en général exprimées dans des éléments de référence, des transformations de coordonnées sont nécessaires pour les exprimer dans les éléments réels. Plus précisément, la présence de l'opérateur gradient dans l'expression de  $\mathbf{s}_a$  va nécessiter, dans ce but, l'application de la matrice jacobienne de transformation. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} p_r(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} p_r(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_x v & \partial_x w \\ \partial_y u & \partial_y v & \partial_y w \\ \partial_z u & \partial_z v & \partial_z w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_u \\ \partial_v \\ \partial_w \end{pmatrix} p_r(\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_u \\ \partial_v \\ \partial_w \end{pmatrix} p_r(\mathbf{u}) = \mathbf{J}^{-1} \operatorname{grad}_{\mathbf{u}} p_r(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{a_{ij}}(\mathbf{x}) &= p_j \mathbf{J}^{-1} \operatorname{grad}_{\mathbf{u}} \sum_{r \in N_{F,ji}} p_r(\mathbf{u}) - p_i \mathbf{J}^{-1} \operatorname{grad}_{\mathbf{u}} \sum_{r \in N_{F,ij}} p_r(\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{J}^{-1} \left( p_j \operatorname{grad}_{\mathbf{u}} \sum_{r \in N_{F,ji}} p_r(\mathbf{u}) - p_i \operatorname{grad}_{\mathbf{u}} \sum_{r \in N_{F,ij}} p_r(\mathbf{u}) \right) \\ &= \mathbf{J}^{-1} \mathbf{s}_{a_{ij}}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Il suffit donc de prémultiplier la fonction de base d'arête exprimée dans l'élément de référence par l'inverse de la matrice jacobienne de transformation, pour obtenir la fonction de base exprimée dans l'élément réel.



# Chapitre III

## Problème de la magnétostatique

---

### Partie A

### Formulation continue

#### 1. Position du problème

Il s'agit de calculer le **champ magnétique** dans une **structure tridimensionnelle** constituée de **matériaux magnétiques**, éventuellement **saturables**, et d'**inducteurs**, sources du champ, définis par des grandeurs locales (densités de courant). Une telle configuration est schématisée ci-dessous (Fig. 1). Y sont représentés, un **domaine magnétique**  $\Omega_m$  et un **domaine inducteur**  $\Omega_s$  dans lequel la densité de courant est connue ( $\mathbf{j}$ ). Ces domaines sont plongés dans le domaine  $\Omega$ , constituant le **domaine global** d'étude ; sa surface est notée  $\Gamma$ . Notons que  $\Omega$  est défini comme regroupant le **domaine extérieur**  $\Omega_e$  (i.e.  $\Omega \setminus \{\Omega_m \cup \Omega_s\}$ ) et les différents domaines matériels. Plusieurs domaines de chacun des types définis peuvent se présenter dans une configuration, c'est-à-dire que chaque type peut être associé à un domaine non connexe.

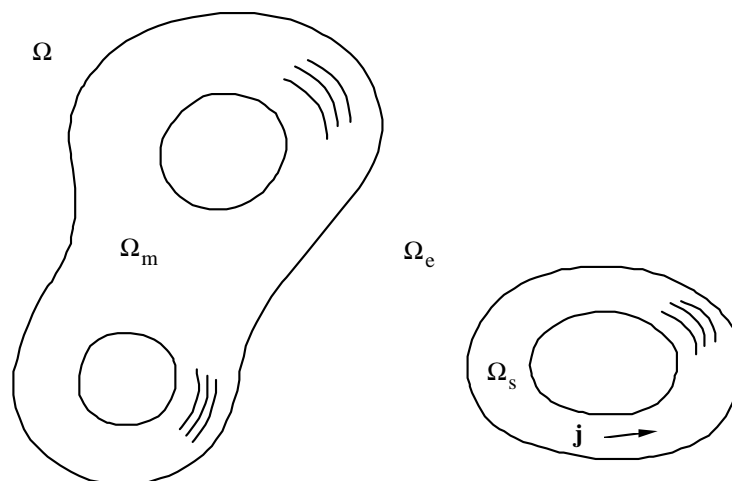


Fig. 1. Type de configuration étudiée pour le problème de la magnétostatique.

#### 2. Modèle mathématique

##### 2.1 Equations

Les équations à résoudre sont issues des équations de Maxwell pour lesquelles toute variation temporelle est éliminée ; les phénomènes magnétiques et électriques sont alors

découplés. Les équations associées aux phénomènes magnétiques constituent le modèle de la magnéto-statique et sont

$$\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{b} = 0. \tag{1-2}$$

## 2.2 Loi de comportement

Les **propriétés magnétiques** des matériaux peuvent s'exprimer grâce à la relation

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}, \tag{3}$$

où  $\mu$  est la **perméabilité magnétique**, qui peut ne pas être constante. C'est le cas lorsqu'elle est relative à des matériaux saturables, également qualifiés de non linéaires ; elle dépend alors du champ magnétique  $\mathbf{h}$ ,  $\mu = \mu(\mathbf{h})$ .

## 2.3 Conditions aux limites

A la **frontière**  $\Gamma$  du domaine global  $\Omega$ , nous considérons certaines **conditions aux limites** fréquemment rencontrées. Sur une portion de surface  $\Gamma_h$  de  $\Gamma$ , éventuellement non connexe, est définie la condition

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{h} |_{\Gamma_h} = 0. \tag{4}$$

Sur la portion de surface  $\Gamma_e$ , complémentaire de  $\Gamma_h$  dans  $\Gamma$ , de nouveau éventuellement non connexe, est définie la condition

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} |_{\Gamma_e} = 0. \tag{5}$$

De telles conditions aux limites peuvent se présenter sur des **plans de symétrie**. La condition (4) peut aussi se présenter si le domaine extérieur à  $\Omega$  a une perméabilité magnétique infinie.

## 2.4 Diagramme de Tonti

Les champs  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{b}$  peuvent être accueillis par la structure mathématique continue qui a été définie à la section II.A.3. Il s'agit de chercher  $\mathbf{h}$  dans  $F_h^1$  et  $\mathbf{b}$  dans  $F_e^2$  vérifiant  $\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j}$  et  $\text{div } \mathbf{b} = 0$ ,  $\mathbf{j}$  étant dans  $F_h^2$ . Les espaces fonctionnels définis sont appropriés à ces champs, ils constituent les domaines de définition des opérateurs qui peuvent leur être appliqués. De plus, ils prennent en compte les conditions aux limites (4-5). Notons que les contraintes physiques d'énergie finie sont également assurées.

Les équations, les lois de comportement et les conditions aux limites du problème de la magnéto-statique peuvent alors se trouver rassemblées dans le diagramme de Tonti ci-après (Fig. 1).

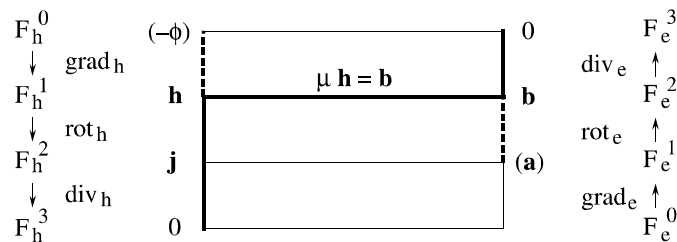


Fig. 1. Diagramme de Tonti du problème de la magnéto-statique.

Les champs  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{b}$  sont disposés aux niveaux appropriés du diagramme et les équations qui les relient, ainsi que la loi de comportement magnétique, sont alors mises en évidence. Les

équations sont à lire “verticalement” des deux côtés du diagramme, elles peuvent être considérées comme ayant un caractère purement géométrique. La loi de comportement doit, quant à elle, être lue “horizontalement”, elle traduit les propriétés physiques de la matière et n’est donc pas une notion géométrique (Bossavit, 1991c).

Des **potentiels** sont également introduits. Le champ  $\mathbf{h}$  peut en effet, sous certaines conditions, dériver d’un potentiel scalaire magnétique  $\phi$  et le champ  $\mathbf{b}$  peut, quant à lui, dériver d’un potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{a}$  (Chapitre I). Ces potentiels ont une position prédéterminée dans le diagramme de Tonti : ils se placent naturellement en aval des champs qui peuvent en dériver, c’est-à-dire à l’étage inférieur dans la suite correspondante.

### 3. Sources du champ magnétique

Des **conducteurs actifs**, ou **inducteurs**, sont à l’origine d’un champ magnétique.

#### 3.1 Les sources extérieures

Un inducteur peut être extérieur au domaine d’étude  $\Omega$ . Le champ inducteur correspondant, ou champ source, est alors entièrement déterminé. C’est par exemple le cas lorsque nous voulons considérer un champ source de direction uniforme dans le domaine d’étude.

#### 3.2 Les inducteurs bobinés

Un inducteur, ou conducteur actif, bobiné — c’est-à-dire constitué d’un certain nombre de brins conducteurs avec une entrée et une sortie de courant —, peut être modélisé par une densité de courant donnée. Un inducteur  $\Omega_s$  (Fig. 1), dans lequel la densité de courant  $\mathbf{j}_s = \mathbf{j}$  est connue, peut être pris en compte grâce à la définition d’un champ  $\mathbf{h}_s$ , appelé **champ source**, qui vérifie

$$\operatorname{rot} \mathbf{h}_s = \mathbf{j}_s \text{ dans } \Omega_s, \quad \operatorname{rot} \mathbf{h}_s = 0 \text{ dans } \Omega_s^C, \quad (1a-b)$$

et donc appartient à l’espace  $H_s$  défini par

$$H_s = \{ \mathbf{h}_s \in F_h^1 ; \operatorname{rot} \mathbf{h}_s = 0 \text{ dans } \Omega_s^C \}. \quad (2)$$

Comme un tel champ n’est pas unique, nous avons une certaine liberté quant à son expression.

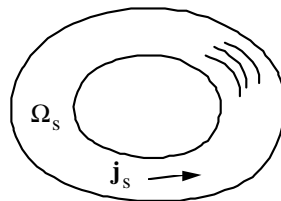


Fig. 1. Inducteur de type  $\Omega_s$ .

### 4. Formulations

Soient  $\mathbf{h} \in F_h^1$ ,  $\mathbf{j} \in F_h^2$ ,  $\mathbf{b} \in F_e^2$ . Nous choisissons d’exprimer les équations (2.1) et (2.2) sous forme forte, et la loi de comportement (2.3) sous forme faible ; ou plutôt en formulation variationnelle dans un premier temps. Au niveau discret, cette loi ne pourra pas être vérifiée exactement. Un moyen pour s’en convaincre est de remarquer que les espaces d’approximation de  $F_h^1$  et  $F_e^2$  sont en général différents et donc qu’il ne peut exister une

relation du type de la loi de comportement,  $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$ , entre deux éléments quelconques de ces espaces. En réalité, la discrétisation des espaces fonctionnels fait perdre la dualité qui existe, au niveau continu, entre les espaces d'un même niveau sur le diagramme de Tonti (Section II.A.3). Cela signifie que les opérateurs en regard sur ce diagramme ne sont plus adjoints l'un de l'autre. Par contre, les équations (2.1) et (2.2) pourront, quant à elles, être satisfaites exactement pour les champs approchés ; si toutefois ceux-ci appartiennent à des espaces d'approximation qui le permettent, ce qui sera bien le cas. Tout ne sera donc pas perdu après discrétisation (Bossavit, 1989b). A vrai dire, puisqu'on discrétise, il doit bien apparaître une erreur d'approximation : elle se situera dans la relation constitutive, que l'on va se contenter de satisfaire au "mieux", c'est-à-dire faiblement.

Considérons les fonctionnelles

$$W_b(\mathbf{b}) = \int_{\Omega} w_b(\mathbf{b}) \, dx \quad , \quad W_h(\mathbf{h}) = \int_{\Omega} w_h(\mathbf{h}) \, dx \quad , \quad (1-2)$$

avec

$$w_b(\mathbf{b}) = \int_0^{\mathbf{b}} \mu^{-1} \mathbf{b}^\circ \cdot d\mathbf{b}^\circ \quad , \quad w_h(\mathbf{h}) = \int_0^{\mathbf{h}} \mu \mathbf{h}^\circ \cdot d\mathbf{h}^\circ \quad . \quad (3-4)$$

Les fonctionnelles  $W_b(\mathbf{b})$  et  $W_h(\mathbf{h})$  représentent respectivement l'**énergie magnétique** et la **coénergie magnétique** du système, à condition toutefois que  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{b}$  soient les champs réels de ce système (Bossavit, 1990a). Les fonctionnelles  $w_b(\mathbf{b})$  et  $w_h(\mathbf{h})$  sont les densités correspondantes, elles dépendent de la position  $\mathbf{x}$ .

Nous considérons le cas où des matériaux non linéaires peuvent être présents dans le domaine d'étude  $\Omega$ , c'est-à-dire que la perméabilité  $\mu$  peut dépendre du champ  $\mathbf{h}$ , ou  $\mathbf{b}$ , i.e.  $\mu = \mu(\mathbf{h})$  et  $\mu^{-1} = \mu^{-1}(\mathbf{b})$ . Les fonctions  $\mu(\mathbf{h}) \mathbf{h}$  et  $\mu^{-1}(\mathbf{b}) \mathbf{b}$  doivent cependant être strictement croissantes, ce qui est généralement vérifié. La caractéristique magnétique  $\mathbf{b}$ - $\mathbf{h}$  d'un matériau est représentée à la figure 1 et les fonctionnelles  $w_b(\mathbf{b})$  et  $w_h(\mathbf{h})$  y sont mises en évidence. Notons que cette courbe peut dépendre de la position.

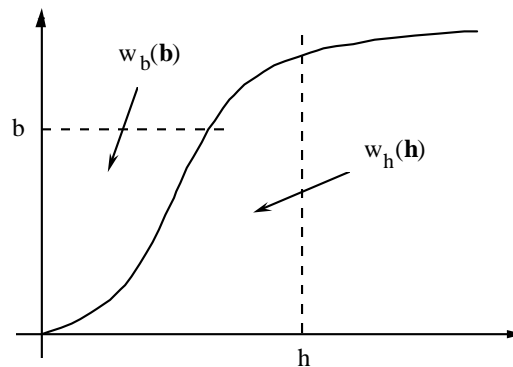


Fig. 1. Courbe  $\mathbf{b}$ - $\mathbf{h}$  d'un matériau et densités d'énergie et de coénergie associées.

Il apparaît que l'inégalité

$$w_h(\mathbf{h}) + w_b(\mathbf{b}) \geq \mathbf{h} \cdot \mathbf{b} \quad , \quad \forall \mathbf{h} \in F_h^1 \quad , \quad \forall \mathbf{b} \in F_e^2 \quad , \quad (5)$$

est toujours vérifiée et que, en particulier, l'égalité associée a lieu si et seulement si le point  $\{\mathbf{b}, \mathbf{h}\}$  est sur la courbe  $\mathbf{b}$ - $\mathbf{h}$ , donc lorsque la loi de comportement  $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$  est vérifiée sous forme forte, au point  $\mathbf{x}$ . Définissons maintenant la fonctionnelle

$$\mathbb{F}(\mathbf{h}, \mathbf{b}) \stackrel{\text{def}}{=} W_h(\mathbf{h}) + W_b(\mathbf{b}) - (\mathbf{h}, \mathbf{b}) \quad , \quad (6)$$

qui, d'après (5), vérifie l'inégalité

$$\mathbb{F}(\mathbf{h}, \mathbf{b}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{h} \in F_h^1, \quad \forall \mathbf{b} \in F_e^2. \quad (7)$$

L'égalité associée a lieu si et seulement si la loi  $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$  est vérifiée en tout point du domaine  $\Omega$ . Notons que lorsque les matériaux considérés sont linéaires, les densités (3) et (4) deviennent

$$w_b(\mathbf{b}) = \frac{1}{2} \mu^{-1} b^2, \quad w_h(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \mu h^2, \quad (8-9)$$

et les fonctionnelles (1) et (2) peuvent s'exprimer sous les formes

$$W_b(\mathbf{b}) = \frac{1}{2} (\mu^{-1} \mathbf{b}, \mathbf{b}), \quad W_h(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} (\mu \mathbf{h}, \mathbf{h}). \quad (10-11)$$

La fonctionnelle (6) devient alors, dans un domaine linéaire,

$$\mathbb{F}(\mathbf{h}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} (\mu \mathbf{h}, \mathbf{h}) + \frac{1}{2} (\mu^{-1} \mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{h}, \mathbf{b}). \quad (12)$$

Le **problème** à résoudre peut se poser comme ceci : il s'agit de **minimiser la fonctionnelle (6),  $\mathbb{F}(\mathbf{h}, \mathbf{b})$ , sous les contraintes (2.1) et (2.2)**, c'est-à-dire  $\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j}$  et  $\text{div } \mathbf{b} = 0$ . Essayons maintenant de poser ce problème sous une autre forme.

Grâce aux propriétés des espaces  $F_h^1$  et  $F_h^2$ , il est possible de déterminer un champ  $\mathbf{h}_s$  — non unique, mais cela est sans importance car nous aurons plus de liberté pour sa détermination —, tel que  $\text{rot } \mathbf{h}_s$  soit la projection de  $\mathbf{j}$  sur  $F_h^2$ . Ainsi, nous décomposons le champ  $\mathbf{h}$  en deux parties : une partie  $\mathbf{h}_s$ , appelée **champ source** (3.1), et une partie  $\mathbf{h}_r$ , appelée **champ de réaction**. Nous avons alors

$$\text{rot } \mathbf{h}_s = \mathbf{j}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}_s + \mathbf{h}_r. \quad (13-14)$$

Et comme le champ source  $\mathbf{h}_s$  est associé à la densité de courant total  $\mathbf{j}$ , par  $\text{rot } \mathbf{h}_s = \mathbf{j}$ , il en résulte que le champ complémentaire de réaction  $\mathbf{h}_r$  est dans le noyau du rotationnel, i.e.  $\text{rot } \mathbf{h}_r = 0$ . Il dérive donc d'un potentiel scalaire qui peut être défini dans le domaine global d'étude  $\Omega$  et qui est dans  $F_h^0$  ; il s'agit de remarquer qu'aucun problème de discontinuité de  $\phi_r$  n'est à craindre si, comme c'est le cas en général,  $\Omega$  est simplement connexe. Ce potentiel est appelé **potentiel scalaire de réaction**  $\phi_r$ , et le champ  $\mathbf{h}_r$  est, au signe près, son gradient, c'est-à-dire

$$\mathbf{h}_r = -\text{grad } \phi_r, \quad \phi_r \in F_h^0. \quad (15)$$

Le champ magnétique total s'exprime donc par

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_s - \text{grad } \phi_r. \quad (16)$$

Le champ d'induction  $\mathbf{b}$  est, quant à lui, par (2.2), dans le noyau de la divergence et peut ainsi s'exprimer par l'intermédiaire d'un potentiel vecteur  $\mathbf{a}$ , non unique, qui est dans  $F_e^1$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \in F_e^1. \quad (17)$$

Notons qu'une condition de jauge est nécessaire pour fixer l'unicité de  $\mathbf{a}$ , ce qui conduit en réalité à ne plus considérer qu'un sous-espace de  $F_e^1$  pour  $\mathbf{a}$ , en correspondance biunivoque avec son image par l'opérateur rotationnel,  $\text{rot } F_e^1$ . Notons que  $\text{rot } F_e^1 \subset F_e^2$ .

Remarquons maintenant que, puisque  $\mathbf{a} \in F_e^1$ , et donc  $\text{rot } \mathbf{a} \in F_e^2$ , et  $\phi_r \in F_h^0$ , nous avons, grâce à (II.A.3.8),

$$(\text{rot } \mathbf{a}, \text{grad } \phi_r) = (-\text{div } \text{rot } \mathbf{a}, \phi_r) = 0,$$

et donc

$$(\mathbf{b}, \mathbf{h} - \mathbf{h}_s) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{b}, \mathbf{h}) = (\mathbf{b}, \mathbf{h}_s) . \quad (18)$$

La fonctionnelle (6),  $\mathbb{F}(\mathbf{h}, \mathbf{b})$ , devient alors

$$\mathbb{F}(\mathbf{h}, \mathbf{b}) = W_h(\mathbf{h}) + W_b(\mathbf{b}) - (\mathbf{h}_s, \mathbf{b}) . \quad (19)$$

C'est cette quantité que nous devons minimiser sous les contraintes déjà définies. Cette forme de la fonctionnelle à minimiser laisse apparaître un découplage du problème : elle est en fait la somme de deux fonctions, l'une de  $\mathbf{h}$ , l'autre de  $\mathbf{b}$ . Nous avons donc à résoudre **deux problèmes de minimisation distincts**. Le premier problème, appelé **problème en  $\mathbf{h}$** , consiste à minimiser la fonctionnelle  $W_h(\mathbf{h})$  sous la contrainte (2.1),  $\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j}$ . Le second problème, appelé **problème en  $\mathbf{b}$** , consiste, quant à lui, à minimiser la fonctionnelle  $W_b(\mathbf{b}) - (\mathbf{h}_s, \mathbf{b})$  sous la contrainte (2.2),  $\text{div } \mathbf{b} = 0$ . L'introduction des potentiels scalaire et vecteur permet de simplifier les contraintes associées aux deux problèmes. Nous allons ainsi pouvoir transformer les problèmes avec **contraintes explicites** en problèmes avec **contraintes implicites**.

Le **problème en  $\mathbf{h}$**  va maintenant consister à minimiser la fonctionnelle

$$W_h'(\phi_r) \stackrel{\text{def}}{=} W_h(\mathbf{h}_s - \text{grad } \phi_r) \quad (20)$$

sous la contrainte (13),  $\text{rot } \mathbf{h}_s = \mathbf{j}$ , implicite lorsqu'une expression de  $\mathbf{h}_s$  est choisie. Le **problème en  $\mathbf{b}$**  va, quant à lui, consister à minimiser la fonctionnelle

$$W_b'(\mathbf{a}) \stackrel{\text{def}}{=} W_b(\text{rot } \mathbf{a}) - (\mathbf{h}_s, \text{rot } \mathbf{a}) \quad (21)$$

sans contrainte particulière. Les problèmes qui viennent d'être définis peuvent être transformés en formulations faibles grâce au principe de stationnarisation.

## 4.1 Formulations faibles avec potentiels

### 4.1.1 Formulation en potentiel scalaire magnétique

Le problème en  $\mathbf{h}$  avec potentiel, qui consiste à minimiser la fonctionnelle (20), peut se ramener à une formulation faible en **stationnarisant** cette fonctionnelle. Ainsi, la condition

$$\delta [ W_h(\mathbf{h}_s - \text{grad } \phi_r) ] = 0 ,$$

où le symbole  $\delta$  représente une variation quelconque de la grandeur à laquelle il s'applique, donne

$$(\mu (\mathbf{h}_s - \text{grad } \phi_r), -\text{grad } \delta \phi_r) = 0 .$$

Et, en introduisant la fonction-test  $\phi' = \delta \phi_r$ , nous obtenons la formulation faible

$$\boxed{(\mu (\mathbf{h}_s - \text{grad } \phi_r), -\text{grad } \phi') = 0 , \forall \phi' \in F_{h0}^0} , \quad (22)$$

avec, pour rappel,  $\phi_r \in F_h^0$  (5) et  $\mathbf{h}_s \in H_s$  (3.2). L'espace  $F_{h0}^0$  est parallèle à  $F_h^0$  et est défini par

$$F_{h0}^0 = \{ \phi \in F_h^0 ; \phi|_{\Gamma_h} = 0 \} ;$$

l'indice 0 associé à un espace définit l'espace qui lui est parallèle et dont les conditions aux limites associées sont homogènes (i.e. trace nulle) ; notons que l'espace de départ peut déjà avoir cette propriété.



### 4.1.2 Formulation en potentiel vecteur magnétique

Le problème en  $\mathbf{b}$  avec potentiel, qui consiste à minimiser la fonctionnelle (21), peut également se ramener à une formulation faible par stationnarisation. La condition

$$\delta [ W_b(\text{rot } \mathbf{a}) - (\mathbf{h}_s, \text{rot } \mathbf{a}) ] = 0 ,$$

associée à la relation

$$(\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{h}_s) = (\mathbf{a}, \text{rot } \mathbf{h}_s) ,$$

conduit à

$$(\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{a}, \text{rot } \delta \mathbf{a}) - (\delta \mathbf{a}, \text{rot } \mathbf{h}_s) = 0 .$$

En introduisant la fonction-test  $\mathbf{a}' = \delta \mathbf{a}$ , nous obtenons finalement la formulation faible

$$\boxed{(\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{a}, \text{rot } \mathbf{a}') = (\mathbf{j}, \mathbf{a}') , \quad \forall \mathbf{a}' \in F_{e0^1}} , \quad (23)$$

avec, pour rappel,  $\mathbf{a} \in F_e^1$  (7).

## 4.2 Formulations faibles sans potentiels

Considérons le problème en  $\mathbf{h}$  avec contrainte explicite (2.1), c'est-à-dire sans potentiel. Cette contrainte peut se traiter, par la méthode des **multiplicateurs de Lagrange** (Bossavit, 1989b), en ajoutant le terme  $(\text{rot } \mathbf{h} - \mathbf{j}, \mathbf{v})$  à la fonction à minimiser. Stationnarisons alors la fonctionnelle résultante :

$$\delta [ W_h(\mathbf{h}) + (\text{rot } \mathbf{h} - \mathbf{j}, \mathbf{v}) ] = 0 ,$$

et donc,

$$(\mu \mathbf{h}, \delta \mathbf{h}) + (\text{rot } \delta \mathbf{h}, \mathbf{v}) + (\text{rot } \mathbf{h}, \delta \mathbf{v}) - (\mathbf{j}, \delta \mathbf{v}) = 0 .$$

En introduisant les fonctions-test  $\mathbf{h}' = \delta \mathbf{h}$  et  $\mathbf{v}' = \delta \mathbf{v}$ , nous avons finalement

$$\boxed{(\mu \mathbf{h}, \mathbf{h}') + (\mathbf{v}, \text{rot } \mathbf{h}') = 0 , \quad \forall \mathbf{h}' \in F_{h0^1}} , \quad (24a)$$

$$\boxed{(\text{rot } \mathbf{h}, \mathbf{v}') = (\mathbf{j}, \mathbf{v}') , \quad \forall \mathbf{v}' \in F_{h0^2}} . \quad (24b)$$

Pour le problème en  $\mathbf{b}$  sans potentiel avec contrainte explicite (2.2),  $\text{div } \mathbf{b} = 0$ , la méthode des multiplicateurs de Lagrange conduit à ajouter le terme  $(\text{div } \mathbf{b}, u)$  à la fonction à minimiser. Il nous reste alors à stationnariser la fonctionnelle résultante, c'est-à-dire

$$\delta [ W_b(\mathbf{b}) - (\mathbf{b}, \mathbf{h}_s) + (\text{div } \mathbf{b}, u) ] = 0 ,$$

et donc,

$$(\mu^{-1} \mathbf{b}, \delta \mathbf{b}) - (\mathbf{h}_s, \delta \mathbf{b}) + (u, \text{div } \delta \mathbf{b}) + (\text{div } \mathbf{b}, \delta u) = 0 .$$

En introduisant les fonctions-test  $\mathbf{b}' = \delta \mathbf{b}$  et  $u' = \delta u$ , nous avons finalement

$$\boxed{(\mu^{-1} \mathbf{b}, \mathbf{b}') - (\mathbf{h}_s, \mathbf{b}') + (u, \text{div } \mathbf{b}') = 0 , \quad \forall \mathbf{b}' \in F_{e0^2}} , \quad (25a)$$

$$\boxed{(\text{div } \mathbf{b}, u') = 0 , \quad \forall u' \in F_{e0^3}} . \quad (25b)$$

### 4.3 Formulation forte de la loi de comportement

Il est donc possible, grâce aux méthodes définies, de satisfaire exactement les équations  $\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j}$  et  $\text{div } \mathbf{b} = 0$ , la loi de comportement  $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$  étant satisfaite faiblement. Au niveau discret, cela reviendra à concentrer toute l'erreur de l'approximation dans cette loi. Il s'agit en fait de résoudre deux schémas complémentaires. Le premier consiste à résoudre (22) ou (24a-b) qui donne  $\mathbf{h}$  dans  $F_h^1$ , et assure ainsi la conformité en  $\mathbf{h}$ . Le second consiste à résoudre (23) ou (25a-b) qui donne  $\mathbf{b}$  dans  $F_e^2$ , et assure donc la conformité en  $\mathbf{b}$ . Une approche plus économique consisterait à ne résoudre qu'un de ces deux schémas (Bossavit, 1988d, 1989b).

#### 4.3.1 Formulation en potentiel scalaire magnétique

Nous pouvons en effet résoudre (22) ou (24a-b) pour ainsi assurer la conformité en  $\mathbf{h}$ , et exprimer fortement la loi de comportement (2.3), i.e.  $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$ , ce qui n'assure cependant plus la conformité en  $\mathbf{b}$ . Ce schéma peut s'interpréter comme l'expression de l'équation (2.2), i.e.  $\text{div } \mathbf{b} = 0$ , au sens faible. En effet,

$$(\text{div } \mathbf{b}, \phi') = 0, \quad \forall \phi' \in F_{h0}^0,$$

entraîne, grâce à (II.A.3.8),

$$(\mathbf{b}, -\text{grad } \phi') = 0, \quad \forall \phi' \in F_{h0}^0,$$

et, en satisfaisant exactement la loi de comportement (2.3) et en décomposant le champ  $\mathbf{h}$  selon (16), nous obtenons la formulation faible

$$(\mu (\mathbf{h}_s - \text{grad } \phi_r), -\text{grad } \phi') = 0, \quad \forall \phi' \in F_{h0}^0, \quad (26)$$

qui est bien équivalente à (22). Notons que la condition sur  $\Gamma_h$  apparaît explicitement dans cette formulation (par l'intermédiaire de l'espace  $F_{h0}^0$ ), alors que la condition sur  $\Gamma_e$  est implicite (on peut le vérifier en appliquant de nouveau (II.A.3.8) à (26)). On parle respectivement de conditions aux limites essentielle et naturelle.

#### 4.3.2 Formulation en potentiel vecteur magnétique

Nous pouvons aussi opter pour la résolution de (23) ou (25a-b) pour assurer la conformité en  $\mathbf{b}$ , et exprimer fortement la loi de comportement (2.3), i.e.  $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$ , ce qui n'assure alors plus la conformité en  $\mathbf{h}$ . Ce schéma peut s'interpréter comme l'expression de l'équation (2.1), i.e.  $\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j}$ , au sens faible. En effet,

$$(\text{rot } \mathbf{h}, \mathbf{a}') = (\mathbf{j}, \mathbf{a}'), \quad \forall \mathbf{a}' \in F_{e0}^1,$$

entraîne, grâce à (II.A.3.12),

$$(\mathbf{h}, \text{rot } \mathbf{a}') = (\mathbf{j}, \mathbf{a}'), \quad \forall \mathbf{a}' \in F_{e0}^1,$$

et, en satisfaisant exactement la loi (2.3) et en utilisant (17), nous obtenons la formulation faible

$$(\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{a}, \text{rot } \mathbf{a}') = (\mathbf{j}, \mathbf{a}'), \quad \forall \mathbf{a}' \in F_{e0}^1, \quad (27)$$

qui est bien équivalente à (23). Notons qu'ici, contrairement à (26), c'est la condition sur  $\Gamma_e$  qui apparaît explicitement dans cette formulation, alors que la condition sur  $\Gamma_h$  est maintenant implicite.

# Partie B

## Formulation discrète

### 1. Discrétisation

La résolution analytique du problème de la magnéto-statique (Chapitre III.A) n'est en général pas possible. Ce **problème continu**, ou **exact**, doit être approché par un **problème discret**, formulé dans un **espace de dimension finie**.

Une telle transformation du problème porte le nom de **discrétisation**. Elle nécessite la réalisation d'un **maillage** des domaines géométriques impliqués, et l'association d'**éléments finis**, définis à la section II.B.2, aux éléments géométriques qui en résultent. Il s'agit donc de construire des **espaces d'éléments finis**. Les espaces  $S^i$ ,  $i=0$  à 3, définis à la section II.B.3, sont ceux que nous allons utiliser comme **équivalents discrets** des espaces  $F_h^i$ ,  $i=0$  à 3, et  $F_e^i$ ,  $i=0$  à 3.

Il s'agit en fait de réaliser une double discrétisation, c'est-à-dire une discrétisation de l'espace géométrique, suivie d'une discrétisation des champs qui y sont définis. Cette double discrétisation peut être considérée comme formant un tout grâce à la définition des espaces d'éléments finis.

Tous les espaces, tant géométriques que fonctionnels, qui vont apparaître dans la suite, sont des espaces discrets. Et, puisque toute confusion devient alors impossible, nous les notons, par facilité, de la même façon que les espaces continus dont ils sont les analogues. Ainsi, dans cette partie, les domaines  $\Omega$ ,  $\Omega_m$ , ... , de même que les espaces  $F_h^i$ ,  $i=0$  à 3, et  $F_e^i$ ,  $i=0$  à 3, deviennent discrets.

### 2. Formulation en potentiel scalaire magnétique

#### 2.1 Espaces fonctionnels

Les équivalents discrets des espaces fonctionnels qui interviennent dans la formulation en potentiel scalaire magnétique (III.A.4.22) sont

$$\Phi_r = \{ \phi_r \in F_{h0}^0 \}, \quad H_s = \{ \mathbf{h}_s \in F_h^1 ; \text{rot } \mathbf{h}_s = 0 \text{ dans } \Omega_s^C \}. \quad (1-2)$$

Dans cette formulation, le champ de réaction  $\mathbf{h}_r$ , défini par (III.A.4.14), dérive du potentiel scalaire  $\phi_r$  selon l'expression (III.A.4.15), i.e.

$$\mathbf{h}_r = - \text{grad } \phi_r, \quad \phi_r \in \Phi_r,$$

qui est maintenant définie au niveau discret. Le potentiel scalaire appartient à l'espace  $F_h^0$  et peut alors s'exprimer sous la forme discrète (II.B.3.13), c'est-à-dire

$$\phi_r = \sum_{j \in N} \phi_{r,j} s_j, \quad (3)$$

- où
- $N$  est l'ensemble des noeuds de  $\Omega$  ;
  - $s_j$  est la fonction de base nodale associée au noeud  $j \in N$  ;
  - $\phi_{r,j}$  est la valeur du potentiel de réaction au noeud  $j \in N$ .

Le gradient de cette expression est défini et donne, au signe près, le champ de réaction  $\mathbf{h}_r$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{h}_r = - \text{grad } \phi_r = \sum_{j \in N} \phi_{r,j} (- \text{grad } s_j) ,$$

ou encore

$$\mathbf{h}_r = - \text{grad } \phi_r = \sum_{j \in N} \phi_{r,j} \mathbf{v}_j , \quad (4)$$

en posant

$$\mathbf{v}_j = - \text{grad } s_j , \quad j \in N . \quad (5)$$

Il est intéressant de remarquer que, d'après la relation (II.B.3.24), le champ  $\mathbf{v}_j$ ,  $j \in N$ , est un élément de  $F_h^1$  (ou  $S^1$ ). Le champ  $\mathbf{h}_r$  est donc également un élément de cet ensemble et peut, par conséquent, s'exprimer sous la forme (II.B.3.27). Nous avons donc  $\mathbf{h}_r \in H_r$  avec

$$H_r = - \text{grad } \Phi_r = \{ - \text{grad } \phi_r , \phi_r \in F_{h0}^0 \} = \{ \mathbf{h}_r \in F_{h0}^1 ; \text{rot } \mathbf{h}_r = 0 \} ; \quad (6)$$

le domaine global  $\Omega$  est en général simplement connexe et le noyau du rotationnel se limite bien dans ce cas à l'image du gradient.

Le champ source  $\mathbf{h}_s$ , quant à lui, appartient à l'espace d'approximation  $F_h^1$  et peut donc s'exprimer sous la forme (II.B.3.14), i.e.

$$\mathbf{h}_s = \sum_{j \in A} h_{s,j} \mathbf{s}_j .$$

De plus, il est un élément de l'espace  $H_s$  (2), qui est un noyau réduit de l'opérateur rotationnel (Section II.B.4.1). Il peut, de ce fait, s'exprimer sous la forme (II.B.4.17) en tant que combinaison linéaire des fonctions de base de cet espace, c'est-à-dire

$$\mathbf{h}_s = \sum_{j \in A_s} h_{s,j} \mathbf{s}_j + \sum_{j \in N_s^C} \phi_{s,j} \mathbf{v}_j + \sum_{j \in C_s} I_{s,j} \mathbf{c}_j , \quad (7)$$

- où •  $\phi_s$  est le **potentiel source** associé à  $\mathbf{h}_s$  ;
- $A_s$  est l'ensemble des arêtes internes au domaine  $\Omega_s$  ;
  - $N_s^C$  est l'ensemble des noeuds de  $\Omega_s^C$  et de sa frontière  $\partial\Omega_s^C$  ;
  - $C_s$  est l'ensemble des **coupures source** de  $\Omega_s^C$ , associées au potentiel  $\phi_s$  et caractérisées par les discontinuités  $I_{s,j}$ ,  $\forall j \in C_s$  .

Le champ  $\mathbf{h}_s$  est construit sur base de la méthode exposée à la section II.B.4.2 à partir d'une jauge naturelle dans l'espace des éléments d'arête. Son support est ainsi limité aux inducteurs et à un voisinage des coupures associées.

## 2.2 Forme matricielle de la formulation faible

### 2.2.1 Vecteurs de base et de composantes

Les coefficients des fonctions de base, ou composantes, qui apparaissent dans (4), peuvent être regroupés en un vecteur, défini par

$$\mathbf{x}_\phi = \begin{pmatrix} \phi_{r,1} \\ \vdots \\ \phi_{r,\#N} \end{pmatrix} ,$$

où le préfixe # associé à un ensemble donne la **dimension algébrique** de celui-ci, et où les indices numériques sont relatifs aux numéros d'ordre des éléments dans les ensembles

considérés. Ce vecteur est appelé vecteur des **composantes du champ**  $\mathbf{h}_r$  dans la base de  $H_r$  et est aussi noté  $\mathbf{x}$ , i.e.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_\phi, \quad \mathbf{x} \in X. \quad (8)$$

Il définit un espace  $X$  dont la dimension est

$$\dim X = \dim H_r = \#N.$$

Nous pouvons également définir le vecteur des fonctions de base de l'espace  $H_r$ , i.e.

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{\#N} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Les conditions aux limites sur  $\Gamma_h$ , associées à la définition de l'espace  $F_h^0$ , imposent la fixation de certaines composantes de  $\mathbf{x}$  : le potentiel de réaction  $\phi_r$  est fixé sur  $\Gamma_h$  par l'intermédiaire de ses valeurs nodales sur cette surface. Pour les conditions aux limites homogènes considérées, nous pouvons laisser tomber ces composantes ainsi que les fonctions de base associées. Les composantes qui ne sont pas fixées, dites libres, constituent les **degrés de liberté** du problème. Nous continuerons à noter  $\#N$  le nombre de ces composantes, associées aux noeuds qui ne sont pas situés sur  $\Gamma_h$ . Notons qu'il n'y aurait cependant pas de difficulté à considérer des conditions aux limites non homogènes. On définirait pour cela explicitement le vecteur des composantes fixées,  $\mathbf{x}_{\phi,h}$ , et le vecteur des fonctions de base associées,  $\mathbf{e}_{\phi,h}$ .

De même, nous pouvons regrouper en vecteurs les coefficients des fonctions de base présents dans (7),

$$\mathbf{x}_{s,h} = \begin{pmatrix} h_{s,1} \\ \vdots \\ h_{s,\#A_s} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{s,\phi} = \begin{pmatrix} \phi_{s,1} \\ \vdots \\ \phi_{s,\#N_s^c} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{s,I} = \begin{pmatrix} I_{s,1} \\ \vdots \\ I_{s,\#C_s} \end{pmatrix},$$

et réunir ceux-ci pour former le vecteur des **composantes du champ**  $\mathbf{h}_s$  dans la base de  $H_s$ ,

$$\mathbf{x}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{s,h} \\ \mathbf{x}_{s,\phi} \\ \mathbf{x}_{s,I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_s \in X_s. \quad (10)$$

Les vecteurs des fonctions de base,

$$\mathbf{e}_{s,h} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{\#A_s} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{s,\phi} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{\#N_s^c} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{s,I} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{\#C_s} \end{pmatrix},$$

peuvent aussi être réunis pour former la **base de l'espace**  $H_s$ , qui est

$$\mathbf{e}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{s,h} \\ \mathbf{e}_{s,\phi} \\ \mathbf{e}_{s,I} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Il est important de noter que les numérotations des fonctions de base de  $H_s$  sont différentes de celles des fonctions de base de  $H_r$  ; elles sont propres aux ensembles des entités associées.

Grâce à ces notations vectorielles, les expressions (4) et (7) peuvent respectivement s'écrire

$$\mathbf{h}_r = \mathbf{x}_\phi^T \mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{h}_s = \mathbf{x}_{s,h}^T \mathbf{e}_{s,h} + \mathbf{x}_{s,\phi}^T \mathbf{e}_{s,\phi} + \mathbf{x}_{s,I}^T \mathbf{e}_{s,I},$$

ou encore,

$$\mathbf{h}_r = \mathbf{x}^T \mathbf{e}, \quad \mathbf{h}_s = \mathbf{x}_s^T \mathbf{e}_s. \quad (12-13)$$

Notons que pour des conditions aux limites non homogènes, on aurait

$$\mathbf{h}_r = \mathbf{x}^T \mathbf{e} + \mathbf{x}_{\phi,h}^T \mathbf{e}_{\phi,h}. \quad (14)$$

### 2.2.2 Forme matricielle

Les expressions (12) et (13) peuvent être introduites dans l'équation (III.A.4.22), i.e.

$$(\mu (\mathbf{h}_s - \text{grad } \phi_r), -\text{grad } \phi') = 0, \quad \forall \phi' \in F_{h0^0},$$

pour donner

$$(\mu \mathbf{x}^T \mathbf{e}, \mathbf{x}'^T \mathbf{e}) + (\mu \mathbf{x}_s^T \mathbf{e}_s, \mathbf{x}'^T \mathbf{e}) = 0, \quad \forall \mathbf{x}' \in X. \quad (15)$$

En exprimant maintenant les produits scalaires sous forme de produits matriciels et en conservant les *parenthèses indicées* pour exprimer une intégration volumique — ce qui est un abus de notation —, nous obtenons

$$(\mu \mathbf{x}'^T \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{x})_\Omega + (\mu \mathbf{x}'^T \mathbf{e} \mathbf{e}_s^T \mathbf{x}_s)_\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{x}' \in X. \quad (16)$$

Les termes de cette équation peuvent encore se transformer de façon à faire apparaître des matrices, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (\mu \mathbf{x}'^T \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{x})_\Omega &= \mathbf{x}'^T (\mu \mathbf{e} \mathbf{e}^T)_\Omega \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T \mathbf{E} \mathbf{x}, \\ (\mu \mathbf{x}'^T \mathbf{e} \mathbf{e}_s^T \mathbf{x}_s)_\Omega &= \mathbf{x}'^T (\mu \mathbf{e} \mathbf{e}_s^T)_\Omega \mathbf{x}_s = \mathbf{x}'^T \mathbf{E}_s \mathbf{x}_s. \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que la matrice  $\mathbf{E}$  ainsi définie est carrée et **symétrique**, alors que la matrice  $\mathbf{E}_s$  est en général rectangulaire. Ainsi, l'équation (16) devient

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{E} \mathbf{x} + \mathbf{x}'^T \mathbf{E}_s \mathbf{x}_s = 0, \quad \forall \mathbf{x}' \in X, \quad (17)$$

et, puisque  $\mathbf{x}'$  peut être quelconque, nous avons finalement à résoudre le **système symétrique d'équations algébriques** suivant, d'inconnue  $\mathbf{x}$ ,

$$\boxed{\mathbf{E} \mathbf{x} + \mathbf{E}_s \mathbf{x}_s = 0}, \quad (18)$$

avec

$$\mathbf{E} = (\mu \mathbf{e} \mathbf{e}^T)_\Omega, \quad \mathbf{E}_s = (\mu \mathbf{e} \mathbf{e}_s^T)_\Omega. \quad (19-20)$$

Les éléments de ces matrices peuvent s'écrire sous forme de produits internes, c'est-à-dire

$$E_{ij} = (\mu \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_\Omega, \quad E_{s,ij} = (\mu \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{s,j})_\Omega, \quad (21-22)$$

où  $\mathbf{e}_i$  est la  $i^{\text{me}}$  composante du vecteur (de vecteurs)  $\mathbf{e}$ .

L'équation (18) peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{x}) , \quad (23)$$

avec

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} , \quad \mathbf{b}(\mathbf{x}) = -\mathbf{E}_s \mathbf{x}_s . \quad (24-25)$$

Les **matériaux saturables**, dans lesquels la perméabilité magnétique  $\mu$  est une fonction du champ magnétique  $\mathbf{h}$ , font apparaître des composantes des matrices  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{E}_s$  qui dépendent à la fois de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}_s$ . De tels matériaux confèrent donc un **caractère non linéaire** au système d'équations (18) ou (23).

### 2.2.3 Problème non linéaire

La méthode itérative de **Newton-Raphson** (Dahlquist & Björck, 1974 ; Stoer & Bulirsch, 1980) est utilisée pour la résolution de l'équation matricielle (23), lorsque celle-ci est non linéaire. Rappelons que cette méthode consiste à résoudre des systèmes d'équations successifs de la forme

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^n) \delta \mathbf{x}^n = -\mathbf{r}(\mathbf{x}^n) , \quad (26a)$$

où  $\mathbf{r}(\mathbf{x}^n)$  est le vecteur résidu, à l'étape  $n+1$ , donné par

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^n) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^n) \mathbf{x}^n - \mathbf{b}(\mathbf{x}^n) , \quad (26b)$$

et où  $\mathbf{J}$  est la matrice jacobienne dont les éléments sont donnés par

$$J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j} = A_{ij} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j} x_k - \frac{\partial b_i}{\partial x_j} , \quad 1 \leq i, j \leq \dim X , \quad (26c)$$

où les  $x_j$ ,  $j = 1$  à  $\dim X$ , sont les composantes du vecteur  $\mathbf{x}$  ; la convention de sommation sur les indices répétés est utilisée. Il s'agit ainsi de calculer des corrections  $\delta \mathbf{x}^n$  à ajouter à chaque nouvelle estimation du vecteur solution  $\mathbf{x}$ , soit

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \delta \mathbf{x}^n \quad (26d)$$

à l'étape  $n+1$ , jusqu'à obtention d'une précision désirée. L'expression (26c) devient, avec (24) et (25),

$$J_{ij} = E_{ij} + \frac{\partial E_{ik}}{\partial x_j} x_k + \frac{\partial E_{s,ik}}{\partial x_j} x_{s,k} . \quad (27)$$

Elle peut également s'écrire

$$J_{ij} = E_{ij} + K_{ij} , \quad (28)$$

où les éléments  $K_{ij}$  d'une matrice  $\mathbf{K}$  sont définis par

$$K_{ij} = \frac{\partial E_{ik}}{\partial x_j} x_k + \frac{\partial E_{s,ik}}{\partial x_j} x_{s,k} , \quad 1 \leq i, j \leq \dim X . \quad (29)$$

L'élément  $K_{ij}$  de la matrice  $\mathbf{K}$  peut être développé pour donner

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{ij} &= \left( \frac{\partial \mu}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k \right)_{\Omega} x_k + \left( \frac{\partial \mu}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{s,k} \right)_{\Omega} x_{s,k} \\
 &= \left( \frac{\partial \mu}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \mathbf{h}_r \right)_{\Omega} + \left( \frac{\partial \mu}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \mathbf{h}_s \right)_{\Omega} \\
 &= \left( \frac{\partial \mu}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \mathbf{h} \right)_{\Omega}
 \end{aligned}$$

avec

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mu}{\partial h^2} \frac{\partial h^2}{\partial x_j} = 2 \frac{\partial \mu}{\partial h^2} \mathbf{h} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{x}^T \mathbf{e} + \mathbf{x}_s^T \mathbf{e}_s) = 2 \frac{\partial \mu}{\partial h^2} \mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_j . \quad (30)$$

Il peut donc s'exprimer sous la forme

$$\mathbf{K}_{ij} = \left( 2 \frac{\partial \mu}{\partial h^2} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_j) \right)_{\Omega} , \quad (31)$$

ou encore, sous la forme équivalente

$$\mathbf{K}_{ij} = \left( 2 h^2 \frac{\partial \mu}{\partial h^2} (\hat{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{e}_i) (\hat{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{e}_j) \right)_{\Omega} , \quad (32)$$

où nous avons posé  $h^2 = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$  et  $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{h} / h$ . La forme (32) est souvent préférable à la forme (31) car le facteur  $\partial \mu / \partial h^2$  peut être singulier en  $h=0$ , alors que  $h^2 \partial \mu / \partial h^2$  est régulier. Ce dernier terme est obtenu à partir de la courbe de saturation (b-h) du matériau associé. Nous pouvons remarquer que la matrice  $\mathbf{K}$  est symétrique. La matrice  $\mathbf{J}$ , dont les éléments sont définis par l'expression (28), est donc également symétrique.

## 2.2.4 Evaluation des matrices – Matrices élémentaires

Les intégrations sur le domaine  $\Omega$ , qui doivent conduire à l'évaluation des matrices définies (19-20, 32), peuvent être remplacées par des **intégrations** sur tous les **éléments géométriques**  $\Omega_k$ ,  $\forall k \in E$ , constituant le maillage de ce domaine. De plus, le support d'une fonction de base se limite aux éléments géométriques qui ont en commun l'entité associée (noeud, arête, coupure). Ainsi, les matrices définies sont **creuses**. Cette propriété est très intéressante pour la résolution numérique du système d'équations associé, ainsi que pour le nombre, alors réduit, des composantes à considérer. Il en résulte aussi que chaque élément géométrique  $\Omega_k$  contribue de façon locale à ces matrices. Ceci peut être mis en évidence en définissant des **matrices élémentaires** relatives à chaque élément, et pour lesquelles seules les entités associées à chacun de ces éléments sont à prendre en compte. Ainsi, pour l'élément  $\Omega_k$ , nous avons les matrices élémentaires suivantes :

$$\mathbf{E}_k = \left( \mu \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T \right)_{\Omega_k} , \quad \mathbf{E}_{s,k} = \left( \mu \mathbf{e}_k \mathbf{e}_{s,k}^T \right)_{\Omega_k} , \quad (33-34)$$

où  $\mathbf{e}_k$  est le vecteur des fonctions de base relatives aux entités qui sont associées à cet élément ; c'est une sous-liste du vecteur  $\mathbf{e}$ . Les éléments de ces matrices peuvent, comme précédemment, s'écrire sous forme de produits internes, c'est-à-dire

$$\mathbf{E}_{k,ij} = \left( \mu \mathbf{e}_{k,i} \cdot \mathbf{e}_{k,j} \right)_{\Omega_k} , \quad \mathbf{E}_{s,k,ij} = \left( \mu \mathbf{e}_{k,i} \cdot \mathbf{e}_{s,k,j} \right)_{\Omega_k} . \quad (35-36)$$



Les éléments (32) peuvent aussi être considérés localement, par élément  $\Omega_k$ , c'est-à-dire selon

$$K_{k,ij} = \left( 2 h^2 \frac{\partial \mu}{\partial h^2} (\hat{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{e}_{k,i}) (\hat{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{e}_{k,j}) \right)_{\Omega_k} . \quad (37)$$

L'union, ou **assemblage**, de toutes les matrices élémentaires d'un type donné mène à la matrice globale correspondante.

## 3. Formulation en potentiel vecteur magnétique

### 3.1 Espace fonctionnel

L'équivalent discret de l'espace fonctionnel qui intervient dans la formulation en potentiel vecteur magnétique (III.A.4.23) est  $F_e^1$ , ou  $S^1$ , dans lequel une condition de **jaugé** doit être définie afin d'assurer l'unicité du potentiel. Notons que l'espace  $F_{e0}^1$  est également considéré. Nous considérons la jauge définie dans la section II.B.4.2.1 par (II.B.4.28). L'espace jaugé qui en résulte est noté  $\tilde{F}_e^1$  et est caractérisé par

$$\tilde{F}_e^1 = \{ \mathbf{a} \in S^1(\Omega) ; a_j = 0, \forall j \in \hat{A} \} , \quad (1)$$

où •  $\hat{A}$  est l'ensemble des arêtes d'un **arbre** construit dans  $\Omega$  de la façon définie dans la section mentionnée pour la prise en compte de la condition à la limite sur  $\Gamma_e$ , i.e.  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{a} |_{\Gamma_e} = 0$  ;

- $a_j$  est la circulation de  $\mathbf{a}$  le long de l'arête  $j \in \hat{A}$  .

Le potentiel vecteur  $\mathbf{a}$  peut alors s'exprimer sous la forme discrète (II.B.4.30), qui est une forme particulière de (II.B.3.14), c'est-à-dire

$$\mathbf{a} = \sum_{j \in \tilde{A}} a_j \mathbf{s}_j , \quad (2)$$

où •  $\tilde{A}$  est l'ensemble des arêtes du **co-arbre** associé à l'arbre défini ;

- $\mathbf{s}_j$  est la fonction de base associée à l'arête  $j \in \tilde{A}$  ;
- $a_j$  est la circulation de  $\mathbf{a}$  le long de l'arête  $j \in \tilde{A}$  .

### 3.2 Forme matricielle de la formulation faible

#### 3.2.1 Vecteurs de base et de composantes

Les coefficients des fonctions de base, ou composantes, qui apparaissent dans (2), peuvent être regroupés en un vecteur, défini par

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{\#\tilde{A}} \end{pmatrix} , \quad \mathbf{x} \in X , \quad (3)$$

si les arêtes du co-arbre sont numérotées de 1 à  $\#\tilde{A}$  . Ce vecteur est appelé vecteur des **composantes du potentiel vecteur  $\mathbf{a}$**  dans la base de  $\tilde{F}_e^1$ . Il définit un espace  $X$  dont la dimension est

$$\dim X = \dim \tilde{F}_e^1 = \#\tilde{A} .$$

Nous définissons le vecteur des fonctions de base de l'espace  $\tilde{F}_e^1$ ,

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_a = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{\#\tilde{A}} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Les conditions aux limites sur  $\Gamma_e$ , associées à la définition de l'espace  $F_e^1$ , ont déjà été considérées dans la définition des ensembles  $\tilde{A}$  et  $\tilde{A}$ . Toutes les composantes de  $\mathbf{x}$  constituent alors des degrés de liberté.

Ainsi, l'expression (2) du potentiel vecteur peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{a} = \mathbf{x}_a^T \mathbf{e}_a = \mathbf{x}^T \mathbf{e}. \quad (5)$$

### 3.2.2 Forme matricielle

L'expression (5) peut être introduite dans l'équation (III.A.4.23), avec jauge, i.e.

$$(\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{a}, \text{rot } \mathbf{a}') = (\mathbf{j}, \mathbf{a}'), \quad \forall \mathbf{a}' \in \tilde{F}_{e0}^1,$$

pour donner

$$(\mu^{-1} \mathbf{x}^T \text{rot } \mathbf{e}, \mathbf{x}'^T \text{rot } \mathbf{e}) = (\mathbf{j}, \mathbf{x}'^T \mathbf{e}), \quad \forall \mathbf{x}' \in X, \quad (6)$$

où  $\text{rot } \mathbf{e}$  est le vecteur des rotationnels des fonctions de base de  $\mathbf{e}$ . En exprimant les produits scalaires sous forme de produits matriciels et en conservant les *parenthèses indicées* pour exprimer une intégration volumique, nous obtenons

$$(\mu^{-1} \mathbf{x}'^T \text{rot } \mathbf{e} \text{ rot } \mathbf{e}^T \mathbf{x})_{\Omega} = (\mathbf{x}'^T \mathbf{e} \mathbf{j}^T)_{\Omega}, \quad \forall \mathbf{x}' \in X. \quad (7)$$

Les termes de cette équation peuvent encore se transformer de façon à faire apparaître des matrices, c'est-à-dire

$$(\mu^{-1} \mathbf{x}'^T \text{rot } \mathbf{e} \text{ rot } \mathbf{e}^T \mathbf{x})_{\Omega} = \mathbf{x}'^T (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{e} \text{ rot } \mathbf{e}^T)_{\Omega} \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T \mathbf{R} \mathbf{x},$$

$$(\mathbf{x}'^T \mathbf{e} \mathbf{j}^T)_{\Omega} = \mathbf{x}'^T (\mathbf{e} \mathbf{j}^T)_{\Omega} = \mathbf{x}'^T \mathbf{E}_J.$$

Il est aisé de voir que la matrice  $\mathbf{R}$  ainsi définie est carrée et **symétrique**. Ainsi, l'équation (7) devient

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T \mathbf{E}_J, \quad \forall \mathbf{x}' \in X, \quad (8)$$

et, puisque  $\mathbf{x}'$  peut être quelconque, nous avons finalement à résoudre le **système symétrique d'équations algébriques** suivant, d'inconnue  $\mathbf{x}$ ,

$$\boxed{\mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{E}_J}, \quad (9)$$

avec

$$\mathbf{R} = (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{e} \text{ rot } \mathbf{e}^T)_{\Omega}, \quad \mathbf{E}_J = (\mathbf{e} \mathbf{j}^T)_{\Omega}. \quad (10-11)$$

Les éléments de ces matrices peuvent s'écrire sous forme de produits internes, c'est-à-dire

$$R_{ij} = (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{e}_i, \text{rot } \mathbf{e}_j)_{\Omega}, \quad E_{J,ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{j})_{\Omega}, \quad (12-13)$$

où  $\mathbf{e}_i$  est la  $i^{\text{me}}$  composante du vecteur (de vecteurs)  $\mathbf{e}$ .

L'équation (9) peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (14)$$

avec

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{E}_J. \quad (15-16)$$

Les **matériaux saturables**, dans lesquels la réductivité magnétique  $\mu^{-1}$  dépend de l'induction  $\mathbf{b}$ , font dépendre la matrice  $\mathbf{R}$  de l'inconnue  $\mathbf{x}$  et confèrent donc un **caractère non linéaire** au système d'équations (9) ou (14).

### 3.2.3 Problème non linéaire

La méthode itérative de Newton-Raphson (Dahlquist & Björck, 1974 ; Stoer & Bulirsch, 1980) est utilisée pour la résolution de l'équation matricielle (14), lorsque celle-ci est non linéaire. Les éléments de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  correspondante sont donnés par

$$J_{ij} = A_{ij} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j} x_k - \frac{\partial b_i}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq \dim X, \quad (17)$$

où les  $x_j$ ,  $j=1$  à  $\dim X$ , sont les composantes du vecteur  $\mathbf{x}$ . Cette expression devient, avec (15) et (16),

$$J_{ij} = R_{ij} + \frac{\partial R_{ik}}{\partial x_j} x_k. \quad (18)$$

Elle peut aussi s'écrire

$$J_{ij} = R_{ij} + K_{ij}, \quad (19)$$

en posant

$$K_{ij} = \frac{\partial R_{ik}}{\partial x_j} x_k, \quad 1 \leq i, j \leq \dim X. \quad (20)$$

Ces éléments  $K_{ij}$  définissent une matrice  $\mathbf{K}$  et peuvent être développés pour donner

$$K_{ij} = \left( \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \operatorname{rot} \mathbf{e}_i, \operatorname{rot} \mathbf{e}_k \right)_{\Omega} x_k = \left( \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \operatorname{rot} \mathbf{e}_i, \mathbf{b} \right)_{\Omega}$$

avec

$$\frac{\partial \mu^{-1}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial b^2} \frac{\partial b^2}{\partial x_j} = 2 \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial b^2} \mathbf{b} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(\mathbf{x}^T \operatorname{rot} \mathbf{e}) = 2 \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial b^2} \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{e}_j. \quad (21)$$

Ils peuvent donc s'exprimer sous la forme

$$K_{ij} = \left( 2 \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial b^2} (\mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{e}_i) (\mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{e}_j) \right)_{\Omega}, \quad (22)$$

ou encore, sous la forme équivalente

$$K_{ij} = \left( 2 b^2 \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial b^2} (\hat{\mathbf{b}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{e}_i) (\hat{\mathbf{b}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{e}_j) \right)_{\Omega}, \quad (23)$$

où nous avons posé  $b^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$  et  $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} / b$ . Le facteur  $\partial \mu^{-1} / \partial b^2$  dans (22) ou (23) est obtenu à partir de la courbe de saturation (b-h) du matériau associé. Nous pouvons remarquer que la matrice  $\mathbf{K}$  est symétrique. La matrice  $\mathbf{J}$ , dont les éléments sont définis par l'expression (19), est donc également symétrique.

### 3.2.4 Evaluation des matrices – Matrices élémentaires

Les intégrations sur le domaine  $\Omega$ , qui doivent conduire à l'évaluation des matrices définies (10-11, 23), peuvent être remplacées par des **intégrations** sur tous les **éléments géométriques**  $\Omega_k$ ,  $\forall k \in E$ , constituant le maillage de ce domaine. Comme le support d'une fonction de base d'arête se limite aux éléments géométriques qui ont en commun l'arête associée, les matrices définies sont **creuses**. De plus, chaque élément géométrique  $\Omega_k$  contribue de façon locale à ces matrices. Ceci peut être mis en évidence en définissant des **matrices élémentaires** relatives à chaque élément, et pour lesquelles seules les entités associées à chacun de ces éléments sont à prendre en compte. Ainsi, pour l'élément  $\Omega_k$ , nous avons les matrices élémentaires suivantes, associées à (10-11) :

$$\mathbf{R}_k = \left( \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{e}_k \text{ rot } \mathbf{e}_k^T \right)_{\Omega_k}, \quad \mathbf{E}_{J,k} = \left( \mathbf{e}_k \mathbf{j}^T \right)_{\Omega_k}, \quad (24-25)$$

où  $\mathbf{e}_k$  est le vecteur des fonctions de base relatives aux entités qui sont associées à cet élément ; c'est une sous-liste du vecteur  $\mathbf{e}$ . Les éléments de ces matrices peuvent, comme précédemment, s'écrire sous forme de produits internes, c'est-à-dire

$$\mathbf{R}_{k,ij} = \left( \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{e}_{k,i} \text{ , rot } \mathbf{e}_{k,j} \right)_{\Omega_k}, \quad \mathbf{E}_{J,k,i} = \left( \mathbf{e}_{k,i} \text{ , } \mathbf{j} \right)_{\Omega_k}. \quad (26-27)$$

Les éléments (23) peuvent aussi être considérés localement, par élément  $\Omega_k$ , c'est-à-dire selon

$$\mathbf{K}_{k,ij} = \left( 2 b^2 \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial b^2} (\hat{\mathbf{b}} \cdot \text{rot } \mathbf{e}_{k,i}) (\hat{\mathbf{b}} \cdot \text{rot } \mathbf{e}_{k,j}) \right)_{\Omega_k}. \quad (28)$$

L'union, ou **assemblage**, de toutes les matrices élémentaires d'un type donné mène à la matrice globale correspondante.

# Chapitre IV

## Problème des courants induits

---

### Partie A

### Formulation continue

#### 1. Position du problème

Il s'agit de calculer le **champ magnétique** ainsi que les **courants induits** dans une **structure tridimensionnelle** constituée de **matériaux magnétiques**, éventuellement **saturables**, et **conducteurs**. Les sources du champ magnétique sont des **inducteurs** définis par des grandeurs locales (densité de courant) ou globales (courant ou tension). Une telle configuration est schématisée ci-dessous (Fig. 1).

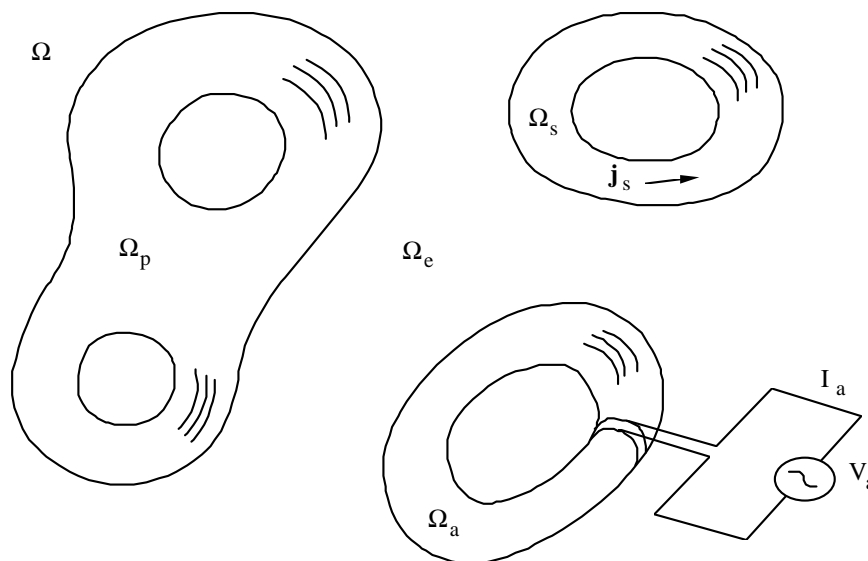


Fig. 1. Type de configuration étudiée pour le problème des courants induits.

Y sont représentés, un **domaine conducteur passif**  $\Omega_p$ , c'est-à-dire sans source, un **domaine conducteur actif**  $\Omega_a$ , pour lequel des grandeurs globales telles que courant ( $I_a$ ) et tension ( $V_a$ ) sont définies, et un **domaine inducteur**  $\Omega_s$ , dans lequel la densité de courant est connue ( $\mathbf{j}_s$ ). Ces domaines sont plongés dans le **domaine extérieur**  $\Omega_e$ . Plusieurs domaines de chacun des types définis peuvent se présenter dans une configuration, c'est-à-dire que chaque type peut être associé à un domaine non connexe. Le **domaine global** d'étude  $\Omega$  est l'union de tous ces domaines ; sa surface est notée  $\Gamma$ . Nous définissons enfin le **domaine conducteur global**  $\Omega_c$  comme l'union  $\Omega_p \cup \Omega_a$ . C'est dans ce domaine que des courants induits peuvent apparaître.

## 2. Modèle mathématique

### 2.1 Equations

Les équations à résoudre sont les équations de Maxwell pour lesquelles les courants de déplacement sont négligés devant les courants de conduction. Cette approximation, appelée **approximation classique de l'électrotechnique** ou **approximation quasi-stationnaire**, est valable pour l'étude des phénomènes physiques qui font intervenir les fréquences utilisées en électrotechnique (de quelques hertz à quelques centaines de kilohertz). Le système d'équations est alors le suivant :

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b}, \quad \operatorname{div} \mathbf{b} = 0. \quad (1-2-3)$$

Notons que l'équation (2) entraîne  $\partial_t(\operatorname{div} \mathbf{b}) = 0$  et donc  $\operatorname{div} \mathbf{b} = c^{\text{te}}$ . Ainsi, si  $\operatorname{div} \mathbf{b}$  est nulle à l'instant initial, elle le restera à tout instant ultérieur.

### 2.2 Lois de comportement

Les **propriétés magnétiques** des matériaux peuvent s'exprimer grâce à la relation

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}, \quad (4)$$

où  $\mu$  est la **perméabilité magnétique**, qui peut ne pas être constante. C'est le cas lorsqu'elle est relative à des matériaux saturables, également qualifiés de non linéaires ; elle dépend alors du champ magnétique  $\mathbf{h}$ ,  $\mu = \mu(\mathbf{h})$ .

Les **matériaux conducteurs** peuvent être décrits par la **loi d'Ohm**. Ainsi,

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} \quad \text{dans } \Omega_p, \quad (5a)$$

où  $\sigma$  est la **conductivité électrique**, qui elle-même est l'inverse de la **résistivité**  $\rho$ ,  $\sigma = 1/\rho$ . L'expression de la loi d'Ohm dans les inducteurs de type  $\Omega_a$  sera donnée dans un paragraphe ultérieur. Dans les inducteurs  $\Omega_s$  où la densité de courant est connue, nous avons simplement

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_s \quad \text{dans } \Omega_s, \quad (5b)$$

où  $\mathbf{j}_s$  est un champ de densité de courant donné.

### 2.3 Conditions aux limites

A la **frontière**  $\Gamma$  du domaine global  $\Omega$ , nous considérons certaines **conditions aux limites** fréquemment rencontrées. Sur une portion de surface  $\Gamma_h$  de  $\Gamma$ , éventuellement non connexe, est définie la condition

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{h} \Big|_{\Gamma_h} = 0, \quad (6a)$$

qui entraîne la condition

$$\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h} \Big|_{\Gamma_h} = 0$$

équivalente à

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \Big|_{\Gamma_h} = 0. \quad (6b)$$

Sur la portion de surface  $\Gamma_e$ , complémentaire de  $\Gamma_h$  dans  $\Gamma$ , de nouveau éventuellement non connexe, est définie la condition

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} \Big|_{\Gamma_e} = 0, \quad (7a)$$

qui résulte de

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{e} \Big|_{\Gamma_e} = 0. \tag{7b}$$

De telles conditions aux limites peuvent se présenter sur des **plans de symétrie**. La condition (6a) peut aussi se présenter si le domaine extérieur à  $\Omega$  a une perméabilité magnétique infinie.

### 2.4 Diagramme de Tonti

Les champs  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{e}$  peuvent être accueillis par la structure mathématique continue qui a été définie à la section II.A.3. Il s'agit de chercher les champs  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{e}$  tels que

$$\mathbf{h} \in F_h^1, \mathbf{j} \in F_h^2, \mathbf{b} \in F_e^2, \mathbf{e} \in F_e^1.$$

Les espaces fonctionnels définis sont en effet appropriés à ces champs. Ils constituent les domaines de définition des opérateurs pouvant être appliqués aux champs considérés. De plus, il prennent en compte les conditions aux limites (6-7). Notons que les contraintes physiques d'énergie finie sont également assurées.

Les équations, les lois de comportement et les conditions aux limites du problème des courants induits peuvent alors se trouver rassemblées dans les diagrammes de Tonti donnés ci-après (Fig. 1 et 2). Le premier diagramme est une combinaison de deux copies du diagramme de Tonti présenté au chapitre II (Fig. II.A.3.4), liées par l'opérateur de dérivation par rapport au temps. Le second diagramme fait abstraction de cet opérateur et constitue ainsi une simplification du premier. Les champs  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{e}$  sont disposés aux niveaux appropriés de ces diagrammes et les équations qui les relient, ainsi que les lois de comportement, sont alors mises en évidence.

Des **potentiels** sont également introduits et sont disposés en aval des champs qui peuvent en dériver. Il s'agit d'un potentiel scalaire magnétique  $\phi$ , d'un potentiel vecteur électrique  $\mathbf{t}$ , d'un potentiel scalaire électrique  $v$ , d'un potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{a}$  et d'un autre, modifié,  $\mathbf{a}^*$ . Les diverses formulations magnétodynamiques en potentiels (Chapitre I) peuvent ainsi être mises en évidence.

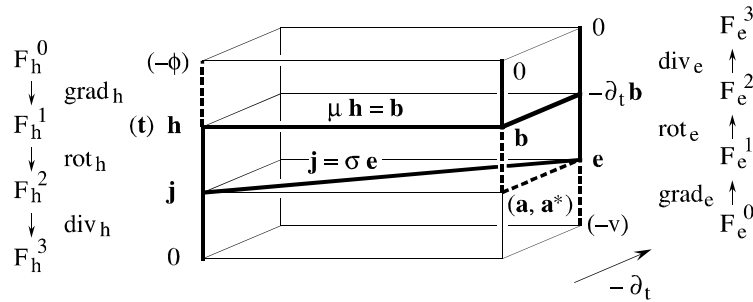


Fig. 1. Diagramme de Tonti du problème des courants induits.

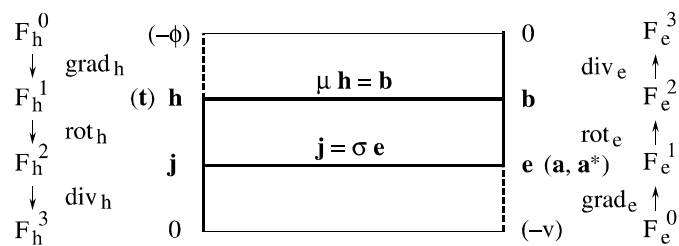


Fig. 2. Diagramme de Tonti du problème des courants induits (avec abstraction de la dérivation temporelle).

Notons que le diagramme de la figure 1 peut être facilement complété pour prendre en compte les courants de déplacement. Il suffit pour cela d'ajouter les champs  $\mathbf{d}$  et  $\rho_v$  à l'arrière de la partie gauche du diagramme, aux niveaux respectifs 2 et 3, de définir l'opérateur de dérivation temporelle sur cette même partie et de placer la loi de comportement  $\mathbf{d} = \epsilon \mathbf{e}$  sur le segment horizontal reliant  $\mathbf{d}$  à  $\mathbf{e}$  (Bossavit, 1991c).

### 3. Sources du champ magnétique

Des **conducteurs actifs**, ou **inducteurs**, sont à l'origine d'un champ magnétique.

#### 3.1 Les sources extérieures

Un inducteur peut être extérieur au domaine d'étude  $\Omega$ . Le champ inducteur correspondant, ou champ source, est alors entièrement déterminé. C'est par exemple le cas lorsque nous voulons considérer un champ source de direction uniforme dans le domaine d'étude.

#### 3.2 Les inducteurs bobinés

Un inducteur, ou conducteur actif, bobiné — c'est-à-dire constitué d'un certain nombre de brins conducteurs avec une entrée et une sortie de courant — peut être modélisé par une densité de courant donnée lorsque l'épaisseur de peau est grande par rapport à la dimension d'un fil conducteur. En effet, le champ de réaction d'induit est dans ce cas négligeable, et par conséquent ne perturbe pas la distribution spatiale du champ magnétique.

Un inducteur  $\Omega_s$  (Fig. 1), dans lequel la densité de courant  $\mathbf{j}_s$  est connue, peut être pris en compte grâce à la définition d'un champ  $\mathbf{h}_s$ , appelé **champ source**, qui vérifie

$$\text{rot } \mathbf{h}_s = \mathbf{j}_s \text{ dans } \Omega_s, \quad \text{rot } \mathbf{h}_s = 0 \text{ dans } \Omega_s^C, \quad (1a-b)$$

et donc appartient à l'espace  $H_s$  défini par

$$H_s = \{ \mathbf{h}_s \in F_h^1 ; \text{rot } \mathbf{h}_s = 0 \text{ dans } \Omega_s^C \}. \quad (2)$$

Comme un tel champ n'est pas unique, nous avons une certaine liberté quant à son expression.

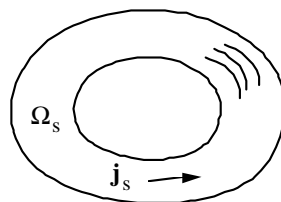


Fig. 1. Inducteur de type  $\Omega_s$ .

#### 3.3 Les inducteurs massifs

Un inducteur massif peut être le siège de courants induits. C'est le cas lorsque l'épaisseur de peau est inférieure à certaines de ses dimensions.

Considérons un conducteur actif  $\Omega_a$  (Fig. 2) pour lequel des grandeurs globales, telles que courant et tension, sont définies. Dans un tel inducteur, considérons qu'il y a une source de **champ électrique électromoteur**  $\mathbf{e}_a$ , localisée entre deux sections  $S_{a1}$  et  $S_{a2}$  très proches l'une de l'autre dans  $\Omega_a$ . Le sous-domaine de  $\Omega_a$  compris entre ces deux sections constitue un **générateur** et est noté  $\Omega_{ae}$ .



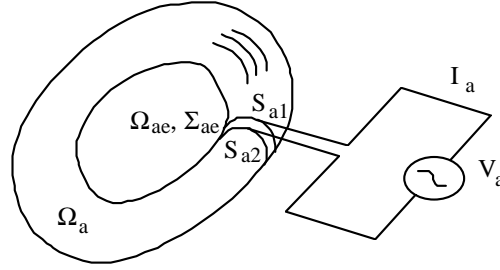


Fig. 2. Inducteur actif.

Si l'on fait tendre  $S_{a1}$  vers  $S_{a2}$ , le sous-domaine  $\Omega_{ae}$  tend vers une section  $\Sigma_{ae}$ . Le champ électrique électromoteur est alors localisé sur cette section et peut s'exprimer par

$$\mathbf{e}_a(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_\Sigma(\mathbf{x}_\Sigma) V_a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Sigma), \quad (3)$$

où  $\mathbf{x}$  est un point de  $\Omega_{ae}$ ,  $\mathbf{x}_\Sigma$  est sa projection sur  $\Sigma_{ae}$ ,  $\mathbf{n}_\Sigma(\mathbf{x}_\Sigma)$  est la normale à  $\Sigma_{ae}$  en  $\mathbf{x}_\Sigma$  et  $V_a$  est une quantité scalaire, représentant une **force électromotrice** (f.e.m.) pouvant dépendre du temps. Vu de l'extérieur, un générateur est la source d'une différence de potentiel électrique égale à  $V_a$ . Dans un tel inducteur, la loi d'Ohm s'écrit

$$\mathbf{e} = \sigma^{-1} \mathbf{j} - \mathbf{e}_a \quad \text{dans } \Omega_{ae}, \quad \mathbf{e} = \sigma^{-1} \mathbf{j} \quad \text{dans } \Omega_a \setminus \Omega_{ae}. \quad (4-5)$$

## 4. Formulations

Dans un premier temps, choisissons de chercher les champs  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{e}$  tels que

$$\mathbf{h} \in F_h^1, \quad \mathbf{j} \in F_h^2, \quad \mathbf{b} \in F_e^2, \quad \mathbf{e} \in F_e^1.$$

Choisissons ensuite d'exprimer les équations (2.1) et (2.2) sous forme forte et les lois de comportement (2.4) et (2.5) sous forme faible.

Au niveau discret, ces lois ne pourront pas être vérifiées exactement. En effet, les espaces d'approximation de  $F_h^1$  et  $F_e^2$  d'une part, et de  $F_h^2$  et  $F_e^1$  d'autre part, sont en général différents. Il ne peut alors pas exister de relations du type des lois de comportement entre des éléments de ces ensembles. A vrai dire, puisqu'on discrétise, il doit bien apparaître une erreur d'approximation : elle se situera dans les relations constitutives, que l'on ne peut se contenter que de satisfaire au "mieux", c'est-à-dire faiblement. Par contre, les équations (2.1) et (2.2) pourront être satisfaites exactement pour les champs approchés ; si toutefois ceux-ci appartiennent à des espaces d'approximation qui le permettent, ce qui sera bien le cas.

Choisissons maintenant de considérer le problème des courants induits de deux façons différentes.

Premièrement, prenons  $\mathbf{h}$  dans  $F_h^1$  et  $\mathbf{j}$  dans  $F_h^2$  pour que l'équation (2.1) puisse être satisfaite exactement, et satisfaisons exactement les lois de comportement (2.4) et (2.5). Ceci revient à placer  $\mathbf{b}$  dans  $F_h^1$  et  $\mathbf{e}$  dans  $F_h^2$ , et ne permet donc de formuler l'équation (2.2) que faiblement. Cette méthode portera le nom de **formulation conforme en h**. Notons qu'elle est également conforme en  $\mathbf{j}$  et, plus généralement, pour tout le côté gauche du diagramme de Tonti de la figure 2.1.

Deuxièmement, prenons  $\mathbf{b}$  dans  $F_e^2$  et  $\mathbf{e}$  dans  $F_e^1$  pour que l'équation (2.2) puisse être satisfaite exactement, et satisfaisons encore exactement les lois de comportement (2.4) et (2.5). Ceci revient cette fois à placer  $\mathbf{h}$  dans  $F_e^2$  et  $\mathbf{j}$  dans  $F_e^1$ , et ne permet donc de formuler l'équation (2.1) que faiblement. Cette méthode portera le nom de **formulation conforme en b**. Elle est également conforme en  $\mathbf{e}$  et, plus généralement, pour tout le côté droit du diagramme de Tonti de la figure 2.1.

Chacune de ces deux méthodes a ses avantages. Le choix de l'une d'entre elles se fera en fonction du type de conformité désirée. La formulation en  $\mathbf{h}$  permet de satisfaire exactement la loi d'Ampère, alors que la formulation en  $\mathbf{e}$  permet de satisfaire exactement la loi de Faraday.

## 5. Formulations conformes en $\mathbf{h}$

### 5.1 Formulation mixte en $\mathbf{h}$ et $\mathbf{e}$

Prenons  $\mathbf{h}$  dans  $F_h^1$  et  $\mathbf{j}$  dans  $F_h^2$  de sorte que l'équation d'Ampère (2.1) puisse être satisfaite exactement. Satisfaisons également exactement les lois de comportement (2.4) et (2.5). Au niveau discret, cela revient à placer  $\mathbf{b}$  dans  $F_h^1$  et  $\mathbf{e}$  dans  $F_h^2$ , et ne permet donc de vérifier l'équation de Faraday (2.2) que de façon approchée. Exprimons alors dès maintenant cette équation en formulation faible avec néanmoins, dans un premier temps,  $\mathbf{b}$  dans  $F_e^2$  et  $\mathbf{e}$  dans  $F_e^1$ , c'est-à-dire avant l'expression forte des lois de comportement.

La formulation faible de l'équation de Faraday (2.2) va de pair avec la forme intégrale

$$\partial_t(\mathbf{b}, \mathbf{h}') + (\text{rot } \mathbf{e}, \mathbf{h}') = 0, \quad \forall \mathbf{h}' \in F_{h0}^1, \quad (1)$$

dans laquelle les termes de l'équation (2.2) apparaissent explicitement et où  $\mathbf{h}'$  est un champ-test, indépendant du temps (c'est le cas pour tous les champs-test). Elle s'exprime en effet, en terme de l'opérateur adjoint du rotationnel (II.A.3.13), sous la forme

$$\partial_t(\mathbf{b}, \mathbf{h}') + (\mathbf{e}, \text{rot } \mathbf{h}') = 0, \quad \forall \mathbf{h}' \in F_{h0}^1. \quad (2)$$

En portant la loi de comportement (2.4) dans cette forme faible, nous obtenons finalement

$$\partial_t(\mu \mathbf{h}, \mathbf{h}') + (\mathbf{e}, \text{rot } \mathbf{h}') = 0, \quad \forall \mathbf{h}' \in F_{h0}^1. \quad (3)$$

L'équation d'Ampère (2.1) peut également s'écrire sous forme intégrale avec champ-test, c'est-à-dire

$$(\text{rot } \mathbf{h}, \mathbf{j}') = (\mathbf{j}, \mathbf{j}'), \quad \forall \mathbf{j}' \in F_h^2. \quad (4)$$

Cette forme est souvent appelée forme faible, mais c'est un abus de langage car elle ne répond pas à la définition qui en a été donnée. En effet, aucun opérateur adjoint n'y est impliqué. En réalité, au niveau discret, elle conduit à satisfaire exactement l'équation (2.1).

L'introduction de la loi d'Ohm (2.5, 3.4-5) dans (4) conduit à

$$(\text{rot } \mathbf{h}, \mathbf{j}') - (\sigma \mathbf{e}, \mathbf{j}')_{\Omega_p \cup \Omega_a} - (\sigma \mathbf{e}_a, \mathbf{j}')_{\Omega_{ae}} = (\mathbf{j}_s, \mathbf{j}')_{\Omega_s}, \quad \forall \mathbf{j}' \in F_h^2, \quad (5)$$

où le troisième terme peut être simplifié grâce à l'expression (3.3) de  $\mathbf{e}_a$ ,

$$(\sigma \mathbf{e}_a, \mathbf{j}')_{\Omega_{ae}} = \sigma V_a (\mathbf{n}_\Sigma \delta, \mathbf{j}')_{\Omega_{ae}} = \sigma V_a \langle \mathbf{n}_\Sigma, \mathbf{j}' \rangle_{\Sigma_{ae}} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma V_a I_a(\mathbf{j}'), \quad (6)$$

pour conduire finalement à l'équation suivante :

$$(\text{rot } \mathbf{h}, \mathbf{j}') - (\sigma \mathbf{e}, \mathbf{j}')_{\Omega_c} - \sigma V_a I_a(\mathbf{j}') = (\mathbf{j}_s, \mathbf{j}')_{\Omega_s}, \quad \forall \mathbf{j}' \in F_h^2. \quad (7)$$

Les équations (3) et (7) constituent une **formulation mixte en  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{e}$** , où seule la conformité en  $\mathbf{h}$  est assurée. Cette formulation ne se prête cependant pas à une résolution numérique aisée et on préfère souvent la réduire à une forme qui ne s'exprime qu'en fonction de  $\mathbf{h}$ . C'est la **formulation en  $\mathbf{h}$** .

## 5.2 Formulation en $\mathbf{h}$

### 5.2.1 Etablissement de la formulation faible en $\mathbf{h}$

Nous pouvons éliminer le champ  $\mathbf{e}$  des équations (3) et (7) pour obtenir une équation unique. Pour ce faire, il est intéressant de revenir à la forme forte de l'équation (2.1), plutôt que de considérer la forme intégrale équivalente (7). La loi d'Ohm (2.5) nous permet d'exprimer le champ  $\mathbf{e}$  dans les domaines conducteurs, et ainsi d'écrire

$$\mathbf{e} = \sigma^{-1} \mathbf{j} \quad \text{dans } \Omega_p \text{ et dans } \Omega_a \setminus \Omega_{ae}, \quad (8a)$$

$$\mathbf{e} = \sigma^{-1} \mathbf{j} - \mathbf{e}_a \quad \text{dans } \Omega_{ae}, \quad (8b)$$

$$\mathbf{e} \text{ non défini dans } \Omega_c^C, \quad (8c)$$

avec  $\mathbf{j}$  donné par (2.1), i.e.  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{h}$ . Ces différentes expressions de  $\mathbf{e}$  peuvent être introduites dans l'équation (3) pour conduire à

$$\partial_t (\mu \mathbf{h}, \mathbf{h}') + (\sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{h}, \text{rot } \mathbf{h}')_{\Omega_p \cup \Omega_a} + (\mathbf{e}, \text{rot } \mathbf{h}')_{\Omega_c^C} = (\mathbf{e}_a, \text{rot } \mathbf{h}')_{\Omega_{ae}}, \quad \forall \mathbf{h}' \in F_{h0^1}. \quad (9)$$

A ce stade de la formulation, nous devons remarquer que la **contrainte** (2.5b),  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s$  dans  $\Omega_s$ , n'a pas encore été utilisée, mais doit bien entendu accompagner cette dernière équation. Nous avons vu qu'elle conduit à définir un champ source  $\mathbf{h}_s$  qui satisfait (3.1a) et qui appartient à l'espace  $H_s$  (3.2). Si nous faisons intervenir explicitement  $\mathbf{h}_s$  dans l'expression de  $\mathbf{h}$  en posant

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_r + \mathbf{h}_s, \quad (10)$$

alors, comme

$$\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j}_s \quad \text{dans } \Omega_s$$

et

$$\text{rot } \mathbf{h} = 0 \quad \text{dans } \Omega_c^C - \Omega_s,$$

il résulte que

$$\text{rot } \mathbf{h}_r = 0 \quad \text{dans } \Omega_c^C. \quad (11)$$

Le champ  $\mathbf{h}_r$ , appelé **champ de réaction**, est l'inconnue de notre problème. Le champ-test associé  $\mathbf{h}'$  peut donc n'appartenir qu'à un sous-espace de  $F_{h0^1}$ , noté  $H_r$ , qui est défini par

$$H_r = \{ \mathbf{h}_r \in F_{h0^1}; \text{rot } \mathbf{h}_r = 0 \text{ dans } \Omega_c^C \}. \quad (12)$$

C'est ainsi que le troisième terme de (9) s'annule et qu'il est possible de s'affranchir de la connaissance du champ  $\mathbf{e}$  dans  $\Omega_c^C$ . Rappelons que les équations considérées du problème des courants induits ne permettent pas de déterminer le champ  $\mathbf{e}$  dans les régions non conductrices. Enfin, le membre de droite de l'équation (9) peut être simplifié grâce à l'expression (3.3) de  $\mathbf{e}_a$ , qui donne

$$(\mathbf{e}_a, \text{rot } \mathbf{h}')_{\Omega_{ae}} = V_a (\mathbf{n}_\Sigma \delta, \text{rot } \mathbf{h}')_{\Omega_{ae}} = V_a \langle \mathbf{n}_\Sigma, \text{rot } \mathbf{h}' \rangle_{\Sigma_{ae}} \stackrel{\text{def}}{=} V_a I_a(\text{rot } \mathbf{h}'), \quad (13)$$

où

$$I_a(\text{rot } \mathbf{h}') \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{n}_\Sigma, \text{rot } \mathbf{h}' \rangle_{\Sigma_{ae}} \quad (14)$$

est le flux de la densité de courant  $\mathbf{j}' = \text{rot } \mathbf{h}'$  à travers  $\Sigma_{ae}$ , c'est-à-dire le **courant global** correspondant qui parcourt l'inducteur  $\Omega_a$ , et  $V_a$  est la **force électromotrice** injectée dans cet

inducteur. Il faut noter que ce courant ne correspond au courant réel que dans le cas particulier où le champ-test  $\mathbf{h}'$  est le champ de réaction réel.

La **formulation en  $\mathbf{h}$**  du problème des courants induits peut donc s'exprimer comme ci-dessous.

Connaissant le champ magnétique  $\mathbf{h}$  à l'instant zéro, il s'agit de rechercher la solution  $\mathbf{h}$ , pour  $t \geq 0$ , du problème suivant :

$$\partial_t(\mu \mathbf{h}, \mathbf{h}') + (\sigma^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{h}, \operatorname{rot} \mathbf{h}')_{\Omega_c} = V_a I_a (\operatorname{rot} \mathbf{h}'), \quad \forall \mathbf{h}' \in H_r, \quad (15)$$

où

$$H_r = \{ \mathbf{h}_r \in F_{h0^1}; \operatorname{rot} \mathbf{h}_r = 0 \text{ dans } \Omega_c^C \},$$

et

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_r + \mathbf{h}_s,$$

avec

$$\mathbf{h}_s \in H_s, \quad H_s = \{ \mathbf{h}_s \in F_{h1^1}; \operatorname{rot} \mathbf{h}_s = 0 \text{ dans } \Omega_s^C \}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{h}_s = \mathbf{j}_s \text{ dans } \Omega_s.$$

Cette formulation en  $\mathbf{h}$  peut avantageusement se transformer en une formulation  $\mathbf{h}$ - $\phi$  afin de définir explicitement l'espace  $H_r$ . Une telle transformation sera réalisée lors de l'établissement de la formulation discrète correspondante.

### 5.2.2 Retour à la formulation forte

Déterminons les équations fortes qui sont impliquées par la formulation faible en  $\mathbf{h}$  (15). Dans ce but, choisissons différents types de champs-test, qui couvrent des sous-espaces de  $H_r$  (Bossavit, 1984c).

Considérons tout d'abord les champs-test de la forme  $\mathbf{h}' = -\operatorname{grad} \phi'$ , où  $\phi' \in F_{h0^0}$  et  $\operatorname{supp} \phi' = \Omega$ . La formulation (15) se réduit alors à la forme

$$\partial_t(\mu \mathbf{h}, -\operatorname{grad} \phi') = 0, \quad \forall \phi' \in F_{h0^0},$$

qui entraîne, grâce à la formule de Green de type grad-div (II.A.2.21),

$$\partial_t(\operatorname{div}(\mu \mathbf{h}), \phi') - \partial_t \langle \mathbf{n} \cdot (\mu \mathbf{h}), \phi' \rangle_{\Gamma_e} = 0, \quad \forall \phi' \in F_{h0^0}.$$

Il en résulte les relations

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{h}) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\mu \mathbf{h})|_{\Gamma_e} = 0, \quad (16-17)$$

à condition toutefois que celles-ci soient vérifiées à l'instant initial. L'équation (2.3) est donc vérifiée, partout dans  $\Omega$ , ainsi que la condition à la limite (2.7a). Notons que la condition à la limite (2.6a) est implicite dans la définition de l'espace  $F_{h1^1}$ .

Ensuite, choisissons les champs-test  $\mathbf{h}' \in F_{h0^1}$  tels que  $\operatorname{supp} \mathbf{h}' = \Omega_c$  et  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{h}'|_{\partial\Omega_c} = 0$ . La formulation (15) devient alors

$$\partial_t(\mu \mathbf{h}, \mathbf{h}')_{\Omega_c} + (\sigma^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{h}, \operatorname{rot} \mathbf{h}')_{\Omega_c} = 0,$$

pour tout champ-test  $\mathbf{h}'$  ainsi défini. L'application de la formule de Green de type rot-rot (II.A.2.22) conduit à

$$\partial_t(\mu \mathbf{h}, \mathbf{h}')_{\Omega_c} + (\operatorname{rot}(\sigma^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{h}), \mathbf{h}')_{\Omega_c} = 0,$$

et il en résulte que

$$\partial_t (\mu \mathbf{h}) + \text{rot} (\sigma^{-1} \text{rot} \mathbf{h}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_c, \quad (18)$$

qui correspond à l'équation de Faraday (2.2) dans  $\Omega_c$ .

Considérons maintenant les champs-test  $\mathbf{h}' \in F_{h0}^1$  tels que  $\mathbf{h}' = -\text{grad} \phi'$  dans  $\Omega_c^C$ . Ces champs appartiennent bien à l'espace  $H_r$ , mais ne couvrent en général pas tout cet espace car le domaine  $\Omega_c^C$  peut être multiplement connexe, c'est-à-dire que  $\phi'$  peut être multivoque. La formulation (15) devient, pour tout champ-test  $\mathbf{h}'$  ainsi défini,

$$\partial_t (\mu \mathbf{h}, \mathbf{h}')_{\Omega_c} + (\sigma^{-1} \text{rot} \mathbf{h}, \text{rot} \mathbf{h}')_{\Omega_c} + \partial_t (\mu \mathbf{h}, -\text{grad} \phi')_{\Omega_c^C} = 0. \quad (19)$$

Les deux premiers termes de cette équation conduisent, par application de la formule de Green de type rot-rot (II.A.2.22), à

$$\begin{aligned} & \partial_t (\mu \mathbf{h}, \mathbf{h}')_{\Omega_c} + (\sigma^{-1} \text{rot} \mathbf{h}, \text{rot} \mathbf{h}')_{\Omega_c} \\ &= \partial_t (\mu \mathbf{h}, \mathbf{h}')_{\Omega_c} + (\text{rot} (\sigma^{-1} \text{rot} \mathbf{h}), \mathbf{h}')_{\Omega_c} - \langle \mathbf{n} \wedge (\sigma^{-1} \text{rot} \mathbf{h}), \mathbf{h}' \rangle_{\partial \Omega_c} \end{aligned}$$

et ensuite, en tenant compte de (18), en écrivant  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{h}'|_{\partial \Omega_c} = -\mathbf{n} \wedge \text{grad} \phi'|_{\partial \Omega_c}$  par prolongement et en posant  $\mathbf{e} = \sigma^{-1} \text{rot} \mathbf{h}$ , il reste

$$\partial_t (\mu \mathbf{h}, \mathbf{h}')_{\Omega_c} + (\sigma^{-1} \text{rot} \mathbf{h}, \text{rot} \mathbf{h}')_{\Omega_c} = \langle \mathbf{e} \wedge \text{grad} \phi', \mathbf{n} \rangle_{\partial \Omega_c}.$$

Grâce à la relation vectorielle  $\mathbf{e} \wedge \text{grad} \phi' = \phi' \text{rot} \mathbf{e} - \text{rot} (\phi' \mathbf{e})$ , la dernière expression devient

$$\partial_t (\mu \mathbf{h}, \mathbf{h}')_{\Omega_c} + (\sigma^{-1} \text{rot} \mathbf{h}, \text{rot} \mathbf{h}')_{\Omega_c} = \langle \phi' \text{rot} \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle_{\partial \Omega_c}, \quad (20)$$

car  $\langle \text{rot} (\phi' \mathbf{e}), \mathbf{n} \rangle_{\partial \Omega_c} = 0$  (par application du théorème de Stokes, avec  $\partial(\partial \Omega_c) = \emptyset$ ).

Le troisième terme de l'équation (19) peut, par application de la formule de Green de type grad-div (II.A.2.21), se transformer selon

$$\partial_t (\mu \mathbf{h}, -\text{grad} \phi')_{\Omega_c^C} = \partial_t (\text{div} (\mu \mathbf{h}), \phi')_{\Omega_c^C} - \partial_t \langle \mathbf{n} \cdot (\mu \mathbf{h}), \phi' \rangle_{\partial \Omega_c^C},$$

et ensuite, en tenant compte de (16) et (17), il reste

$$\partial_t (\mu \mathbf{h}, -\text{grad} \phi')_{\Omega_c^C} = +\partial_t \langle \mathbf{n} \cdot (\mu \mathbf{h}), \phi' \rangle_{\partial \Omega_c}, \quad (21)$$

où  $\mathbf{n}$  est maintenant la normale extérieure à  $\Omega_c$ , qui est opposée à la normale extérieure à  $\Omega_c^C$ , sur la frontière commune à ces deux domaines.

Portant (20) et (21) dans l'équation (19), cette dernière devient

$$\langle \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{e}, \phi' \rangle_{\partial \Omega_c} + \partial_t \langle \mathbf{n} \cdot (\mu \mathbf{h}), \phi' \rangle_{\partial \Omega_c} = 0$$

et entraîne, puisque  $\phi'$  est quelconque, la relation

$$\mathbf{n} \cdot (\text{rot} \mathbf{e} + \partial_t (\mu \mathbf{h}))|_{\partial \Omega_c} = 0, \quad (22)$$

qui est la projection normale à  $\partial \Omega_c$  de l'équation de Faraday (2.2).

On peut finalement montrer, en considérant tous les champs-test  $\mathbf{h}' \in H_r$ , que la circulation de  $\mathbf{e}$  le long d'une courbe fermée sur  $\partial \Omega_c$  entourant un trou dans  $\Omega_c$  est égale à la dérivée temporelle du flux de l'induction à travers ce trou (Bossavit, 1984a). Pour cela, on peut se limiter aux champs-test  $\mathbf{h}' \in \mathbb{H}_1(\Omega_c^C)$  (II.A.2.39).

### 5.2.3 Interprétation physique de la formulation faible en $\mathbf{h}$

Considérons qu'aucun domaine de type  $\Omega_s$  n'est présent dans le domaine d'étude, et donc que  $\mathbf{h}_s = 0$ . Si le champ  $\mathbf{h}$  est solution du problème (15), alors la formulation faible associée

est vérifiée pour tout champ-test  $\mathbf{h}' \in H_r$  et donc, en particulier, pour  $\mathbf{h}' = \mathbf{h}$ , à un instant fixé. Ainsi, la formulation (15) se réduit à la relation

$$(\partial_t(\mu \mathbf{h}), \mathbf{h}) + (\sigma^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{h}, \operatorname{rot} \mathbf{h})_{\Omega_c} = V_a I_a(\operatorname{rot} \mathbf{h}). \quad (23)$$

Nous allons voir que cette relation exprime un **bilan énergétique**. Tout d'abord, le terme

$$V_a I_a(\operatorname{rot} \mathbf{h}) = V_a I_a(\mathbf{j}) = V_a I_a \quad (24)$$

représente la **puissance fournie par les sources de force électromotrice**. Ensuite, le terme

$$(\sigma^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{h}, \operatorname{rot} \mathbf{h})_{\Omega_c} = (\sigma^{-1} \mathbf{j}, \mathbf{j})_{\Omega_c} = \int_{\Omega_c} \sigma^{-1} j^2 dx \quad (25)$$

représente la **puissance dissipée par effet Joule** dans les régions conductrices  $\Omega_c$ . Finalement, le terme

$$(\partial_t(\mu \mathbf{h}), \mathbf{h}) = \partial_t W_b(\mathbf{b}) \quad (26)$$

représente la **variation temporelle de l'énergie magnétique**. En effet, l'énergie magnétique  $W_b(\mathbf{b})$ , donnée par (III.A.4.1), est liée à la coénergie magnétique  $W_h(\mathbf{h})$ , donnée par (III.A.4.2), par la relation

$$W_b(\mathbf{b}) = (\mathbf{h}, \mathbf{b}) - W_h(\mathbf{h}),$$

qui résulte de (III.A.4.6). Ainsi, cette relation devient

$$\partial_t W_b(\mathbf{b}) = \partial_t (\mathbf{h}, \mu \mathbf{h}) - \partial_t W_h(\mathbf{h}),$$

et, en développant le second membre, nous obtenons

$$\partial_t W_b(\mathbf{b}) = (\partial_t \mathbf{h}, \mu \mathbf{h}) + (\mathbf{h}, \partial_t(\mu \mathbf{h})) - (\mu \mathbf{h}, \partial_t \mathbf{h}) = (\partial_t(\mu \mathbf{h}), \mathbf{h}).$$

Cette interprétation physique directe n'est possible que si aucun domaine de type  $\Omega_s$  n'est présent, ni dans le domaine d'étude, ni à l'extérieur. En effet, si un tel domaine existe dans le domaine d'étude, alors, puisque nous renonçons à connaître le champ électrique  $\mathbf{e}$  à l'extérieur des régions conductrices, c'est-à-dire dans  $\Omega_c^C$  et donc, dans  $\Omega_s$ , la formulation (15) ne renferme pas les informations nécessaires pour connaître les puissances du type  $(\sigma^{-1} \mathbf{j}_s, \mathbf{j}_s)_{\Omega_s}$ ; la conductivité  $\sigma$  n'y est même pas définie. De plus, pour un domaine  $\Omega_s$  existant à l'extérieur du domaine d'étude, les sources ne sont pas modélisées.

## 6. Formulations conformes en $\mathbf{b}$

### 6.1 Formulation mixte en $\mathbf{e}$ et $\mathbf{h}$

Prenons  $\mathbf{b}$  dans  $F_e^2$  et  $\mathbf{e}$  dans  $F_e^1$  de sorte que l'équation de Faraday (2.2) puisse être satisfaite exactement. Satisfaisons également exactement les lois de comportement (2.4) et (2.5). Au niveau discret, cela revient à placer  $\mathbf{h}$  dans  $F_e^2$  et  $\mathbf{j}$  dans  $F_e^1$ , et ne permet donc de vérifier l'équation d'Ampère (2.1) que de façon approchée. Exprimons alors dès maintenant cette équation en formulation faible.

La formulation faible de l'équation d'Ampère (2.1) va de pair avec la forme intégrale

$$(\operatorname{rot} \mathbf{h}, \mathbf{a}') = (\mathbf{j}, \mathbf{a}'), \quad \forall \mathbf{a}' \in F_{e0}^1, \quad (1)$$

dans laquelle les termes de l'équation (2.1) apparaissent explicitement et où  $\mathbf{a}'$  est un champ-test. Elle s'exprime en effet, en terme de l'opérateur adjoint du rotationnel (II.A.3.13), sous la forme

$$(\mathbf{h}, \text{rot } \mathbf{a}') = (\mathbf{j}, \mathbf{a}'), \quad \forall \mathbf{a}' \in F_{e0}^1. \quad (2)$$

En limitant le second terme de cette forme faible au support de  $\mathbf{j}$  et en considérant les relations (2.5a-b) et (3.4-5), nous obtenons

$$(\mathbf{h}, \text{rot } \mathbf{a}') = (\sigma \mathbf{e}, \mathbf{a}')_{\Omega_p \cup \Omega_a} + (\sigma \mathbf{e}_a, \mathbf{a}')_{\Omega_{ae}} + (\mathbf{j}_s, \mathbf{a}')_{\Omega_s}, \quad \forall \mathbf{a}' \in F_{e0}^1, \quad (3)$$

où le troisième terme peut être développé grâce à l'expression (3.3) de  $\mathbf{e}_a$ , qui donne

$$(\sigma \mathbf{e}_a, \mathbf{a}')_{\Omega_{ae}} = \sigma V_a (\mathbf{n}_\Sigma \delta, \mathbf{a}')_{\Omega_{ae}} = \sigma V_a \langle \mathbf{n}_\Sigma, \mathbf{a}' \rangle_{\Sigma_{ae}} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma V_a I_a(\mathbf{a}'). \quad (4)$$

Portant (4) dans (3), nous obtenons finalement l'équation suivante :

$$(\mathbf{h}, \text{rot } \mathbf{a}') = (\sigma \mathbf{e}, \mathbf{a}')_{\Omega_p \cup \Omega_a} + (\mathbf{j}_s, \mathbf{a}')_{\Omega_s} + \sigma V_a I_a(\mathbf{a}'), \quad \forall \mathbf{a}' \in F_{e0}^1. \quad (5)$$

L'équation de Faraday (2.2) peut également s'écrire sous forme intégrale avec champ-test, c'est-à-dire

$$(\text{rot } \mathbf{e}, \mathbf{b}') = -\partial_t (\mu \mathbf{h}, \mathbf{b}'), \quad \forall \mathbf{b}' \in F_e^2. \quad (6)$$

Cette forme est souvent appelée, par abus de langage, forme faible de l'équation (2.2).

Les équations (5) et (6) constituent une **formulation mixte en e et h**, où seule la conformité en **e** est assurée. On préfère souvent la réduire à une forme qui ne s'exprime qu'en fonction de **e** et qui constitue la **formulation en e**.

## 6.2 Formulation en e

Nous pouvons éliminer le champ **h** des équations (5) et (6) pour obtenir une équation unique. Pour ce faire, il est intéressant de revenir à la forme forte de l'équation (2.2), plutôt que de considérer la forme intégrale équivalente (6). Portons la loi de comportement (2.4) dans (5), puis dérivons par rapport au temps l'équation obtenue. Sous l'hypothèse d'invariance de la perméabilité  $\mu$  avec le temps, nous obtenons

$$\partial_t (\sigma \mathbf{e}, \mathbf{a}')_{\Omega_c} - (\mu^{-1} \partial_t \mathbf{b}, \text{rot } \mathbf{a}') = -\partial_t (\mathbf{j}_s, \mathbf{a}')_{\Omega_s} - \partial_t (V_a I_a(\mathbf{a}')), \quad \forall \mathbf{a}' \in F_{e0}^1. \quad (7)$$

Portant finalement l'équation de Faraday (2.2) dans cette équation, elle devient

$$\partial_t (\sigma \mathbf{e}, \mathbf{a}')_{\Omega_c} + (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{e}, \text{rot } \mathbf{a}') = -\partial_t (\mathbf{j}_s, \mathbf{a}')_{\Omega_s} - \partial_t (V_a I_a(\mathbf{a}')), \quad \forall \mathbf{a}' \in F_{e0}^1. \quad (8)$$

Du fait de l'hypothèse considérée sur la perméabilité, cette équation ne peut pas s'appliquer à des matériaux non linéaires. C'est un inconvénient qui peut être éliminé grâce à l'introduction d'un potentiel vecteur.

## 6.3 Formulation en $\mathbf{a}^*$

Considérons le **potentiel vecteur modifié**  $\mathbf{a}^*$ , défini par

$$\mathbf{a}^* \in F_e^1, \quad \mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a}^*, \quad \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{a}^*, \quad (9a-b-c)$$

de sorte que l'équation de Faraday puissent s'exprimer sous forme forte. Portant la loi de comportement (2.4), puis les expressions (9b) et (9c), dans (5), nous obtenons

$$\partial_t (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{a}^*, \mathbf{a}')_{\Omega_c} + (\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{a}^*, \operatorname{rot} \mathbf{a}') = (\mathbf{j}_s, \mathbf{a}')_{\Omega_s} + V_a I_a(\mathbf{a}'), \quad \forall \mathbf{a}' \in F_{e0}^1. \quad (10)$$

Cette dernière équation constitue la **formulation en potentiel vecteur modifié  $\mathbf{a}^*$** .

Nous savons que les informations manquent, dans les équations considérées, pour pouvoir déterminer le champ électrique  $\mathbf{e}$ , et donc  $\mathbf{a}^*$ , dans les régions non conductrices. Le potentiel vecteur  $\mathbf{a}^*$  n'est donc pas unique dans ces régions et il s'agit de lui associer une **condition de jauge**. Nous choisissons la jauge (I.3.24), i.e.

$$\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (11)$$

où  $\mathbf{w}$  est un champ de vecteurs dont les lignes de champ ne sont pas fermées et sont telles qu'elles peuvent relier toute paire de points quelconque du domaine d'étude (Albanese & Rubinacci, 1990a). Nous définirons un tel champ  $\mathbf{w}$  lors de l'établissement de la formulation discrète correspondante. Notons que la condition de jauge revient à réduire l'espace  $F_e^1$  de la solution  $\mathbf{a}^*$  et l'espace  $F_{e0}^1$  des champs-test.



# Partie B

## Formulation discrète

### 1. Discrétisation

La résolution analytique du problème des courants induits n'est en général pas possible. Ce **problème continu**, ou **exact**, doit être approché par un **problème discret**, formulé dans un **espace de dimension finie**.

Une telle transformation du problème porte le nom de **discrétisation**. Elle nécessite la réalisation d'un **maillage** des domaines géométriques impliqués, et l'association d'**éléments finis**, définis à la section II.B.2, aux éléments géométriques qui en résultent. Il s'agit donc de construire des **espaces d'éléments finis**. Les espaces  $S^i$ ,  $i=0$  à 3, définis à la section II.B.3, sont ceux que nous allons utiliser comme **équivalents discrets** des espaces  $F_h^i$ ,  $i=0$  à 3, et  $F_e^i$ ,  $i=0$  à 3.

Il s'agit en fait de réaliser une double discrétisation, c'est-à-dire une discrétisation de l'espace géométrique, suivie d'une discrétisation des champs qui y sont définis. Cette double discrétisation peut être considérée comme formant un tout grâce à la définition des espaces d'éléments finis.

Tous les espaces, tant géométriques que fonctionnels, qui vont apparaître dans la suite, sont des espaces discrets. Et, puisque toute confusion devient alors impossible, nous les notons, par facilité, de la même façon que les espaces continus dont ils sont les analogues. Ainsi, dans cette partie, les domaines  $\Omega$ ,  $\Omega_c$ ,  $\partial\Omega_c$ , ... , de même que les espaces  $F_h^i$ ,  $i=0$  à 3, et  $F_e^i$ ,  $i=0$  à 3,  $H_r$  et  $H_s$ , deviennent discrets.

### 2. Formulation en champ magnétique

#### 2.1 Espaces fonctionnels

Les équivalents discrets des espaces fonctionnels qui interviennent dans la formulation en  $\mathbf{h}$  (IV.A.5.15) sont

$$H_r = \{ \mathbf{h}_r \in F_{h_0}^1 ; \text{rot } \mathbf{h}_r = 0 \text{ dans } \Omega_c^C \} , \quad H_s = \{ \mathbf{h}_s \in F_h^1 ; \text{rot } \mathbf{h}_s = 0 \text{ dans } \Omega_s^C \} . \quad (1-2)$$

Ils sont ce que nous avons appelé à la section II.B.4.1, des noyaux réduits de l'opérateur rotationnel. Des fonctions de base y ont été déterminées.

Ainsi, comme le champ  $\mathbf{h}$  appartient à l'espace d'approximation  $F_h^1$ , nous pouvons l'exprimer sous la forme (II.B.3.14),

$$\mathbf{h} = \sum_{j \in A} h_j \mathbf{s}_j . \quad (3)$$

Il en est de même des champs source et de réaction,

$$\mathbf{h}_s = \sum_{j \in A} h_{s,j} \mathbf{s}_j , \quad \mathbf{h}_r = \sum_{j \in A} h_{r,j} \mathbf{s}_j . \quad (4-5)$$

De plus, le champ de réaction  $\mathbf{h}_r$  est un élément de l'espace  $H_r$  (1) et peut donc s'exprimer sous la forme générale (II.B.4.17),

$$\mathbf{h}_r = \sum_{j \in A_c} h_{r,j} \mathbf{s}_j + \sum_{j \in N_c^C} \phi_{r,j} \mathbf{v}_j + \sum_{j \in C_r} I_{r,j} \mathbf{c}_j , \quad (6)$$

- où •  $\phi_r$  est le **potentiel**, dit **de réaction**, associé à  $\mathbf{h}_r$  ;
- $A_c$  est l'ensemble des arêtes internes au domaine  $\Omega_c$  ;
  - $N_c^C$  est l'ensemble des noeuds de  $\Omega_c^C$  et de sa frontière  $\partial\Omega_c^C$  ;
  - $C_r$  est l'ensemble des **coupures** de  $\Omega_c^C$ , dites de **réaction**, associées au potentiel  $\phi_r$  et caractérisées par les discontinuités  $I_{r,j}$ ,  $\forall j \in C_r$ .

Quant au champ source  $\mathbf{h}_s$ , il est un élément de l'espace  $H_s$  (2) et peut donc aussi s'exprimer sous la forme (II.B.4.17),

$$\mathbf{h}_s = \sum_{j \in A_s} h_{s,j} \mathbf{s}_j + \sum_{j \in N_s^C} \phi_{s,j} \mathbf{v}_j + \sum_{j \in C_s} I_{s,j} \mathbf{c}_j , \quad (7)$$

- où •  $\phi_s$  est le **potentiel source** associé à  $\mathbf{h}_s$  ;
- $A_s$  est l'ensemble des arêtes internes au domaine  $\Omega_s$  ;
  - $N_s^C$  est l'ensemble des noeuds de  $\Omega_s^C$  et de sa frontière  $\partial\Omega_s^C$  ;
  - $C_s$  est l'ensemble des **coupures source** de  $\Omega_s^C$ , associées au potentiel  $\phi_s$  et caractérisées par les discontinuités  $I_{s,j}$ ,  $\forall j \in C_s$ .

Le champ  $\mathbf{h}_s$  est construit sur base de la méthode exposée à la section II.B.4.2 à partir d'une jauge naturelle dans l'espace des éléments d'arête. Son support est ainsi limité aux inducteurs et à un voisinage des coupures associées.

## 2.2 Forme matricielle de la formulation faible

### 2.2.1 Vecteurs de base et de composantes

Les coefficients des fonctions de base, ou composantes, qui apparaissent dans (6), peuvent être regroupés en vecteurs, définis par

$$\mathbf{x}_h = \begin{pmatrix} h_{r,1} \\ \vdots \\ h_{r,\#A_c} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_\phi = \begin{pmatrix} \phi_{r,1} \\ \vdots \\ \phi_{r,\#N_c^C} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_I = \begin{pmatrix} I_{r,1} \\ \vdots \\ I_{r,\#C_r} \end{pmatrix},$$

où le préfixe # associé à un ensemble donne la **dimension algébrique** de celui-ci, et où les indices numériques sont relatifs aux numéros d'ordre des éléments dans chacun des ensembles considérés. Ces vecteurs peuvent ensuite être réunis pour n'en former plus qu'un, appelé vecteur des **composantes du champ**  $\mathbf{h}_r$  dans la base de  $H_r$  et noté

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_h \\ \mathbf{x}_\phi \\ \mathbf{x}_I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \in X. \quad (8)$$

Celui-ci est un élément d'un espace appelé  $X$ , dont la dimension est la même que celle de l'espace  $H_r$ , c'est-à-dire

$$\dim X = \dim H_r = \#A_c + \#N_c^C + \#C_r.$$

Nous pouvons également définir les vecteurs des fonctions de base

$$\mathbf{e}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{\#A_c} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{\#N_c^C} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_I = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{\#C_r} \end{pmatrix},$$

et les réunir pour former ce que nous appelons la **base de l'espace**  $H_r$ ,

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_h \\ \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_I \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Les conditions aux limites sur  $\Gamma_h$ , associées à la définition de l'espace  $F_h^1$ , imposent la fixation de certaines composantes de  $\mathbf{x}$  : la composante tangentielle de  $\mathbf{h}_r$  est fixée sur  $\Gamma_h$  par l'intermédiaire de sa circulation le long des arêtes de  $\Gamma_h$  et  $\phi_r$  est fixé par l'intermédiaire de ses valeurs nodales. Pour les conditions aux limites homogènes considérées, nous pouvons laisser tomber ces composantes ainsi que les fonctions de base associées. Les composantes qui ne sont pas fixées constituent les **degrés de liberté** du problème. Nous continuerons à noter  $\#A_c$  et  $\#N_c^C$  le nombre de ces composantes, associées aux arêtes et aux noeuds qui ne sont pas situés sur  $\Gamma_h$ . Notons qu'il n'y aurait cependant pas de difficulté à considérer des conditions aux limites non homogènes. On définirait pour cela explicitement les vecteurs des composantes fixées,  $\mathbf{x}_{h,h}$  et  $\mathbf{x}_{\phi,h}$ , et les vecteurs des fonctions de base associées,  $\mathbf{e}_{h,h}$  et  $\mathbf{e}_{\phi,h}$ .

De même, nous pouvons regrouper en vecteurs les coefficients des fonctions de base présents dans (7),

$$\mathbf{x}_{s,h} = \begin{pmatrix} h_{s,1} \\ \vdots \\ h_{s,\#A_s} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{s,\phi} = \begin{pmatrix} \phi_{s,1} \\ \vdots \\ \phi_{s,\#N_s^C} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{s,I} = \begin{pmatrix} I_{s,1} \\ \vdots \\ I_{s,\#C_s} \end{pmatrix},$$

et réunir ceux-ci pour former le vecteur des **composantes du champ**  $\mathbf{h}_s$  dans la base de  $H_s$ ,

$$\mathbf{x}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{s,h} \\ \mathbf{x}_{s,\phi} \\ \mathbf{x}_{s,I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_s \in X_s. \quad (10)$$

Les vecteurs des fonctions de base,

$$\mathbf{e}_{s,h} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{\#A_s} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{s,\phi} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{\#N_s^C} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{s,I} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{\#C_s} \end{pmatrix},$$

peuvent aussi être réunis pour former la **base de l'espace**  $H_s$  qui est

$$\mathbf{e}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{s,h} \\ \mathbf{e}_{s,\phi} \\ \mathbf{e}_{s,I} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Il est important de noter que les numérotations des fonctions de base de  $H_s$  sont différentes de celles des fonctions de base de  $H_r$  ; elles sont propres aux ensembles des entités associées.

Grâce à ces notations vectorielles, les expressions (6) et (7) peuvent respectivement s'écrire

$$\mathbf{h}_r = \mathbf{x}_h^T \mathbf{e}_h + \mathbf{x}_\phi^T \mathbf{e}_\phi + \mathbf{x}_I^T \mathbf{e}_I, \quad \mathbf{h}_s = \mathbf{x}_{s,h}^T \mathbf{e}_{s,h} + \mathbf{x}_{s,\phi}^T \mathbf{e}_{s,\phi} + \mathbf{x}_{s,I}^T \mathbf{e}_{s,I},$$

ou encore, sous formes plus condensées,

$$\mathbf{h}_r = \mathbf{x}^T \mathbf{e}, \quad \mathbf{h}_s = \mathbf{x}_s^T \mathbf{e}_s. \quad (12-13)$$

Notons que pour des conditions aux limites non homogènes, on aurait

$$\mathbf{h}_r = \mathbf{x}^T \mathbf{e} + \mathbf{x}_{h,h}^T \mathbf{e}_{h,h} + \mathbf{x}_{\phi,h}^T \mathbf{e}_{\phi,h}. \quad (14)$$

### 2.2.2 Forme matricielle

Les expressions (12) et (13) peuvent être introduites dans l'équation (IV.A.5.15), i.e.

$$\partial_t (\mu (\mathbf{h}_s + \mathbf{h}_r), \mathbf{h}') + (\sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{h}_r, \text{rot } \mathbf{h}')_{\Omega_c} = V_a I_a (\text{rot } \mathbf{h}'), \quad \forall \mathbf{h}' \in H_r,$$

pour donner

$$\begin{aligned} & \partial_t (\mu \mathbf{x}^T \mathbf{e}, \mathbf{x}'^T \mathbf{e}) + \partial_t (\mu \mathbf{x}_s^T \mathbf{e}_s, \mathbf{x}'^T \mathbf{e}) \\ & + (\sigma^{-1} \mathbf{x}^T \text{rot } \mathbf{e}, \mathbf{x}'^T \text{rot } \mathbf{e})_{\Omega_c} = V_a I_a (\mathbf{x}'^T \text{rot } \mathbf{e}), \quad \forall \mathbf{x}' \in X, \end{aligned} \quad (15)$$

où  $\text{rot } \mathbf{e}$  est le vecteur des rotationnels des fonctions de base de  $\mathbf{e}$ . La formulation (15) est l'analogue semi-discret de (IV.A.5.15). Il y subsiste en effet une dérivée temporelle qui devra elle aussi être discrétisée pour conduire à la formulation discrète complète. En exprimant maintenant les produits scalaires sous forme de produits matriciels et en conservant les *parenthèses indicées* pour exprimer une intégration volumique — ce qui est un abus de notation —, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \partial_t (\mu \mathbf{x}'^T \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{x})_{\Omega} + \partial_t (\mu \mathbf{x}'^T \mathbf{e} \mathbf{e}_s^T \mathbf{x}_s)_{\Omega} \\ & + (\sigma^{-1} \mathbf{x}'^T \text{rot } \mathbf{e} \text{rot } \mathbf{e}^T \mathbf{x})_{\Omega_c} = V_a I_a (\mathbf{x}'^T \text{rot } \mathbf{e}), \quad \forall \mathbf{x}' \in X. \end{aligned} \quad (16)$$

Les termes de cette équation peuvent encore se transformer de façon à faire apparaître des matrices, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & (\mu \mathbf{x}'^T \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{x})_{\Omega} = \mathbf{x}'^T (\mu \mathbf{e} \mathbf{e}^T)_{\Omega} \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T \mathbf{E} \mathbf{x}, \\ & (\mu \mathbf{x}'^T \mathbf{e} \mathbf{e}_s^T \mathbf{x}_s)_{\Omega} = \mathbf{x}'^T (\mu \mathbf{e} \mathbf{e}_s^T)_{\Omega} \mathbf{x}_s = \mathbf{x}'^T \mathbf{E}_s \mathbf{x}_s, \\ & (\sigma^{-1} \mathbf{x}'^T \text{rot } \mathbf{e} \text{rot } \mathbf{e}^T \mathbf{x})_{\Omega_c} = \mathbf{x}'^T (\sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{e} \text{rot } \mathbf{e}^T)_{\Omega_c} \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T \mathbf{R} \mathbf{x}, \\ & V_a I_a (\mathbf{x}'^T \text{rot } \mathbf{e}) = \mathbf{x}'^T V_a I_a (\text{rot } \mathbf{e}). \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que les matrices  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{R}$  ainsi définies sont carrées et **symétriques**, alors que la matrice  $\mathbf{E}_s$  est en général rectangulaire. Ainsi, l'équation (16) devient

$$\partial_t (\mathbf{x}'^T \mathbf{E} \mathbf{x}) + \partial_t (\mathbf{x}'^T \mathbf{E}_s \mathbf{x}_s) + \mathbf{x}'^T \mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T V_a I_a (\text{rot } \mathbf{e}), \quad \forall \mathbf{x}' \in X, \quad (17)$$

et, puisque  $\mathbf{x}'$  peut être quelconque, nous avons finalement à résoudre le **système symétrique d'équations différentielles** suivant, d'inconnue  $\mathbf{x}$ ,

$$\boxed{\partial_t (\mathbf{E} \mathbf{x}) + \partial_t (\mathbf{E}_s \mathbf{x}_s) + \mathbf{R} \mathbf{x} = V_a I_a (\text{rot } \mathbf{e})}, \quad (18)$$

avec

$$\mathbf{E} = (\mu \mathbf{e} \mathbf{e}^T)_{\Omega} , \quad \mathbf{E}_s = (\mu \mathbf{e} \mathbf{e}_s^T)_{\Omega} , \quad \mathbf{R} = (\sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{e} \text{ rot } \mathbf{e}^T)_{\Omega_c} . \quad (19-20-21)$$

Les éléments de ces matrices peuvent s'écrire sous forme de produits internes, c'est-à-dire

$$E_{ij} = (\mu \mathbf{e}_i , \mathbf{e}_j)_{\Omega} , \quad E_{s,ij} = (\mu \mathbf{e}_i , \mathbf{e}_{s,j})_{\Omega} , \quad R_{ij} = (\sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{e}_i , \text{rot } \mathbf{e}_j)_{\Omega_c} , \quad (22-23-24)$$

où  $\mathbf{e}_i$  est la  $i^{\text{me}}$  composante du vecteur (de vecteurs)  $\mathbf{e}$ .

Les **matériaux saturables**, dans lesquels la perméabilité magnétique  $\mu$  est une fonction du champ magnétique  $\mathbf{h}$ , font apparaître des composantes des matrices  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{E}_s$  qui dépendent à la fois de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}_s$ . De tels matériaux confèrent donc un **caractère non linéaire** au système d'équations (18).

### Expression du flux de rot e

Le vecteur  $I_i(\text{rot } \mathbf{e})$ , associé à un conducteur actif (Fig. 1), qui apparaît dans l'équation (18) peut, d'après la relation (IV.A.5.14), s'écrire

$$I_i(\text{rot } \mathbf{e}) = \langle \mathbf{n}_{\Sigma} , \text{rot } \mathbf{e} \rangle_{\Sigma_{ae,i}} .$$

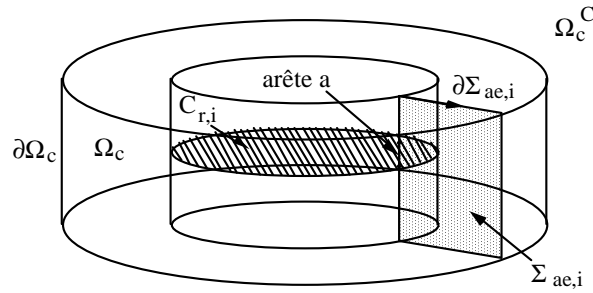


Fig. 1. Coupure ( $C_{r,i}$ ) et surface "générateur" ( $\Sigma_{ae,i}$ ) associées à un conducteur actif.

L'application du théorème de Stokes permet alors de l'exprimer sous la forme d'une intégrale curviligne le long du contour  $\partial\Sigma_{ae,i}$  de  $\Sigma_{ae,i}$ , c'est-à-dire

$$I_i(\text{rot } \mathbf{e}) = \oint_{\partial\Sigma_{ae,i}} \mathbf{e} \cdot d\mathbf{l} .$$

Les composantes de ce vecteur d'intégrales curvilignes dépendent du type des fonctions de base du vecteur  $\mathbf{e}$  et sont données par

$$I_i(\text{rot } \mathbf{s}_j) = \oint_{\partial\Sigma_{ae,i}} \mathbf{s}_j \cdot d\mathbf{l} = 0 , \quad \forall j \in A_c , \quad (25)$$

$$I_i(\text{rot } \mathbf{v}_j) = \oint_{\partial\Sigma_{ae,i}} \mathbf{v}_j \cdot d\mathbf{l} = 0 , \quad \forall j \in N_c^C , \quad (26)$$

$$I_i(\text{rot } \mathbf{c}_j) = \oint_{\partial\Sigma_{ae,i}} \mathbf{c}_j \cdot d\mathbf{l} = \delta_{ij} , \quad \forall j \in C_r , \quad (27)$$

pour une fonction  $I_i$  associée à la coupure  $i \in C_r$ . La première relation (25) est due au fait qu'aucune des arêtes de  $A_c$  n'appartient au contour  $\partial\Sigma_{ae,i}$  situé sur  $\partial\Omega_c$ , et donc que leurs circulations sont nulles le long de celui-ci. La seconde relation (26) est obtenue grâce au fait que l'expression  $\mathbf{v}_j = -\text{grad } s_j$  est valable dans  $\Omega_c^C$ , et par continuité sur  $\partial\Omega_c$ ; la circulation d'un gradient le long du contour  $\partial\Sigma_{ae,i}$  situé sur  $\partial\Omega_c$  est par conséquent nulle. La troisième relation (27) découle, quant à elle, de l'expression (II.B.4.21) de  $\mathbf{c}_j$ : parmi les arêtes de la couche de transition qui contribuent à la fonction  $\mathbf{c}_j$ , une seule apporte une contribution non

nulle (arête  $a$  sur la figure 1), et égale à un, à la fonction  $I_i$ , à condition que  $j = C_{r,i}$ . Ainsi, seule la fonction de base  $c_i$ ,  $i \in C_r$ , apporte une contribution du type  $V_i I_i(\text{rot } c_i) = V_i$  à l'équation (18) à condition qu'elle soit une fonction-test, c'est-à-dire que le courant traversant la surface  $\Sigma_{ae,i}$  soit inconnu.

### 2.2.3 Discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle de l'équation (18) est réalisée à l'aide d'un **schéma itératif en  $\theta$**  (Wait & Mitchell, 1985). Cette méthode reprend, en particulier, la méthode d'Euler implicite (avec  $\theta = 1$ ) et la méthode de Crank-Nicolson (avec  $\theta = 1/2$ ). Grâce à un tel schéma, la solution à l'étape  $n$ , i.e. à l'instant  $t_n$ , peut être obtenue à partir de la solution connue à l'étape précédente  $n-1$ , i.e. en  $t_{n-1}$ . L'intervalle de temps entre ces deux étapes est noté  $\Delta t_n$ , et est appelé **pas de temps** à l'étape  $n$ ,

$$\Delta t_n = t_n - t_{n-1} .$$

Nous utilisons les indices  $t$  et  $t-\Delta t$  pour caractériser des expressions aux instants  $t_n$  et  $t_{n-1}$ . La dérivée temporelle d'une variable  $x$  à l'instant  $t_n$  est discrétisée de la façon suivante :

$$\partial_t x(t_n) \approx \frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} = \frac{1}{\Delta t_n} (x_t - x_{t-\Delta t}) .$$

L'équation matricielle (18) devient alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t_n} (\mathbf{E}_t \mathbf{x}_t - \mathbf{E}_{t-\Delta t} \mathbf{x}_{t-\Delta t}) + \frac{1}{\Delta t_n} (\mathbf{E}_{s,t} \mathbf{x}_{s,t} - \mathbf{E}_{s,t-\Delta t} \mathbf{x}_{s,t-\Delta t}) \\ & + \theta \mathbf{R} \mathbf{x}_t + (1-\theta) \mathbf{R} \mathbf{x}_{t-\Delta t} \\ & = \theta V_{i,t} I_i(\text{rot } \mathbf{e}) + (1-\theta) V_{i,t-\Delta t} I_i(\text{rot } \mathbf{e}) \end{aligned} \quad (28)$$

pour une étape  $n$  donnée. Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{x}) , \quad (29)$$

où

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_t , \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta t_n} \mathbf{E}_t + \theta \mathbf{R} , \quad (30-31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{x}) = & \left( \frac{1}{\Delta t_n} \mathbf{E}_{t-\Delta t} - (1-\theta) \mathbf{R} \right) \mathbf{x}_{t-\Delta t} - \frac{1}{\Delta t_n} (\mathbf{E}_{s,t} \mathbf{x}_{s,t} - \mathbf{E}_{s,t-\Delta t} \mathbf{x}_{s,t-\Delta t}) \\ & + \theta V_{i,t} I_i(\text{rot } \mathbf{e}) + (1-\theta) V_{i,t-\Delta t} I_i(\text{rot } \mathbf{e}) . \end{aligned} \quad (32)$$

Il faut noter que, dans le cas d'un problème non linéaire, les matrices  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{E}_s$  dépendent du temps par l'intermédiaire de  $\mathbf{x}$ .

### 2.2.4 Problème non linéaire

La méthode itérative de Newton-Raphson (Dahlquist & Björck, 1974 ; Stoer & Bulirsch, 1980) est utilisée pour la résolution de l'équation matricielle (29), lorsque celle-ci est non linéaire. Les éléments de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  correspondante sont donnés par

$$J_{ij} = A_{ij} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j} x_k - \frac{\partial b_i}{\partial x_j} , \quad 1 \leq i, j \leq \dim X , \quad (33)$$

où les  $x_j$ ,  $j = 1$  à  $\dim X$ , sont les composantes du vecteur  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_t$ . Cette expression devient, avec (30),(31) et (32),

$$\mathbf{J}_{t,ij} = \frac{1}{\Delta t_n} E_{t,ij} + \theta R_{ij} + \frac{1}{\Delta t_n} \frac{\partial E_{t,ik}}{\partial x_j} x_k + \frac{1}{\Delta t_n} \frac{\partial E_{s,t,ik}}{\partial x_j} x_{s,k} . \quad (34)$$

Elle peut également s'écrire

$$\mathbf{J}_{t,ij} = \frac{1}{\Delta t_n} E_{t,ij} + \theta R_{ij} + \frac{1}{\Delta t_n} K_{t,ij} , \quad (35)$$

où les éléments  $K_{t,ij}$  d'une matrice  $\mathbf{K}_t$  sont définis par

$$K_{t,ij} = \frac{\partial E_{t,ik}}{\partial x_j} x_k + \frac{\partial E_{s,t,ik}}{\partial x_j} x_{s,k} , \quad 1 \leq i,j \leq \dim X . \quad (36)$$

L'élément  $K_{t,ij}$  de la matrice  $\mathbf{K}_t$  peut être développé pour donner

$$\begin{aligned} K_{t,ij} &= \left( \frac{\partial \mu}{\partial x_j}(\mathbf{x}_t) \mathbf{e}_i , \mathbf{e}_k \right)_{\Omega} x_k + \left( \frac{\partial \mu}{\partial x_j}(\mathbf{x}_t) \mathbf{e}_i , \mathbf{e}_{s,k} \right)_{\Omega} x_{s,k} \\ &= \left( \frac{\partial \mu}{\partial x_j}(\mathbf{x}_t) \mathbf{e}_i , \mathbf{h}_r \right)_{\Omega} + \left( \frac{\partial \mu}{\partial x_j}(\mathbf{x}_t) \mathbf{e}_i , \mathbf{h}_s \right)_{\Omega} \\ &= \left( \frac{\partial \mu}{\partial x_j}(\mathbf{x}_t) \mathbf{e}_i , \mathbf{h} \right)_{\Omega} \end{aligned}$$

avec

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_j}(\mathbf{x}_t) = \frac{\partial \mu}{\partial h^2} \frac{\partial h^2}{\partial x_j} = 2 \frac{\partial \mu}{\partial h^2} \mathbf{h} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{x}^T \mathbf{e} + \mathbf{x}_s^T \mathbf{e}_s) = 2 \frac{\partial \mu}{\partial h^2} \mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_j . \quad (37)$$

Il peut donc s'exprimer sous la forme

$$K_{t,ij} = \left( 2 \frac{\partial \mu}{\partial h^2} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_j) \right)_{\Omega} , \quad (38)$$

ou encore, sous la forme équivalente

$$K_{t,ij} = \left( 2 h^2 \frac{\partial \mu}{\partial h^2} (\hat{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{e}_i) (\hat{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{e}_j) \right)_{\Omega} , \quad (39)$$

où nous avons posé  $h^2 = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$  et  $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{h} / h$ . C'est par l'intermédiaire de  $\mathbf{h}$  que les éléments  $K_{t,ij}$  dépendent du temps. La forme (39) est souvent préférable à la forme (38) car le facteur  $\partial \mu / \partial h^2$  peut être singulier en  $h=0$ , alors que  $h^2 \partial \mu / \partial h^2$  est régulier. Ce dernier terme est obtenu à partir de la courbe de saturation (b-h) du matériau associé. Nous pouvons remarquer que la matrice  $\mathbf{K}_t$  est symétrique. La matrice  $\mathbf{J}_t$ , dont les éléments sont définis par l'expression (35), est donc également symétrique.

### 2.2.5 Evaluation des matrices – Matrices élémentaires

Les intégrations sur les domaines  $\Omega$  et  $\Omega_c$ , qui doivent conduire à l'évaluation des matrices définies (19-21, 39), peuvent être remplacées par des **intégrations** sur tous les **éléments géométriques**  $\Omega_k$ ,  $\forall k \in E$ , et  $\Omega_{c,k}$ ,  $\forall k \in E_c$ , constituant les maillages de ces domaines. De

plus, le support d'une fonction de base se limite aux éléments géométriques qui ont en commun l'entité associée (noeud, arête, coupure). Ainsi, les matrices définies sont **creuses**. Cette propriété est très intéressante pour la résolution numérique du système d'équations associé, ainsi que pour le nombre, alors réduit, des composantes à considérer.

Il en résulte aussi que chaque élément géométrique  $\Omega_k$  contribue de façon locale à ces matrices. Ceci peut être mis en évidence en définissant des **matrices élémentaires** relatives à chaque élément, et pour lesquelles seules les entités associées à chacun de ces éléments sont à prendre en compte. Ainsi, pour l'élément  $\Omega_k$  ou  $\Omega_{c,k}$ , nous avons les matrices élémentaires suivantes :

$$\mathbf{E}_k = (\mu \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T)_{\Omega_k}, \quad \mathbf{E}_{s,k} = (\mu \mathbf{e}_k \mathbf{e}_{s,k}^T)_{\Omega_k}, \quad \mathbf{R}_k = (\sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{e}_k \text{ rot } \mathbf{e}_k^T)_{\Omega_{c,k}}, \quad (40-41-42)$$

où  $\mathbf{e}_k$  est le vecteur des fonctions de base relatives aux entités qui sont associées à cet élément ; c'est une sous-liste du vecteur  $\mathbf{e}$ . Les éléments de ces matrices peuvent, comme précédemment, s'écrire sous forme de produits internes, c'est-à-dire

$$E_{k,ij} = (\mu \mathbf{e}_{k,i} \cdot \mathbf{e}_{k,j})_{\Omega_k}, \quad E_{s,k,ij} = (\mu \mathbf{e}_{k,i} \cdot \mathbf{e}_{s,k,j})_{\Omega_k}, \quad R_{k,ij} = (\sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{e}_{k,i} \cdot \text{rot } \mathbf{e}_{k,j})_{\Omega_{c,k}}. \quad (43-44-45)$$

Les éléments (39) peuvent aussi être considérés localement, par élément  $\Omega_k$ , c'est-à-dire selon

$$K_{t,k,ij} = \left( 2 h^2 \frac{\partial \mu}{\partial h^2} (\hat{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{e}_{k,i}) (\hat{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{e}_{k,j}) \right)_{\Omega_k}. \quad (46)$$

L'union, ou **assemblage**, de toutes les matrices élémentaires d'un type donné mène à la matrice globale correspondante.

## 3. Formulation en potentiel vecteur magnétique modifié

### 3.1 Espace fonctionnel

L'équivalent discret de l'espace fonctionnel qui intervient dans la formulation en potentiel vecteur magnétique modifié (IV.A.6.10) est  $F_e^1$ , ou  $S^1$ , dans lequel une condition de **jauge** doit être définie dans  $\Omega_c^C$  afin d'y assurer l'unicité du potentiel. Notons que l'espace  $F_{e0}^1$  est également considéré. Nous considérons la jauge définie dans la section II.B.4.2.2 par (II.B.4.34). L'espace jauge qui en résulte est noté  $\tilde{F}_e^1$  et est caractérisé par

$$\tilde{F}_e^1(\Omega, \Omega_c^C) = \{ \mathbf{a}^* \in S^1(\Omega) ; a_j = 0, \forall j \in \hat{A}_J \}, \quad (1)$$

- où •  $\hat{A}_J$  est l'ensemble des arêtes d'un **arbre** construit dans  $\Omega_c^C$  de la façon définie dans la section mentionnée, en particulier, pour la prise en compte de la condition à la limite sur  $\Gamma_e$ , i.e.  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{a} |_{\Gamma_e} = 0$  ;
- $a_j$  est la circulation de  $\mathbf{a}$  le long de l'arête  $j \in \hat{A}_J$ .

Le potentiel vecteur modifié  $\mathbf{a}^*$  peut alors s'exprimer sous la forme discrète (II.B.4.35), qui est une forme particulière de (II.B.3.14), c'est-à-dire

$$\mathbf{a}^* = \sum_{j \in \tilde{A}_J} a_j \mathbf{s}_j, \quad (2)$$

- où •  $\tilde{A}_J$  est l'ensemble des arêtes du maillage qui n'appartiennent pas à l'arbre défini, i.e.  $\tilde{A}_J = A \setminus \hat{A}_J$  ;



- $\mathbf{s}_j$  est la fonction de base associée à l'arête  $j \in \tilde{A}_J$  ;
- $a_j$  est la circulation de  $\mathbf{a}$  le long de l'arête  $j \in \tilde{A}_J$ .

## 3.2 Forme matricielle de la formulation faible

### 3.2.1 Vecteurs de base et de composantes

Les coefficients des fonctions de base, ou composantes, qui apparaissent dans (2), peuvent être regroupés en un vecteur, défini par

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{\#\tilde{A}_J} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \in X, \quad (3)$$

si les arêtes de  $\tilde{A}_J$  sont numérotées de 1 à  $\#\tilde{A}_J$ . Ce vecteur est appelé vecteur des **composantes du potentiel vecteur  $\mathbf{a}^*$**  dans la base de  $\tilde{F}_e^1(\Omega, \Omega_c^C)$ . Il définit un espace  $X$  dont la dimension est

$$\dim X = \dim \tilde{F}_e^1(\Omega, \Omega_c^C) = \#\tilde{A}_J.$$

Nous définissons le vecteur des fonctions de base de l'espace  $\tilde{F}_e^1(\Omega, \Omega_c^C)$ ,

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_a = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{\#\tilde{A}_J} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Les conditions aux limites sur  $\Gamma_e$ , associées à la définition de l'espace  $F_e^1$ , ont déjà été considérées dans la définition des ensembles  $\tilde{A}_J$  et  $\tilde{A}_J$ . Toutes les composantes de  $\mathbf{x}$  constituent alors des degrés de liberté. Ainsi, l'expression (2) du potentiel vecteur modifié peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{a} = \mathbf{x}_a^T \mathbf{e}_a = \mathbf{x}^T \mathbf{e}. \quad (5)$$

### 3.2.2 Forme matricielle

L'expression (5) peut être introduite dans l'équation (IV.A.6.10), avec jauge, i.e.

$$\partial_t(\sigma \mathbf{a}^*, \mathbf{a}')_{\Omega_c} + (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{a}^*, \text{rot } \mathbf{a}') = (\mathbf{j}_s, \mathbf{a}')_{\Omega_s} + V_a I_a(\mathbf{a}'), \quad \forall \mathbf{a}' \in \tilde{F}_{e0}^1(\Omega, \Omega_c^C),$$

pour donner

$$\partial_t(\sigma \mathbf{x}^T \mathbf{e}, \mathbf{x}'^T \mathbf{e})_{\Omega_c} + (\mu^{-1} \mathbf{x}^T \text{rot } \mathbf{e}, \mathbf{x}'^T \text{rot } \mathbf{e}) = (\mathbf{j}_s, \mathbf{x}'^T \mathbf{e}) + V_a I_a(\mathbf{x}'^T \mathbf{e}), \quad \forall \mathbf{x}' \in X, \quad (6)$$

où  $\text{rot } \mathbf{e}$  est le vecteur des rotationnels des fonctions de base de  $\mathbf{e}$ . Cette dernière formulation est l'analogie semi-discret de (IV.A.6.10), une discrétisation temporelle devant encore être réalisée. En exprimant les produits scalaires sous forme de produits matriciels et en conservant les *parenthèses indicées* pour exprimer une intégration volumique, nous obtenons

$$\partial_t(\sigma \mathbf{x}'^T \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{x})_{\Omega_c} + (\mu^{-1} \mathbf{x}'^T \text{rot } \mathbf{e} \text{rot } \mathbf{e}^T \mathbf{x})_{\Omega} = (\mathbf{x}'^T \mathbf{e} \mathbf{j}_s^T)_{\Omega} + V_a I_a(\mathbf{x}'^T \mathbf{e}), \quad \forall \mathbf{x}' \in X. \quad (7)$$

Les termes de cette équation peuvent encore se transformer de façon à faire apparaître des matrices, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{x}'^T \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{x})_{\Omega_c} &= \mathbf{x}'^T (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e} \mathbf{e}^T)_{\Omega_c} \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T \mathbf{E} \mathbf{x} , \\ (\mu^{-1} \mathbf{x}'^T \operatorname{rot} \mathbf{e} \operatorname{rot} \mathbf{e}^T \mathbf{x})_{\Omega} &= \mathbf{x}'^T (\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{e} \operatorname{rot} \mathbf{e}^T)_{\Omega} \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T \mathbf{R} \mathbf{x} , \\ (\mathbf{x}'^T \mathbf{e} \mathbf{j}_s^T)_{\Omega} &= \mathbf{x}'^T (\mathbf{e} \mathbf{j}_s^T)_{\Omega} = \mathbf{x}'^T \mathbf{E}_J , \\ V_a I_a (\mathbf{x}'^T \mathbf{e}) &= \mathbf{x}'^T V_a I_a (\mathbf{e}) . \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que les matrices  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{R}$  ainsi définies sont carrées et **symétriques**. Ainsi, l'équation (7) devient

$$\partial_t (\mathbf{x}'^T \mathbf{E} \mathbf{x}) + \mathbf{x}'^T \mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T \mathbf{E}_J + \mathbf{x}'^T V_i I_i (\mathbf{e}) , \quad \forall \mathbf{x}' \in X , \quad (8)$$

et, puisque  $\mathbf{x}'$  peut être quelconque, nous avons finalement à résoudre le **système symétrique d'équations différentielles** suivant, d'inconnue  $\mathbf{x}$ ,

$$\boxed{\partial_t (\mathbf{E} \mathbf{x}) + \mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{E}_J + V_i I_i (\mathbf{e})} , \quad (9)$$

avec

$$\mathbf{E} = (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e} \mathbf{e}^T)_{\Omega_c} , \quad \mathbf{R} = (\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{e} \operatorname{rot} \mathbf{e}^T)_{\Omega} , \quad \mathbf{E}_J = (\mathbf{e} \mathbf{j}_s^T)_{\Omega} . \quad (10-11-12)$$

Les éléments de ces matrices peuvent s'écrire sous forme de produits internes, c'est-à-dire

$$E_{ij} = (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_i , \mathbf{e}_j)_{\Omega_c} , \quad R_{ij} = (\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{e}_i , \operatorname{rot} \mathbf{e}_j)_{\Omega} , \quad E_{J,ij} = (\mathbf{e}_i , \mathbf{j}_s)_{\Omega} , \quad (13-14-15)$$

où  $\mathbf{e}_i$  est la  $i^{\text{me}}$  composante du vecteur (de vecteurs)  $\mathbf{e}$ .

Les **matériaux saturables**, dans lesquels la réductivité magnétique  $\mu^{-1}$  dépend de l'induction  $\mathbf{b}$ , font dépendre la matrice  $\mathbf{R}$  de l'inconnue  $\mathbf{x}$  et confèrent donc un **caractère non linéaire** au système d'équations (9).

### 3.2.3 Discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle de l'équation (9) est réalisée à l'aide d'un **schéma itératif en  $\theta$**  (Wait & Mitchell, 1985), qui a déjà été introduit à la section 2.2.3. L'équation matricielle (9) devient alors, avec les notations déjà définies,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t_n} \mathbf{E} (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t-\Delta t}) + \theta \mathbf{R}_t \mathbf{x}_t + (1-\theta) \mathbf{R}_{t-\Delta t} \mathbf{x}_{t-\Delta t} \\ = \theta \mathbf{E}_{J,t} + (1-\theta) \mathbf{E}_{J,t-\Delta t} + \theta V_{i,t} I_i (\mathbf{e}) + (1-\theta) V_{i,t-\Delta t} I_i (\mathbf{e}) \end{aligned} \quad (16)$$

pour une étape  $n$  donnée. Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \mathbf{b} , \quad (17)$$

où

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_t , \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta t_n} \mathbf{E} + \theta \mathbf{R}_t , \quad (18-19)$$

$$\mathbf{b} = \left( \frac{1}{\Delta t_n} \mathbf{E} - (1 - \theta) \mathbf{R}_{t-\Delta t} \right) \mathbf{x}_{t-\Delta t} + \theta \left( \mathbf{E}_{J,t} + \mathbf{V}_{i,t} \mathbf{I}_i(\mathbf{e}) \right) + (1 - \theta) \left( \mathbf{E}_{J,t-\Delta t} + \mathbf{V}_{i,t-\Delta t} \mathbf{I}_i(\mathbf{e}) \right). \quad (20)$$

Il faut noter que, pour un problème non linéaire, la matrice  $\mathbf{R}$  dépend du temps par l'intermédiaire de  $\mathbf{x}$ .

### 3.2.4 Problème non linéaire

La méthode itérative de Newton-Raphson (Dahlquist & Björck, 1974 ; Stoer & Bulirsch, 1980) est utilisée pour la résolution de l'équation matricielle (17), lorsque celle-ci est non linéaire. Les éléments de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  correspondante sont donnés par

$$J_{ij} = A_{ij} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j} x_k - \frac{\partial b_i}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq \dim X, \quad (21)$$

où les  $x_j$ ,  $j=1$  à  $\dim X$ , sont les composantes du vecteur  $\mathbf{x}$ . Cette expression devient, avec (18), (19) et (20),

$$J_{t,ij} = \frac{1}{\Delta t_n} E_{ij} + \theta R_{t,ij} + \theta \frac{\partial R_{t,ik}}{\partial x_j} x_k. \quad (22)$$

Elle peut aussi s'écrire

$$J_{t,ij} = \frac{1}{\Delta t_n} E_{ij} + \theta R_{t,ij} + \theta K_{t,ij}, \quad (23)$$

en posant

$$K_{t,ij} = \frac{\partial R_{t,ik}}{\partial x_j} x_k, \quad 1 \leq i, j \leq \dim X. \quad (24)$$

Ces éléments  $K_{t,ij}$  définissent une matrice  $\mathbf{K}_t$  qui a déjà été déterminée dans la section III.B.3.2.3, sous la forme (III.B.2.23), c'est-à-dire

$$K_{t,ij} = \left( 2 b^2 \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial b^2} (\hat{\mathbf{b}} \cdot \text{rot } \mathbf{e}_i) (\hat{\mathbf{b}} \cdot \text{rot } \mathbf{e}_j) \right)_{\Omega}, \quad (25)$$

où  $b^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$  et  $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} / b$ . Le facteur  $\partial \mu^{-1} / \partial b^2$  dans (25) est obtenu à partir de la courbe de saturation (b-h) du matériau associé. Notons que les éléments  $K_{t,ij}$  dépendent du temps par l'intermédiaire de  $\mathbf{b}$ . Nous pouvons remarquer que la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  est symétrique.

### 3.2.5 Evaluation des matrices – Matrices élémentaires

Les intégrations sur les domaines  $\Omega$  et  $\Omega_c$ , qui doivent conduire à l'évaluation des matrices définies (10-12, 25), peuvent être remplacées par des **intégrations** sur tous les **éléments géométriques**  $\Omega_k$ ,  $\forall k \in E$ , et  $\Omega_{c,k}$ ,  $\forall k \in E_c$ , constituant les maillages de ces domaines. Ces matrices sont creuses car le support d'une fonction de base d'arête se limite aux éléments géométriques qui ont en commun l'arête associée. De plus, chaque élément géométrique  $\Omega_k$  contribue de façon locale à ces matrices. Ceci peut être mis en évidence en définissant des **matrices élémentaires** relatives à chaque élément, et pour lesquelles seules les entités associées à chacun de ces éléments sont à prendre en compte. Ainsi, pour l'élément  $\Omega_k$  ou  $\Omega_{c,k}$ , nous avons les matrices élémentaires suivantes, associées à (10-12) :

$$\mathbf{E}_k = \left( \sigma \mathbf{e}_k \quad \mathbf{e}_k^T \right)_{\Omega_{c_k}}, \quad \mathbf{R}_k = \left( \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{e}_k \quad \operatorname{rot} \mathbf{e}_k^T \right)_{\Omega_k}, \quad \mathbf{E}_{J,k} = \left( \mathbf{e}_k \quad \mathbf{j}_s^T \right)_{\Omega_k}, \quad (26-27-28)$$

où  $\mathbf{e}_k$  est le vecteur des fonctions de base relatives aux entités qui sont associées à cet élément ; c'est une sous-liste du vecteur  $\mathbf{e}$ . Les éléments de ces matrices peuvent, comme précédemment, s'écrire sous forme de produits internes, c'est-à-dire

$$\mathbf{E}_{k,ij} = \left( \sigma \mathbf{e}_{k,i} \quad \mathbf{e}_{k,j} \right)_{\Omega_{c_k}}, \quad \mathbf{R}_{k,ij} = \left( \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{e}_{k,i} \quad \operatorname{rot} \mathbf{e}_{k,j} \right)_{\Omega_k}, \quad \mathbf{E}_{J,k,i} = \left( \mathbf{e}_{k,i} \quad \mathbf{j}_s \right)_{\Omega_k}. \quad (29-30-31)$$

Les éléments (25) peuvent aussi être considérés localement, par élément  $\Omega_k$ , c'est-à-dire selon

$$\mathbf{K}_{t,k,ij} = \left( 2 b^2 \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial b^2} (\hat{\mathbf{b}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{e}_{k,i}) (\hat{\mathbf{b}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{e}_{k,j}) \right)_{\Omega_k}. \quad (32)$$

L'union, ou **assemblage**, de toutes les matrices élémentaires d'un type donné mène à la matrice globale correspondante.

# Chapitre V

## Résultats

---

### Problème de la sphère

#### 1. Position du problème

##### 1.1 Description générale

Une **sphère**, **magnétique** ou non, **conductrice** ou non, est placée dans une région de l'espace, constituée d'air, où règne un **champ magnétique uniforme**, qui peut éventuellement varier dans le temps. Divers problèmes peuvent ainsi être définis, en **magnétostatique** et en **magnétodynamique**. En magnétostatique, il s'agit de calculer le **champ magnétique** en tout point de l'espace. En magnétodynamique, il s'agit de déterminer ce champ à tout instant ainsi que les **courants induits** dans la sphère, lorsque celle-ci est conductrice.

Ces problèmes admettent des solutions analytiques. Ils constituent alors des problèmes-test qui permettent une analyse aisée de la précision des résultats numériques ainsi qu'une validation des formulations discrètes développées (maillage, conditions aux limites et conditions de symétrie, ...). Ces problèmes présentent une symétrie de révolution et pourraient, de ce fait, être résolus à l'aide d'une formulation adéquate, c'est-à-dire une formulation bidimensionnelle axisymétrique. Une telle symétrie peut également être prise en compte de façon efficace dans une formulation tridimensionnelle.

##### 1.2 Description de la géométrie et des matériaux

Le rayon de la sphère,  $R$ , est égal à 0.055 m (Fig. 1). C'est la seule grandeur qui est fixée a priori. La valeur choisie est celle qui est couramment utilisée pour le problème-test de la sphère.

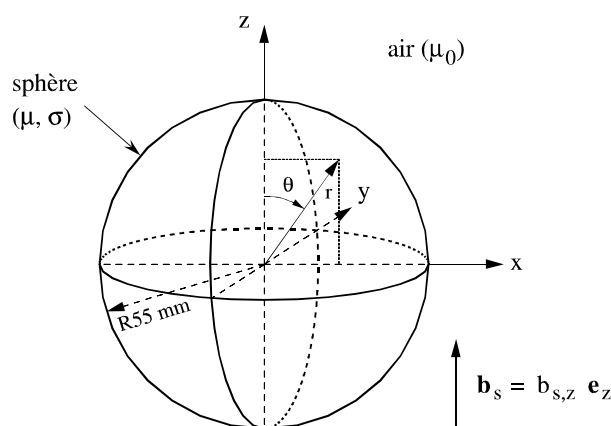


Fig. 1. Sphère magnétique et conductrice plongée dans l'air où règne un champ magnétique uniforme.

Les caractéristiques magnétiques (linéaires) et électriques de la sphère, c'est-à-dire sa perméabilité magnétique relative  $\mu_r$  ( $\mu/\mu_0$ ) et sa conductivité électrique  $\sigma$ , sont prises dans une vaste gamme de valeurs afin de mettre en évidence plusieurs phénomènes (modification du champ magnétique due à l'aimantation, courants induits et profondeur de pénétration). La sphère est plongée dans l'air, dont la perméabilité relative  $\mu_{r, \text{air}}$  est égale à 1.

### 1.3 Description de l'excitation

Un champ magnétique uniforme dans l'espace, appelé champ source  $\mathbf{h}_s$ , est appliqué selon la direction  $z$  (Fig. 1), i.e.  $\mathbf{h}_s = h_{s,z} \mathbf{e}_z$ . Pour l'étude magnétostatique, l'induction magnétique source correspondante,  $b_{s,z} = \mu_0 h_{s,z}$ , est définie par

$$b_{s,z} = b_0, \quad (1)$$

où  $b_0 = 1 \text{ T}$ . Pour l'étude magnétodynamique sinusoïdale, l'induction source est définie par une fonction cosinusoidale,

$$b_{s,z}(t) = b_0 \cos \omega t, \quad (2)$$

où  $b_0 = 1 \text{ T}$  et  $\omega$  est la pulsation de l'excitation, liée à sa fréquence  $f$  (Hz) par  $\omega = 2\pi f$ . Plusieurs fréquences doivent être envisagées afin de couvrir une certaine gamme de profondeurs de pénétration  $\delta$  (m), définies par

$$\delta = \sqrt{2/\omega \mu \sigma}. \quad (3)$$

La profondeur de pénétration, ou épaisseur de peau, caractérise la profondeur dans le matériau à laquelle le courant a tendance à se concentrer (Krawczyk & Tegopoulos, 1993). Une augmentation de la fréquence, par exemple, entraîne une diminution de  $\delta$ , ce qui se traduit par une densification du courant en superficie du conducteur.

### 1.4 Grandeurs à calculer

En magnétostatique, il s'agit de calculer le champ magnétique, et l'induction magnétique, en tout point de l'espace pour différentes valeurs de la perméabilité relative  $\mu_r$ . Une valeur particulière à considérer sera  $\mu_r = 100$ . En magnétodynamique, il s'agit de calculer les évolutions temporelles du champ magnétique, et de l'induction magnétique, en tout point de l'espace ainsi que de la densité de courant induit en tout point de la sphère. Un problème de base, relatif à une sphère en cuivre, sera caractérisé par les grandeurs  $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $\sigma = 5.92 \cdot 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ , et l'influence de la variation de chacune de ces grandeurs sera étudiée. Les variations spatiales des champs seront représentées le long de coupes représentatives, ou de portions de ces coupes, dans la structure étudiée (Fig. 2).

- Coupe  $H_0 \equiv \{0 \leq r \leq 0.12 \text{ m}, \theta = \pi/2, \phi = 0\}$
- Coupe  $V_0 \equiv \{0 \leq r \leq 0.12 \text{ m}, \theta = 0, \phi = 0\}$
- Coupe  $I_{45} \equiv \{0 \leq r \leq 0.12 \text{ m}, \theta = \pi/4, \phi = 0\}$
- Coupe  $H_2 \equiv \{0 \leq x \leq 0.12 \text{ m}, y = 0, z = 0.02 \text{ m}\}$
- Coupe  $H_4 \equiv \{0 \leq x \leq 0.12 \text{ m}, y = 0, z = 0.04 \text{ m}\}$

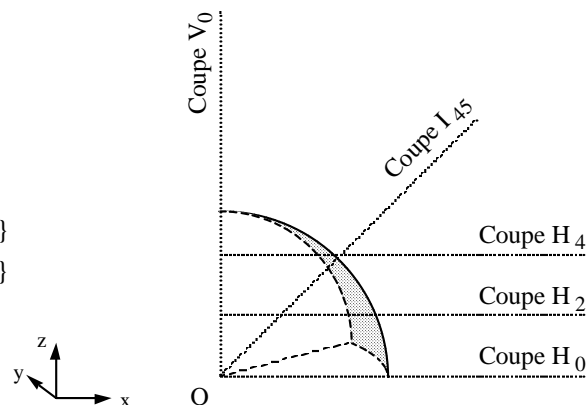


Fig. 2. Définition de coupes dans la structure.

## 1.5 Solutions analytiques

### 1.5.1 Problème magnétostatique

La résolution analytique du problème de la sphère dans un champ uniforme en magnétostatique peut être réalisée grâce à l'utilisation du potentiel scalaire magnétique  $\phi$ . Il s'agit alors de résoudre l'équation de Laplace  $\Delta\phi=0$ , avec des conditions de transmission adéquates à l'interface sphère - air, pour obtenir l'expression de l'induction magnétique dans la sphère et dans l'air (Nayfeh & Brussel, 1985). En coordonnées sphériques (selon  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_\theta$  (Fig. 1), il y a invariance de la solution selon  $\mathbf{e}_\phi$ ) et pour une sphère de rayon  $R$ , l'induction est donnée par

$$\begin{cases} \mathbf{b}(r, \theta) = \frac{3 b_0}{1 + \frac{2}{\mu_r}} \mathbf{e}_z & \text{si } r < R, \\ \mathbf{b}(r, \theta) = b_0 \mathbf{e}_z + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} b_0 \left(\frac{R}{r}\right)^3 (2 \mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta) & \text{si } r > R. \end{cases} \quad (4)$$

### 1.5.2 Problème magnétodynamique sinusoïdal

La résolution analytique du problème de la sphère dans un champ uniforme sinusoïdal peut être réalisée grâce à l'utilisation du **potentiel vecteur magnétique**  $\mathbf{a}$ , dont seule la composante selon  $\mathbf{e}_\phi$ , en coordonnées sphériques, est non nulle. L'expression de ce potentiel est déterminée dans Smythe (1968) et est donnée, en coordonnées sphériques et dans le formalisme complexe, pour une sphère de rayon  $R$ , par

$$\begin{cases} \mathbf{a}(r, \theta) = a j_1(kr) b_0 \sin \theta \mathbf{e}_\phi & \text{si } r < R, \\ \mathbf{a}(r, \theta) = \left(\frac{r}{2} + \frac{b}{r^2}\right) b_0 \sin \theta \mathbf{e}_\phi & \text{si } r > R, \end{cases} \quad (5)$$

avec

$$k = (-1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \frac{-1 + j}{\delta}, \quad (6a)$$

$$a = \frac{3R}{2D}, \quad b = \frac{R^3}{D} \left( j_1(kR) \left(1 + \frac{1}{2\mu_r}\right) - \frac{kR}{2\mu_r} j_0(kR) \right), \quad (6b-c)$$

$$D = j_1(kR) \left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right) + \frac{kR}{\mu_r} j_0(kR). \quad (6d)$$

La fonction  $j_n(z)$  est la fonction de Bessel sphérique d'ordre  $n$  (Morse & Feshbach, 1953a), qui peut s'exprimer selon la fonction de Bessel de première espèce  $J_{n+1/2}(z)$ , c'est-à-dire

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+1/2}(z). \quad (7)$$

Notons que pour  $n = 0, 1$  et  $2$ , on a

$$j_0(z) = \frac{1}{z} \sin z, \quad j_1(z) = \frac{1}{z} \left( \frac{1}{z} \sin z - \cos z \right), \quad j_2(z) = \frac{1}{z} \left[ \left( \frac{3}{z^2} - 1 \right) \sin z - \frac{3}{z} \cos z \right]. \quad (8)$$

L'expression de l'**induction magnétique** dans la sphère et dans l'air est donnée par  $\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a}$ , c'est-à-dire, en coordonnées sphériques,

$$\begin{cases} \mathbf{b}(r, \theta) = \frac{2a}{r} j_1(kr) b_0 \cos \theta \mathbf{e}_r - \frac{a}{2r} [j_1(kr) + kr(j_0(kr) - j_2(kr))] b_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta & \text{si } r < R, \\ \mathbf{b}(r, \theta) = \left(1 + \frac{2b}{r^3}\right) b_0 \cos \theta \mathbf{e}_r - \left(1 - \frac{b}{r^3}\right) b_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta & \text{si } r > R. \end{cases} \quad (9)$$

On peut finalement déterminer la **densité de courant induit** dans la sphère par l'équation d'Ampère,  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{h} = \text{rot}(\mathbf{b}/\mu)$ .

## 2. Modélisation

### 2.1 Formulation utilisée

La formulation utilisée est la **formulation en  $\mathbf{h}$** , dans laquelle les inconnues sont directement liées au **champ magnétique  $\mathbf{h}$** . Dans les matériaux non conducteurs en magnétodynamique, ainsi que dans tous les matériaux en magnétostatique, ce champ peut dériver d'un **potentiel scalaire magnétique  $\phi$**  et on parle alors de **formulation  $\mathbf{h}$ - $\phi$** . Ce sont en général les composantes de réaction de ces champs qui sont les inconnues ; i.e.  $\mathbf{h}_r$  et  $\phi_r$ , avec  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_r + \mathbf{h}_s$  partout ( $\mathbf{h}_s$  est un champ source connu), et  $\mathbf{h}_r = -\text{grad } \phi_r$  dans les matériaux non conducteurs.

L'excitation considérée dans ce problème, (1.1) ou (1.2), peut directement être traitée comme champ source  $\mathbf{h}_s$ . Ainsi, les inconnues se réduisent au champ de réaction  $\mathbf{h}_r$  dans la sphère et au potentiel scalaire de réaction  $\phi_r$  dans l'air. Pour le problème en magnétostatique, le potentiel scalaire  $\phi_r$  se substitue à  $\mathbf{h}_r$  dans la sphère. Au niveau discret, les éléments finis utilisés sont alors des éléments nodaux pour l'interpolation de  $\phi_r$  et des éléments d'arête pour l'interpolation de  $\mathbf{h}_r$ . En réalité, certains éléments peuvent résulter d'un couplage d'éléments nodaux et d'arête, c'est-à-dire que leurs fonctions de base peuvent être associées à la fois à des noeuds et à des arêtes ; c'est le cas des éléments conducteurs en contact avec l'interface conducteur - air.

Nous pouvons déduire du champ magnétique  $\mathbf{h}$  une approximation de l'induction magnétique  $\mathbf{b}$ , par  $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$ , ainsi qu'une approximation de la densité de courant induit  $\mathbf{j}$ , par  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{h}$ .

### 2.2 Types d'éléments finis utilisés

Nous utiliserons des éléments finis nodaux et d'arête construits sur trois types d'éléments géométriques : des tétraèdres, des hexaèdres et des prismes à base triangulaire, dits de type I. Plusieurs maillages seront construits, chacun étant constitué d'une majorité d'éléments d'un seul de ces types. La précision de la solution pourra être étudiée en fonction de la finesse du maillage ainsi que du type d'éléments utilisés.

### 2.3 Conditions aux limites et symétries

Les symétries qui peuvent être prises en compte sont au nombre de deux (Fig. 1). Elles sont, en centrant la sphère au point  $(0, 0, 0)$  :

- une symétrie à courant parallèle, ou à champ magnétique perpendiculaire, sur le plan  $z = 0$ , noté  $\Gamma_h$ , où



$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{h} \Big|_{\Gamma_h} = 0, \text{ ou encore } \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \Big|_{\Gamma_h} = 0; \quad (1)$$

- une symétrie de révolution autour de l'axe  $z$ , que nous adaptons pour une étude tridimensionnelle en exprimant deux symétries à courant perpendiculaire, ou à induction parallèle, sur les plans  $\phi = \phi_1$  et  $\phi = \phi_2$ , notés  $\Gamma_e$ , où

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} \Big|_{\Gamma_e} = 0, \text{ ou encore } \mathbf{n} \wedge \mathbf{e} \Big|_{\Gamma_e} = 0. \quad (2)$$

La géométrie à étudier peut ainsi se réduire à une portion de la structure initiale ; nous considérons la région  $\{\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2, z \geq 0\}$ . La portion de  $\Gamma_h$  en contact avec l'air est notée  $\Gamma_{h, \text{air}}$  et son complémentaire dans  $\Gamma_h$ , i.e.  $\Gamma_h \setminus \Gamma_{h, \text{air}}$ , est noté  $\Gamma_{h, \text{sph}\square\text{re}}$ . Les surfaces  $\Gamma_{e, \text{air}}$  et  $\Gamma_{e, \text{sph}\square\text{re}}$  sont définies de la même façon.

De plus, nous limitons le domaine d'étude à une sphère de rayon suffisamment grand ( $r = R_\infty$ , idéalement infini) et dont la surface, qui approxime la surface à l'infini, est notée  $\Gamma_\infty$  (Fig. 1). On considère que le champ de réaction s'annule sur cette surface, c'est-à-dire que la structure étudiée n'a pas d'influence à son niveau.

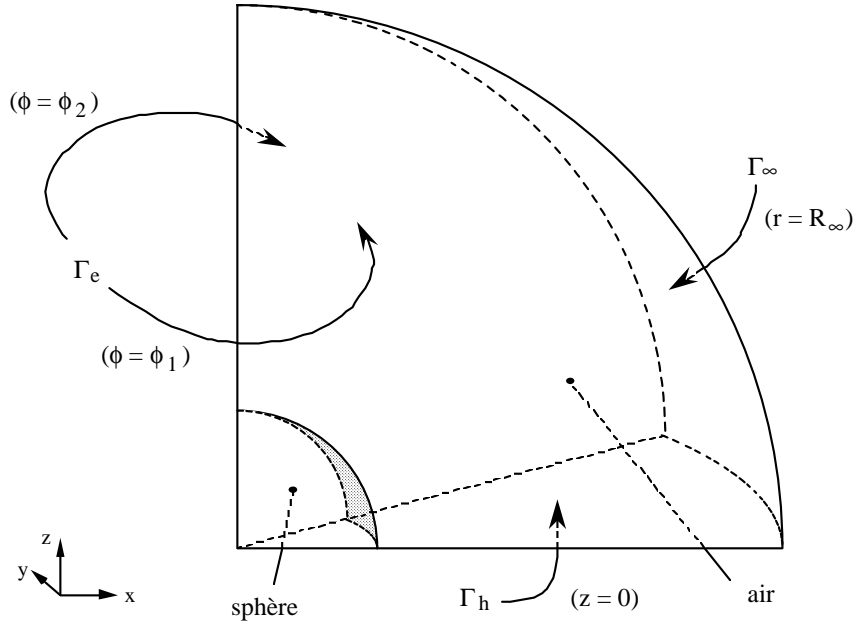


Fig. 1. Domaine d'étude et conditions aux limites.

Les conditions sur les surfaces  $\Gamma_h$  et  $\Gamma_e$ , i.e. (1) et (2), s'appliquent au champ total. Or, comme elles sont vérifiées par le champ source, elles peuvent aussi s'appliquer seulement au champ de réaction (par superposition). Sur la surface  $\Gamma_\infty$ , nous avons le choix entre les conditions des types (1) et (2). La formulation en  $\mathbf{h}$  nous donne en réalité le choix entre  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} \Big|_{\Gamma_e} = 0$  et  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{h}_r \Big|_{\Gamma_h} = 0$ . La première condition ne peut cependant pas être vérifiée dans notre cas, car elle concerne l'induction totale, alors que la seconde est valable puisqu'elle n'est associée qu'au champ de réaction (et au champ-test correspondant).

Ainsi, pour la formulation en  $\mathbf{h}$ , nous devons imposer explicitement les conditions

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{h}_r \Big|_{\Gamma_{h, \text{sph}\square\text{re}}} = 0, \quad \phi_r \Big|_{\Gamma_{h, \text{air}}} = 0, \quad \phi_r \Big|_{\Gamma_\infty} = 0, \quad (3a-b-c)$$

alors que la condition  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} \Big|_{\Gamma_e} = 0$  est implicite ; la surface  $\Gamma_\infty$  est du type de  $\Gamma_h$ . Cela revient à fixer certains degrés de liberté, c'est-à-dire à annuler la circulation de  $\mathbf{h}_r$  sur les arêtes de  $\Gamma_{h, \text{sph}\square\text{re}}$  et le potentiel  $\phi_r$  aux noeuds de  $\Gamma_{h, \text{air}}$  et  $\Gamma_\infty$ . Notons que le potentiel  $\phi_r$  est défini à une constante près, celle-ci étant fixée par les conditions (3b-c).

## 2.4 Méthode de calcul

Le formalisme complexe est utilisé pour la résolution du problème en magnétodynamique sinusoïdale et ce sont par conséquent les parties réelle et imaginaire des champs qui constituent la solution.

# 3. Résultats en magnétostatique

## 3.1 Définition des maillages

Nous considérons plusieurs maillages du domaine d'étude réalisés à l'aide d'éléments géométriques de trois types, des hexaèdres, des prismes et des tétraèdres, générés en coordonnées sphériques. Chaque maillage est constitué d'une majorité d'éléments d'un seul type afin d'étudier la qualité de l'approximation donnée par les éléments finis associés. Un maillage peut être constitué d'une majorité d'hexaèdres liés à une minorité de prismes. Ces prismes sont alors soit situés le long de l'axe  $z$ , soit situés dans le voisinage du centre de la sphère ou, plus précisément, sont issus d'un point distinct de l'origine, afin d'éviter que ces éléments ne dégèrent en pyramides à base quadrilatérale (Fig. 1). Ce type de maillage est appelé **maillage de base**. Notons que c'est grâce aux propriétés des éléments finis développés que nous pouvons associer différents types d'éléments.

Un maillage de base peut se décomposer en un autre constitué de prismes. Il suffit pour cela de découper chaque hexaèdre en deux prismes dont l'axe est dirigé selon la direction  $\phi$ . Il est aussi possible de générer des prismes dont l'axe est dirigé selon la direction  $\theta$ , ou selon la direction  $r$ , ce qui impose alors de définir également des tétraèdres dans certaines régions dégénérées. Un maillage de base peut aussi se décomposer en un maillage constitué uniquement de tétraèdres, chaque hexaèdre donnant lieu à six tétraèdres, et chaque prisme, à trois tétraèdres.

Les maillages de base sont caractérisés par différents paramètres (Fig. 1) :

- le nombre de divisions radiales dans la sphère,  $n_{r,s}$ , et dans l'air,  $n_{r,a}$ , ainsi que la largeur de ces divisions,  $l_{r,s}$  et  $l_{r,a}$  ;
- le nombre de divisions,  $n_\theta$ , selon la direction  $\theta$ , i.e. le nombre de zones "parallèles", ainsi que leur largeur angulaire  $l_\theta$  ;
- le nombre de divisions,  $n_\phi$ , selon la direction  $\phi$ , i.e. le nombre de zones "méridiens", ainsi que leur largeur angulaire  $l_\phi$ .

Nous prenons  $n_\phi = 1$  avec  $l_\phi$  suffisamment petit, ce qui est en accord avec la géométrie du domaine d'étude définie par la symétrie de révolution. De plus, nous considérons des divisions uniformes selon  $\theta$ , i.e.  $l_\theta = \pi / (2 n_\theta)$ . Par contre, nous considérons des divisions radiales non uniformes dans le but d'affiner le maillage dans les régions où les variations du champ sont plus importantes. C'est le cas dans le voisinage de la surface de la sphère. La largeur des divisions varie ainsi d'une valeur minimale,  $l_{r,s,\min}$  dans la sphère,  $l_{r,a,\min}$  dans l'air, près de la surface de la sphère, jusqu'à une valeur maximale,  $l_{r,s,\max}$  dans la sphère,  $l_{r,a,\max}$  dans l'air. La transition entre ces valeurs se fait de façon régulière.

La surface  $\Gamma_\infty$  est placée à une distance du centre de la sphère égale à environ 4 fois son diamètre, c'est-à-dire  $R_\infty = 0.5$  m. Il suffit en général d'éloigner les surfaces d'approximation de l'infini d'une distance 3 à 4 fois supérieure aux dimensions de la partie utile de la structure. Par exemple, on peut vérifier, grâce à la solution analytique (1.4), que le champ de réaction ne vaut plus que 0.1 % du champ source en  $\{r = 0.5 \text{ m}, \theta = \pi/2\}$  pour  $\mu_r = 100$ .

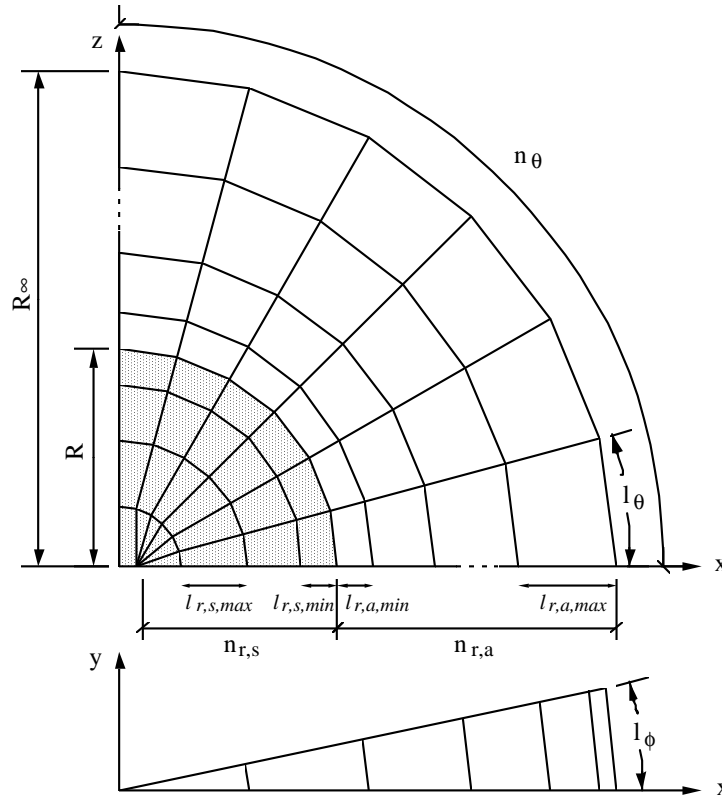


Fig. 1. Paramètres d'un maillage de base.

Nous considérons les maillages de base dont les caractéristiques sont données dans le tableau 1 (i.e., nombre de divisions selon les trois directions des coordonnées sphériques, largeurs de ces divisions, nombre d'hexaèdres et de prismes, nombre de noeuds). La notation abrégée 'MSh' (Maillage, Statique, hexaèdre) est utilisée pour les maillages de base. Pour les maillages associés, constitués d'autres types d'éléments, nous notons :

- 'MSp' (prisme), ceux qui sont constitués de prismes dont l'axe est dirigé selon la direction  $\phi$  ;
- 'MSpt' (prisme, tétraèdre), ceux qui sont constitués d'une majorité de prismes dont l'axe est dirigé selon la direction  $\theta$  et d'une minorité de tétraèdres le long de l'axe  $z$  ;
- 'MSt' (tétraèdre), ceux qui sont constitués de tétraèdres.

Maillage de base	Selon $r$						Selon $\theta$		Selon $\phi$		Eléments		Noeuds
	$n_{r,s}$	$l_{r,s,min}$ (mm)	$l_{r,s,max}$ (mm)	$n_{r,a}$	$l_{r,a,min}$ (mm)	$l_{r,a,max}$ (mm)	$n_\theta$	$l_\theta$	$n_\phi$	$l_\phi$	$n_{Hex}$	$n_{Pri}$	$n_{Noe}$
MSh1	5	4.4	22.1	8	3.3	258	10	9°	1	5°	108	22	276
MSh2	5	4.4	22.1	13	1.6	258	10	9°	1	5°	153	27	381
MSh3	9	2.1	10.7	8	3.3	258	10	9°	1	5°	144	26	360
MSh4	9	2.1	10.7	13	1.6	258	10	9°	1	5°	189	31	465
MSh5	5	4.4	22.1	18	1.0	258	10	9°	1	5°	198	32	486
MSh6	5	4.4	22.1	13	1.6	258	20	4.5°	1	5°	323	37	741
MSh7	5	4.4	22.1	13	1.6	258	30	3°	1	5°	783	57	1711

Tableau 1. Paramètres relatifs aux maillages de base.

Les maillages considérés sont choisis de façon à mettre en évidence l'influence de certains de leurs paramètres sur la précision de la solution. Ils sont plus ou moins classés par ordre croissant de finesse. Le nombre de noeuds d'un maillage est invariant, c'est-à-dire qu'il ne

dépend que du maillage de base associé. Le nombre d'inconnues associées aux noeuds dans la formulation en potentiel scalaire est donc également invariant (Tableau 2).

Maillage	MSh1	MSh2	MSh3	MSh4	MSh5	MSh6	MSh7
Nombre d'inconnues	228	323	304	399	418	663	1593

Tableau 2. Nombre d'inconnues associées aux maillages.

## 3.2 Analyse de résultats

Nous allons étudier l'influence de plusieurs paramètres, géométriques et physiques, sur la précision de la solution numérique. Ces paramètres seront liés à la finesse du maillage, à la perméabilité magnétique de la sphère et aux types d'éléments finis.

### 3.2.1 Influence du maillage de base

Considérons une sphère de perméabilité magnétique relative  $\mu_r$  égale à 100 et analysons les résultats numériques obtenus le long des coupes  $H_0$ ,  $V_0$  et  $I_{45}$  (Fig. 1.2). Seuls les maillages les plus représentatifs sont considérés dans les tracés des variations afin d'éviter une surcharge de courbes.

Le long de la coupe  $H_0$ , seule la composante de  $\mathbf{b}$  selon  $z$  est non nulle. Sa variation est représentée à la figure 2 et la discontinuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{b}$  au passage de l'interface sphère - air, en  $\{r=R, \theta=\pi/2\}$ , y est mise en évidence. Cette discontinuité satisfait exactement la relation  $b_{z,\text{sphère}}/\mu_r = b_{z,\text{air}}$  car la formulation en potentiel scalaire, qui fait partie de la famille des formulations en  $\mathbf{h}$ , assure la continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{h}$ , c'est-à-dire  $h_{z,\text{sphère}} = h_{z,\text{air}}$ .

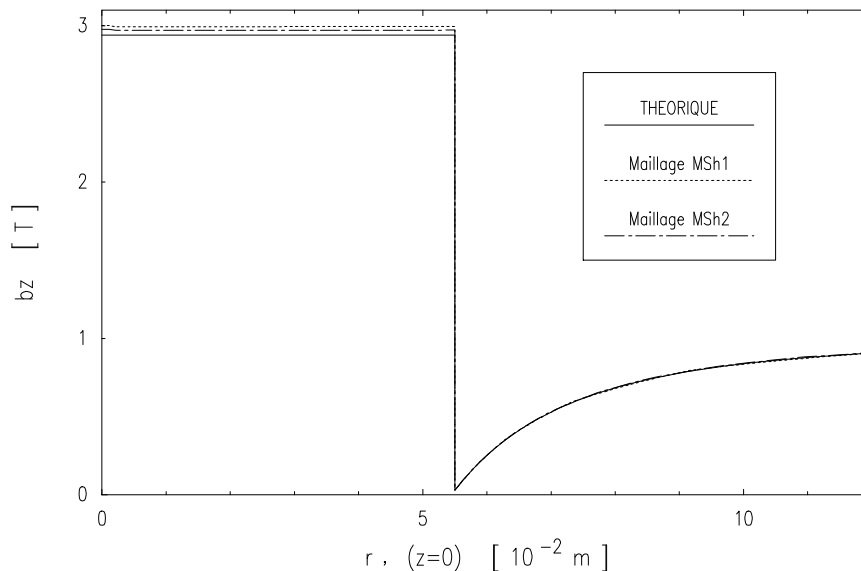


Fig. 2. Variation de l'induction le long de la coupe  $H_0$ .

Le long de la coupe  $V_0$ , seule la composante de  $\mathbf{b}$  selon  $z$  est non nulle. Sa variation est représentée à la figure 3 et il doit alors être possible d'y mettre en évidence la caractéristique physique de continuité de la composante normale de  $\mathbf{b}$ . La formulation utilisée ne permet en réalité d'assurer que faiblement cette continuité, aussi bien au sein d'un même matériau qu'à l'interface entre deux régions différentes. Cette caractéristique se traduit par des sauts, ou discontinuités, de l'induction qui peuvent apparaître sur certaines coupes, en particulier le

long de la coupe  $V_0$  dans l'air,  $\{r > R, \theta = 0\}$ . Ces sauts ont lieu à travers chaque interface entre éléments adjacents alors que la variation est continue dans chaque élément. Ils n'apparaissent pas de façon significative dans la sphère car l'induction y est constante. Notons que de tels sauts n'apparaissent pas le long de la coupe  $H_0$  car la composante  $b_z$  qui y est représentée est quasiment tangente à chaque interface entre éléments et est donc continue, en conséquence de la formulation en  $\mathbf{h}$ .

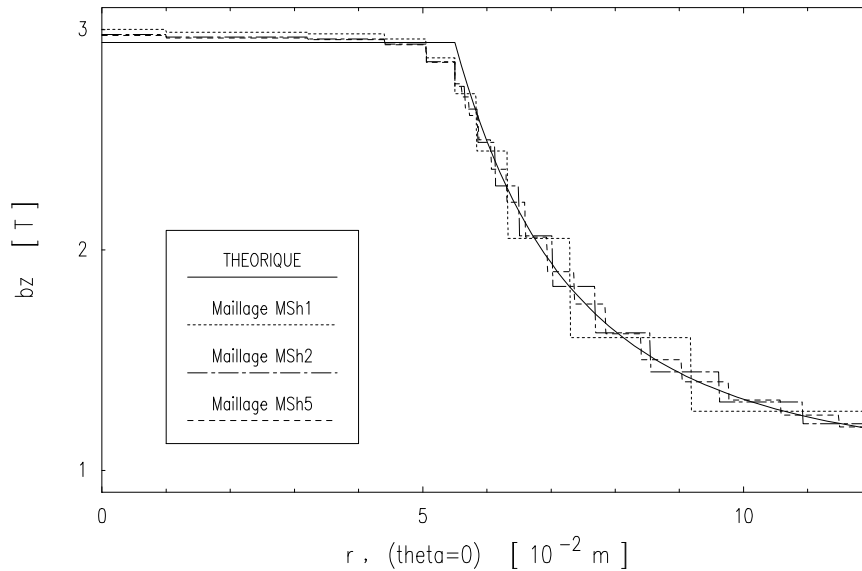


Fig. 3. Variation de l'induction le long de la coupe  $V_0$ .

Le long de la coupe  $I_{45}$ , les variations des composantes de  $\mathbf{b}$  selon  $z$  et  $x$  sont représentées aux figures 4a-b. Les sauts de l'induction d'un élément à un autre  $y$  sont également mis en évidence. Notons que pour les maillages considérés ( $n_\theta$  pair), cette coupe est située à l'interface entre deux rangées d'éléments, et l'induction est alors calculée comme étant la moyenne des valeurs qu'elle prend dans le voisinage de chaque point d'évaluation, c'est-à-dire avec comme support des fonctions de base, chaque élément adjacent à chaque point.

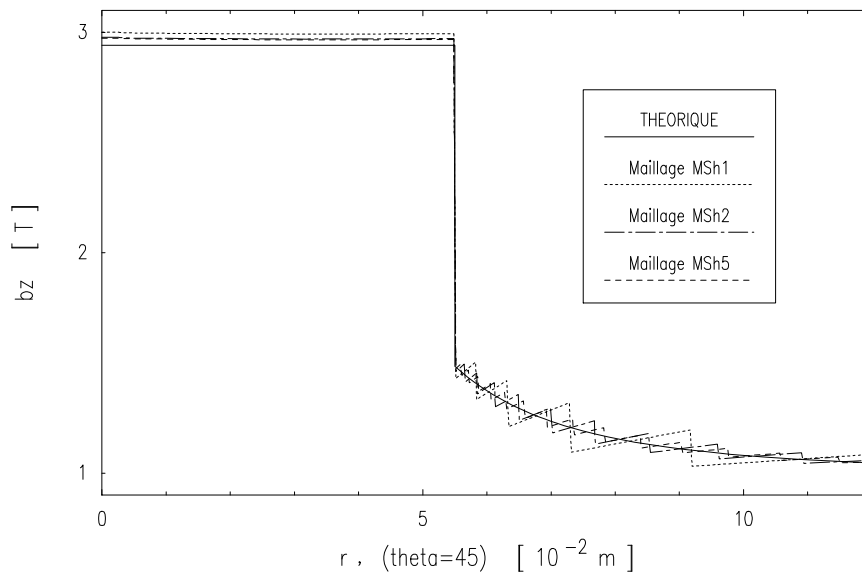
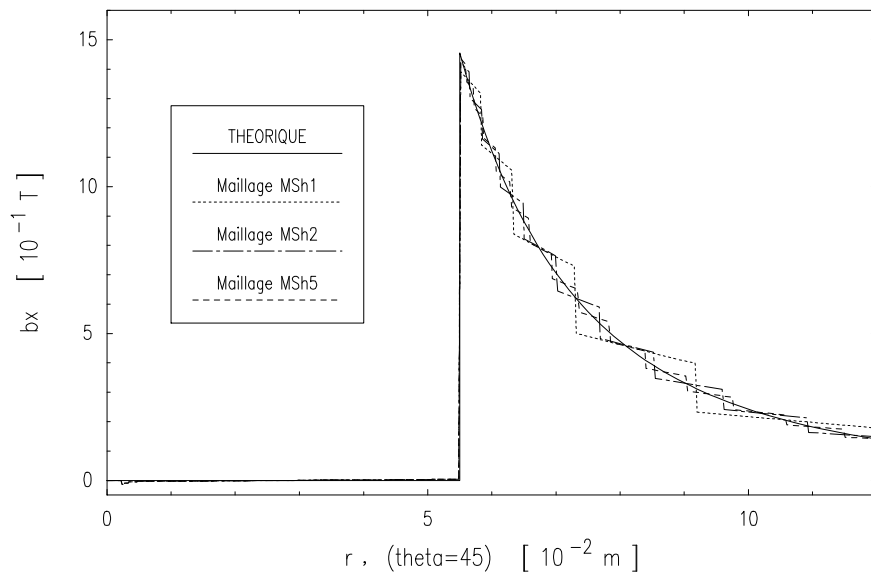


Fig. 4a. Variation de l'induction le long de la coupe  $I_{45}$  (composante  $b_z$ ).

Fig. 4b. Variation de l'induction le long de la coupe  $I_{45}$  (composante  $b_x$ ).

L'erreur relative maximale sur l'induction dans la sphère et dans l'air, le long de la coupe  $H_0$ , est donnée dans le tableau 3. Dans l'air, l'erreur est maximale dans le voisinage immédiat de l'interface sphère - air et diminue rapidement vers une valeur limite lorsque  $r$  augmente.

Maillage	Coupe $H_0$		
	Sphère ( $r < R$ )	Air ( $r > R$ )	Air ( $r \gg R$ )
MSh1	1.80 %	1.44 %	0.78 %
MSh2	1.04 %	0.77 %	0.54 %
MSh3	1.80 %	1.44 %	0.77 %
MSh4	1.01 %	0.77 %	0.54 %
MSh5	0.91 %	0.67 %	0.53 %
MSh6	0.88 %	0.64 %	0.51 %
MSh7	0.64 %	0.52 %	0.50 %

Tableau 3. Erreurs relatives maximales sur l'induction dans la sphère et dans l'air.

Les résultats obtenus indiquent qu'un raffinement du maillage dans la sphère n'influence pas de façon significative la précision de la solution (MSh1 comparé à MSh3, MSh2 comparé à MSh4). L'induction est en effet constante dans la sphère, ce qui est respecté de façon assez naturelle au niveau numérique même pour une qualité moyenne de maillage.

L'augmentation de la finesse du maillage selon  $r$  dans l'air y réduit les sauts de l'induction et améliore également la précision dans la sphère (MSh1, MSh2, MSh5). L'induction calculée dans l'air tend vers une variation continue, par lissage, qui semble être proche de la solution analytique, même pour un maillage moyen. Notons que si un tel lissage est facilement réalisable au sein d'une région, il l'est plus difficilement dans le voisinage d'une interface entre deux régions distinctes, au travers de laquelle les discontinuités sont naturelles ; cela consisterait généralement à effectuer une extrapolation. Notre intention ici n'est pas de procéder à un lissage de l'induction. Nous préférons présenter les résultats bruts, tels qu'ils sont donnés par la formulation étudiée, afin d'en extraire les caractéristiques propres. Néanmoins, rien ne nous empêche d'imaginer de tels lissages et de remarquer alors qu'ils sont proches de la solution analytique.

L'augmentation de la finesse du maillage selon l'angle  $\theta$  (MSh2 comparé à MSh6) améliore également la précision de la solution. Notons qu'il a été vérifié que, pour une largeur angulaire  $l_\theta$  fixée, le nombre de divisions selon l'angle  $\phi$  n'influait pas du tout la précision de la solution.

### 3.2.2 Influence du maillage et de la perméabilité

Nous pouvons étudier l'influence de la perméabilité relative  $\mu_r$  de la sphère sur la solution, cela pour différents maillages. Pour ce faire, nous représentons l'induction calculée au centre de la sphère pour des valeurs de  $\mu_r$  allant de 1 à 10000 (Fig. 5). L'erreur relative correspondante vis-à-vis de la solution analytique (1.4) est aussi représentée (Fig. 6).

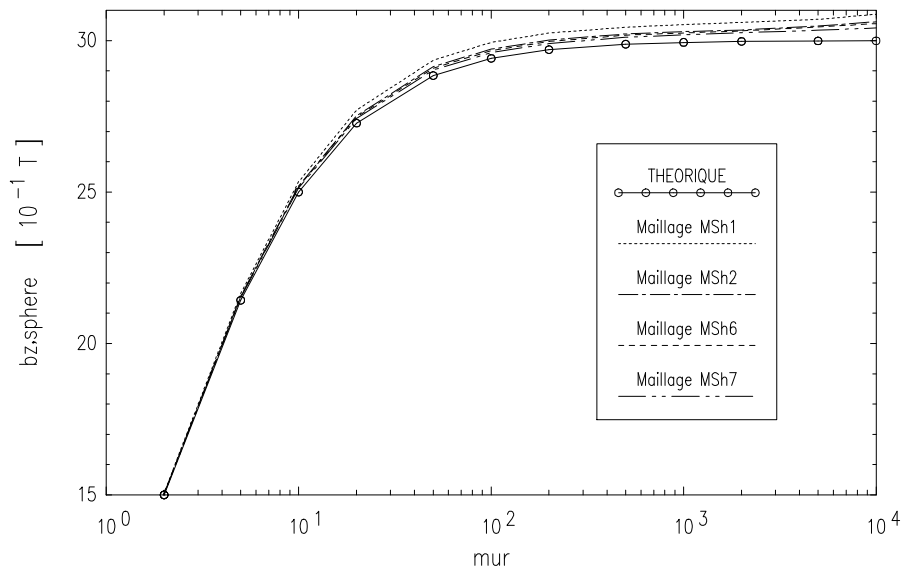


Fig. 5. Variation de l'induction dans la sphère en fonction de  $\mu_r$ .

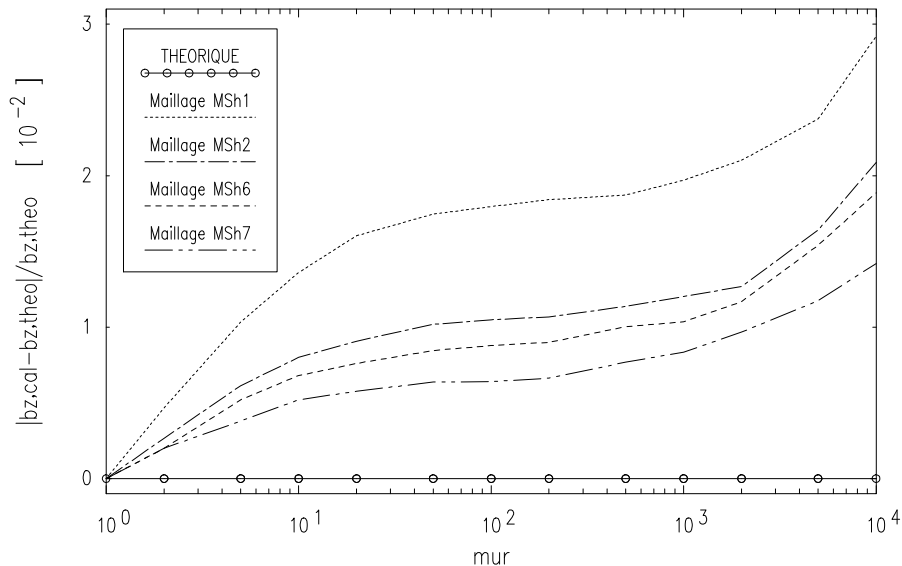


Fig. 6. Erreur relative sur l'induction dans la sphère en fonction de  $\mu_r$ .

Nous observons une augmentation de l'erreur relative avec la perméabilité, quel que soit le maillage. La précision est d'autant meilleure que le maillage dans l'air est fin, avec toutefois une limite de finesse qu'il est inutile de franchir car la solution dans l'air tend vers une valeur limite, donnée par (1.4) pour  $r > R$  avec  $\mu_r \rightarrow \infty$ .

Pour des valeurs de  $\mu_r$  au delà de 10000, des imprécisions importantes apparaissent dans la sphère alors que la solution reste correcte dans l'air. Le changement de concavité des courbes d'erreur relative en est une illustration (Fig. 6). Cette amplification de l'erreur est due au caractère de la formulation en  $\mathbf{h}$  par lequel les inconnues sont directement liées au champ  $\mathbf{h}$ , qui tend vers zéro dans les matériaux où  $\mu_r$  tend vers l'infini. Il s'agit principalement d'erreurs d'arrondi et un calcul en double précision permettrait de les réduire en augmentant toutefois la dimension du problème à résoudre. Il semble plus raisonnable d'adapter la formulation en  $\mathbf{h}$  aux hautes perméabilités (Bossavit, 1988f).

### 3.2.3 Influence du type d'élément

Nous considérons d'autres maillages construits sur les maillages de base déjà définis et constitués de prismes et de tétraèdres. Cela consiste à diviser chaque hexaèdre en deux prismes ou en six tétraèdres. Le nombre de noeuds est donc conservé, de même que le nombre d'inconnues nodales. Outre le fait que le nombre d'éléments augmente, les fonctions de base de l'espace d'approximation du champ  $\mathbf{h}$  sont modifiées et nous nous proposons d'analyser les changements qui en résultent dans la qualité de la solution.

Nous considérons une perméabilité magnétique relative  $\mu_r$  égale à 100. De plus, nous considérons le maillage de base MSh2 et les maillages associés MSp2, MSpt2 et MSt2, définis précédemment. Les variations de la composante de  $\mathbf{b}$  selon  $z$  le long des coupes  $H_0$  et  $I_{45}$ , pour les maillages MSh2 et MSp2, sont représentées aux figures 7-8. Pour le maillage MSt2, les variations sont très proches de celles de MSp2, alors que pour le maillage MSpt2, elles sont très proches de celles de MSh2. L'erreur relative sur l'induction dans la sphère est donnée dans le tableau 4 pour différents maillages.

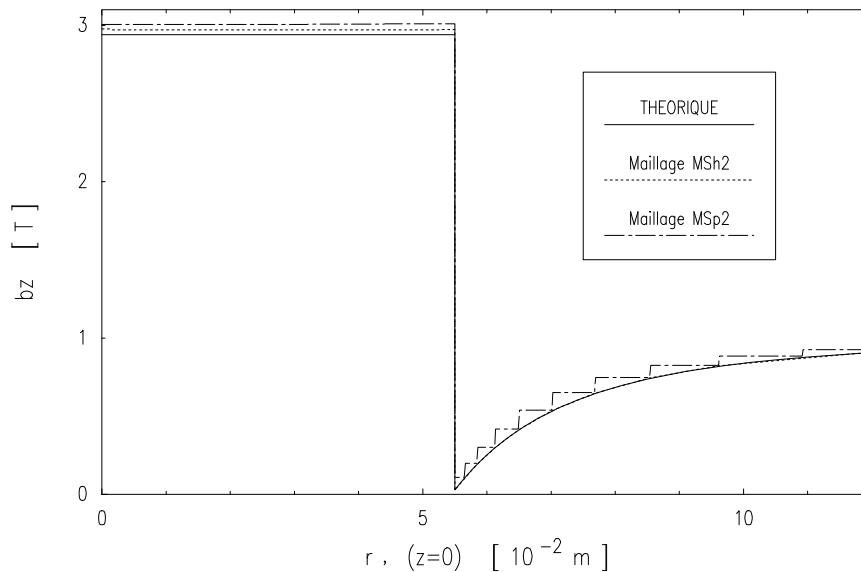
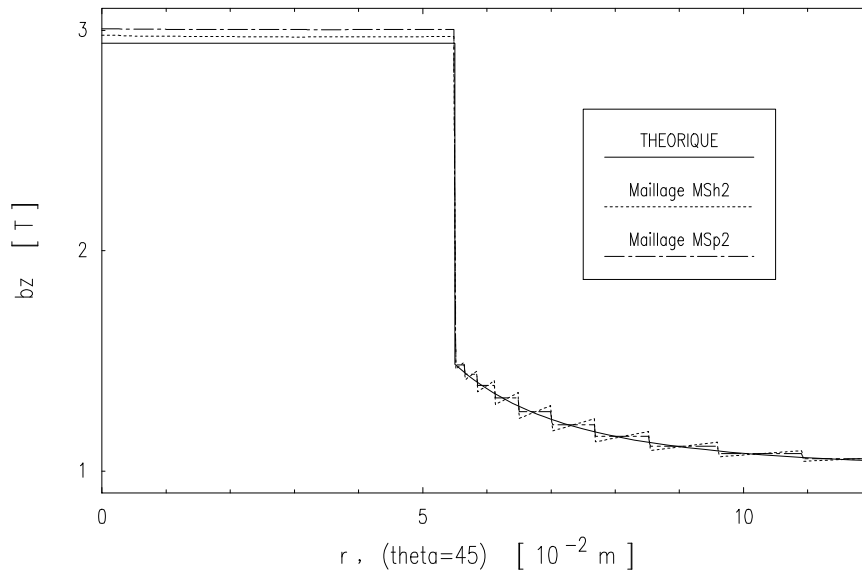


Fig. 7. Variation de l'induction le long de la coupe  $H_0$ .

Avec les maillages associés, basés sur des prismes ou des tétraèdres, la précision de la solution est inférieure à celle qui est obtenue avec des éléments finis construits sur des hexaèdres, malgré un même nombre d'inconnues. Cela s'explique par la moins grande richesse des espaces d'approximation générés par les prismes et les tétraèdres, par rapport aux hexaèdres. Notons que la direction de l'axe des prismes influence la solution, ce qui s'explique par la forme des fonctions des base associées.



Fig. 8. Variation de l'induction le long de la coupe  $I_{45}$  (composante  $b_z$ ).

Type de maillage	Maillage de base		
	MSh1	MSh2	MSh5
MSh	1.80 %	1.04 %	0.91 %
MSp	3.63 %	2.24 %	2.04 %
MSpt	1.82 %	1.05 %	0.93 %
MSt	3.65 %	2.26 %	2.07 %

Tableau 4. Erreur relative sur l'induction dans la sphère ( $r < R$ ).

### 3.3 Conclusions

La formulation en potentiel scalaire magnétique, sous sa forme de base, convient très bien aux matériaux de perméabilité magnétique moyenne, pour lesquels  $1 \leq \mu_r \leq 1000$ . Par contre, elle nécessite une certaine adaptation pour traiter les matériaux fortement magnétiques, pour lesquels  $\mu_r > 10000$ .

La solution numérique est d'autant plus proche de la solution analytique que le maillage est fin, ce qui était prévu par la théorie. Cela contribue donc à une validation de l'implémentation numérique de la formulation. Les résultats illustrent les conséquences de la formulation faible de l'équation  $\text{div } \mathbf{b} = 0$ , en ce qui concerne la continuité de la composante normale de l'induction : des sauts de l'induction ont lieu au passage d'un élément à un autre. La vérification de la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique est aussi mise en évidence. Il apparaît également que la finesse du maillage doit être accrue dans le voisinage des matériaux magnétiques afin de rendre compte avec une bonne précision des variations plus importantes du champ, sans toutefois devoir dépasser une certaine limite.

Les éléments finis construits sur des hexaèdres conduisent à une meilleure approximation que ceux qui sont construits sur des prismes ou des tétraèdres, pour un même nombre d'inconnues. Il est donc intéressant d'utiliser une majorité d'éléments hexaédriques lorsque la géométrie de la structure étudiée le permet. Certaines régions peuvent toutefois être constituées de prismes ou de tétraèdres. Les propriétés des éléments finis développés apportent une rigueur à une telle association d'éléments du point de vue de la conformité. En général, on pourra avoir soit une association d'hexaèdres et de prismes, soit une association de prismes et de tétraèdres, mais rarement une association des trois types d'éléments.

## 4. Résultats en magnétodynamique sinusoïdale

### 4.1 Définition des maillages

Nous considérons les **maillages de base**, définis à la section 3.1, dont les caractéristiques sont données dans le tableau 1 (i.e., nombre de divisions selon les trois directions des coordonnées sphériques, largeurs de ces divisions, nombre d'hexaèdres et de prismes, nombre de noeuds). La notation abrégée 'MDh' (Maillage, Dynamique, hexaèdre) est utilisée pour les maillages de base. Pour les maillages associés, constitués d'autres types d'éléments, nous notons :

- 'MDp' (prisme), ceux qui sont constitués de prismes dont l'axe est dirigé selon la direction  $\phi$  ;
- 'MDpt' (prisme, tétraèdre), ceux qui sont constitués d'une majorité de prismes dont l'axe est dirigé selon la direction  $\theta$  et d'une minorité de tétraèdres le long de l'axe  $z$  ;
- 'MDt' (tétraèdre), ceux qui sont constitués de tétraèdres.

Le nombre de noeuds d'un maillage ne dépend que du maillage de base associé alors que le nombre d'arêtes varie avec le nombre de divisions réalisées dans ce maillage de base pour générer des prismes ou des tétraèdres. Ainsi, avec la formulation  $\mathbf{h}\text{-}\phi$ , le nombre d'inconnues reste inchangé dans l'air, où le potentiel est défini en terme de valeur nodale, alors qu'il diffère dans la sphère conductrice, où le champ magnétique est défini en terme de sa circulation le long des arêtes (Tableau 2).

Maillage de base	Selon $r$						Selon $\theta$		Selon $\phi$		Éléments		Noeuds
	$n_{r,s}$	$l_{r,s,\min}$ (mm)	$l_{r,s,\max}$ (mm)	$n_{r,a}$	$l_{r,a,\min}$ (mm)	$l_{r,a,\max}$ (mm)	$n_\theta$	$l_\theta$	$n_\phi$	$l_\phi$	$n_{\text{Hex}}$	$n_{\text{Pri}}$	$n_{\text{Noe}}$
MDh1	5	4.4	22.1	13	1.6	258	10	9°	1	5°	153	27	381
MDh2	9	2.1	10.7	13	1.6	258	10	9°	1	5°	189	31	465
MDh3	13	1.4	6.9	13	1.6	258	10	9°	1	5°	225	35	549
MDh4	17	1.0	5.1	18	1.0	258	10	9°	1	5°	261	39	633
MDh5	17	1.0	5.1	18	1.0	258	20	4.5°	1	5°	646	54	1438

Tableau 1. Paramètres relatifs aux maillages de base.

Type de maillage	Maillage de base				
	MDh1	MDh2	MDh3	MDh4	MDh5
MDh	458	650	842	1034	2309
MDp	530	794	1058		
MDpt	502	738	974		
MDt	657	1037	1417		

Tableau 2. Nombre d'inconnues associées aux maillages.

A titre d'exemple, le maillage de base MDh4 du domaine global d'étude est représenté à la figure 1.

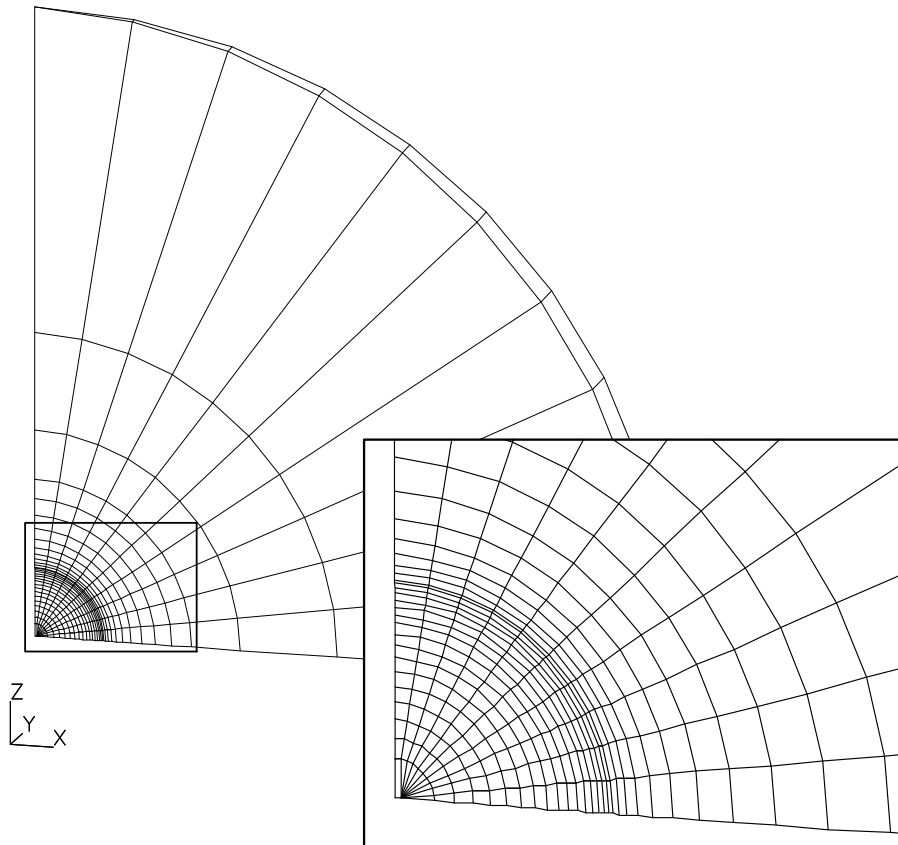


Fig. 1. Maillage de base MDh4.

## 4.2 Analyse de résultats

### 4.2.1 Problème de base

Considérons le problème de la sphère, en magnétodynamique sinusoïdale, caractérisé par les grandeurs suivantes :

$$f = 50 \text{ Hz} , \mu_r = 1 , \sigma = 5.92 \cdot 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1} . \quad (1)$$

La profondeur de pénétration  $\delta$ , donnée par (1.3), est alors égale à  $9.25 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ . Analysons l'induction magnétique  $\mathbf{b}$  calculée le long des coupes  $H_0$  et  $V_0$ , de même que la densité de courant induit calculée le long des coupes  $H_0$  et  $H_4$  (Fig. 1.2).

#### Induction magnétique

Le champ d'induction  $\mathbf{b}$  sur le plan  $y=0$  est représenté à la figure 2 sous forme de cartes de vecteurs pour ses parties réelle et imaginaire.

Le long de la coupe  $H_0$ , seule la composante de  $\mathbf{b}$  selon  $z$  est non nulle. Les variations de ses parties réelle et imaginaire sont représentées aux figures 3a-b et la continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{b}$  au passage de l'interface sphère - air, en  $\{r=R, \theta = \pi/2\}$ , y est mise en évidence. Cette continuité est satisfaite exactement car la formulation  $\mathbf{h}-\phi$  assure la continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{h}$ , et donc aussi celle de  $\mathbf{b}$  vu que les perméabilités de la sphère et de l'air sont égales. Seules les variations calculées dans les maillages de base MDh1, MDh2 et MDh3 sont représentées. Pour les autres maillages, plus fins, ces variations suivent la solution analytique avec une excellente précision.

Le long de la coupe  $V_0$ , seule la composante de  $\mathbf{b}$  selon  $z$  est non nulle. Les variations de ses parties réelle et imaginaire sont représentées aux figures 4a-b et il doit alors être possible d'y mettre en évidence la caractéristique physique de continuité de la composante normale de  $\mathbf{b}$ . Cette continuité ne peut être assurée que faiblement par la formulation en  $\mathbf{h}$ , ce qui se traduit par des sauts, ou discontinuités, de l'induction, en particulier le long de la coupe  $V_0$ . Ces sauts ont lieu à travers chaque interface entre éléments adjacents alors que la variation est continue dans chaque élément. Notons que de tels sauts n'apparaissent pas le long de la coupe  $H_0$  car la composante  $b_z$  qui y est représentée est quasiment tangente à chaque interface entre éléments et est donc continue en conséquence de la formulation en  $\mathbf{h}$ .

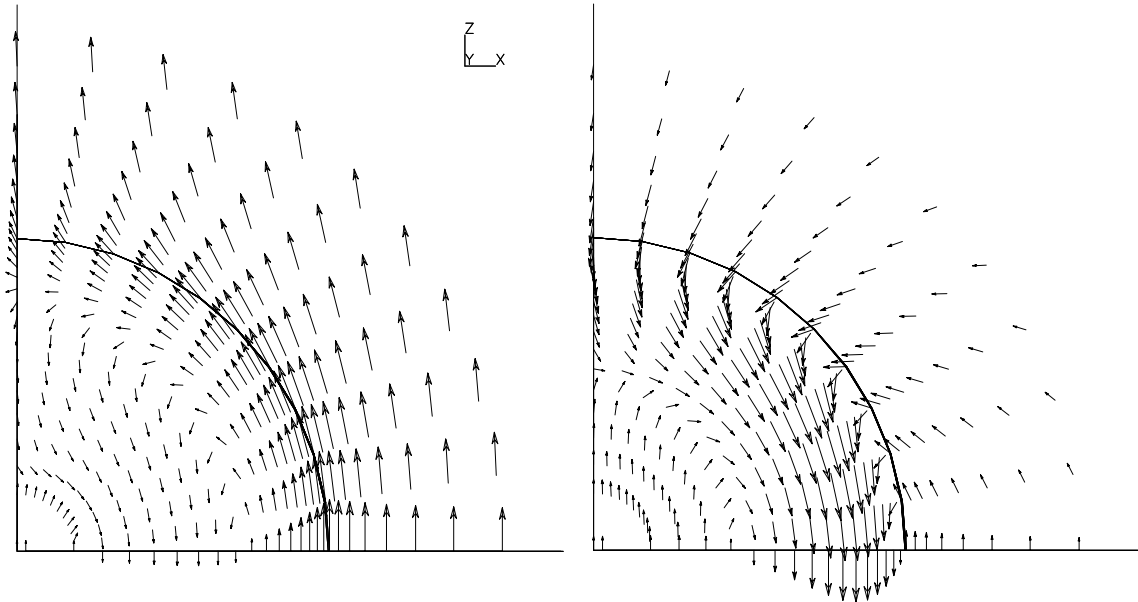


Fig. 2. Champ d'induction en  $y = 0$  : partie réelle ( $b_{\max} = 1.37 \text{ T}$ ) à gauche et partie imaginaire ( $b_{\max} = 0.47 \text{ T}$ ) à droite (maillage MDh4).

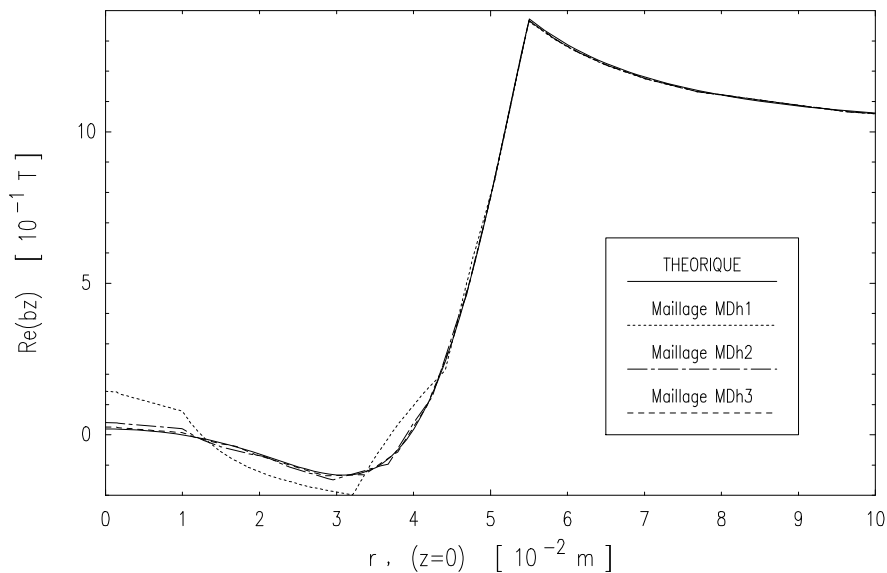


Fig. 3a. Variation de l'induction le long de la coupe  $H_0$  (partie réelle).

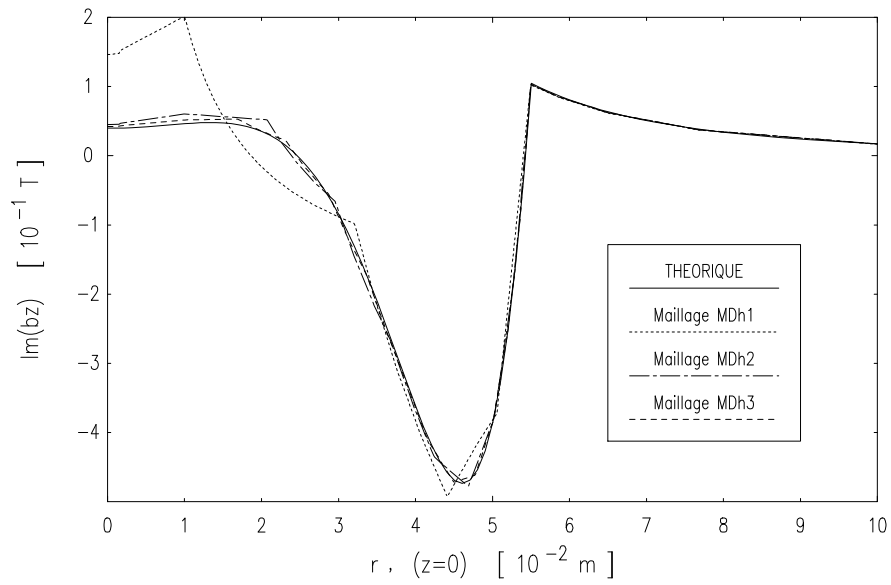


Fig. 3b. Variation de l'induction le long de la coupe  $H_0$  (partie imaginaire).

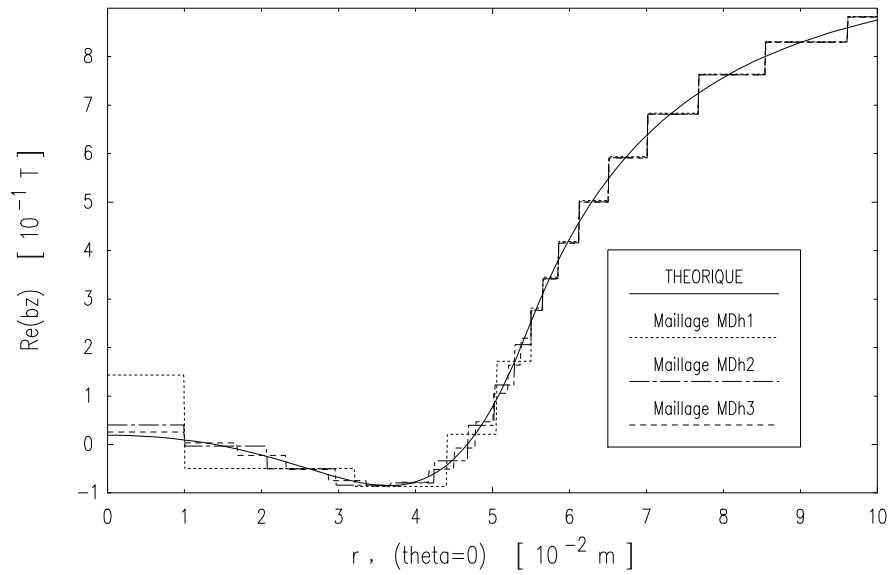


Fig. 4a. Variation de l'induction le long de la coupe  $V_0$  (partie réelle).

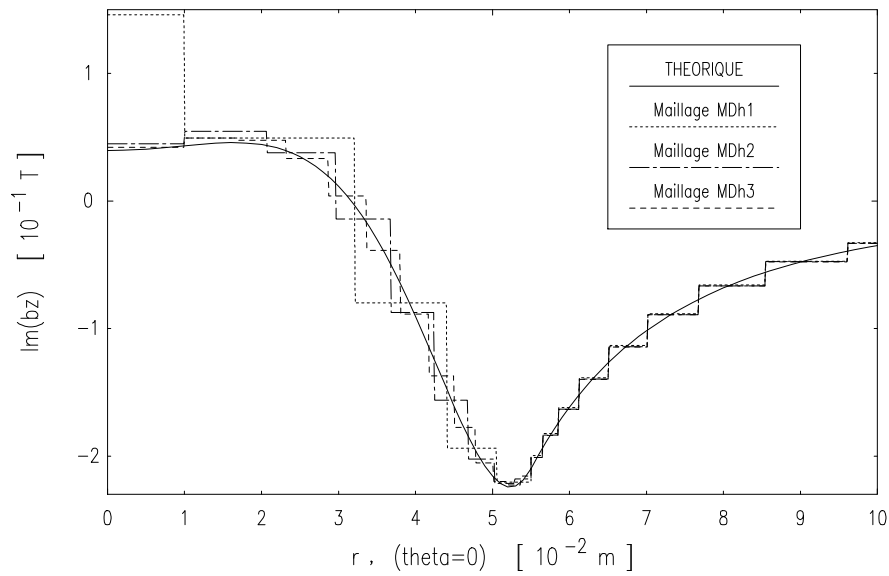


Fig. 4b. Variation de l'induction le long de la coupe  $V_0$  (partie imaginaire).

**Densité de courant induit**

Seule la composante de  $\mathbf{j}$  selon  $\phi$  est non nulle. Une carte de lignes d'isovaleurs de ses parties réelle et imaginaire, sur le plan  $y=0$ , est représentée à la figure 5. Les variations des parties réelle et imaginaire de la composante de  $\mathbf{j}$  selon  $\phi$  le long des coupes  $H_0$  et  $H_4$  sont représentées aux figures 6a-b. Il y apparaît des sauts caractéristiques des espaces d'approximation.

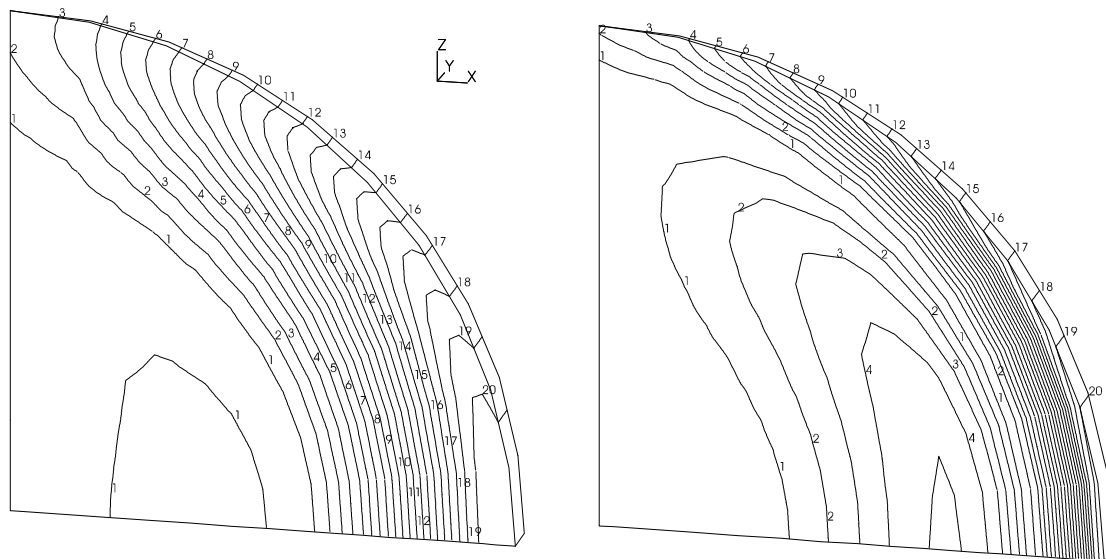


Fig. 5. Lignes d'isovaleurs de la densité de courant sur le plan  $y=0$  : partie réelle à gauche ( $j_{\min} = 1.38 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2$ ,  $j_{\max} = 1.09 \cdot 10^8 \text{ A/m}^2$ , niveau 1 =  $5.30 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$ , niveau 20 =  $1.30 \cdot 10^8 \text{ A/m}^2$ , écart niv. =  $5.17 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$ ) et partie imaginaire à droite ( $j_{\min} = 9.06 \cdot 10^4 \text{ A/m}^2$ ,  $j_{\max} = 1.16 \cdot 10^8 \text{ A/m}^2$ , niveau 1 =  $5.61 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$ , niveau 20 =  $1.11 \cdot 10^8 \text{ A/m}^2$ , écart niv. =  $5.52 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$ ) (maillage MDh4).

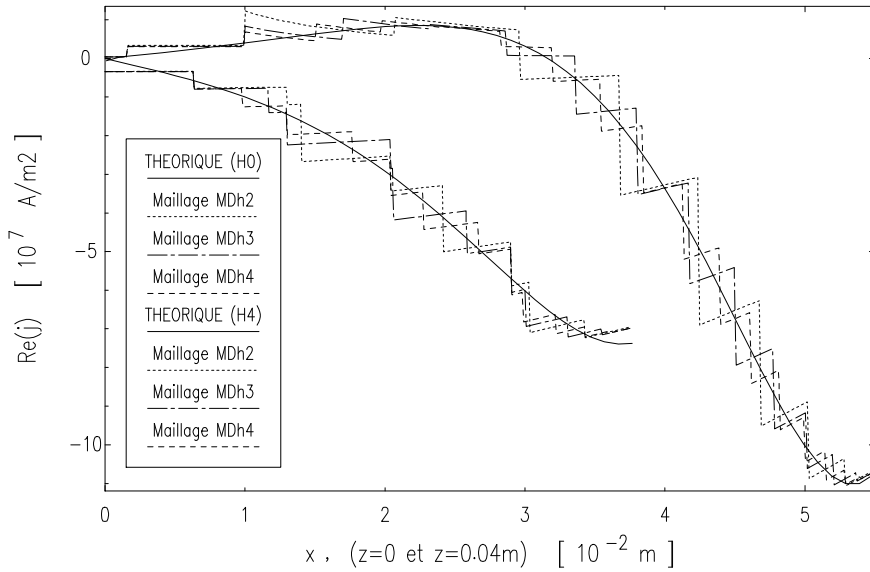


Fig. 6a. Variation de la densité de courant le long des coupes  $H_0$  et  $H_4$  (partie réelle).

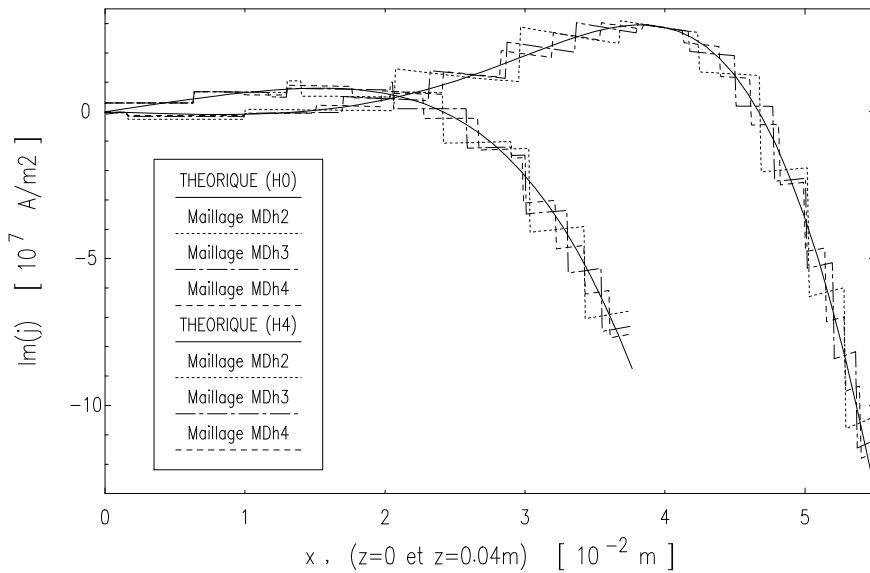


Fig. 6b. Variation de la densité de courant le long des coupes  $H_0$  et  $H_4$  (partie imaginaire).

La précision des résultats est d'autant meilleure que le maillage est fin. En particulier, l'augmentation de la finesse du maillage réduit les sauts de l'induction et de la densité de courant. Néanmoins, en général, les variations obtenues épousent la solution analytique avec un très bon accord. Un lissage de la solution pourrait être réalisé pour améliorer sa présentation mais ce n'est pas notre but et nous préférons présenter les résultats bruts, pour analyser leurs caractéristiques propres et par là, les caractéristiques de la discrétisation de la formulation  $\mathbf{h}-\phi$ .

Avec le maillage MDh1, le nombre de divisions radiales dans la sphère est nettement insuffisant pour rendre compte de l'allure précise de l'induction dans la sphère. L'imprécision qui en résulte n'a cependant pas une influence significative sur la solution dans l'air, c'est-à-dire que la solution dans la sphère semble correcte en moyenne, vue de l'extérieur.

### 4.2.2 Influence du type d'élément

Considérons encore le problème de base défini par (1), ainsi que le maillage de base MDh3 et les maillages associés MDp3, MDpt3 et MDt3, définis précédemment.

Les variations des parties réelle et imaginaire de  $\mathbf{b}$  le long de la coupe  $H_0$ , pour les maillages MDh3 et MDp3, sont représentées à la figure 7. Pour le maillage MDt3, les variations sont très proches de celles de MDp3, alors que pour le maillage MDpt3, elles sont très proches de celles de MDh3. Ces observations soulignent l'influence de la direction de l'axe des prismes sur la solution.

Les variations des parties réelle et imaginaire de  $\mathbf{j}$  le long de la coupe  $H_0$ , pour les maillages MDh3 et MDp3, sont représentées à la figure 8.

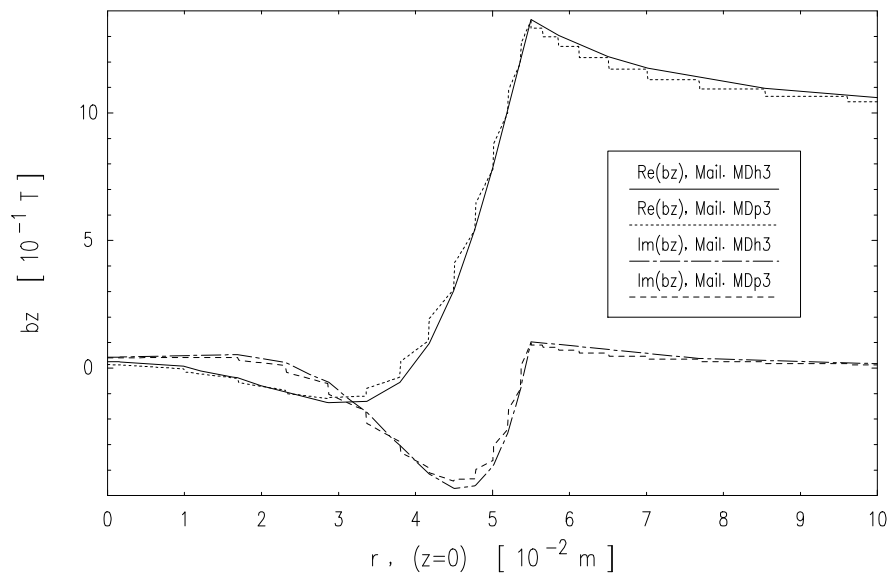


Fig. 7. Variation de l'induction le long de la coupe  $H_0$  (parties réelle et imaginaire).

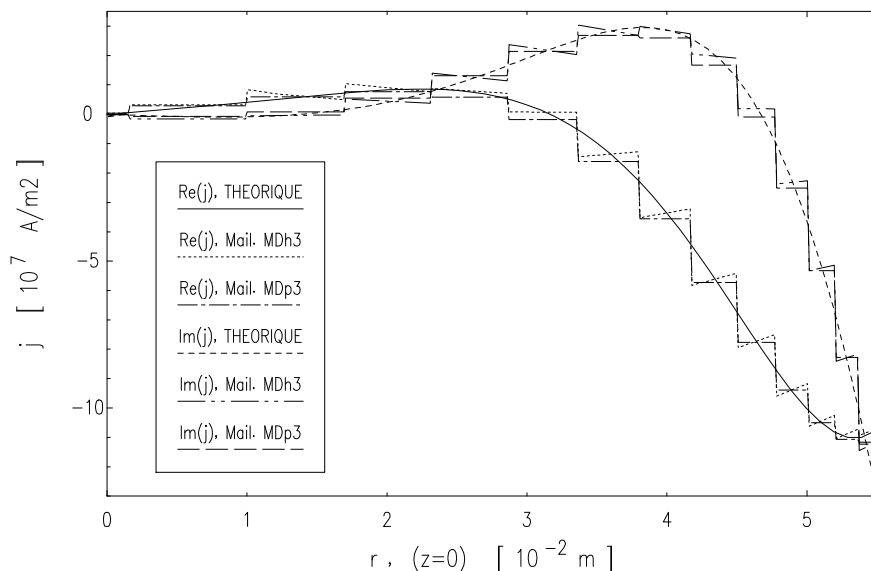


Fig. 8. Variation de la densité de courant le long de la coupe  $H_0$  (parties réelle et imaginaire).

Avec les maillages associés, basés sur des prismes ou des tétraèdres, la précision de la solution est inférieure à celle qui est obtenue lorsque les éléments finis sont construits sur des hexaèdres. L'augmentation du nombre d'inconnues dans les maillages associés ne joue donc



pas en faveur de la précision, ce qui peut s'expliquer par la moins grande richesse des espaces d'approximation générés par les prismes et les tétraèdres.

### 4.2.3 Influence de la conductivité

Considérons les problèmes de la sphère caractérisés par les grandeurs données dans le tableau 3, qui ne diffèrent que par la valeur de la conductivité.

Problème	f (Hz)	$\mu_r$	$\sigma$ ( $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ )	$\delta$ (m)
Pcond1	50	1	$5.92 \cdot 10^6$	$2.93 \cdot 10^{-2}$
Pcond2	50	1	$5.92 \cdot 10^7$	$9.25 \cdot 10^{-3}$
Pcond3	50	1	$5.92 \cdot 10^8$	$2.93 \cdot 10^{-3}$

Tableau 3. Valeurs de f,  $\mu_r$  et  $\sigma$  et profondeur de pénétration  $\delta$  correspondante.

### Induction magnétique

Les maillages utilisés sont choisis en fonction du type de problème et sont d'autant plus fins que la profondeur de pénétration est faible. Les variations des parties réelle et imaginaire de  $\mathbf{b}$  le long de la coupe  $H_0$  sont représentées à la figure 9. Le très bon accord entre les solutions numériques et analytiques nous permet de ne pas représenter ces dernières.

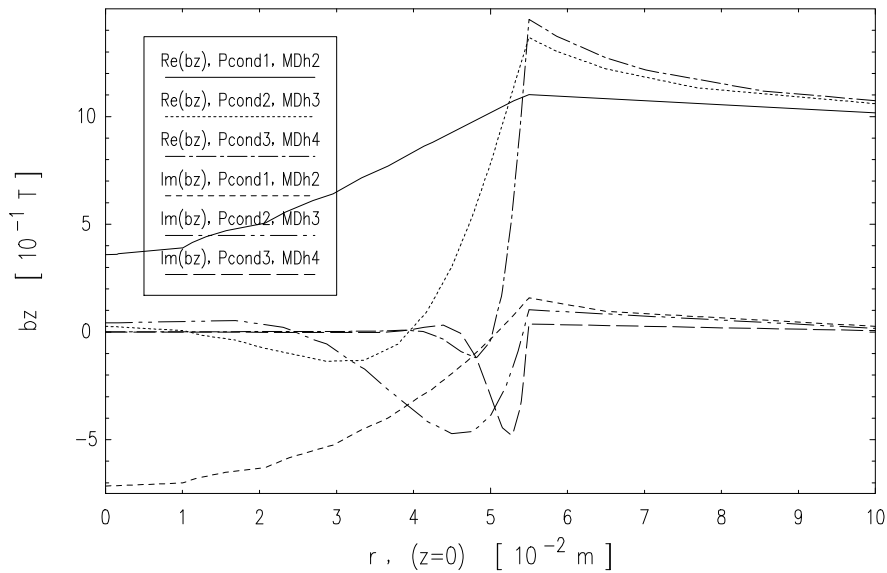


Fig. 9. Variation de l'induction le long de la coupe  $H_0$  (parties réelle et imaginaire).

### Densité de courant induit

Les variations des parties réelle et imaginaire de  $\mathbf{j}$  le long de la coupe  $H_0$  sont représentées aux figures 10a-b. L'influence de la profondeur de pénétration sur la solution y est bien illustrée. En particulier, ces figures mettent en évidence l'importance de la finesse du maillage dans le voisinage de la surface des conducteurs, où les courants induits ont tendance à se concentrer, et ce, d'autant plus que la conductivité est élevée. Une finesse suffisante doit permettre de rendre compte correctement des fortes variations du champ et du courant.

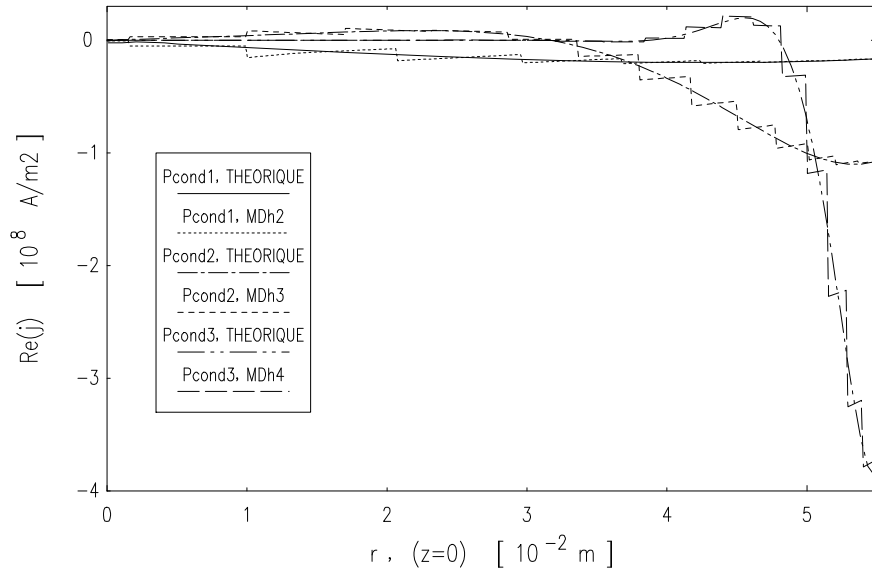


Fig. 10a. Variation de la densité de courant le long de la coupe  $H_0$  (partie réelle).

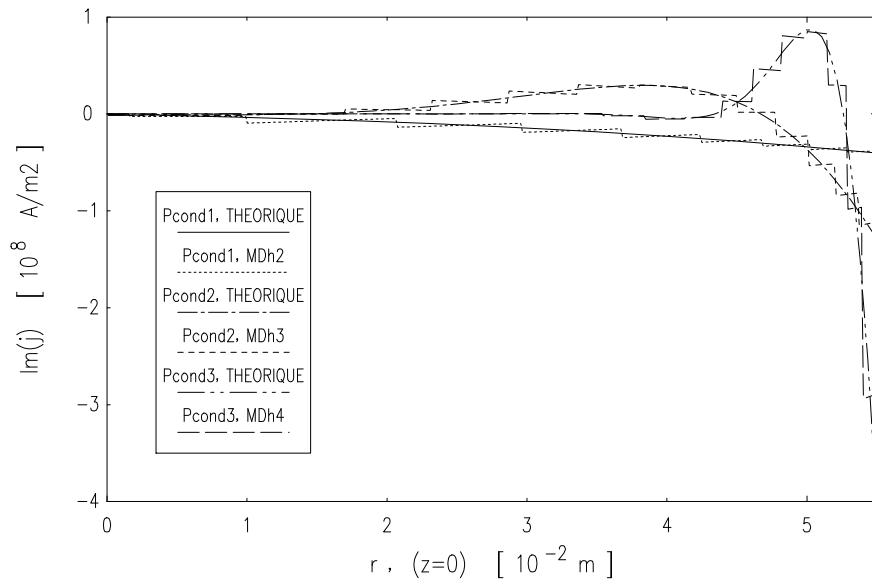


Fig. 10b. Variation de la densité de courant le long de la coupe  $H_0$  (partie imaginaire).

#### 4.2.4 Influence de la perméabilité

Considérons les problèmes de la sphère caractérisés par les grandeurs données dans le tableau 4, qui ne diffèrent que par la valeur de la perméabilité. Un changement de la valeur de la perméabilité de la sphère modifie non seulement la profondeur de pénétration mais aussi la variation du champ au travers de l'interface sphère - air : l'induction tangentielle ne sera plus continue lorsque  $\mu_r$  sera différent de 1.

Problème	f (Hz)	$\mu_r$	$\sigma$ ( $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ )	$\delta$ (m)
Pmur1	50	1	$5.92 \cdot 10^7$	$9.25 \cdot 10^{-3}$
Pmur2	50	2	$5.92 \cdot 10^7$	$6.54 \cdot 10^{-3}$
Pmur3	50	5	$5.92 \cdot 10^7$	$4.14 \cdot 10^{-3}$

Tableau 4. Valeurs de f,  $\mu_r$  et  $\sigma$  et profondeur de pénétration  $\delta$  correspondante.

### Induction magnétique

Les variations des parties réelle et imaginaire de  $\mathbf{b}$  le long de la coupe  $H_0$  sont représentées à la figure 11. Le très bon accord entre les solutions numériques et analytiques nous permet de ne pas représenter ces dernières. La discontinuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{b}$  au passage de l'interface sphère - air, en  $\{r=R, \theta=\pi/2\}$ , y est mise en évidence. Avec la formulation  $\mathbf{h}-\phi$ , cette discontinuité est exactement celle qui est vérifiée par la physique. Notons que la courbe  $\{\text{Re}(b_z), \text{Pmur3}\}$  a été tronquée, pour la lisibilité du graphique, et atteint une valeur maximale de 6.120 T en  $\{r=R^-, \theta=\pi/2\}$ , contre une valeur théorique de 6.145 T, soit 0.41 % d'erreur.

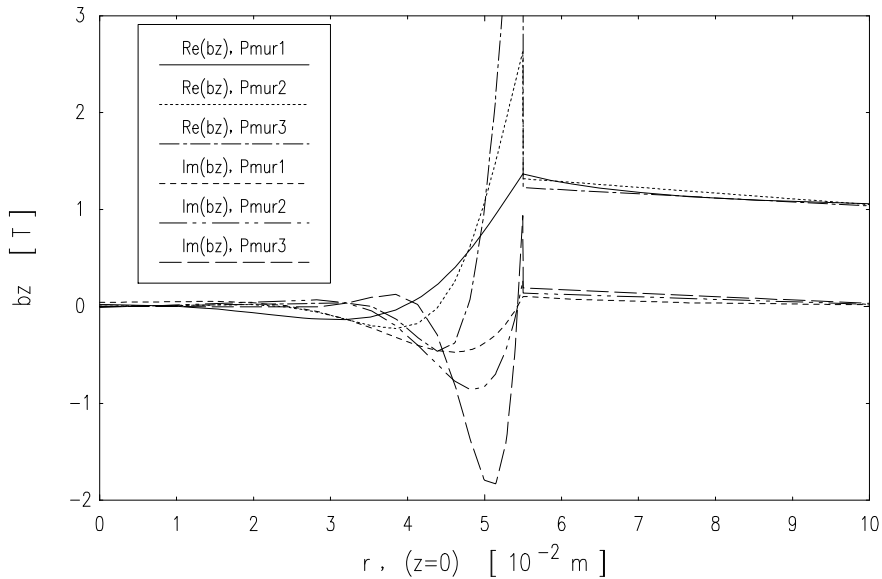


Fig. 11. Variation de l'induction le long de la coupe  $H_0$  (parties réelle et imaginaire).

### 4.2.5 Influence de la fréquence

L'étude de l'influence de la fréquence peut se ramener à celle de l'influence de la conductivité, qui a déjà été réalisée. Cela consiste en un transfert d'ordre de grandeur entre  $f$  et  $\sigma$ , sans qu'il y ait de répercussion sur la solution numérique. Nous allons toutefois analyser ici l'évolution de la solution lorsque la fréquence tend vers zéro, et comparer cette limite avec la solution du problème magnétostatique. Notons que cela aurait également pu être réalisé en faisant tendre la conductivité vers zéro. Notons aussi que ce passage à la limite est numérique et qu'une valeur de  $f$  trop faible rendrait le problème mal conditionné.

La variation de la composante de  $\mathbf{b}$  selon  $z$  le long de la coupe  $H_0$  est représentée à la figure 12 pour plusieurs valeurs de la fréquence  $f$  (Tableau 5) et pour le maillage MDh1. La solution analytique à fréquence nulle, en magnétostatique, y est également représentée.

Problème	$f$ (Hz)	$\mu_r$	$\sigma$ ( $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ )	$\delta$ (m)
Pfre1	0.10	100	$5.92 \cdot 10^7$	$2.07 \cdot 10^{-2}$
Pfre2	0.05	100	$5.92 \cdot 10^7$	$2.93 \cdot 10^{-2}$
Pfre3	0.01	100	$5.92 \cdot 10^7$	$6.54 \cdot 10^{-2}$

Tableau 5. Valeurs de  $f$ ,  $\mu_r$  et  $\sigma$  et profondeur de pénétration  $\delta$  correspondante.

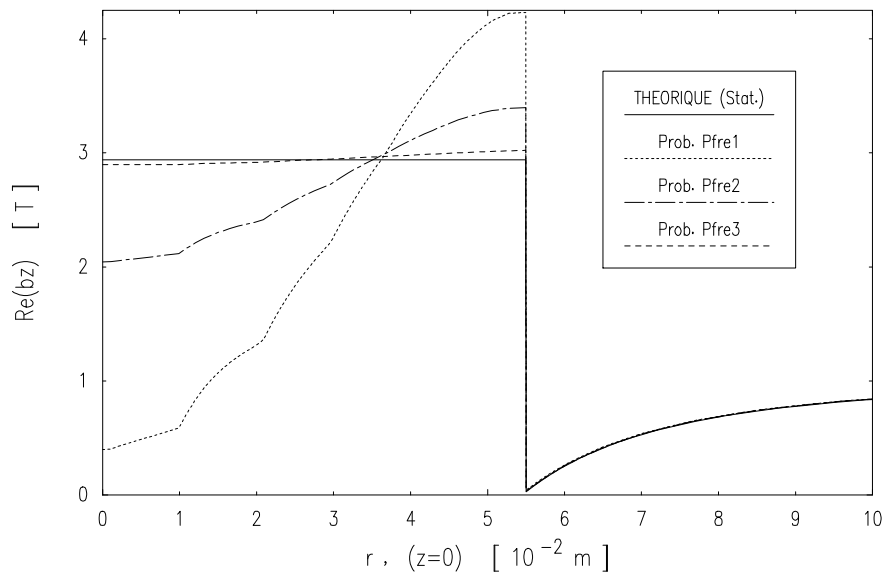


Fig. 12. Variation de l'induction le long de la coupe  $H_0$  (partie réelle) (maillage MDh1).

C'est lorsque la profondeur de pénétration devient supérieure au rayon de la sphère que le phénomène dynamique tend à s'atténuer, ce qui se traduit par une réduction de la partie imaginaire du champ magnétique et par une réduction de la densité de courant induit. Nous avons observé qu'une fréquence inférieure à 0.001 Hz ( $\delta = 20.7 \cdot 10^{-2}$  m) conduisait à un problème mal conditionné pour un calcul en simple précision.

### 4.3 Conclusions

Les conclusions établies pour le problème magnétostatique (Section 3.3) sont encore valables en magnétodynamique. En particulier, les éléments finis construits sur des hexaèdres conduisent ici aussi à une meilleure approximation des champs que ceux qui sont construits sur des prismes ou des tétraèdres, malgré un nombre d'inconnues inférieur avec les hexaèdres. Avec la formulation  $\mathbf{h}-\phi$ , ce nombre d'inconnues est d'autant plus faible que les régions conductrices occupent une place importante dans la structure, car c'est dans ces régions que sont utilisés les éléments d'arête. Une meilleure précision et une dimension de problème réduite jouent donc en la faveur des éléments hexaédriques. Il apparaît donc intéressant d'utiliser une majorité d'éléments hexaédriques lorsque la géométrie de la structure étudiée le permet.

Dans les matériaux conducteurs, les variations du champ magnétique et de la densité de courant induit sont d'autant plus importantes dans le voisinage de leur surface que la fréquence est élevée. Et c'est pour rendre compte correctement de ces variations qu'il est nécessaire d'affiner le maillage dans ces régions. La profondeur de pénétration apparaît être un bon estimateur de la finesse nécessaire.

# Noyau magnétique et inducteur (Problème statique linéaire)

## 1. Définition du problème

### 1.1 Description générale

Un noyau magnétique parallélépipédique de perméabilité élevée est entouré d'un inducteur dans lequel le courant d'excitation est continu. Un écran magnétique, ou blindage, entoure le noyau et l'inducteur. Le problème est de calculer le champ magnétique dans cette structure, en diverses positions, et de comparer les résultats obtenus avec des résultats expérimentaux. Il s'agit d'un problème-test proposé par l'Institut des Ingénieurs Electriciens du Japon (IEEJ, *the Institute of Electrical Engineers of Japan*) (Fujiwara, 1992 ; Nakata, Takahashi, Fujiwara & Imai, 1990).

Il s'agit principalement d'un **problème magnétostatique linéaire** de calcul du champ magnétique dans une structure tridimensionnelle. Celle-ci comporte des matériaux de haute perméabilité magnétique et présente des **symétries**.

### 1.2 Description de la géométrie et des matériaux

La structure étudiée est représentée à la figure 1. Elle comporte un **noyau magnétique** parallélépipédique à base carrée, de largeur égale à 100 mm et de hauteur égale à 200 mm. Un **inducteur**, comportant 457 spires, entoure le noyau. Son courant d'excitation donne lieu à une force magnétomotrice de 3000 A. Un **écran magnétique**, d'épaisseur égale à 1.6 mm, enferme le noyau et l'inducteur. Il permet d'isoler la structure du monde extérieur en canalisant le flux magnétique et en limitant par conséquent les flux de fuite vers l'extérieur.

La perméabilité magnétique relative du noyau et de l'écran est égale à 1000. Celle de l'inducteur est égale à 1. L'ensemble de la structure est plongé dans l'air, dont la perméabilité relative est égale à 1.

### 1.3 Grandeurs à calculer

Il s'agit de calculer la distribution spatiale du champ magnétique dans la structure. En particulier, l'induction magnétique calculée sera comparée avec les résultats expérimentaux suivants (Nakata, Takahashi, Fujiwara & Imai, 1990) :

- l'induction mesurée aux points  $P_1 = (0, 0, 110)$ ,  $P_2 = (40, 0, 110)$  et  $P_3 = (40, 40, 110)$ , situés dans l'air dans le voisinage de la face supérieure du noyau (les coordonnées sont données en mm) (Fig. 2) ;
- le flux de l'induction magnétique mesuré au travers des surfaces (Fig. 2)  $S_1 \equiv \{ 0 \leq x \leq 50, 0 \leq y \leq 50, z = 0 \}$  et  $S_2 \equiv \{ 0 \leq x \leq 50, 0 \leq y \leq 50, z = 90 \}$ . On se ramènera à l'induction moyenne sur ces surfaces en divisant chaque flux par l'aire correspondante.

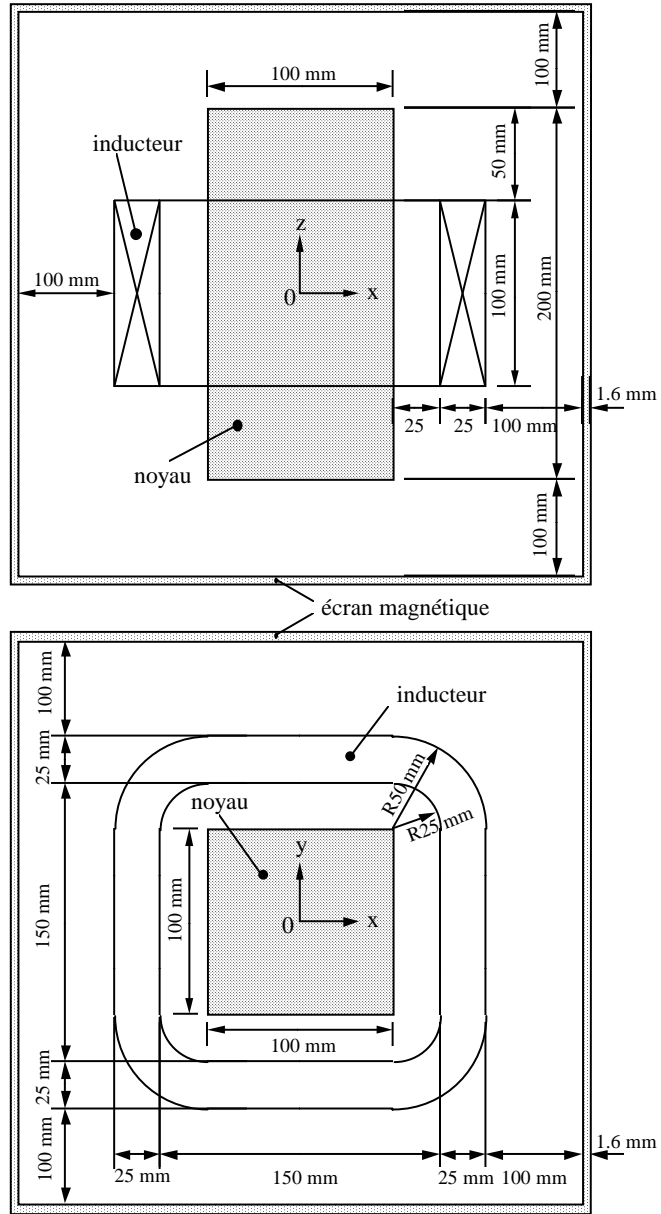


Fig. 1. Structure étudiée : noyau magnétique, inducteur et écran (l'écran est volontairement schématisé à échelle réduite).

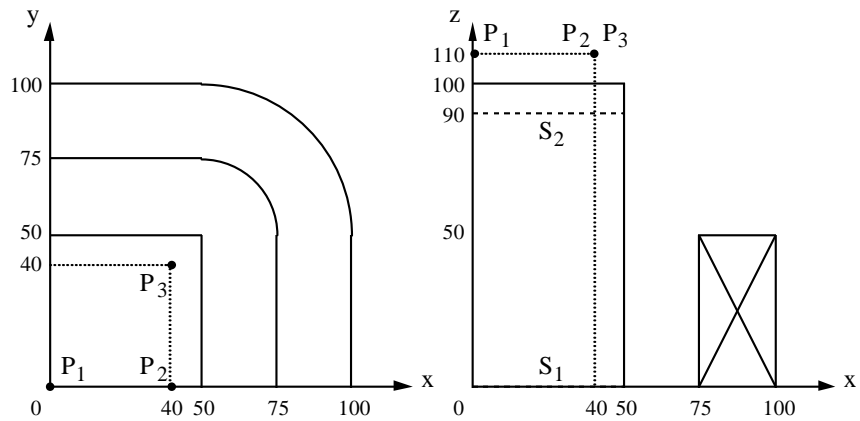


Fig. 2. Positions définies (mm) pour le calcul de l'induction et de son flux.

## 2. Modélisation

### 2.1 Formulation utilisée

La formulation utilisée est la **formulation en  $\mathbf{h}$** , dans laquelle les inconnues sont directement liées au **champ magnétique  $\mathbf{h}$** . Dans les matériaux non conducteurs, ce champ peut dériver d'un **potentiel scalaire magnétique  $\phi$** . De plus, si on définit un champ source  $\mathbf{h}_s$  tel que  $\text{rot } \mathbf{h}_s = \mathbf{j}$ , où  $\mathbf{j}$  est la densité de courant imposée dans l'inducteur, et que l'on définit le champ de réaction correspondant  $\mathbf{h}_r$ , tel que  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_r + \mathbf{h}_s$ , alors ce dernier champ peut aussi dériver d'un potentiel scalaire de réaction  $\phi_r$  dans l'inducteur, c'est-à-dire  $\mathbf{h}_r = -\text{grad } \phi_r$ .

Au niveau discret, les éléments finis utilisés pour l'interpolation de  $\phi_r$  sont des éléments nodaux. L'interpolation du champ source  $\mathbf{h}_s$  est quant à elle effectuée grâce à des éléments d'arête construits sur les mêmes éléments géométriques. Nous verrons bientôt comment définir pratiquement un tel champ source.

Nous pouvons déduire du champ magnétique  $\mathbf{h}$  une approximation de l'induction magnétique  $\mathbf{b}$ , par  $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$ .

### 2.2 Types d'éléments finis utilisés

Nous utiliserons des éléments finis nodaux et d'arête construits sur des hexaèdres de type I. Nous définirons directement un maillage de finesse importante. Notons que le maillage considéré comportera également des prismes, en minorité toutefois par rapport aux hexaèdres.

### 2.3 Conditions aux limites et symétries

Les symétries qui peuvent être prises en compte sont au nombre de trois (Fig. 1). Elles sont, en centrant la structure au point  $(0, 0, 0)$  :

- une symétrie à champ magnétique perpendiculaire, ou à courant parallèle, sur le plan  $z = 0$ , noté  $\Gamma_h$ , où

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{h} \big|_{\Gamma_h} = 0, \quad \text{ou encore} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \big|_{\Gamma_h} = 0; \quad (1)$$

- deux symétries à induction parallèle, ou à courant perpendiculaire, sur les plans  $x = 0$  et  $y = x$ , notés  $\Gamma_e$ , où

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} \big|_{\Gamma_e} = 0, \quad \text{ou encore} \quad \mathbf{n} \wedge \mathbf{e} \big|_{\Gamma_e} = 0. \quad (2)$$

La géométrie à étudier peut ainsi se réduire à un seizième de la structure initiale ; nous considérons la région  $\{x \geq 0, x - y \geq 0, z \geq 0\}$ . La portion de  $\Gamma_h$  en contact avec l'air est notée  $\Gamma_{h, \text{air}}$  et son complémentaire dans  $\Gamma_h$ , i.e.  $\Gamma_h \setminus \Gamma_{h, \text{air}}$ , est noté  $\Gamma_{h, \text{mat}}$ . Les surfaces  $\Gamma_{e, \text{air}}$  et  $\Gamma_{e, \text{mat}}$  sont définies de la même façon.

De plus, nous limitons le domaine d'étude à une boîte parallélépipédique de dimension suffisante (idéalement infinie) et dont les surfaces éloignées de la structure, qui approximent les surfaces à l'infini, sont notées  $\Gamma_\infty$  (Fig. 1). On considère que le champ de réaction s'annule sur ces surfaces, c'est-à-dire que la structure étudiée n'a pas d'influence à leur niveau. La présence de l'écran magnétique permet en réalité de placer ces surfaces à courte distance de la structure.

Les conditions sur les surfaces  $\Gamma_h$  et  $\Gamma_e$ , i.e. (1) et (2), s'appliquent au champ total. Or, si elles sont vérifiées par le champ source, elles peuvent aussi s'appliquer seulement au champ de réaction (par superposition). Sur la surface  $\Gamma_\infty$ , nous avons le choix entre les conditions des

types (1) et (2). La formulation en  $\mathbf{h}$  nous donne en réalité le choix entre  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} \big|_{\Gamma_e} = 0$  et  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{h}_r \big|_{\Gamma_h} = 0$ . Nous choisissons la seconde condition.

Ainsi, pour la formulation en  $\mathbf{h}$ , nous devons imposer explicitement les conditions

$$\phi_r \big|_{\Gamma_{h, \text{mat}}} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \wedge \mathbf{h}_s \big|_{\Gamma_{h, \text{mat}}} = 0, \quad \phi_r \big|_{\Gamma_{h, \text{air}}} = 0, \quad \phi_r \big|_{\Gamma_\infty} = 0, \quad (3a-b-c)$$

alors que la condition  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} \big|_{\Gamma_e} = 0$  est implicite ; la surface  $\Gamma_\infty$  est du type de  $\Gamma_h$ . Cela revient à fixer certains degrés de liberté, c'est-à-dire à annuler le potentiel  $\phi_r$  aux noeuds de  $\Gamma_{h, \text{air}}$  et  $\Gamma_\infty$ . Notons que le potentiel  $\phi_r$  est défini à une constante près, celle-ci étant fixée par les conditions (3a-b-c).

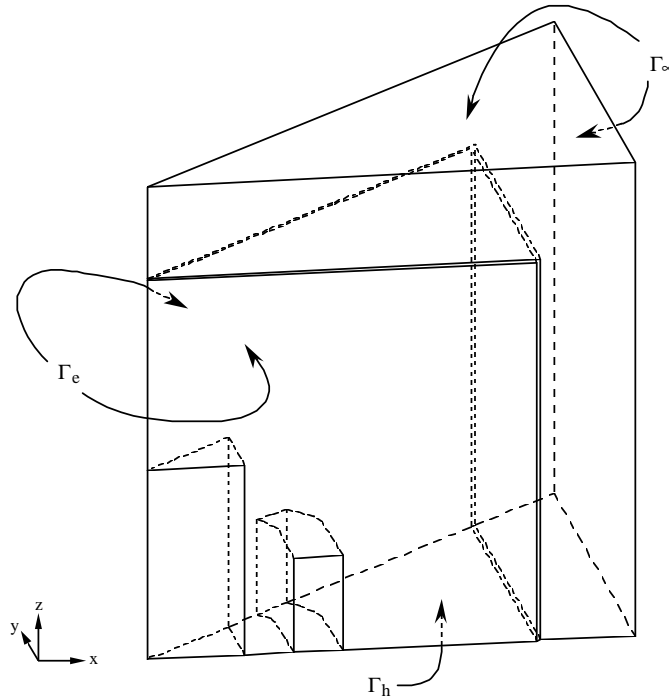


Fig. 1. Domaine d'étude et conditions aux limites.

## 2.4 Méthodes de calcul

La solution du système linéaire d'équations généré par la méthode des éléments finis est obtenue par la méthode ICCG (Incomplete Choleski Conjugate Gradient method) (Press & al., 1989).

## 2.5 Prise en compte de l'inducteur

L'inducteur peut être pris en compte par un champ source généralisé  $\mathbf{h}_s$  qui vérifie l'équation  $\text{rot } \mathbf{h}_s = \mathbf{j}_s$  dans l'espace des éléments d'arête ;  $\mathbf{j}_s$  est la densité de courant imposée dans l'inducteur. Le support d'un tel champ peut être réduit au maximum s'il est limité au support de  $\mathbf{j}_s$ , c'est-à-dire à l'inducteur, avec toutefois une contribution extérieure associée à une coupure source, liée à ce même inducteur et qui rend son complémentaire simplement connexe. Cette contribution extérieure revient à définir un potentiel scalaire source  $\phi_s$  nul partout et une discontinuité de coupure source égale à la moitié du courant total imposé, vu les symétries considérées. La construction d'un champ source  $\mathbf{h}_s$  dans l'inducteur se fait par l'application de la jauge naturelle dans l'espace des éléments d'arête, qui est du type  $\mathbf{h}_s \cdot \mathbf{w} = 0$ , où  $\mathbf{w}$  a la direction, discontinue, des arêtes d'un arbre construit dans l'inducteur.



La coupure source est définie sur le plan  $z = 0$  et s'appuie sur l'inducteur. Elle se situe donc en partie dans l'air et en partie dans le noyau. La définition d'un champ source dans l'inducteur, dans l'espace des éléments d'arête, se fait par la fixation de sa circulation sur les arêtes de cet inducteur.

Nous commençons par annuler sa circulation sur les arêtes situées en surface (sur la surface réelle de l'inducteur et non pas sur la surface de la portion étudiée, de même que sur la surface du type de  $\Gamma_h$ ), excepté celles qui font partie de la couche de transition associée à la coupure, où la circulation est fixée égale à la discontinuité de coupure. Ainsi, la continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{h}_s$  est assurée sur l'interface inducteur - air. Ensuite, partant d'un noeud de la surface, nous construisons un arbre qui relie tous les noeuds internes. Nous sommes libres d'annuler la circulation de  $\mathbf{h}_s$  sur les arêtes de cet arbre. La circulation de  $\mathbf{h}_s$  sur les arêtes du co-arbre correspondant peut finalement être calculée. A chacune de ces arêtes est associé un contour unique constitué de cette arête, d'arêtes de l'arbre et éventuellement d'arêtes de surface. Il faut que la circulation totale le long de chaque contour soit égale au flux de la densité de courant imposée au travers de la surface qui s'appuie sur ce contour. La circulation de  $\mathbf{h}_s$  sur chaque arête du co-arbre est donc égale à ce flux, au signe près suivant son orientation par rapport à celle du contour.

Afin d'illustrer cette méthode de calcul de champ source, considérons le problème du calcul du champ magnétique généré par l'inducteur en l'absence de tout matériau magnétique. Le domaine d'étude peut toujours être limité au seizième du domaine total, pour les raisons de symétrie déjà explicitées. Le maillage de l'air doit toutefois s'étendre à grande distance de l'inducteur du fait qu'il n'y a plus de matériau pour canaliser le flux magnétique dans le voisinage de la structure. Nous plaçons les deux portions de surface  $\Gamma_\infty$  à une distance de 1 m du centre de l'inducteur, c'est-à-dire en  $x = 1$  m et  $z = 1$  m.

Les maillages de l'inducteur, de sa surface et de la coupure sont représentés à la figure 2.

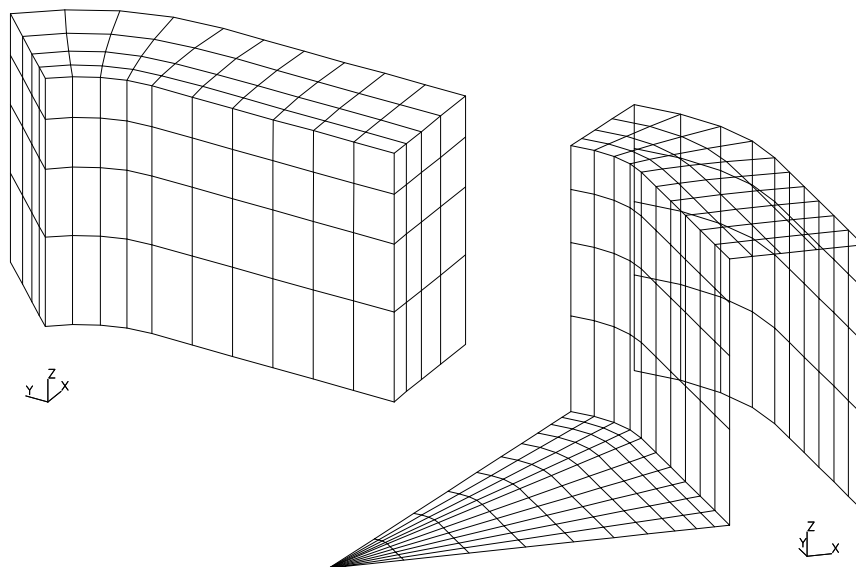


Fig. 2. Maillage de l'inducteur (à gauche) et maillage de sa surface et de la coupure (à droite).

L'arbre construit dans l'inducteur est représenté à la figure 3. Ses arêtes sont tracées en traits épais. Sont également représentées sur cette figure les arêtes situées en surface, tracées en traits pointillés fins, ainsi que les arêtes associées à la couche de transition de la coupure, tracées en traits pointillés épais.

Les champs  $\mathbf{h}_s$ ,  $\mathbf{h}_r$  et  $\mathbf{h}$ , sur le plan  $y=0$ , sont représentés aux figures 4a-b-c sous forme de cartes de vecteurs. Sur la figure 4a, nous pouvons observer le caractère discontinu du champ  $\mathbf{h}_s$  dans l'inducteur, qui est dû à la jauge utilisée pour le définir. De plus, l'extension du support de ce champ à la couche de transition associée à la coupure  $y$  est illustrée. Quant au champ  $\mathbf{h}_r$  (Fig. 4b), il s'adapte en conséquence pour conduire au champ total (Fig. 4c), qui présente alors les continuités d'un champ physique.

Les variations du champ magnétique le long des axes OX et OZ sont représentées à la figure 5. Seule la composante de  $\mathbf{h}$  selon  $z$  est représentée, les autres étant nulles. Nous pouvons observer le très bon accord qui existe entre le champ calculé et le champ donné par une méthode semi-analytique, basée sur une méthode intégrale (Ciric, 1992).

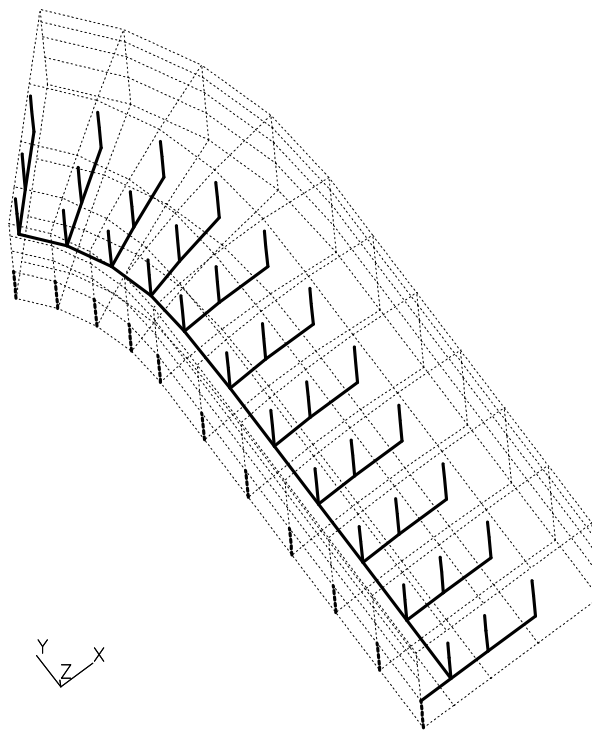


Fig. 3. Arêtes de l'arbre construit dans l'inducteur (en traits épais) et arêtes de la couche de transition (en traits pointillés épais).

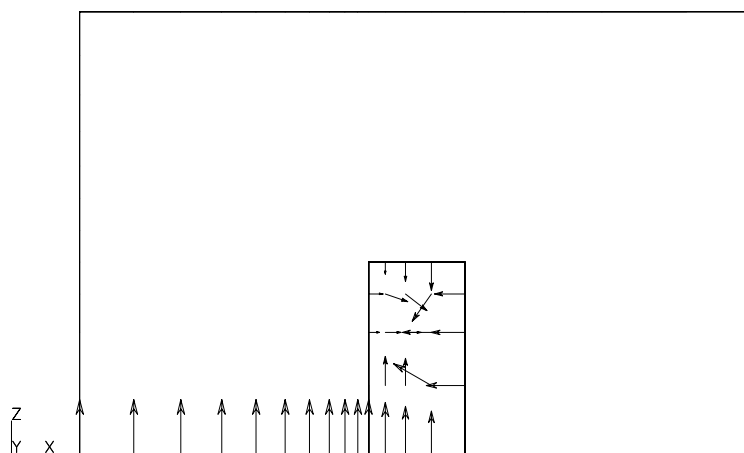


Fig. 4a. Champ magnétique source  $\mathbf{h}_s$  sur le plan  $y=0$  ; ( $h_{s, \min} = 8281.5$  A/m,  $h_{s, \max} = 83484$  A/m).

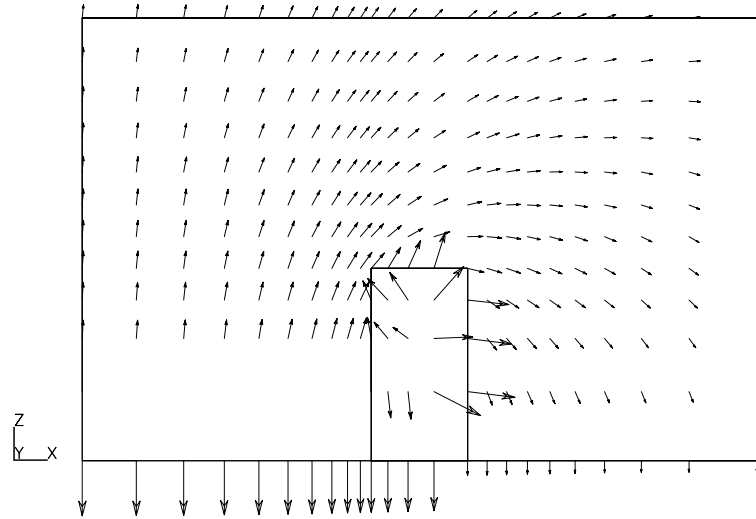


Fig. 4b. Champ magnétique de réaction  $\mathbf{h}_r$  sur le plan  $y = 0$  ; ( $h_{r, \min} = 1255.4$  A/m,  $h_{r, \max} = 69700$  A/m).

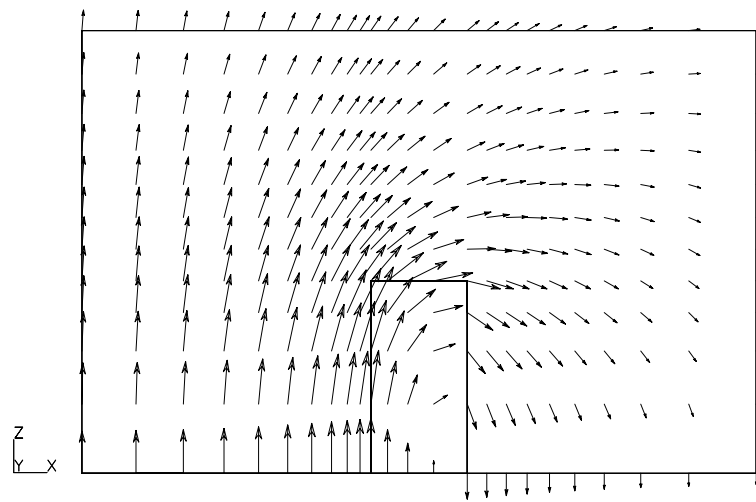


Fig. 4c. Champ magnétique total  $\mathbf{h}$  sur le plan  $y = 0$  ; ( $h_{\min} = 1255.4$  A/m,  $h_{\max} = 18943$  A/m).

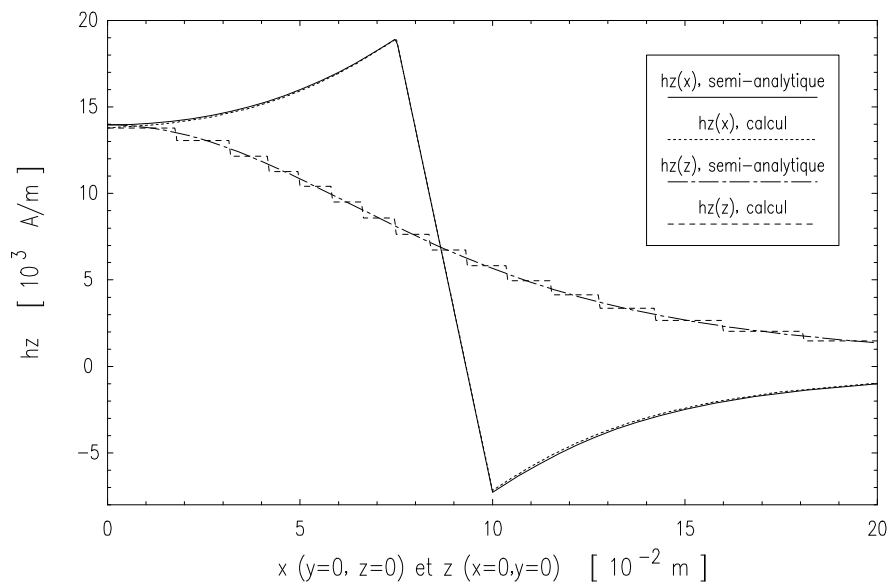


Fig. 5. Variations du champ magnétique le long des axes OX et OZ.

### 3. Résultats

#### 3.1 Définition du maillage

Le maillage du noyau, de l'inducteur et de l'écran est représenté à la figure 1a. La projection du maillage du domaine d'étude sur un plan horizontal ( $z = \text{constante}$ ) est représentée à la figure 1b.

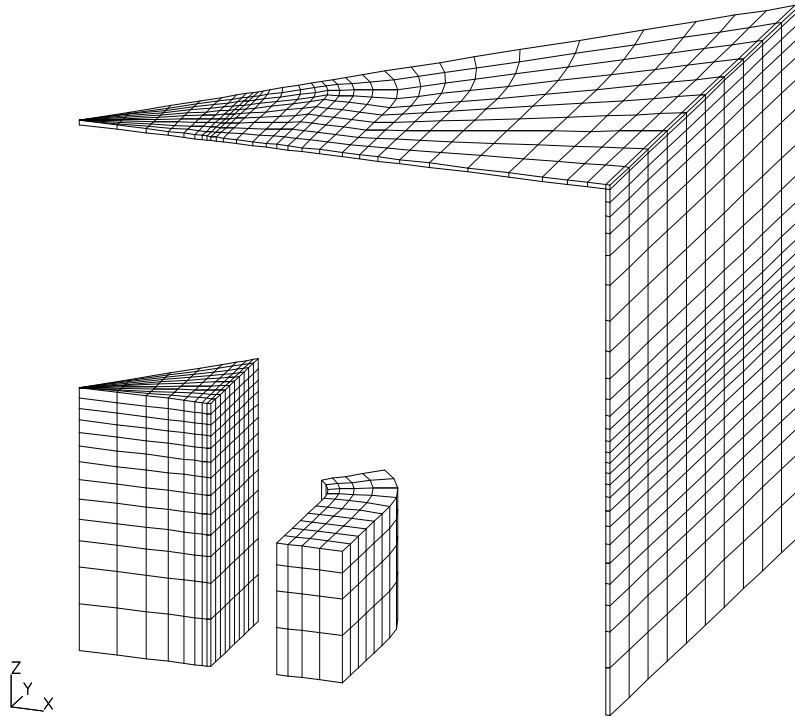


Fig. 1a. Maillage de la structure (noyau, inducteur et écran).

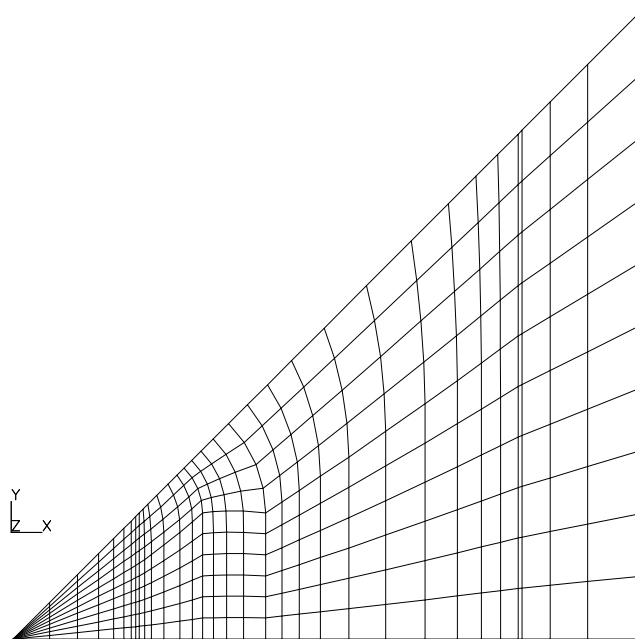


Fig. 1b. Projection horizontale du maillage du domaine d'étude.

Les éléments définis sont principalement des hexaèdres associés à une minorité de prismes, ces derniers étant situés le long de l'axe OZ. Un maillage régulier est réalisé dans les différents matériaux ainsi que dans l'air. Des divisions non uniformes de faible largeur sont définies dans les régions où les variations du champ magnétique peuvent être importantes. Les portions de surface  $\Gamma_\infty$  sont placées à une distance du centre de la structure  $D_\infty$  égale à 0.250 m. Cette distance est suffisante vu la présence de l'écran magnétique qui limite fortement le flux magnétique à l'extérieur. Le nombre d'éléments et de noeuds est de 9600 et 10943, respectivement. Le problème comporte alors 9918 inconnues.

Les calculs ont été effectués sur une station ALPHA DEC 3000/500 (120 MIPS). La génération de la matrice du système a demandé 12 secondes. La résolution du système s'est déroulée en 64 secondes (53 itérations pour le gradient conjugué, précision demandée =  $10^{-5}$ ).

### 3.2 Induction magnétique

Le champ d'induction  $\mathbf{b}$ , sur le plan  $y=0$ , est représenté à la figure 2 sous forme de carte de vecteurs. La forte densité de flux magnétique dans le voisinage de l'arête du noyau, en  $\{x=50 \text{ mm}, y=100 \text{ mm}\}$ , est mise en évidence, de même que la canalisation du flux dans l'écran. Notons que les flèches représentant les vecteurs n'ont pas une longueur proportionnelle au module de ceux-ci. C'est une limitation qui permet néanmoins d'améliorer la lisibilité des résultats, notamment en ce qui concerne la direction du champ. En particulier, sur la figure 2, l'induction est beaucoup plus faible à l'extérieur de l'écran qu'à l'intérieur. Les informations quantitatives sur le module du champ sont plus facilement observables à l'aide de courbes représentant son évolution le long de coupes spatiales.

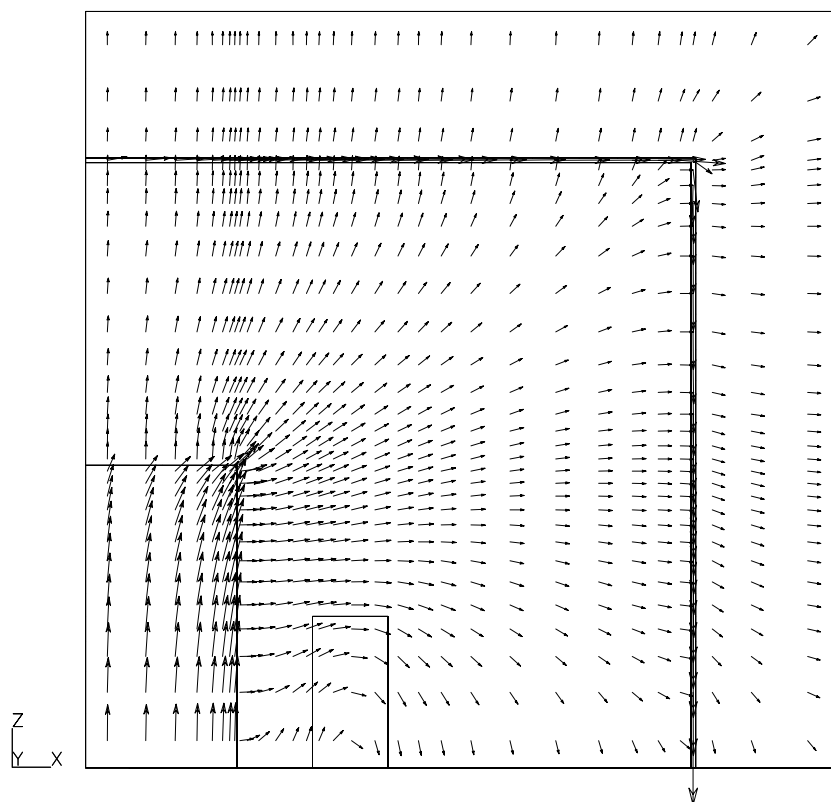


Fig. 2. Champ d'induction  $\mathbf{b}$  sur le plan  $y=0$  ; ( $b_{\min} = 8.57 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ ,  $b_{\max} = 0.2997 \text{ T}$ ).

Les variations de l'induction le long des axes OX et OZ sont représentées à la figure 3. Seule la composante de  $\mathbf{b}$  selon z est représentée, les autres étant nulles. Notons que la portion

de courbe  $b_z(x)$  dans l'écran, c'est-à-dire en  $0.2 \text{ m} < x < 0.2016 \text{ m}$ , a été tronquée. Elle s'étend en réalité jusqu'à  $-0.3 \text{ T}$ . Nous pouvons observer que l'induction le long de l'axe OX apparaît être fortement atténuée à l'extérieur de l'écran ( $x > 0.2 \text{ m}$ ).

Le tableau 1 compare les valeurs calculées et mesurées de l'induction aux points  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ . Le tableau 2 compare les valeurs calculées et mesurées de l'induction moyenne sur les surfaces  $S_1$  et  $S_2$ . Un très bon accord entre le calcul et la mesure y apparaît.

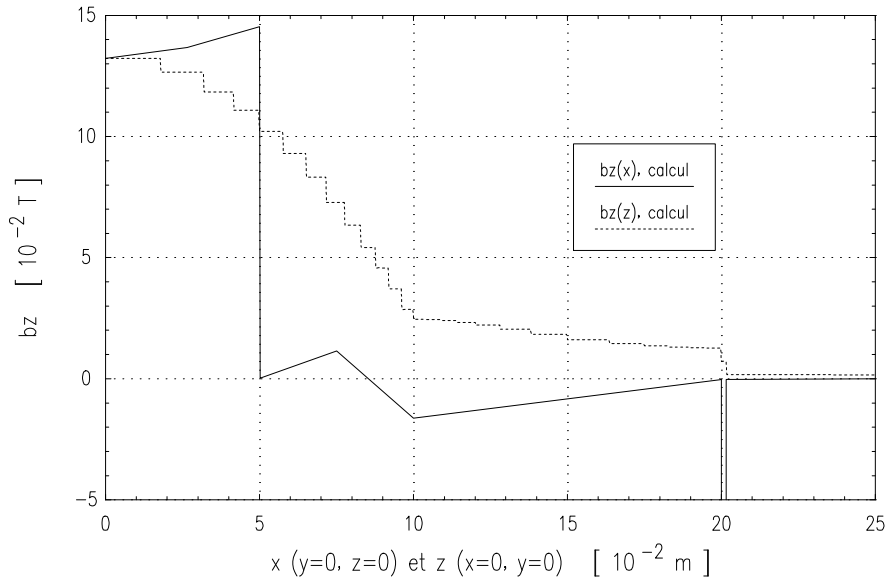


Fig. 3. Variations de l'induction le long des axes OX et OZ.

Point examiné	Induction (T)	
	calcul	mesure
$P_1$	0.02411 (0.46 %)	0.02400
$P_2$	0.02955 (0.87 %)	0.02981
$P_3$	0.03449 (2.8 %)	0.03550

Tableau 1. Comparaison entre les valeurs calculées et mesurées de l'induction aux points  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  (les écarts entre ces valeurs sont donnés entre parenthèses).

Position	Induction moyenne (T)	
	calcul	mesure
$S_1$	0.1430 (1.6 %)	0.1407
$S_2$	0.06410 (3.2 %)	0.06208

Tableau 2. Comparaison entre les valeurs calculées et mesurées de l'induction moyenne sur les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  (les écarts entre ces valeurs sont donnés entre parenthèses).

### 3.3 Influence de la perméabilité

La perméabilité magnétique relative du noyau,  $\mu_r$ , est prise égale à 1000. Néanmoins, comme ce noyau est constitué d'acier, dont la caractéristique  $b-h$  est non linéaire, sa perméabilité dépend du champ magnétique  $\mathbf{h}$ ,  $\mu = \mu(\mathbf{h})$ . En toute rigueur, il aurait fallu prendre en compte cette non-linéarité, mais le problème-test a été posé autrement, en tant que problème linéaire, et la perméabilité considérée est une perméabilité moyenne liée au courant d'excitation. Nous voudrions montrer que la solution calculée ne varie que très peu suite à une

variation de  $\mu_r$ , dans un certain voisinage de  $\mu_r = 1000$ , pour ainsi rendre compte de la bonne qualité de l'approximation linéaire réalisée.

Dans ce but, résolvons le problème pour diverses perméabilités et traçons les évolutions des grandeurs calculées aux points  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  (Fig. 4) et relatives aux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  (Fig. 5). Les écarts relatifs entre ces grandeurs et les mesures correspondantes (Tableaux 1 et 2) sont représentés à la figure 6. Nous pouvons observer que ces écarts sont inférieurs à 6 % pour une perméabilité relative supérieure à 200.

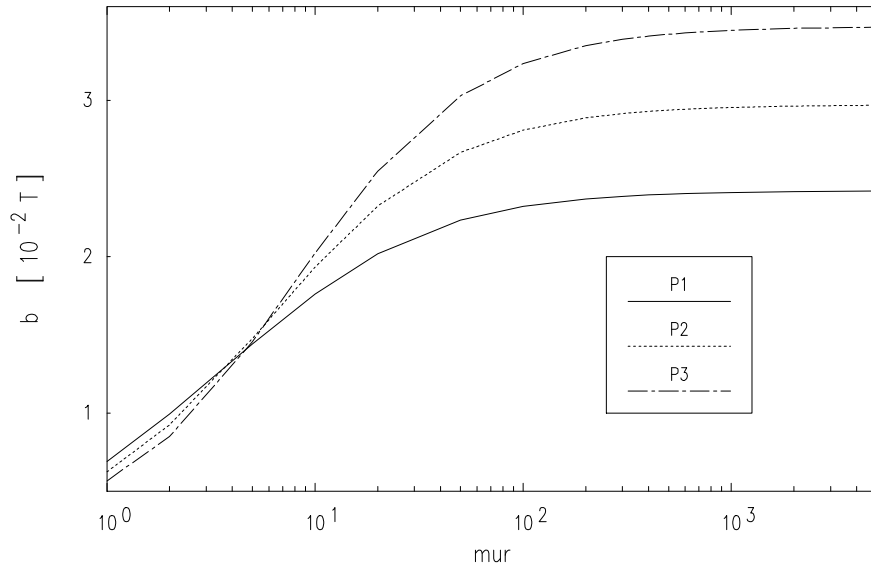


Fig. 4. Evolution de l'induction aux points  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  en fonction de la perméabilité relative.

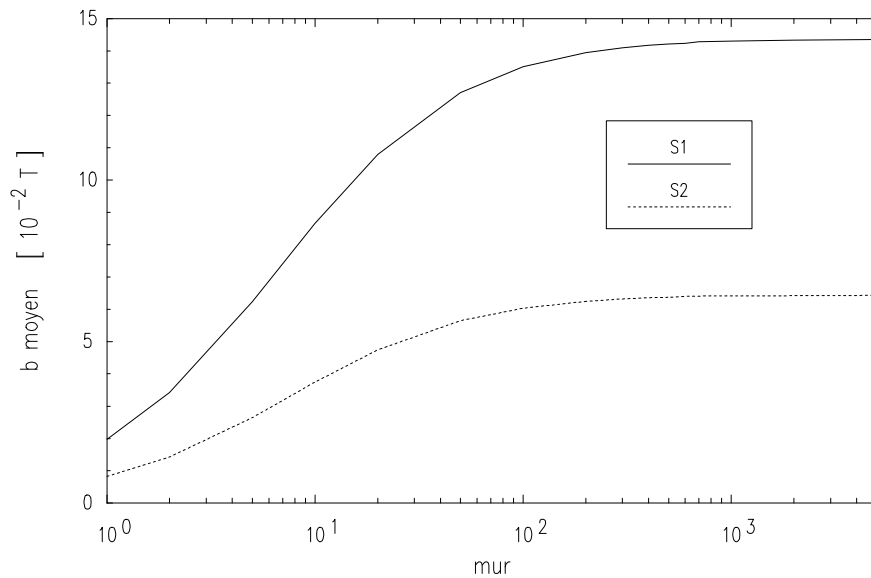


Fig. 5. Evolution de l'induction moyenne sur les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  en fonction de la perméabilité relative.

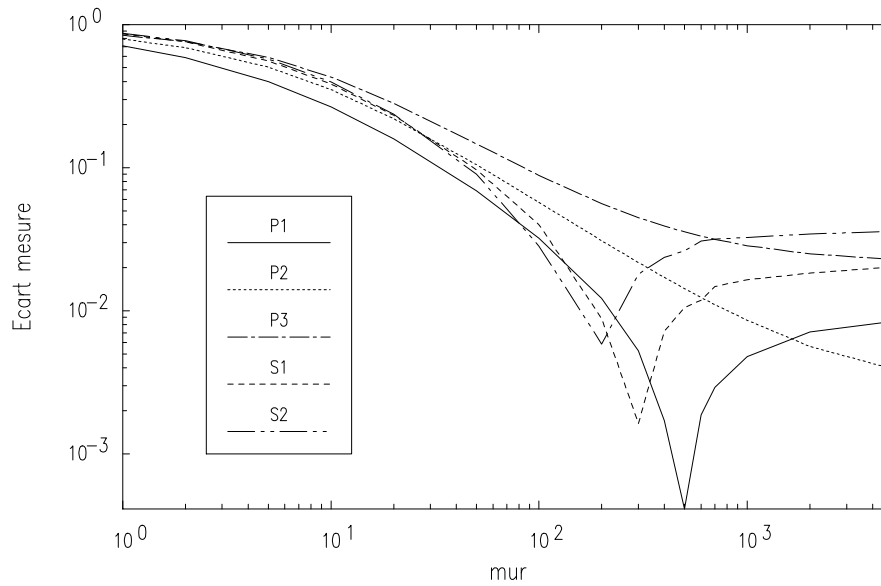


Fig. 6. Ecarts relatifs entre les grandeurs calculées (aux points  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  et sur les surfaces  $S_1$  et  $S_2$ ) et les mesures correspondantes, en fonction de la perméabilité relative.

### 3.4 Conclusions

Ce problème magnétostatique a permis d'illustrer la théorie développée pour le traitement des inducteurs à l'aide d'un champ source généralisé. Ce dernier est calculé dans l'espace des éléments d'arête et la liberté dont nous disposons pour sa définition nous conduit à limiter son support uniquement à l'inducteur et à un voisinage de la coupure associée. En particulier, il en résulte un gain de temps de calcul important par comparaison avec la méthode qui aurait consisté à évaluer le champ source réel à l'aide de la loi de Biot-Savart. Cette technique, qui confirme l'intérêt d'utiliser des éléments d'arête en magnétostatique, est également valable en magnétodynamique lorsqu'on souhaite négliger les courants induits dans les inducteurs. Sa mise en oeuvre est alors en tous points équivalente.

Le très bon accord entre le calcul et la mesure contribue à la validation des méthodes appliquées. De plus, l'association d'éléments hexaédriques et prismatiques dans le maillage considéré permet de simplifier la génération de ce dernier en conservant une majorité d'hexaèdres, ces éléments conduisant à une meilleure précision pour une finesse de maillage donnée.



# Brique conductrice trouée ("La brique de FELIX")

## 1. Définition du problème

### 1.1 Description générale

Une brique parallélépipédique conductrice percée d'un trou de forme rectangulaire est placée dans un champ magnétique uniforme dans l'espace. Ce champ est perpendiculaire aux faces trouées et décroît exponentiellement avec le temps. Le problème est de calculer l'évolution temporelle des courants induits dans la brique, ainsi que celle du champ magnétique. Des grandeurs globales telles que le courant total dans la brique et la puissance dissipée par effet Joule doivent également être calculées.

Il s'agit d'un des problèmes-test internationaux présentés aux TEAM Workshops (Testing Electromagnetic Analysis Methods). Il est le problème 4 de la série et est appelé "problème de la brique de FELIX" (Kameari, 1988b ; Lamaudière, 1991).

Il s'agit principalement d'un **problème transitoire** de calcul de courants induits dans une structure tridimensionnelle, **multiplement connexe** ("trou"), et présentant des **symétries**.

### 1.2 Description de la géométrie et des matériaux

La brique parallélépipédique est constituée d'un alliage d'aluminium (type 6061) de résistivité  $\rho = 3.94 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$  (conductivité  $\sigma = 2.538 \cdot 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ , perméabilité magnétique  $\mu_0$ ) et est plongée dans l'air (perméabilité  $\mu_0$ ). Ses dimensions  $L \times l \times h$  sont  $0.1524 \text{ m} \times 0.1016 \text{ m} \times 0.0508 \text{ m}$  et celles du trou rectangulaire,  $L_t \times l_t$ , réalisés au travers de ses grandes faces ( $L \times l$ ), sont  $0.0889 \text{ m} \times 0.0381 \text{ m}$  (Fig. 1).

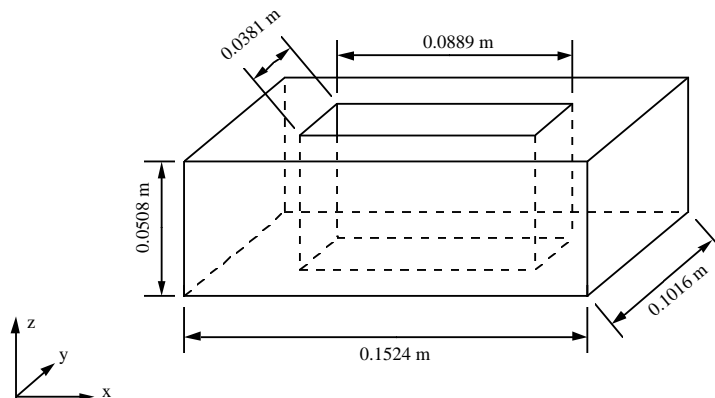


Fig. 1. Géométrie de la brique conductrice trouée.

### 1.3 Description de l'excitation

Un champ magnétique uniforme dans l'espace est appliqué perpendiculairement aux grandes faces de la brique, c'est-à-dire selon la direction  $z$ . L'induction magnétique correspondante,  $b_z = \mu_0 h_z$ , décroît exponentiellement avec le temps de la façon suivante :

$$b_z = b_0 \quad \text{pour } t \leq 0, \quad b_z = b_0 e^{-t/\tau} \quad \text{pour } t > 0, \quad (1a-b)$$

où  $b_0 = 0.1 \text{ T}$  et  $\tau = 0.0119 \text{ s}$  (Fig. 2).

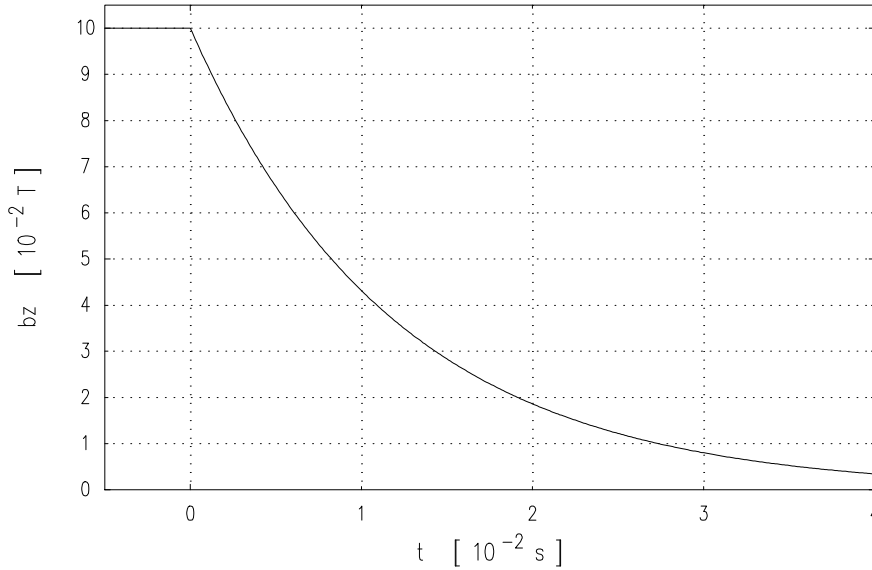


Fig. 2. Evolution temporelle de l'induction magnétique source.

## 1.4 Grandeurs à calculer

Il s'agit de calculer les évolutions temporelles des grandeurs suivantes : l'intensité de courant induit total circulant dans la brique (autour du trou) ; la densité de courant induit en tout point de la brique ; le champ magnétique en tout point de l'espace ; la puissance Joule dans la brique et l'énergie totale dissipée par effet Joule, i.e.

$$p = \int_{\text{brique}} \rho j^2 dv, \quad E_j = \int_0^{\infty} p dt. \quad (2-3)$$

Le phénomène transitoire sera calculé sur une durée de 20 ms.

## 2. Modélisation

### 2.1 Formulations utilisées

La formulation principale utilisée est la **formulation en h**, dans laquelle les inconnues sont directement liées au **champ magnétique h**. Dans les matériaux non conducteurs, ce champ peut dériver d'un **potentiel scalaire magnétique  $\phi$**  et on parle alors de **formulation h- $\phi$** . Ce sont en général les composantes de réaction de ces champs qui sont les inconnues ; i.e.  $\mathbf{h}_r$  et  $\phi_r$ , avec  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_r + \mathbf{h}_s$  partout ( $\mathbf{h}_s$  est un champ source connu), et  $\mathbf{h}_r = -\text{grad } \phi_r$  dans les matériaux non conducteurs.

L'excitation considérée dans ce problème (1.1) peut directement être traitée comme champ source  $\mathbf{h}_s$ . Ainsi, les inconnues se réduisent au champ de réaction  $\mathbf{h}_r$  dans la brique et au potentiel scalaire de réaction  $\phi_r$  dans l'air. Au niveau discret, les éléments finis utilisés sont alors des éléments nodaux pour l'interpolation de  $\phi_r$  et des éléments d'arête pour l'interpolation de  $\mathbf{h}_r$ . En réalité, certains éléments peuvent résulter d'un couplage d'éléments nodaux et d'arête, c'est-à-dire que leurs fonctions de base peuvent être associées à la fois à

des noeuds et à des arêtes ; c'est le cas des éléments conducteurs en contact avec l'interface conducteur - air.

Nous pouvons déduire du champ magnétique  $\mathbf{h}$  une approximation de l'induction magnétique  $\mathbf{b}$ , par  $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$ , ainsi qu'une approximation de la densité de courant induit  $\mathbf{j}$ , par  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{h}$ .

Nous utilisons aussi la **formulation en potentiel vecteur magnétique modifié  $\mathbf{a}^*$** , qui fait partie de la famille des formulations en  $\mathbf{b}$ , car les inconnues sont directement liées à l'induction magnétique. Le potentiel  $\mathbf{a}^*$  est approximé dans l'espace des éléments d'arête, aussi bien dans les matériaux conducteurs que non conducteurs. Dans ces derniers, il s'agit d'imposer une condition de jauge afin d'assurer l'unicité du potentiel. Nous utiliserons la jauge qui est naturelle dans l'espace des éléments d'arête et qui consiste à annuler la circulation de  $\mathbf{a}^*$  le long de toutes les arêtes d'un arbre construit dans les matériaux non conducteurs. Les circulations le long des arêtes du co-arbre correspondant constituent les degrés de liberté du problème.

De nouveau, l'excitation considérée est traitée comme champ source  $\mathbf{b}_s$  et nous définissons un potentiel vecteur source  $\mathbf{a}_s^*$  tel que l'équation  $\text{rot } \mathbf{a}_s^* = \mathbf{b}_s$  soit vérifiée dans l'espace des éléments d'arête. C'est donc la composante de réaction du potentiel,  $\mathbf{a}_r^*$ , avec  $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}_r^* + \mathbf{a}_s^*$ , qui est inconnue.

Nous pouvons déduire du potentiel vecteur modifié  $\mathbf{a}^*$  une approximation de l'induction magnétique  $\mathbf{b}$ , par  $\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a}^*$ , ainsi qu'une approximation de la densité de courant induit  $\mathbf{j}$ , par  $\mathbf{j} = -\sigma \partial_t \mathbf{a}^*$ .

## 2.2 Types d'éléments finis utilisés

Nous utiliserons des éléments finis nodaux et d'arête construits sur trois types d'éléments géométriques : des tétraèdres, des hexaèdres et des prismes à base triangulaire, dits de type I. Plusieurs maillages seront construits, chacun étant constitué d'éléments d'un seul de ces types. La précision de la solution pourra être étudiée en fonction de la finesse du maillage ainsi que du type d'éléments utilisés.

## 2.3 Conditions aux limites et symétries

Les symétries qui peuvent être prises en compte sont au nombre de trois (Fig. 1). Elles sont, en centrant la brique au point  $(0, 0, 0)$  :

- une symétrie à courant parallèle sur le plan  $z=0$ , noté  $\Gamma_h$ , où

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{h} \Big|_{\Gamma_h} = 0, \quad \text{ou encore} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \Big|_{\Gamma_h} = 0; \quad (1)$$

- deux symétries à courant perpendiculaire sur les plans  $x=0$  et  $y=0$ , notés  $\Gamma_e$ , où

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} \Big|_{\Gamma_e} = 0, \quad \text{ou encore} \quad \mathbf{n} \wedge \mathbf{e} \Big|_{\Gamma_e} = 0. \quad (2)$$

La géométrie à étudier peut ainsi se réduire à un huitième de la structure initiale ; nous considérons la région  $\{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ . La portion de  $\Gamma_h$  en contact avec l'air est notée  $\Gamma_{h, \text{air}}$  et son complémentaire dans  $\Gamma_h$ , i.e.  $\Gamma_h \setminus \Gamma_{h, \text{air}}$ , est noté  $\Gamma_{h, \text{brique}}$ . Les surfaces  $\Gamma_{e, \text{air}}$  et  $\Gamma_{e, \text{brique}}$  sont définies de la même façon.

De plus, nous limitons le domaine d'étude à une boîte parallélépipédique de dimension suffisante (idéalement infinie) et dont les surfaces éloignées de la brique, qui approximent les surfaces à l'infini, sont notées  $\Gamma_\infty$  (Fig. 1). On considère que le champ de réaction s'annule sur ces surfaces, c'est-à-dire que la structure étudiée n'a pas d'influence à leur niveau.

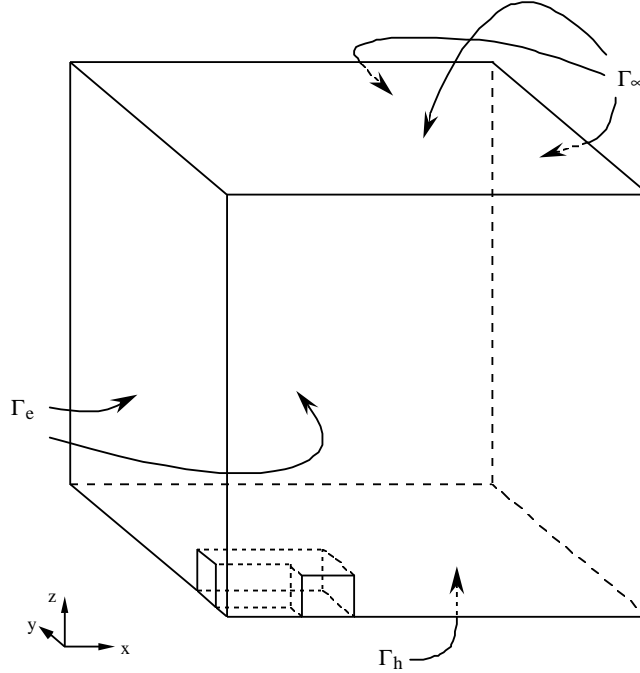


Fig. 1. Domaine d'étude et conditions aux limites.

Les conditions sur les surfaces  $\Gamma_h$  et  $\Gamma_e$ , i.e. (1) et (2), s'appliquent au champ total. Or, comme elles sont vérifiées par le champ source, elles peuvent aussi s'appliquer seulement au champ de réaction par superposition.

Sur la surface  $\Gamma_\infty$ , nous avons le choix entre les conditions des types (1) et (2). La formulation en  $\mathbf{h}$  nous donne en réalité le choix entre  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} |_{\Gamma_e} = 0$  et  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{h}_r |_{\Gamma_h} = 0$ . La première condition ne peut cependant pas être vérifiée dans notre cas car elle concerne l'induction totale, alors que la seconde est valable puisqu'elle n'est associée qu'au champ de réaction (et au champ-test correspondant). La formulation en  $\mathbf{a}^*$  nous donne quant à elle le choix entre  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_r |_{\Gamma_e} = 0$  et  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{h} |_{\Gamma_h} = 0$ , et seule la première condition est applicable dans notre problème.

Ainsi, pour la formulation en  $\mathbf{h}$ , nous devons imposer explicitement les conditions

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{h}_r |_{\Gamma_{h, \text{brique}}} = 0, \quad \phi_r |_{\Gamma_{h, \text{air}}} = 0, \quad \phi_r |_{\Gamma_\infty} = 0, \quad (3a-b-c)$$

alors que la condition  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} |_{\Gamma_e} = 0$  est implicite ; la surface  $\Gamma_\infty$  est du type de  $\Gamma_h$ . Cela revient à fixer certains degrés de liberté, c'est-à-dire à annuler la circulation de  $\mathbf{h}_r$  sur les arêtes de  $\Gamma_{h, \text{brique}}$  et le potentiel  $\phi_r$  aux noeuds de  $\Gamma_{h, \text{air}}$  et  $\Gamma_\infty$ .

Pour la formulation en  $\mathbf{a}^*$ , nous devons imposer explicitement les conditions

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{a}_r^* |_{\Gamma_e} = 0, \quad \mathbf{n} \wedge \mathbf{a}_r^* |_{\Gamma_\infty} = 0, \quad (4a-b)$$

alors que la condition  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{h} |_{\Gamma_h} = 0$  est implicite ; la surface  $\Gamma_\infty$  est maintenant du type de  $\Gamma_e$ . Cela revient à annuler la circulation de  $\mathbf{a}_r^*$  sur les arêtes de  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_\infty$ .

## 2.4 Prise en compte du trou

Le trou dans la brique rend celle-ci multiplement connexe et il vient que le domaine extérieur, l'air, l'est également. La formulation  $\mathbf{h}$ - $\phi$  nécessite un traitement particulier du trou, en général par l'introduction d'une coupure (Fig. 2). Vu la symétrie considérée par rapport au plan  $z=0$  et la condition associée  $\phi_r |_{\Gamma_{h, \text{air}}} = 0$ , la coupure doit être placée dans ce plan et la

discontinuité associée ne sera que la moitié de celle que l'on obtiendrait sans symétrie. En effet, la symétrie et la discontinuité totale  $\phi_r^+ - \phi_r^- = I$  entraînent  $\phi_r^+ = I/2$  et  $\phi_r^- = -I/2$ .

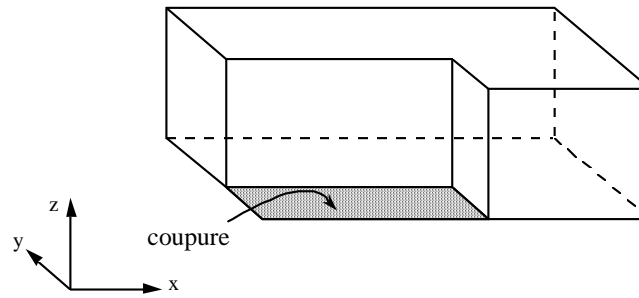


Fig. 2. Portion (1/8) de brique étudiée et coupure en  $z=0$ .

Une autre approche, plus simple mais moins rigoureuse, consiste à remplir le trou d'un matériau mauvais conducteur et ainsi, en quelque sorte, à réaliser une "coupure volumique" qui ne nécessite aucun traitement particulier. Il s'agit cependant de ne pas choisir une conductivité trop faible, au risque de rendre le problème mal conditionné. Notons que la condition  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = 0$  à l'interface entre le conducteur et la coupure volumique n'est alors plus naturelle et ne pourra être satisfaite que de façon approchée. Les résultats obtenus par ces deux approches seront comparés. La formulation en  $\mathbf{a}^*$  ne nécessite par contre aucun traitement particulier des domaines multiplement connexes.

## 2.5 Méthode de calcul

La méthode de discrétisation temporelle est basée sur le schéma d'Euler implicite. La solution est ainsi calculée à des instants successifs à partir de la solution à l'instant initial. Puisque la brique est non magnétique, elle ne perturbe pas le champ uniforme initial et, par conséquent, celui-ci constitue la solution initiale, c'est-à-dire  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_s$  et donc  $\mathbf{h}_r = 0$ , ou  $\mathbf{a}_r^* = 0$ , en  $t = 0$ .

## 3. Résultats

### 3.1 Définition des maillages

Nous considérons plusieurs maillages du domaine d'étude réalisés à l'aide d'éléments géométriques de trois types, des hexaèdres, des prismes et des tétraèdres, générés en coordonnées cartésiennes. Chaque maillage est constitué d'éléments d'un seul type afin d'étudier la qualité de l'approximation donnée par les éléments finis associés. Un maillage constitué d'hexaèdres est appelé **maillage de base**. Un maillage de base peut se décomposer en un autre constitué de prismes en divisant chaque hexaèdre en deux prismes. Il peut aussi se décomposer en un maillage constitué de tétraèdres, chaque hexaèdre donnant lieu à six tétraèdres.

Les maillages de base sont caractérisés par différents paramètres (Fig. 1) :

- le nombre de divisions selon  $x$  dans le trou,  $n_{x,t}$ , dans la brique,  $n_{x,b}$ , et à l'extérieur,  $n_{x,a}$ , ainsi que la largeur de ces divisions,  $l_{x,t}$ ,  $l_{x,b}$  et  $l_{x,a}$  ;
- le nombre de divisions selon  $y$ , avec des notations équivalentes (i.e.  $n_{y,\hat{E}}$  et  $l_{y,\hat{E}}$ ) ;
- le nombre de divisions selon  $z$  dans la brique,  $n_{z,b}$ , et à l'extérieur,  $n_{z,a}$ , ainsi que la largeur de ces divisions,  $l_{z,b}$  et  $l_{z,a}$ .

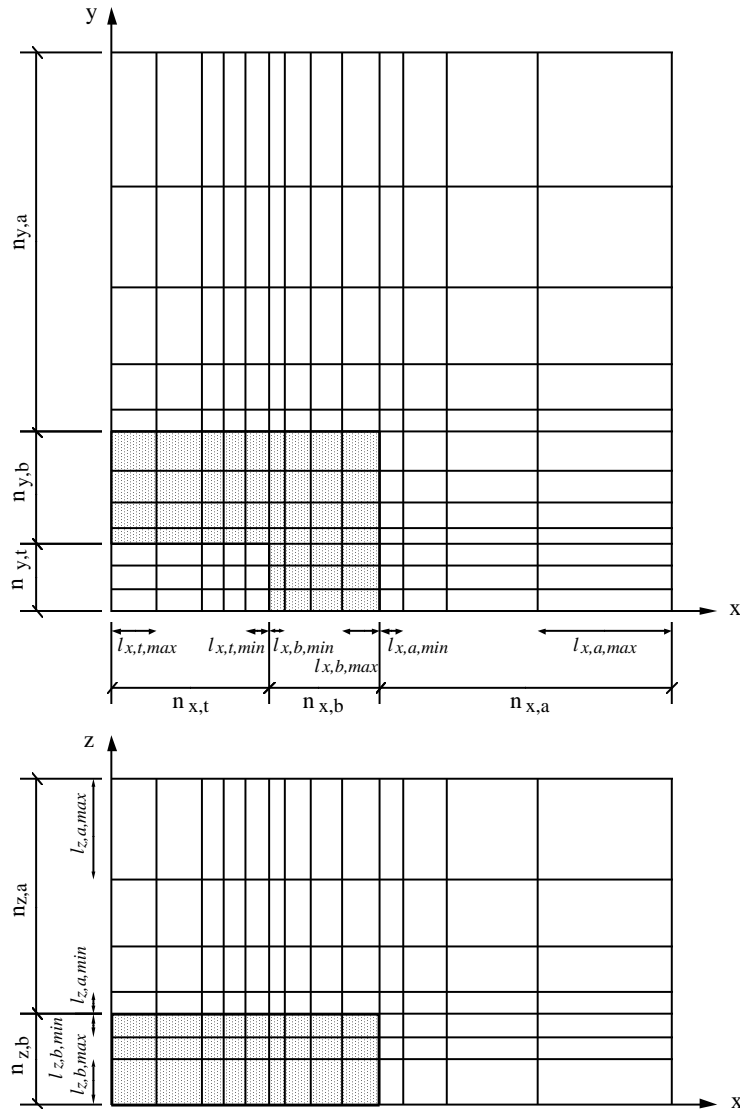


Fig. 1. Paramètres d'un maillage de base.

Nous considérons des divisions non uniformes dans le but d'affiner le maillage dans les régions où les variations du champ sont plus importantes. C'est le cas dans le voisinage de la surface de la brique. La largeur des divisions varie ainsi d'une valeur minimale, près de la surface de la brique, jusqu'à une valeur maximale, loin de la brique. La transition entre ces valeurs se fait de façon régulière.

Les portions de surface  $\Gamma_\infty$  sont placées à une distance du centre de la structure égale à environ 3.5 fois sa dimension maximale, c'est-à-dire  $D_\infty = 0.508$  m.

Nous considérons les maillages de base dont les caractéristiques sont données dans le tableau 1 (i.e., nombre de divisions selon les trois directions des coordonnées cartésiennes, largeurs de ces divisions, nombre d'hexaèdres, nombre de noeuds). La notation abrégée 'Mh' (Maillage, hexaèdre) est utilisée pour les maillages de base. Pour les maillages associés, constitués d'autres types d'éléments, nous notons :

- 'Mp' (prisme), ceux qui sont constitués de prismes ;
- 'Mt' (tétraèdre), ceux qui sont constitués de tétraèdres.

Le nombre de noeuds d'un maillage ne dépend que du maillage de base associé alors que le nombre d'arêtes varie avec le nombre de divisions réalisées dans ce maillage de base pour

générer des prismes ou des tétraèdres. Ainsi, avec la formulation  $\mathbf{h}\text{-}\phi$ , le nombre d'inconnues reste inchangé dans l'air, où le potentiel est défini en terme de valeur nodale, alors qu'il diffère dans la brique conductrice, où le champ magnétique est défini en terme de sa circulation le long des arêtes (Tableau 2).

Maillage de base	Selon x			Selon y			Selon z		Elém.	Noeuds
	$n_{x,t}$ (min, max)	$n_{x,b}$ (min, max)	$n_{x,a}$ (min, max)	$n_{y,t}$ (min, max)	$n_{y,b}$ (min, max)	$n_{y,a}$ (min, max)	$n_{z,b}$ (min, max)	$n_{z,a}$ (min, max)		
Mh1	5 (4.5, 15.2)	4 (6.0, 10.2)	4 (14.7, 334)	3 (3.2, 10.8)	4 (6.0, 10.2)	4 (14.5, 366)	3 (4.9, 12.8)	4 (50.8, 214)	1001	1144
Mh2	5 (4.5, 15.2)	4 (6.0, 10.2)	8 (7.9, 231)	3 (3.2, 10.8)	4 (6.0, 10.2)	8 (7.9, 254)	3 (4.9, 12.8)	9 (6.0, 210)	3060	3744
Mh3	8 (2.7, 9.3)	8 (2.9, 5.0)	10 (6.4, 207)	5 (1.9, 6.5)	8 (2.9, 5.0)	10 (6.4, 227)	4 (4.7, 8.4)	12 (4.2, 208)	9568	11016

Tableau 1. Paramètres relatifs aux maillages de base (les largeurs minimales et maximales des divisions sont données entre parenthèses, en mm).

Type de maillage	Maillage de base		
	Mh1	Mh2	Mh3
Mh	1074	3021	10094
Mp	1170	3117	
Mt	1578	3525	

Tableau 2. Nombre d'inconnues associées aux maillages pour la formulation  $\mathbf{h}\text{-}\phi$ .

Les maillages Mh1 et Mh2 ne diffèrent que par le nombre de divisions dans l'air, à l'extérieur de la brique. Le maillage Mh3 est celui qui a la plus grande finesse, dans la brique et dans l'air.

### 3.2 Analyse des résultats

Nous allons étudier l'influence de paramètres géométriques sur la précision de la solution numérique. Ces paramètres seront liés à la finesse du maillage et aux types d'éléments finis utilisés. Un pas de temps fixe,  $\Delta t = 1$  ms, est utilisé pour la discrétisation temporelle par la méthode d'Euler implicite. Les variations des champs seront représentées le long de coupes particulières dans la structure (Fig. 2).

Coupe OX  $\equiv \{0 \leq x \leq 0.120 \text{ m}, y = 0, z = 0\}$

Coupe OZ  $\equiv \{x = 0, y = 0, 0 \leq z \leq 0.160 \text{ m}\}$

Coupe AB  $\equiv \{0 \leq x \leq 0.0762 \text{ m}, y = 0.0458 \text{ m}, z = 0.0230 \text{ m}\}$

Coupe CD  $\equiv \{0 \leq x \leq 0.0762 \text{ m}, y = 0.0220 \text{ m}, z = 0.0230 \text{ m}\}$

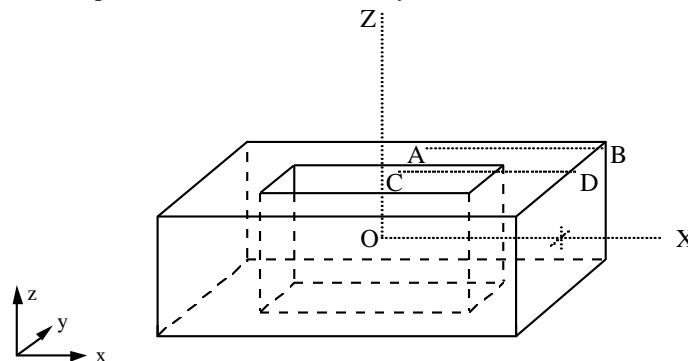


Fig. 2. Définition de coupes dans la structure.

### 3.2.1 Influence du maillage de base

Analysons les résultats numériques obtenus avec la formulation  $\mathbf{h}\text{-}\phi$  sur les maillages définis.

#### Induction magnétique

Le champ d'induction  $\mathbf{b}$ , sur les plans  $x=0$ ,  $y=0$  et  $z=0.0254$  m, est représenté aux figures 3a-b sous forme de cartes de vecteurs à l'instant  $t = 20$  ms et pour le maillage Mh3.

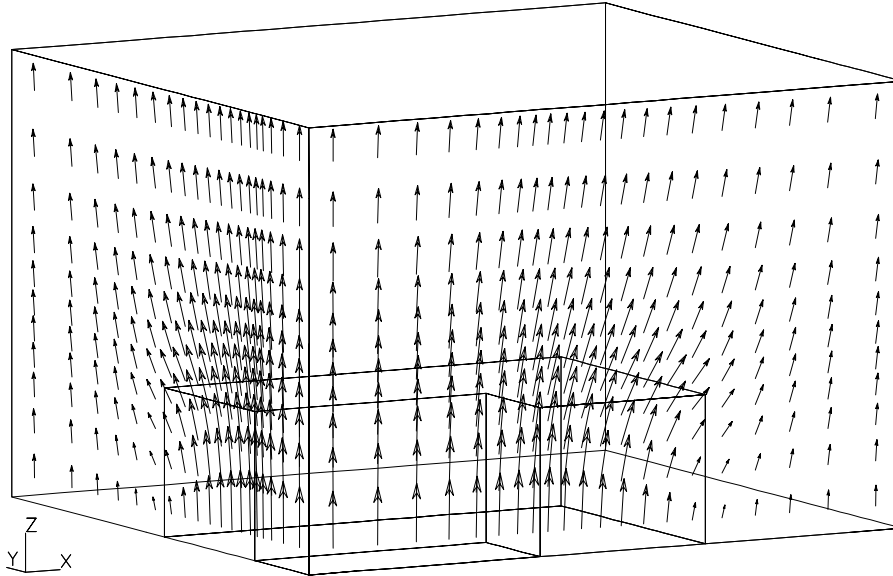


Fig. 3a. Champ d'induction  $\mathbf{b}$  en  $x=0$  et  $y=0$  ( $t = 20$  ms et maillage Mh3) ;  
 ( $b_{\min} = 0.00604$  T,  $b_{\max} = 0.0563$  T).

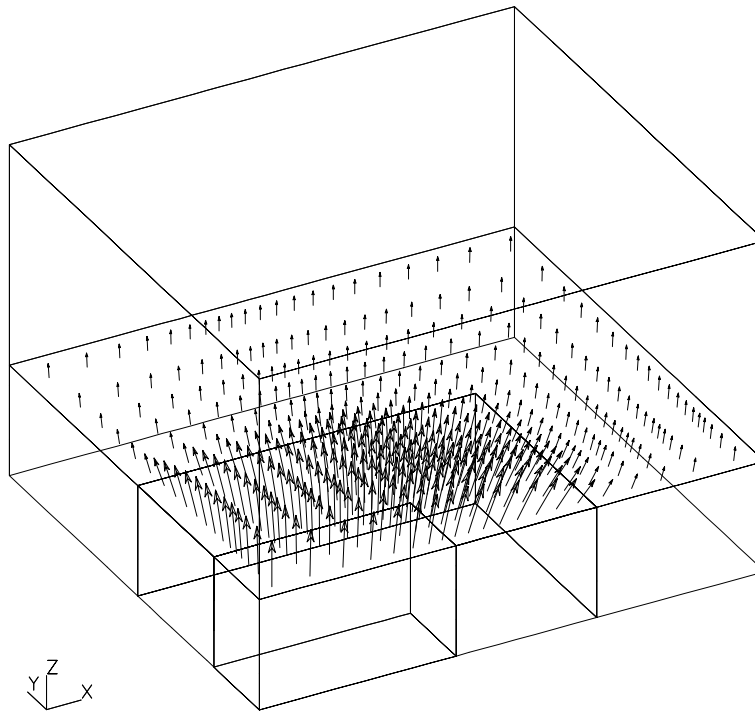


Fig. 3b. Champ d'induction  $\mathbf{b}$  en  $z = 0.0254$  m ( $t = 20$  ms et maillage Mh3) ;  
 ( $b_{\min} = 0.0154$  T,  $b_{\max} = 0.0500$  T).



Le long de la coupe OX, seule la composante de  $\mathbf{b}$  selon  $z$  est non nulle. Sa variation est représentée à la figure 4, à des instants successifs et pour le maillage Mh3. Notons que les maillages Mh1 et Mh2, moins fins, donnent des variations déjà très proches de celles-ci. La continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{b}$  au passage de l'interface brique-air, en  $\{x=0.04445\text{ m}\}$  et en  $\{x=0.0762\text{ m}\}$ , y est mise en évidence. Cette continuité est satisfaite exactement car la formulation  $\mathbf{h}-\phi$  assure la continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{h}$ , et donc aussi celle de  $\mathbf{b}$  vu que les perméabilités de la brique et de l'air sont égales. De plus, cette continuité est vérifiée au sein d'un même milieu.

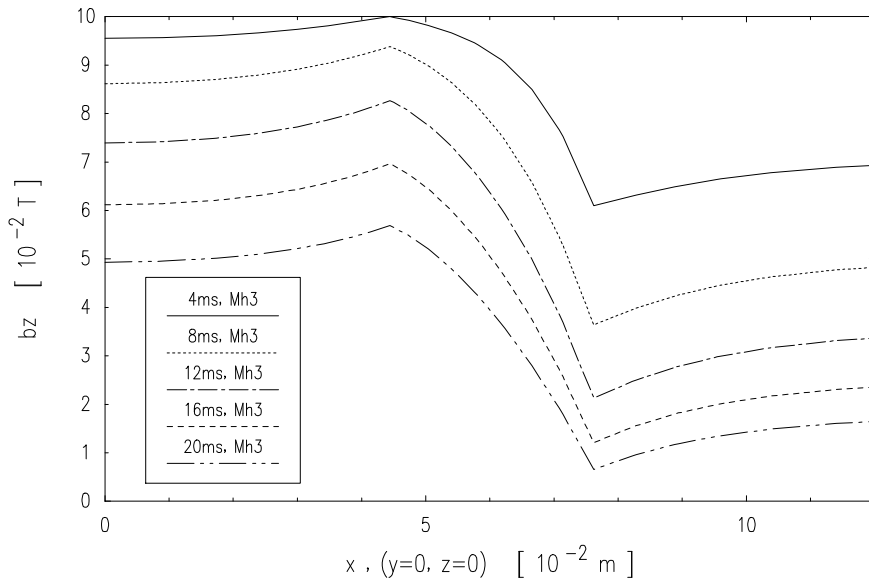


Fig. 4. Variation de l'induction le long de la coupe OX.

Le long de la coupe OZ, seule la composante de  $\mathbf{b}$  selon  $z$  est non nulle. Sa variation est représentée aux figures 5a-b, pour différents maillages et différents instants.

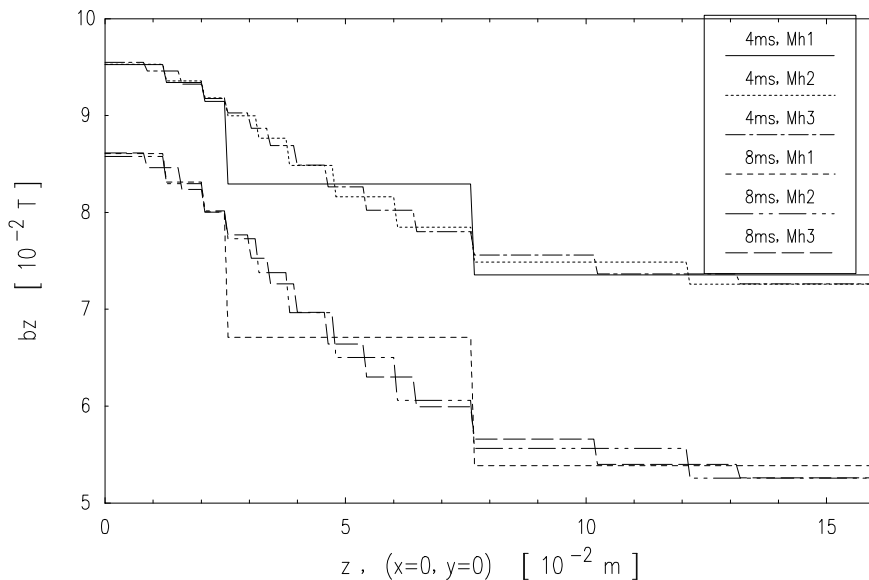


Fig. 5a. Variation de l'induction le long de la coupe OZ.

Il est possible d'y observer la caractéristique physique de continuité de la composante normale de  $\mathbf{b}$ . Cette continuité ne peut être assurée que faiblement par la formulation  $\mathbf{h}-\phi$ , ce qui se traduit par des sauts, ou discontinuités, de l'induction, en particulier le long de la coupe

$V_0$ . Ces sauts ont lieu à travers chaque interface entre éléments adjacents alors que la variation est continue dans chaque élément. Un lissage de l'induction peut être réalisé afin d'améliorer l'aspect de ses variations, comme à la figure 5b (interpolation linéaire par morceaux par les points milieux). Nous pouvons remarquer que, quel que soit le maillage, les variations de l'induction tendent à se rapprocher d'une même courbe, qu'un lissage peut mieux mettre en évidence.

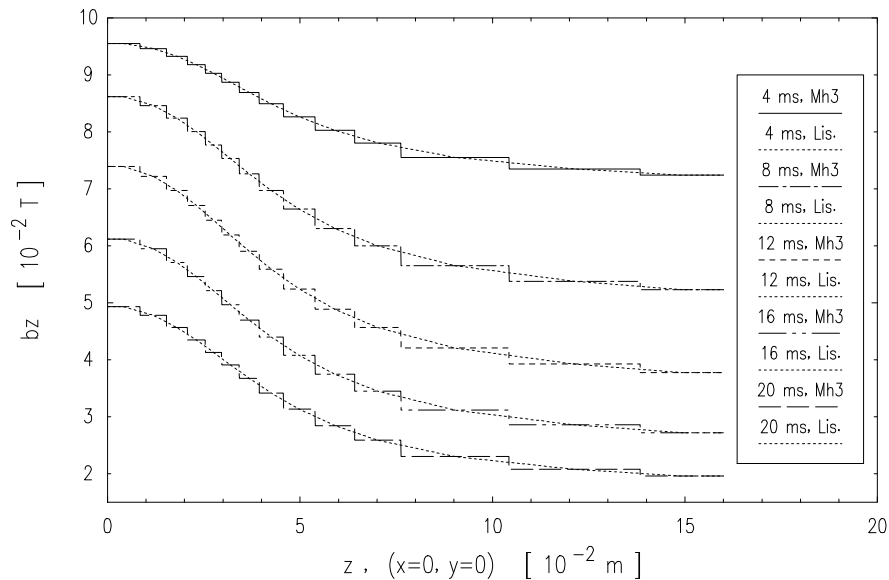


Fig. 5b. Variation de l'induction le long de la coupe OZ (courbes brutes et lissées).

### Densité de courant induit

Une carte de lignes d'isovaleurs de la densité de courant à la surface de la brique est représentée à la figure 6, à l'instant  $t = 20 \text{ ms}$  et pour le maillage Mh3. Une carte du vecteur  $\mathbf{j}$ , tracée sur un plan défini près de la surface supérieure de la brique en  $z = 0.0230 \text{ m}$ , est représentée à la figure 7, au même instant et pour le même maillage.

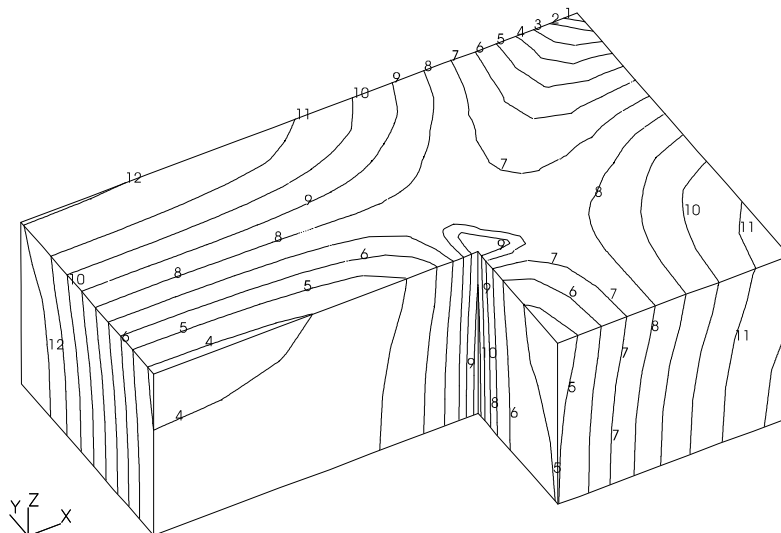


Fig. 6. Lignes d'isovaleurs de la densité de courant à la surface de la brique ( $t = 20 \text{ ms}$  et maillage Mh3) ; ( $j_{\min} = 0$ ,  $j_{\max} = 2.46 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$ , nombre de niveaux = 12, niveau 1 =  $1.89 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2$ , niveau 12 =  $2.27 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$ , écart entre niveaux =  $1.89 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2$ ).

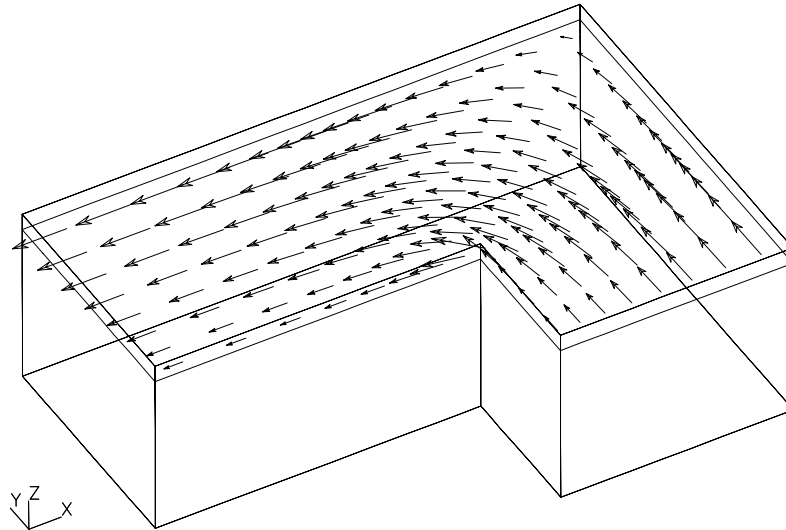


Fig. 7. Champ de densité de courant  $\mathbf{j}$  en  $z = 0.0230$  m ( $t = 20$  ms et maillage Mh3) ;  
 $(j_{\min} = 3.44 \cdot 10^5$  A/m $^2$ ,  $j_{\max} = 2.28 \cdot 10^6$  A/m $^2$ ).

Les variations de la composante de  $\mathbf{j}$  selon  $x$  le long des coupes AB et CD, en  $t = 20$  ms, sont représentées à la figure 8. L'augmentation de la densité de courant dans le voisinage du coin intérieur  $y$  est mise en évidence (coupe CD). Le long des coupes AB et CD, avec les maillages considérés, la composante de  $\mathbf{j}$  selon  $x$  est celle qui est orthogonale aux interfaces entre éléments, ce qui lui permet de ne pas subir de discontinuité. En effet, la formulation  $\mathbf{h}\text{-}\phi$ , qui assure la continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{h}$ , assure aussi la continuité de la composante normale de  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{h}$ .

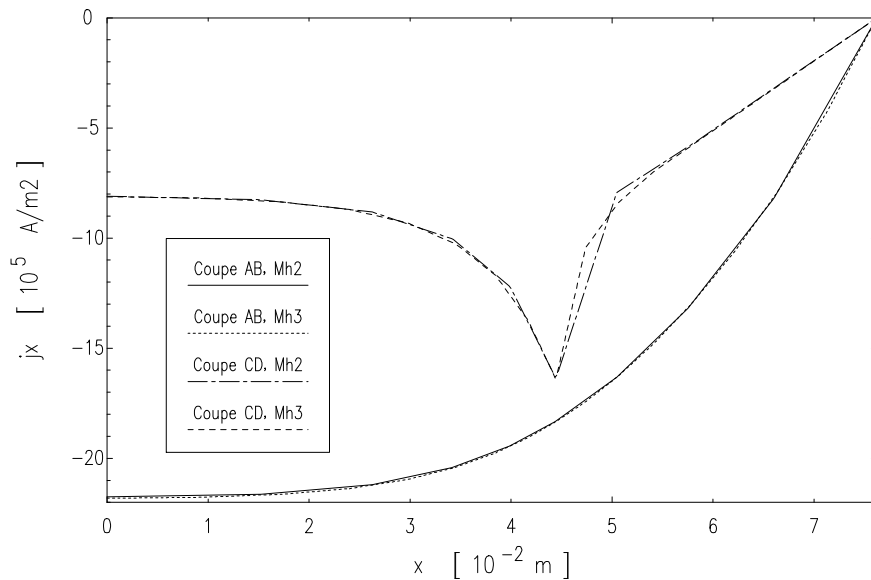


Fig. 8. Variations de la densité de courant ( $j_x$ ) le long des coupes AB et CD ( $t = 20$  ms).

### Courant induit total et puissance Joule

Le courant total dans la brique circule autour du trou et traverse les plans de symétrie à courant perpendiculaire ( $\Gamma_e$ ). Par la formulation  $\mathbf{h}\text{-}\phi$ , ce courant est directement donné par la discontinuité associée à la coupure. Plus précisément, il vaut le double de cette discontinuité, vu les symétries considérées. Son évolution temporelle est représentée à la figure 9. Les résultats obtenus par un autre logiciel, TRIFOU (Lamaudière, 1991), sont également

représentés, à titre indicatif. La sous-section 3.2.5 sera consacrée à la comparaison de nos résultats avec ceux de codes internationaux. L'évolution temporelle de la puissance dissipée par effet Joule dans la brique entière, donnée par l'expression (1.2), est représentée à la figure 10.

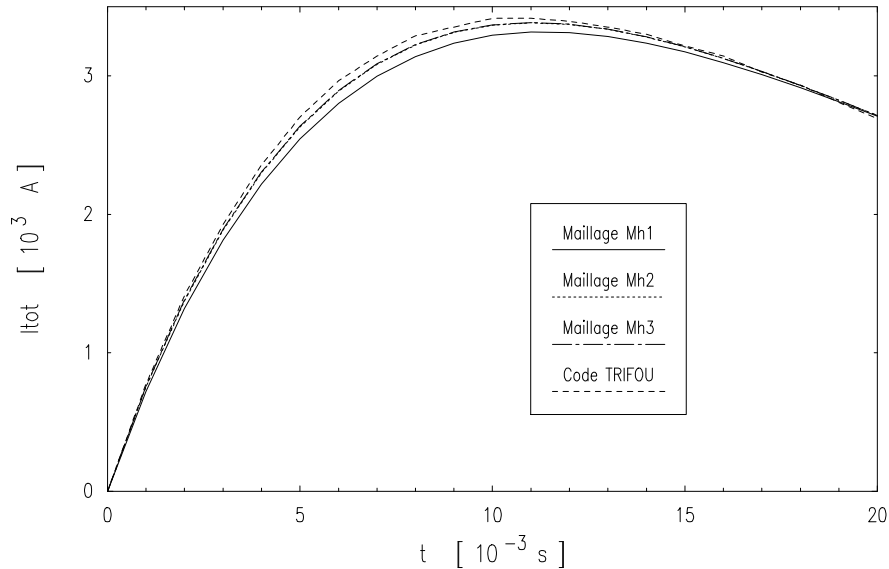


Fig. 9. Evolution temporelle du courant total dans la brique.

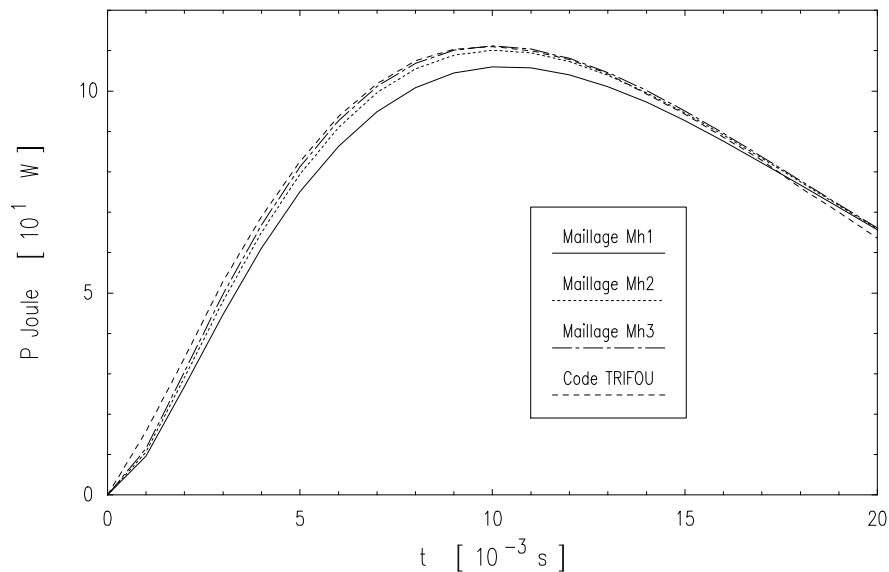


Fig. 10. Evolution temporelle de la puissance Joule dans la brique.

### Comparaison de grandeurs locales et globales

Certaines grandeurs, locales ou globales, calculées à partir des solutions obtenues avec les maillages de base, sont données dans le tableau 3. Elles doivent permettre une comparaison de la précision obtenue. L'induction de réaction ( $\mathbf{b}_r = \mathbf{b} - \mathbf{b}_s$ ) a été calculée après un lissage de la variation de  $\mathbf{b}$  le long de la coupe OZ, tel qu'il est présenté à la figure 5b par exemple. Notons que l'évolution temporelle de l'induction de réaction a une allure semblable à celle du courant total (Fig. 9). L'amélioration de la finesse du maillage semble conduire à une évolution stable de la solution du point de vue de sa convergence (Fig. 4, 5a, 8, 9 et 10 ; Tableau 3). En particulier, les résultats obtenus sur le maillage fin Mh3 sont très proches de ceux du maillage

moins fin Mh2. Nous pouvons alors supposer qu'ils sont proches de la solution réelle, aux erreurs d'approximation près. Ces résultats serviront de référence pour la suite.

Valeurs maximales de grandeurs et temps correspondants	Maillage		
	Mh1	Mh2	Mh3
Courant total (A)	3318	3384	3386
temps (ms)	11	11	11
Puissance Joule (W)	106.0	110.1	111.2
temps (ms)	10	10	10
Induction de réaction $b_{r,z}$ (Coupe OZ) (T)			
z = 0.0000 m	0.0377	0.0370	0.0375
temps (ms)	12	12	12
z = 0.0127 m	0.0356	0.0351	0.0354
temps (ms)	12	12	12
z = 0.0254 m	0.0297	0.0293	0.0293
temps (ms)	12	12	12
z = 0.0508 m	0.0168	0.0158	0.0156
temps (ms)	12	12	12

Tableau 3. Résultats obtenus avec la formulation  $\mathbf{h}\text{-}\phi$  sur les maillages de base.

### 3.2.2 Influence du type d'élément

Nous considérons les maillages de base Mh1 et Mh2, constitués d'hexaèdres, et les maillages associés Mp1 et Mp2, constitués de prismes, et Mt1 et Mt2, constitués de tétraèdres. Nous utilisons encore la formulation  $\mathbf{h}\text{-}\phi$ . La variation de  $\mathbf{b}$  le long de la coupe OX est représentée à la figure 11, en  $t=4$  ms et pour les maillages Mh2, Mp2 et Mt2. Les variations de la composante de  $\mathbf{j}$  selon  $x$  le long des coupes AB et CD, en  $t=20$  ms, sont représentées à la figure 12. L'évolution temporelle du courant total dans la brique est représentée à la figure 13.

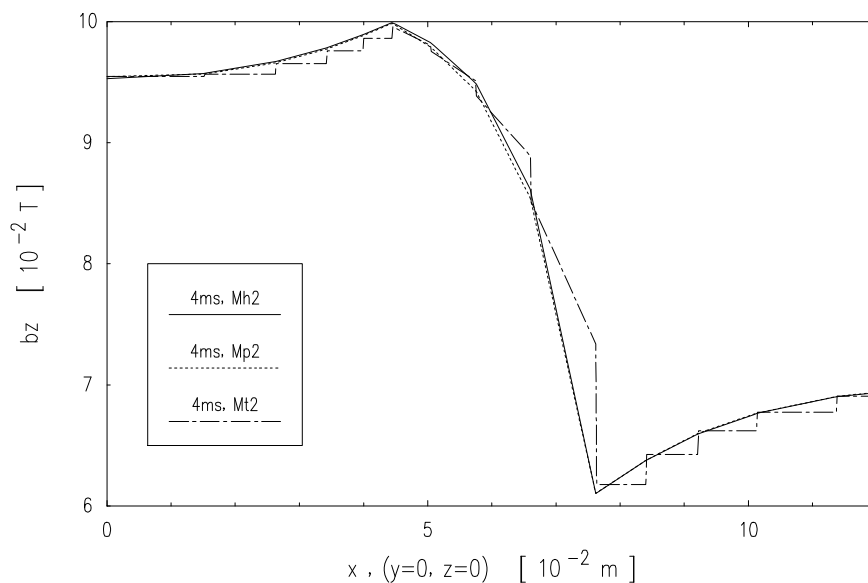


Fig. 11. Variation de l'induction le long de la coupe OX.

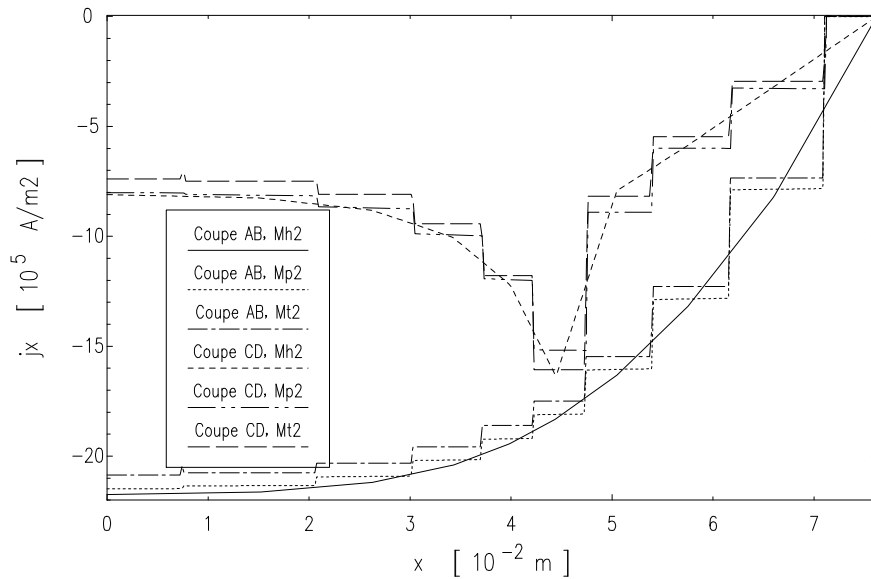


Fig. 12. Variations de la densité de courant ( $j_x$ ) le long des coupes AB et CD ( $t = 20 \text{ ms}$ ).

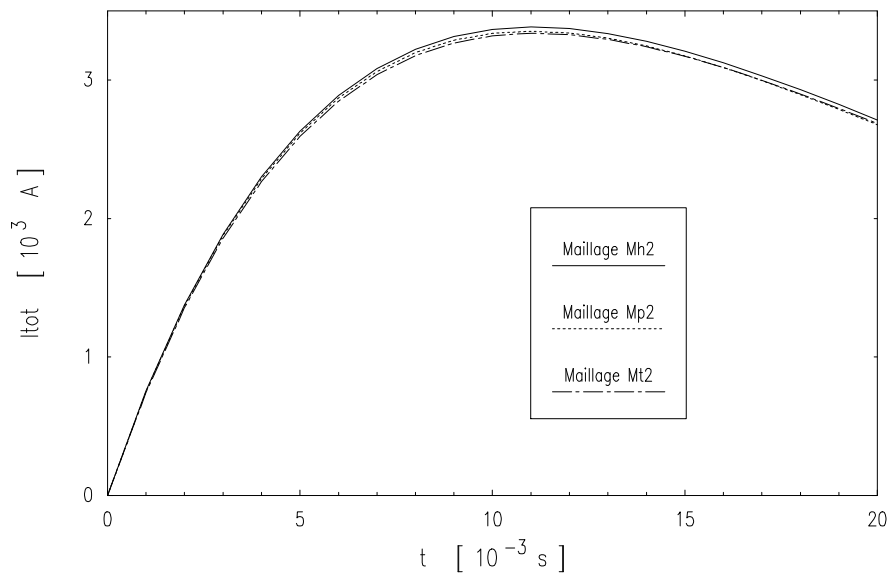


Fig. 13. Evolution temporelle du courant total dans la brique.

Des grandeurs locales et globales, calculées à partir des solutions sur les maillages constitués d'hexaèdres, de prismes ou de tétraèdres, sont données dans le tableau 4, qui peut être consulté en parallèle avec le tableau 3.

L'accord entre les différentes solutions (Fig. 11, 12, 13 ; Tableau 4) contribue à une validation de chacun des éléments finis utilisés. Néanmoins, les prismes semblent conduire à une moins bonne précision que les hexaèdres, pour un même maillage de base, c'est-à-dire pour une même finesse de maillage. Pour les tétraèdres, l'écart est encore plus important. Ces observations s'appuient sur la tendance à la croissance, ou à la décroissance, des grandeurs avec l'augmentation de la finesse du maillage. Par exemple, le courant total, ou la puissance Joule, semble tendre vers une limite par le bas, et ce sont les hexaèdres qui conduisent aux valeurs les plus élevées, donc plus proches. L'augmentation du nombre d'inconnues dans les maillages associés (Tableau 2) ne joue donc pas en faveur de la précision, ce qui peut s'expliquer par la moins grande richesse des espaces d'approximation générés par les prismes et les tétraèdres.

Valeurs maximales de grandeurs et temps correspondants	Maillage					
	Mh1 (hexaèdres)	Mh2 (hexaèdres)	Mp1 (prismes)	Mp2 (prismes)	Mt1 (tétraèdres)	Mt2 (tétraèdres)
Courant total (A)	3318	3384	3287	3353	3193	3339
temps (ms)	11	11	11	11	12	11
Puissance Joule (W)	106.0	110.1	105.0	109.2	99.5	108.4
temps (ms)	10	10	10	10	11	10
Induction de réaction $b_{r,z}$ (Coupe OZ) (T)						
z = 0.0000 m	0.0377	0.0370	0.0378	0.0371	0.0390	0.0374
temps (ms)	12	12	12	12	12	12
z = 0.0127 m	0.0356	0.0351	0.0358	0.0351	0.0368	0.0352
temps (ms)	12	12	12	12	12	12
z = 0.0254 m	0.0297	0.0293	0.0297	0.0292	0.0303	0.0290
temps (ms)	12	12	12	12	12	12
z = 0.0508 m	0.0168	0.0158	0.0166	0.0155	0.0146	0.0155
temps (ms)	12	12	12	12	11	12

Tableau 4. Résultats obtenus avec formulation  $\mathbf{h}\text{-}\phi$  et différents types d'éléments.

### 3.2.3 Autre prise en compte du trou

Avec la formulation  $\mathbf{h}\text{-}\phi$ , le trou dans la brique peut être bouché par un domaine de faible conductivité, par rapport à celle de la brique, où le potentiel scalaire magnétique n'est alors plus défini. Le complémentaire des domaines conducteurs, la brique et le trou, est alors simplement connexe et aucune coupure ne doit être réalisée. Cette méthode conduit à utiliser des éléments d'arête dans le trou et augmente donc le nombre d'inconnues du problème. Nous considérons le maillage Mh2, pour lequel ce nombre passe de 3021 à 3120. La conductivité du trou est choisie dans un rapport  $10^4$  avec celle de la brique, i.e.  $\sigma_{\text{trou}} = 2.538 \cdot 10^3 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ . Les résultats obtenus sont très proches de ceux avec coupure (Tableau 5).

Valeurs maximales de grandeurs et temps correspondants	Maillage	
	Mh2 (avec coupure)	Mh2 (trou bouché)
Courant total (A)	3384	3385
temps (ms)	11	11
Puissance Joule (W)	110.1	110.9
temps (ms)	10	10
Induction de réaction $b_{r,z}$ (Coupe OZ) (T)		
z = 0.0000 m	0.0370	0.0374
temps (ms)	12	12
z = 0.0127 m	0.0351	0.0356
temps (ms)	12	12
z = 0.0254 m	0.0293	0.0289
temps (ms)	12	12
z = 0.0508 m	0.0158	0.0159
temps (ms)	12	12

Tableau 5. Résultats avec coupure et trou bouché (formulation  $\mathbf{h}\text{-}\phi$ ).

De plus, les variations spatiales et temporelles des grandeurs qui caractérisent la solution du système, obtenues avec les deux méthodes, sont en parfait accord ; nous ne les illustrons donc pas ici. Notons que le maximum de puissance Joule dans le trou est atteint en  $t = 13$  ms et vaut  $1.11 \cdot 10^{-3}$  W, soit  $10^{-5}$  fois la puissance Joule maximale dans la brique, ce qui permet une bonne estimation de la qualité de l'approximation. Notons aussi que le courant total ne peut être calculé que par l'évaluation explicite du flux de  $\mathbf{j}$  à travers une section de la brique.

### 3.2.4 Formulation en potentiel vecteur magnétique modifié

Nous utilisons maintenant la formulation en potentiel vecteur magnétique modifié  $\mathbf{a}^*$ , avec la jauge naturelle dans l'espace des éléments d'arête. De plus, nous considérons les maillages de base Mh1, Mh2 et Mh3. Nous allons analyser les résultats obtenus et mettre en évidence les particularités de la formulation en  $\mathbf{a}^*$  par rapport à la formulation  $\mathbf{h}\text{-}\phi$ . Le nombre d'inconnues et le nombre d'éléments non nuls de la matrice du système sont donnés dans le tableau 6 pour chaque maillage et pour chaque formulation. La formulation en  $\mathbf{a}^*$  exige le plus d'inconnues, environ deux fois plus que la formulation  $\mathbf{h}\text{-}\phi$ . Le nombre d'arêtes d'un maillage est en effet toujours supérieur au nombre de noeuds, et c'est encore le cas pour le nombre d'arêtes d'un co-arbre défini sur ce maillage.

Formulation	Maillage					
	Mh1		Mh2		Mh3	
	$n_{inc}$	$n_{nz}$	$n_{inc}$	$n_{nz}$	$n_{inc}$	$n_{nz}$
$\mathbf{h}\text{-}\phi$	1074	25410	3021	72375	10094	256978
$\mathbf{a}^*$	2054	43566	5956	119544	19252	405612

Tableau 6. Nombre d'inconnues ( $n_{inc}$ ) et nombre d'éléments non nuls ( $n_{nz}$ ) de la matrice du système pour les maillages de base et pour les formulations  $\mathbf{h}\text{-}\phi$  et en  $\mathbf{a}^*$ .

Les variations de la composante de  $\mathbf{b}$  selon  $z$  le long des coupes OX et OZ sont représentées aux figures 14-15, à des instants successifs et pour le maillage Mh3. Les résultats obtenus avec la formulation  $\mathbf{h}\text{-}\phi$  sur les mêmes maillages sont également représentés afin de mettre en évidence l'accord entre les deux formulations.

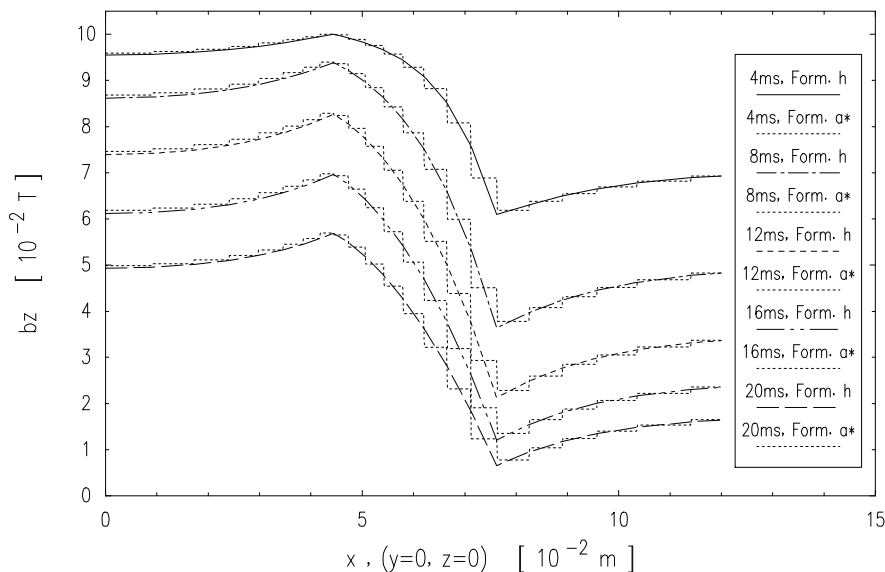


Fig. 14. Variation de l'induction le long de la coupe OX (maillage Mh3).



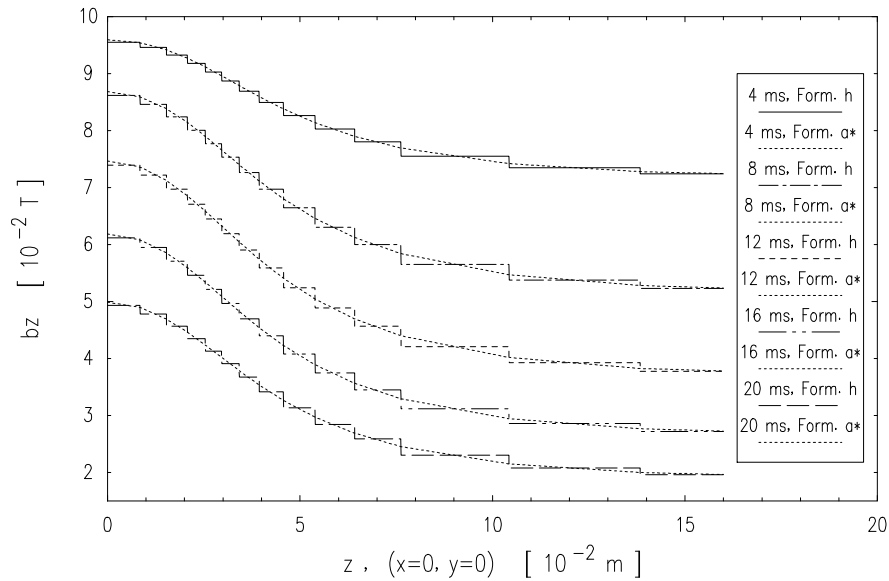


Fig. 15. Variation de l'induction le long de la coupe OZ (maillage Mh3).

La formulation en  $\mathbf{a}^*$  assure fortement la continuité de la composante normale de  $\mathbf{b}$ , ce qui est illustré par la figure 15, alors qu'elle n'assure que faiblement la continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{h}$ , et donc de  $\mathbf{b}$  puisque la perméabilité magnétique est la même partout, ce qui est mis en évidence à la figure 14 par des sauts de l'induction aux interfaces entre éléments. Avec la formulation  $\mathbf{h}-\phi$ , c'est le comportement contraire qui a lieu.

Les variations de la composante de  $\mathbf{j}$  selon  $x$  le long des coupes AB et CD, en  $t=20$  ms, sont représentées à la figure 16. Avec la formulation en  $\mathbf{a}^*$ , à la différence de la formulation  $\mathbf{h}-\phi$ , cette composante subit une discontinuité le long de telles coupes. La continuité de la composante normale de  $\mathbf{j}$  n'est en effet plus assurée : la formulation en  $\mathbf{a}^*$  assure la continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{a}^*$  et donc de  $\mathbf{j} = -\sigma \partial_t \mathbf{a}^*$ , pourvu que  $\sigma$  soit continue. Par contre, pour la variation de  $j_x$  le long de coupes selon  $z$ , le résultat contraire serait observé pour les deux formulations.

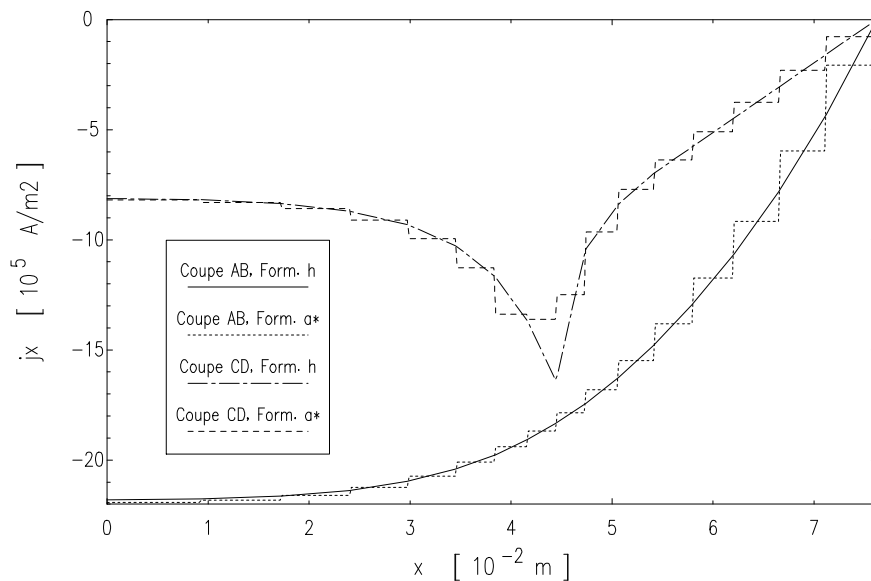


Fig. 16. Variations de la densité de courant ( $j_x$ ) le long des coupes AB et CD ( $t=20$  ms et maillage Mh3).

Les évolutions temporelles du courant total et de la puissance Joule dans la brique sont représentées aux figures 17-18. Ces grandeurs globales semblent tendre vers une limite commune, par le bas avec la formulation  $\mathbf{h}\text{-}\phi$  et par le haut avec la formulation en  $\mathbf{a}^*$ . Cette caractéristique traduit une certaine complémentarité des deux formulations.

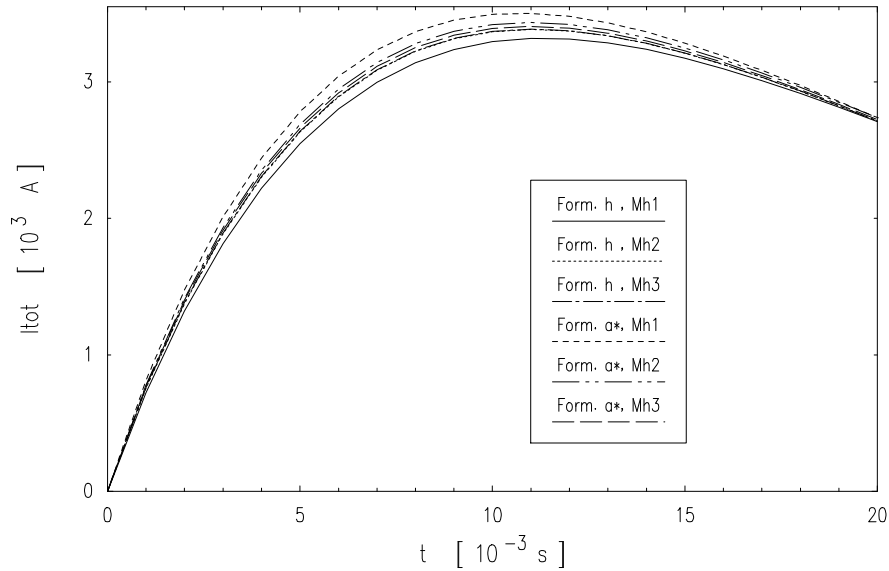


Fig. 17. Evolution temporelle du courant total dans la brique.

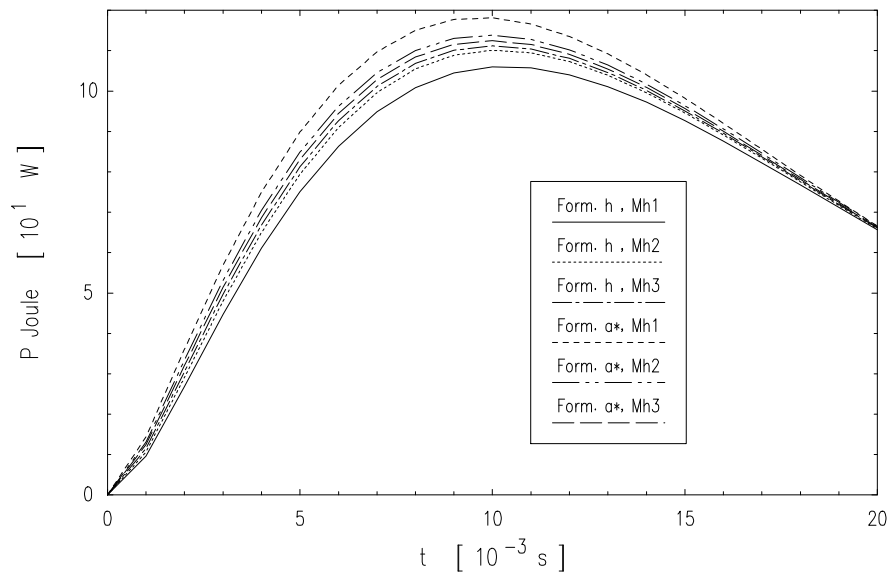


Fig. 18. Evolution temporelle de la puissance Joule dans la brique.

Le tableau 7 donne les valeurs locales et globales de certaines grandeurs, déjà définies, calculées par la formulation en  $\mathbf{a}^*$ . Celui-ci peut être consulté en parallèle avec le tableau 3 qui reprend les résultats de la formulation  $\mathbf{h}\text{-}\phi$ .

Valeurs maximales de grandeurs et temps correspondants	Maillage		
	Mh1	Mh2	Mh3
Courant total (A)	3502	3434	3406
temps (ms)	11	11	11
Puissance Joule (W)	118.1	113.8	112.5
temps (ms)	10	10	10
Induction de réaction $b_{r,z}$ (Coupe OZ) (T)			
z = 0.0000 m	0.0384	0.0390	0.0382
temps (ms)	11	12	12
z = 0.0127 m	0.0359	0.0365	0.0357
temps (ms)	11	12	12
z = 0.0254 m	0.0296	0.0298	0.0294
temps (ms)	11	12	12
z = 0.0508 m	0.0179	0.0153	0.0153
temps (ms)	11	12	12

Tableau 7. Résultats obtenus avec la formulation en  $\mathbf{a}^*$  sur les maillages de base.

### 3.2.5 Comparaison avec des codes internationaux

Les résultats du problème de la brique de FELIX obtenus par des codes internationaux sont résumés en termes de valeurs moyennes et d'écart types de grandeurs globales et locales (Tableau 8) (Kameari, 1988b ; Lamaudière, 1991). Nos résultats pour les mêmes grandeurs et pour le maillage le plus fin considéré, Mh3, sont également repris dans ce tableau. Leur validation peut être confirmée.

Les codes internationaux repris pour le calcul des grandeurs moyennes sont :

- EDDY3DT (Kameari, Mitsubishi Atomic Power Ind., Inc.), basé sur les formulations  $\mathbf{a-v-\phi}$  et  $\mathbf{a}^*-\phi$  (hexaèdres, 8 noeuds), et  $\mathbf{h-\phi}$  (hexaèdres, 8 noeuds (non conducteurs), 12 arêtes (conducteurs)) ( $\phi$  est un potentiel scalaire magnétique défini dans les matériaux non conducteurs) ;
- FIELD (Nakata & al., Université d'Okayama), basé sur les formulations  $\mathbf{a-v}$  et  $\mathbf{t-\omega}$  (tétraèdres, 4 noeuds) ;
- MEGA (Leonard & Rodger, Université de Bath), basé sur la formulation  $\mathbf{a-v-\phi}$  (hexaèdres, 8 noeuds) ;
- CARIDDI (Albanese & Rubinacci, Université de Salerno), basé sur la formulation en potentiel vecteur électrique  $\mathbf{t}$  (hexaèdres, 12 arêtes) ;
- TRIFOU (Electricité de France), basé sur la formulation  $\mathbf{h-\phi}$  (tétraèdres, 4 noeuds (non conducteurs), 6 arêtes (conducteurs)).

Valeurs maximales de grandeurs et temps correspondants	Codes internationaux			Nos résultats (formulation $\mathbf{h}\text{-}\phi$ )		Nos résultats (formulation en $\mathbf{a}^*$ )	
	Valeur moyenne	Ecart type	Exemple : Code TRIFOU	Mh3 (mail. fin)	Ecart par rap. à la val. moy.	Mh3 (mail. fin)	Ecart par rap. à la val. moy.
Courant total (A)	3409	170	3395	3386	0.67 %	3406	0.09 %
temps (ms)	11		11	11		11	
Puissance Joule (W)	110.7	9.6	110.9	111.2	0.45 %	112.5	1.6 %
temps (ms)	10		10	10		10	
Induction de réaction $b_{r,z}$ (Coupe OZ) (T)							
z = 0.0000 m	0.0389	0.0014	0.0379	0.0375	3.6 %	0.0382	1.8 %
temps (ms)	11.5		12	12		12	
z = 0.0127 m	0.0366	0.0015	0.0356	0.0354	3.3 %	0.0357	2.5 %
temps (ms)	11.5		12	12		12	
z = 0.0254 m	0.0297	0.0011	0.0293	0.0293	1.3 %	0.0294	1.0 %
temps (ms)	11.5		12	12		12	
z = 0.0508 m	0.0164	0.0014	0.0154	0.0156	4.9 %	0.0153	6.7 %
temps (ms)	11.5		12	12		12	

Tableau 8. Comparaison avec des codes internationaux.

### 3.3 Conclusions

Ce problème-test a permis de valider nos formulations à différents niveaux, pour des grandeurs locales et globales. Tout d'abord, les éléments finis développés conduisent tous à des solutions semblables, en allure et en ordre de grandeur. Néanmoins, pour une même finesse de maillage, les éléments finis construits sur des hexaèdres conduisent à une meilleure approximation des champs que ceux qui sont construits sur des prismes ou des tétraèdres, malgré un nombre d'inconnues inférieur avec les hexaèdres. Une meilleure précision et une dimension de problème réduite jouent donc en faveur des éléments hexaédriques. Il apparaît donc intéressant d'utiliser une majorité d'éléments hexaédriques lorsque la géométrie de la structure étudiée le permet.

Pour la formulation  $\mathbf{h}\text{-}\phi$ , la prise en compte des domaines multiples connexes par la définition de coupures a également été validée. Une méthode alternative, moins rigoureuse mais plus simple à mettre en oeuvre, a été proposée. Elle consiste à rendre les domaines simplement connexes, non plus à l'aide de coupures surfaciques, mais grâce à des coupures volumiques constituées d'un matériau fictif mauvais conducteur.

Les formulations  $\mathbf{h}\text{-}\phi$  et en  $\mathbf{a}^*$  ont été comparées et une certaine complémentarité entre celles-ci a été mise en évidence. En particulier, les satisfactions fortes et faibles des conditions d'interface, propres à chaque formulation, ont été illustrées.

# Plaques d'acier autour d'un inducteur (Problème transitoire non linéaire)

## 1. Définition du problème

### 1.1 Description générale

Un jeu de plaques en acier ferromagnétique, de faible épaisseur, entoure un inducteur dans lequel le courant d'excitation croît exponentiellement avec le temps. Le problème est de calculer l'évolution temporelle des courants induits dans les plaques, ainsi que celle du champ magnétique, ceci en diverses positions.

Il s'agit d'un des problèmes-test internationaux présentés aux TEAM Workshops (Testing Electromagnetic Analysis Methods). Il est le problème 10 de la série (Albanese & Rubinacci, 1992 ; Mohammed & al., 1990, 1991 ; Nakata & Fujiwara, 1990 ; Nakata, Takahashi & Fujiwara, 1990, 1992).

Il s'agit principalement d'un **problème transitoire non linéaire** de calcul de courants induits dans une structure tridimensionnelle. Celle-ci présente des **entrefers** minces et des **symétries**.

### 1.2 Description de la géométrie et des matériaux

La structure étudiée est représentée à la figure 1. Elle comporte **trois plaques d'acier**, d'épaisseur égale à 3.2 mm, dont deux ont la forme d'un "U" et sont disposées symétriquement de part et d'autre de la troisième plaque, plane, de telle façon qu'il y ait quatre entrefers de 0.5 mm. Un **inducteur** entoure la plaque centrale et est situé à l'intérieur des plaques en "U". La conductivité des plaques d'acier est égale à  $7.505 \cdot 10^6 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ .

Puisque l'acier est ferromagnétique, ses caractéristiques magnétiques sont non linéaires et sa perméabilité n'est alors pas constante. Nous considérons cependant qu'il n'y a pas de champ rémanent de façon à pouvoir utiliser la courbe de première aimantation au lieu des courbes d'hystérésis. La courbe b-h de l'acier est représentée à la figure 2. Les valeurs mesurées de b (T) et h (A/m) sont données dans la tableau 1. La variation de la perméabilité magnétique relative avec le champ magnétique est représentée à la figure 3. Celle-ci vaut environ 124 à l'origine et atteint un maximum de 2325 lorsque le champ magnétique vaut 375 A/m. La courbe pour des inductions élevées ( $b \geq 1.8 \text{ T}$ ) peut être approximée par

$$b = \mu_0 h + (a h^2 + b h + c), \text{ si } 1.8 \leq b \leq 2.22 \text{ T}, \text{ et } b = \mu_0 h + M_s, \text{ si } b \geq 2.22 \text{ T}, \quad (1)$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide. Les constantes  $a$ ,  $b$  et  $c$  valent respectivement  $-2.381 \cdot 10^{-10}$ ,  $2.327 \cdot 10^{-5}$  et 1.590. La grandeur  $M_s$  vaut 2.16 T et représente l'aimantation de saturation de l'acier. L'expression (1) montre que l'acier est complètement saturé lorsque b est supérieur à 2.22 T.

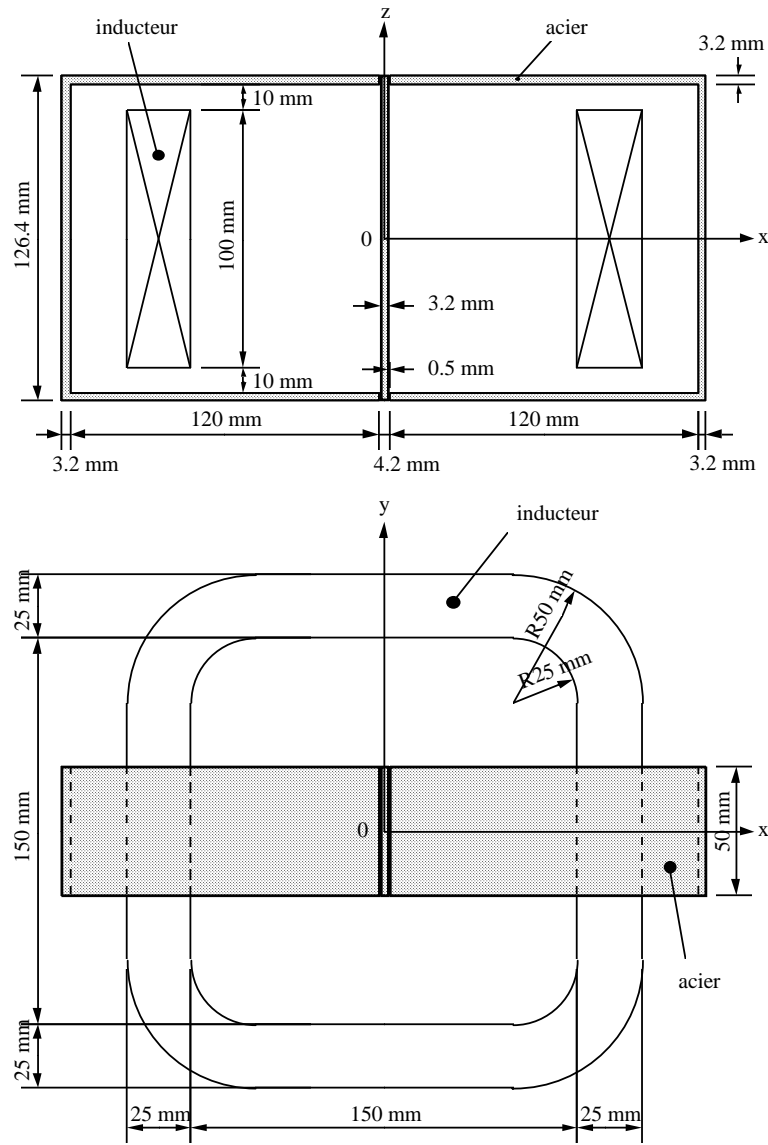


Fig. 1. Plaques d'acier autour d'un inducteur.

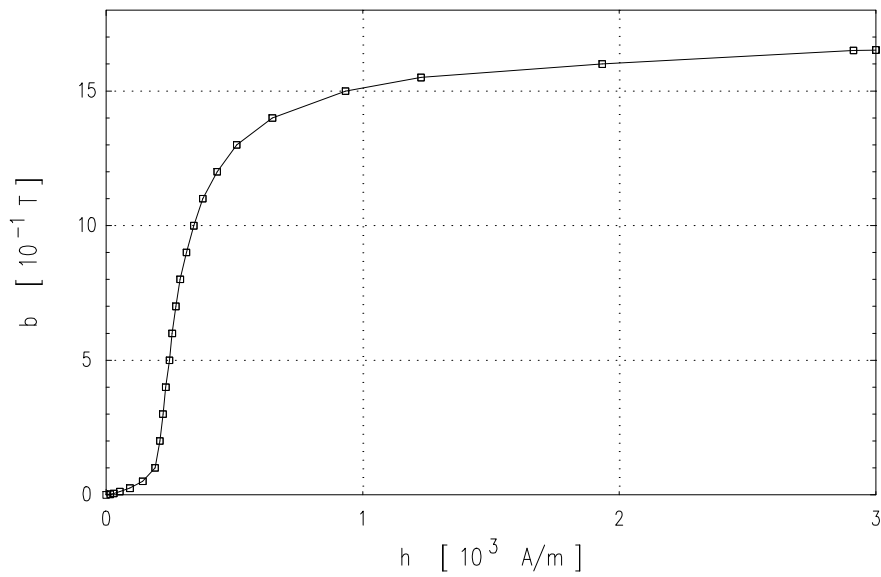
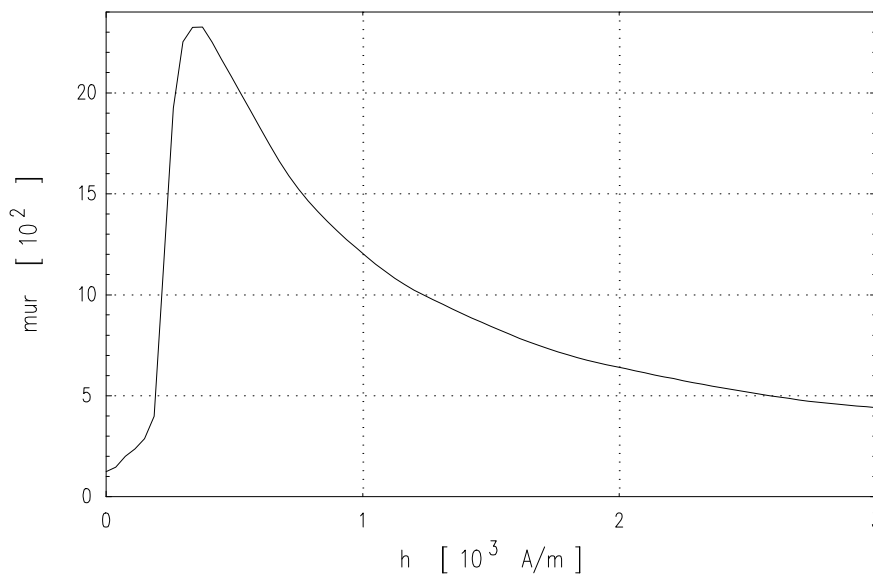


Fig. 2. Courbe b-h de l'acier.

No	b (T)	h (A/m)	No	b (T)	h (A/m)
1	0	0	15	0.90	313
2	0.0025	16	16	1.00	342
3	0.0050	30	17	1.10	377
4	0.0125	54	18	1.20	433
5	0.025	93	19	1.30	509
6	0.05	143	20	1.40	648
7	0.10	191	21	1.50	933
8	0.20	210	22	1.55	1228
9	0.30	222	23	1.60	1934
10	0.40	233	24	1.65	2913
11	0.50	247	25	1.70	4993
12	0.60	258	26	1.75	7189
13	0.70	272	27	1.80	9423
14	0.80	289			

Tableau 1. Valeurs mesurées de b et h sur la courbe de première aimantation.

Fig. 3. Courbe  $\mu_r$ -h de l'acier.

### 1.3 Description de l'excitation

L'inducteur est constitué de 162 spires. Le courant d'excitation croît exponentiellement avec le temps, de zéro à une valeur constante, de la façon suivante :

$$I = 0 \quad \text{pour } t < 0, \quad I = I_m (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{pour } t \geq 0, \quad (2a-b)$$

où  $I_m = 5.64$  A et  $\tau = 0.05$  s. Cette évolution temporelle est représentée à la figure 4. La force magnétomotrice correspondante est de 913.68 A en régime établi. L'amplitude  $I_m$  est choisie de telle sorte que les plaques d'acier puissent être suffisamment saturées. La constante de temps  $\tau$  est quant à elle choisie pour que les courants induits dans les plaques ne soient pas trop faibles, en permettant toutefois de les négliger dans l'inducteur. Notons que cette forme de courant inducteur est en accord avec l'utilisation de la courbe de première aimantation de l'acier.

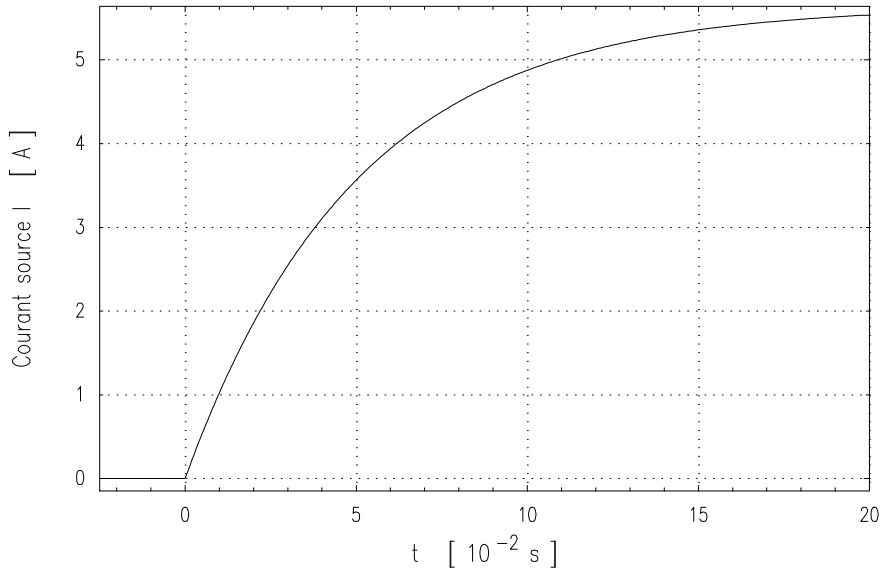


Fig. 4. Evolution temporelle du courant d'excitation dans l'inducteur.

### 1.4 Grandeurs à calculer

Il s'agit de calculer les évolutions temporelles des grandeurs suivantes sur une durée de 0.15 s :

- la densité de courant induit en tout point des plaques d'acier, en particulier aux points  $P_1 = (1.6, 6.25, 0)$ ,  $P_2 = (41.8, 6.25, 63.2)$  et  $P_3 = (125.3, 6.25, 0)$ , qui sont situés en surface des plaques d'acier et où des mesures ont été réalisées (les coordonnées sont données en mm) (Fig. 5) ;
- le champ magnétique en tout point de l'espace et en particulier le flux de l'induction magnétique au travers des surfaces  $S_1 \equiv \{ 0 \leq x \leq 1.6, 0 \leq y \leq 25, z = 0 \}$ ,  $S_2 \equiv \{ x = 41.8, 0 \leq y \leq 25, 60 \leq z \leq 63.2 \}$  et  $S_3 \equiv \{ 122.1 \leq x \leq 125.3, 0 \leq y \leq 25, z = 0 \}$ , qui sont des sections des plaques d'acier où des mesures de flux ont été réalisées (Fig. 5).

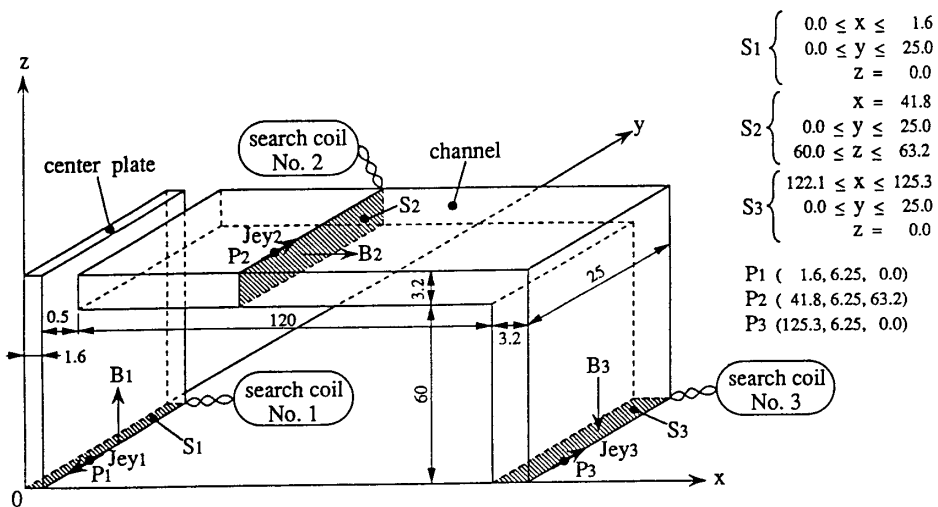


Fig. 5. Positions définies (mm) pour le calcul de la densité de courant et de l'induction.



## 2. Modélisation

### 2.1 Formulation utilisée

La formulation utilisée est la **formulation en  $\mathbf{h}$** , dans laquelle les inconnues sont directement liées au **champ magnétique  $\mathbf{h}$** . Dans les matériaux non conducteurs, ce champ peut dériver d'un **potentiel scalaire magnétique  $\phi$**  et on parle alors de **formulation  $\mathbf{h}$ - $\phi$** . Ce sont en général les composantes de réaction de ces champs qui sont les inconnues, i.e.  $\mathbf{h}_r$  et  $\phi_r$ , avec  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_r + \mathbf{h}_s$  partout ( $\mathbf{h}_s$  est un champ source connu), et  $\mathbf{h}_r = -\text{grad } \phi_r$  dans les matériaux non conducteurs.

Les inconnues du problème se réduisent au champ  $\mathbf{h}$  dans les matériaux conducteurs et au potentiel scalaire  $\phi$  ailleurs. Au niveau discret, les éléments finis utilisés sont alors des éléments nodaux pour l'interpolation de  $\phi$  et des éléments d'arête pour l'interpolation de  $\mathbf{h}$ . En réalité, certains éléments peuvent résulter d'un couplage d'éléments nodaux et d'arête, c'est-à-dire que leurs fonctions de base peuvent être associées à la fois à des noeuds et à des arêtes ; c'est le cas des éléments conducteurs en contact avec l'interface conducteur - air.

Nous pouvons déduire du champ magnétique  $\mathbf{h}$  une approximation de l'induction magnétique  $\mathbf{b}$ , par  $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$ , ainsi qu'une approximation de la densité de courant induit  $\mathbf{j}$ , par  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{h}$ .

### 2.2 Types d'éléments finis utilisés

Nous utiliserons des éléments finis nodaux et d'arête construits sur des hexaèdres de type I. Nous définirons directement un maillage de finesse importante, bien que d'autres maillages auront été considérés pour des validations préliminaires.

### 2.3 Conditions aux limites et symétries

Les symétries qui peuvent être prises en compte sont au nombre de trois (Fig. 1). Elles sont, en centrant la structure au point  $(0, 0, 0)$  :

- une symétrie à champ magnétique perpendiculaire, ou à courant parallèle, sur le plan  $z = 0$ , noté  $\Gamma_h$ , où

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{h} \big|_{\Gamma_h} = 0, \quad \text{ou encore} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \big|_{\Gamma_h} = 0; \quad (1)$$

- deux symétries à induction parallèle, ou à courant perpendiculaire, sur les plans  $x = 0$  et  $y = 0$ , notés  $\Gamma_e$ , où

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} \big|_{\Gamma_e} = 0, \quad \text{ou encore} \quad \mathbf{n} \wedge \mathbf{e} \big|_{\Gamma_e} = 0. \quad (2)$$

La géométrie à étudier peut ainsi se réduire à un huitième de la structure initiale ; nous considérons la région  $\{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ . La portion de  $\Gamma_h$  en contact avec l'air est notée  $\Gamma_{h, \text{air}}$  et son complémentaire dans  $\Gamma_h$ , i.e.  $\Gamma_h \setminus \Gamma_{h, \text{air}}$ , est noté  $\Gamma_{h, \text{cond}}$ . Les surfaces  $\Gamma_{e, \text{air}}$  et  $\Gamma_{e, \text{cond}}$  sont définies de la même façon.

De plus, nous limitons le domaine d'étude à une boîte parallélépipédique de dimension suffisante (idéalement infinie) et dont les surfaces éloignées de la structure, qui approximent les surfaces à l'infini, sont notées  $\Gamma$  (Fig. 1). On considère que le champ s'annule sur ces surfaces, c'est-à-dire que la structure étudiée n'a pas d'influence à leur niveau.

Les conditions sur les surfaces  $\Gamma_h$  et  $\Gamma_e$ , i.e. (1) et (2), s'appliquent au champ total. Sur la surface  $\Gamma$ , nous avons le choix entre les conditions des types (1) et (2), c'est-à-dire

$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} |_{\Gamma_e} = 0$  et  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{h} |_{\Gamma_h} = 0$ . Nous choisissons la seconde condition. Ainsi, pour la formulation en  $\mathbf{h}$ , nous devons imposer explicitement les conditions

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{h} |_{\Gamma_{h, \text{cond}}} = 0, \quad \phi |_{\Gamma_{h, \text{air}}} = 0, \quad \phi |_{\Gamma_\infty} = 0, \quad (3a-b-c)$$

alors que la condition  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} |_{\Gamma_e} = 0$  est implicite ; la surface  $\Gamma$  est du type de  $\Gamma_h$ . Cela revient à fixer certains degrés de liberté, c'est-à-dire à annuler la circulation de  $\mathbf{h}$  sur les arêtes de  $\Gamma_{h, \text{cond}}$  et le potentiel  $\phi$  aux noeuds de  $\Gamma_{h, \text{air}}$  et  $\Gamma$ . Notons que le potentiel  $\phi$  est défini à une constante près, celle-ci étant fixée par les conditions (3b-c).

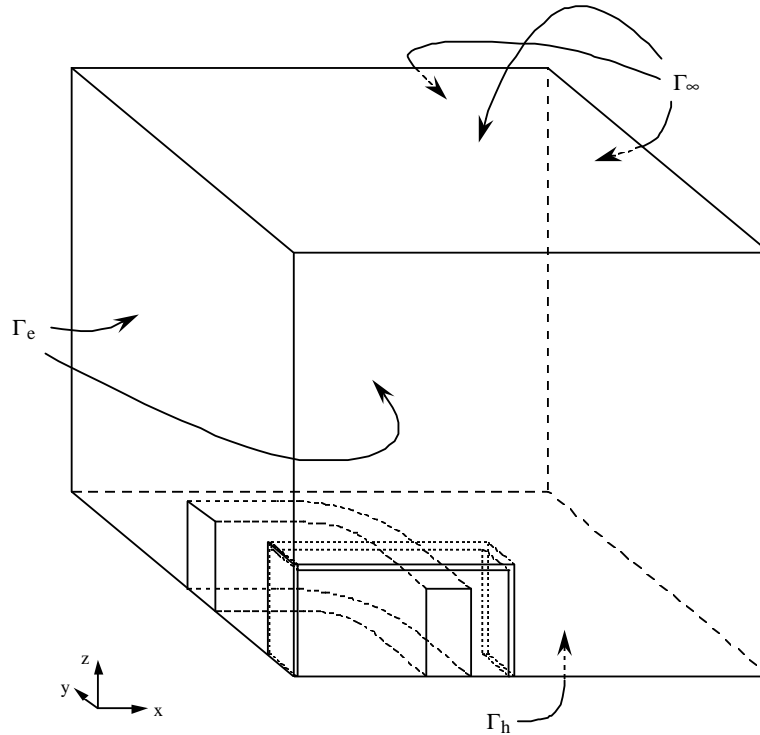


Fig. 1. Domaine d'étude et conditions aux limites.

## 2.4 Prise en compte de l'inducteur

L'inducteur peut être pris en compte par un champ source  $\mathbf{h}_s$  qui vérifie l'équation  $\text{rot } \mathbf{h}_s = \mathbf{j}_s$  dans l'espace des éléments d'arête ;  $\mathbf{j}_s$  est la densité de courant imposée dans l'inducteur. Le support d'un tel champ peut être réduit au maximum s'il est limité au support de  $\mathbf{j}_s$ , c'est-à-dire à l'inducteur, avec toutefois une contribution extérieure associée à une coupure source, liée à ce même inducteur et qui rend son complémentaire simplement connexe. Cette contribution extérieure revient à définir un potentiel scalaire source  $\phi_s$  nul partout et une discontinuité de coupure source égale à la moitié du courant total imposé, vu les symétries considérées. La construction d'un champ source  $\mathbf{h}_s$  dans l'inducteur se fait par l'application de la jauge naturelle dans l'espace des éléments d'arête, qui est du type  $\mathbf{h}_s \cdot \mathbf{w} = 0$ , où  $\mathbf{w}$  a la direction, discontinue, des arêtes d'un arbre construit dans l'inducteur. Un potentiel scalaire magnétique de réaction, inconnu, est alors défini dans l'inducteur.

Une autre solution consiste à traiter directement le champ magnétique total comme inconnue, qui dérive d'un potentiel scalaire total dans l'air. L'inducteur est alors modélisé par des éléments d'arêtes et l'excitation est alors définie par l'intermédiaire d'une discontinuité de coupure, associée à l'inducteur, égale à la moitié du courant total imposé, vu les symétries considérées. La coupure est définie dans l'air sur le plan  $z=0$ . Il s'agit de définir une

conductivité de l'inducteur de faible valeur afin d'éviter tout effet pelliculaire et ainsi se rapprocher de l'excitation réelle. Nous avons vérifié que cette méthode conduisait à une solution semblable à celle obtenue avec le champ source.

## 2.5 Méthodes de calcul

Les solutions non linéaires sont obtenues grâce à la méthode de Newton-Raphson et la solution de chaque système linéaire d'équations est obtenue par la méthode ICCG (Incomplete Choleski Conjugate Gradient method) (Press & al., 1989). La méthode de discrétisation temporelle est basée sur le schéma d'Euler implicite. La courbe b-h de l'acier, ou plus précisément la courbe de la perméabilité magnétique fonction de  $h$ ,  $\mu=\mu(\mathbf{h})$ , est interpolée par des splines cubiques.

## 3. Résultats

### 3.1 Définition du maillage

Le maillage des plaques et de l'inducteur est représenté à la figure 1a, avec un agrandissement du voisinage de l'entrefer. La projection du maillage du domaine d'étude sur un plan horizontal ( $z = \text{constante}$ ) est représentée à la figure 1b. Un maillage régulier est réalisé dans les différents matériaux ainsi que dans leur voisinage, avec toutefois des divisions non uniformes, de faible largeur, dans les régions où les variations du champ magnétique peuvent être importantes. Ailleurs, dans l'air, le maillage est libre (c'est-à-dire automatique, avec des dimensions de mailles variables) afin de ne pas propager une finesse de mailles trop importante à grande distance.

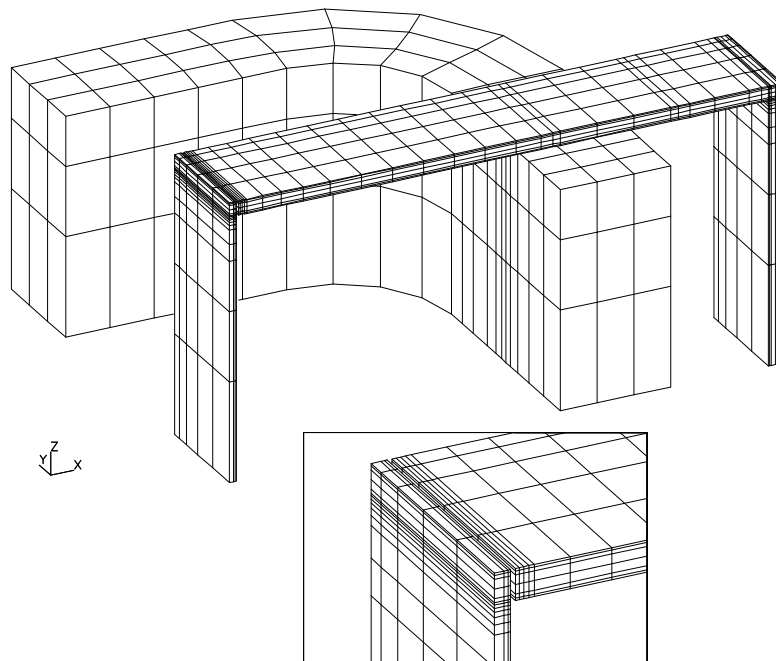


Fig. 1a. Maillage de la structure (plaques et inducteur).

L'épaisseur des plaques est discrétisée avec 6 couches non uniformes d'éléments hexaédriques. Les portions de surface  $\Gamma$  sont placées à une distance du centre de la structure  $D$  égale à 0.5 m. Le nombre d'éléments et de noeuds est de 14454 et 16123, respectivement.

Le problème comporte alors 17609 inconnues. Un pas de temps fixe,  $\Delta t = 2.5$  ms, est utilisé pour la discrétisation temporelle par la méthode d'Euler implicite.

Les calculs ont été effectués sur une station ALPHA DEC 3000/500 (120 MIPS). La génération de la matrice du système à chaque pas de temps et à chaque itération de Newton-Raphson a demandé 160 secondes. La résolution de chaque système linéarisé s'est déroulée en 200 secondes (environ 125 itérations pour le gradient conjugué, précision demandée =  $10^{-5}$ ). Le nombre d'itérations de Newton-Raphson nécessaires à la convergence de la solution à un instant donné a varié entre 6 et 2 (précision demandée =  $10^{-4}$ ). Le temps total pour la résolution de ce problème est de 8 heures.

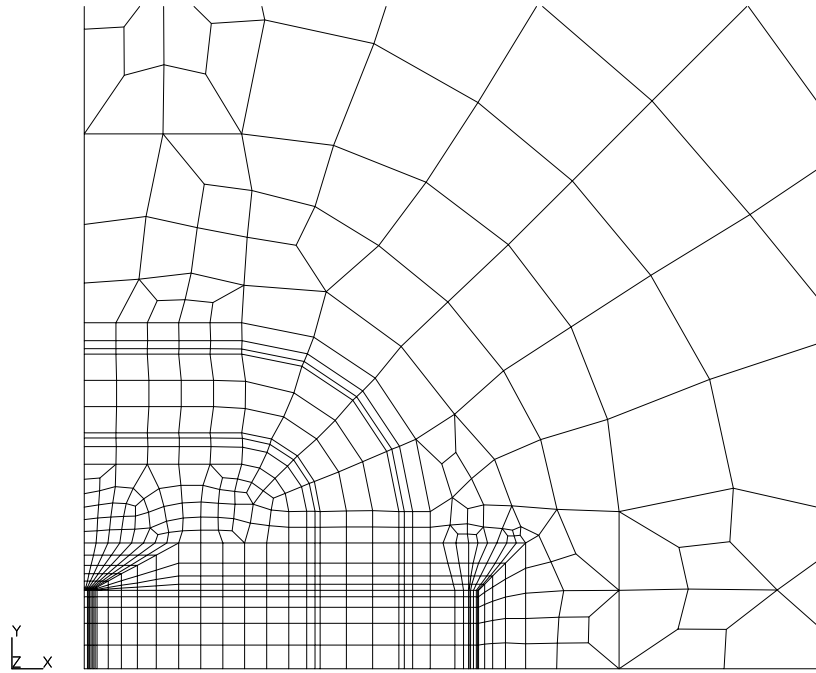


Fig. 1b. Projection horizontale du maillage du domaine d'étude.

### 3.2 Densité de flux magnétique

Le champ d'induction  $\mathbf{b}$  dans le voisinage de l'entrefer sur le plan  $y=0$  est représenté à la figure 2, à l'instant  $t=25$  ms. Les lignes d'isovaleurs du potentiel scalaire magnétique  $\phi$  dans l'air (le potentiel n'est pas défini dans les plaques) sont représentées, sur le même plan et au même instant, à la figure 3a. De telles lignes sont également représentées sur le plan  $z=61.6$  mm à la figure 3b, toujours dans le voisinage de l'entrefer et au même instant. Enfin, d'autres lignes d'isovaleurs sont représentées sur les plans  $y=0$  et  $x=0$  aux figures 4a-b, au même instant mais pour la structure entière. Le champ magnétique,  $\mathbf{h} = -\text{grad } \phi$ , est orthogonal à ces lignes.

L'induction dans les plaques est plus élevée en surface et décroît vers l'intérieur, ce qui correspond à un effet pelliculaire. L'échange de flux d'induction magnétique entre les plaques se fait principalement par l'entrefer, où l'induction est la plus élevée. Néanmoins, cet échange existe également dans le voisinage de l'entrefer et s'atténue d'autant plus que l'on s'éloigne de celui-ci. C'est ce qui apparaît à la figure 2, en y observant la variation de la norme du vecteur induction, mais aussi à la figure 3, où les lignes d'isovaleurs s'écartent en s'éloignant de l'entrefer.

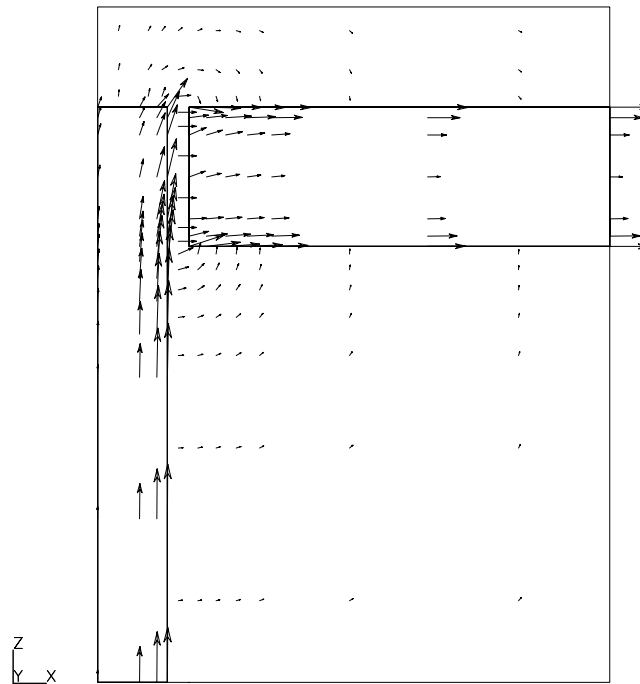


Fig. 2. Champ d'induction  $\mathbf{b}$  en  $\{0 \leq x \leq 11.8 \text{ mm}, y = 0, 50 \leq z \leq 65.5 \text{ mm}\}$  et en  $t = 25 \text{ ms}$  ;  
 (dans les plaques :  $b_{\min} = 0.048 \text{ T}$ ,  $b_{\max} = 1.29 \text{ T}$  ; dans l'air :  $b_{\min} = 7.3 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ ,  $b_{\max} = 0.216 \text{ T}$ ).

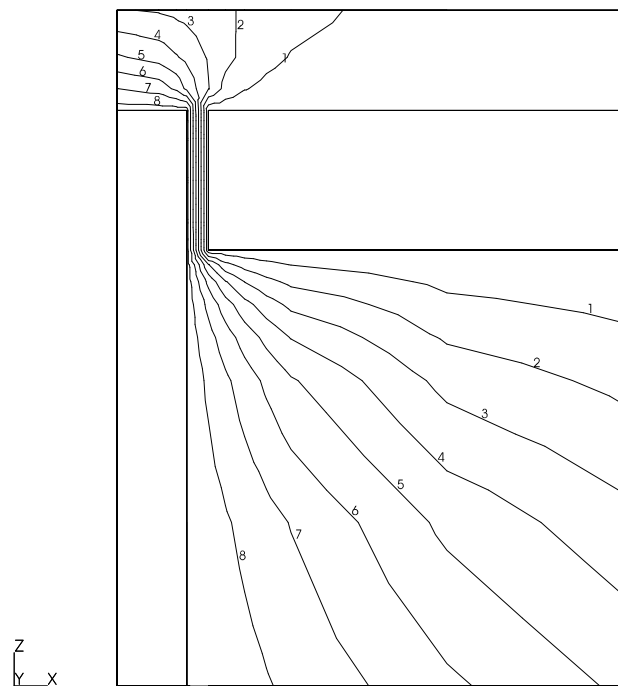


Fig. 3a. Lignes d'isovaleurs du potentiel scalaire magnétique  $\phi$  en  $\{0 \leq x \leq 11.8 \text{ mm}, y = 0, 50 \leq z \leq 65.5 \text{ mm}\}$  et  
 en  $t = 25 \text{ ms}$  ; ( $\phi_{\min} = 58.2 \text{ A/m}$ ,  $\phi_{\max} = 152.4 \text{ A/m}$ ).

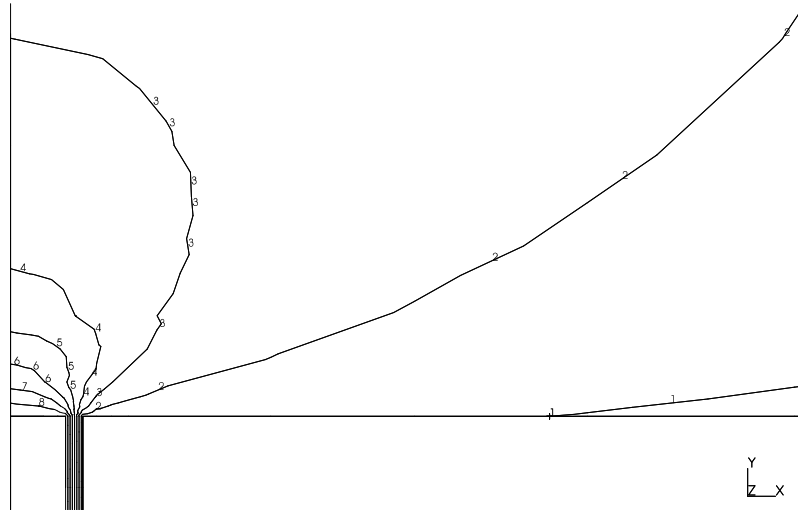


Fig. 3b. Lignes d'isovaleurs du potentiel scalaire magnétique  $\phi$  dans le voisinage de l'entrefer en  $z = 61.6$  mm et en  $t = 25$  ms ; ( $\phi_{\min} = 46.08$  A/m,  $\phi_{\max} = 152.4$  A/m).

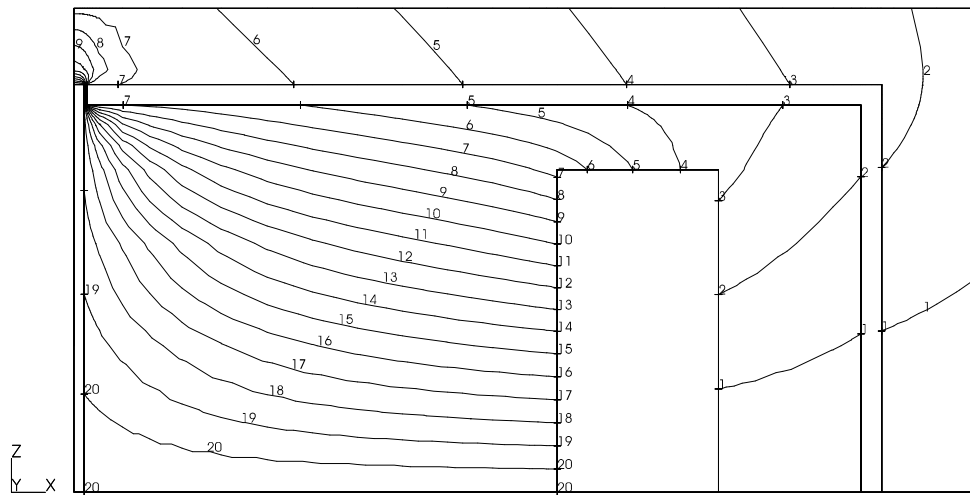


Fig. 4a. Lignes d'isovaleurs du potentiel scalaire magnétique  $\phi$  sur le plan  $y = 0$  et en  $t = 25$  ms ; ( $\phi_{\min} = 0$ ,  $\phi_{\max} = 179.75$  A/m).

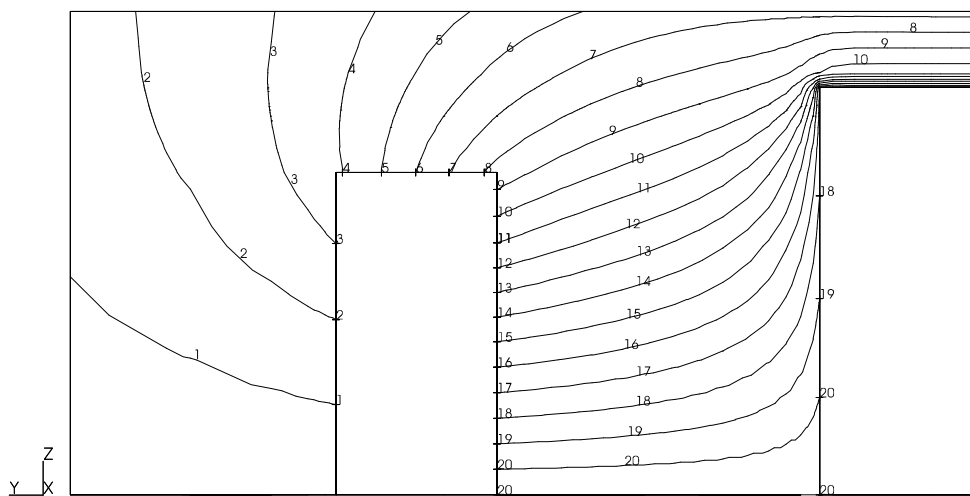


Fig. 4b. Lignes d'isovaleurs du potentiel scalaire magnétique  $\phi$  sur le plan  $x = 0$  et en  $t = 25$  ms ; ( $\phi_{\min} = 0$ ,  $\phi_{\max} = 179.75$  A/m).

Le champ d'induction  $\mathbf{b}$  dans le voisinage du coude de la plaque sur le plan  $y=0$  est représenté à la figure 5, à l'instant  $t=25$  ms. Nous pouvons observer la canalisation du flux magnétique dans la plaque, avec un très faible flux de fuite.

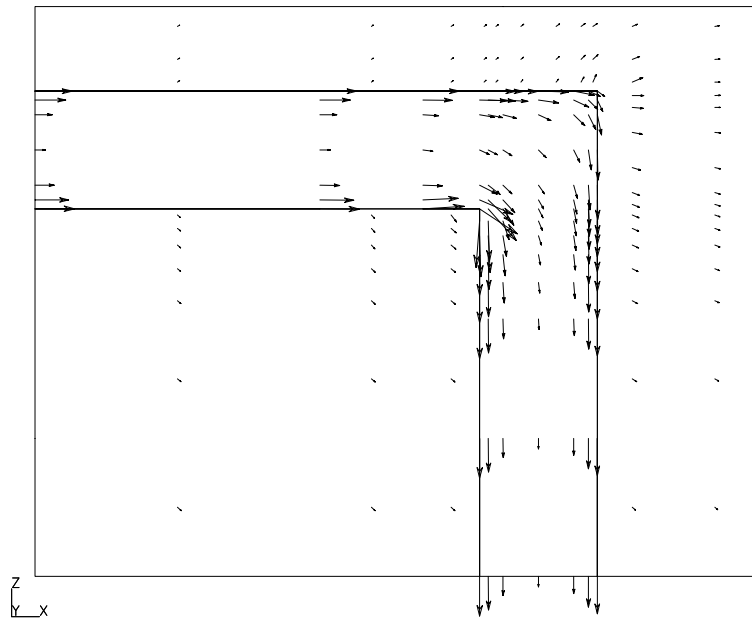


Fig. 5. Champ d'induction  $\mathbf{b}$  en  $\{110 \leq x \leq 129.79 \text{ mm}, y = 0, 50 \leq z \leq 65.5 \text{ mm}\}$  et en  $t = 25$  ms ; (dans les plaques :  $b_{\min} = 0.056 \text{ T}$ ,  $b_{\max} = 1.27 \text{ T}$  ; dans l'air :  $b_{\min} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ ,  $b_{\max} = 0.0011 \text{ T}$ ).

La variation de l'induction magnétique le long de l'épaisseur de la plaque, sur  $S_3$ , est représentée à la figure 6a, à différents instants. La variation de la perméabilité magnétique relative le long de la même coupe et aux mêmes instants est représentée à la figure 6b. Nous pouvons remarquer qu'il n'y a pas de saturation magnétique dans cette région. L'allure des variations de l'induction jusqu'à 30 ms diffère des suivantes. Cela est dû à un effet pelliculaire relativement important au tout début du transitoire ; le maillage selon l'épaisseur des plaques a été réalisé de façon non uniforme pour permettre une bonne prise en compte de cet effet. A l'instant  $t = 150$  ms, l'induction est presque uniforme selon l'épaisseur.

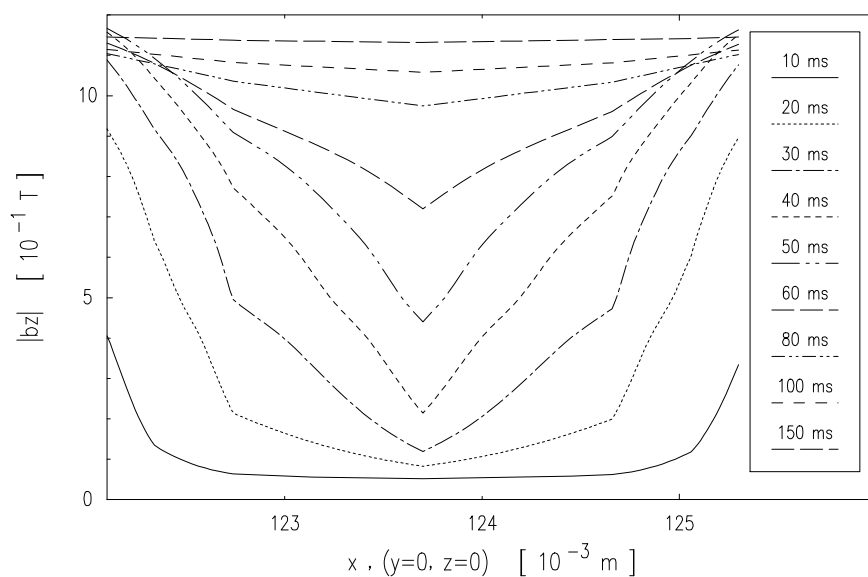


Fig. 6a. Variation de l'induction magnétique le long de l'épaisseur de la plaque (sur  $S_3$  et  $y = 0, z = 0$ ) à des instants successifs.

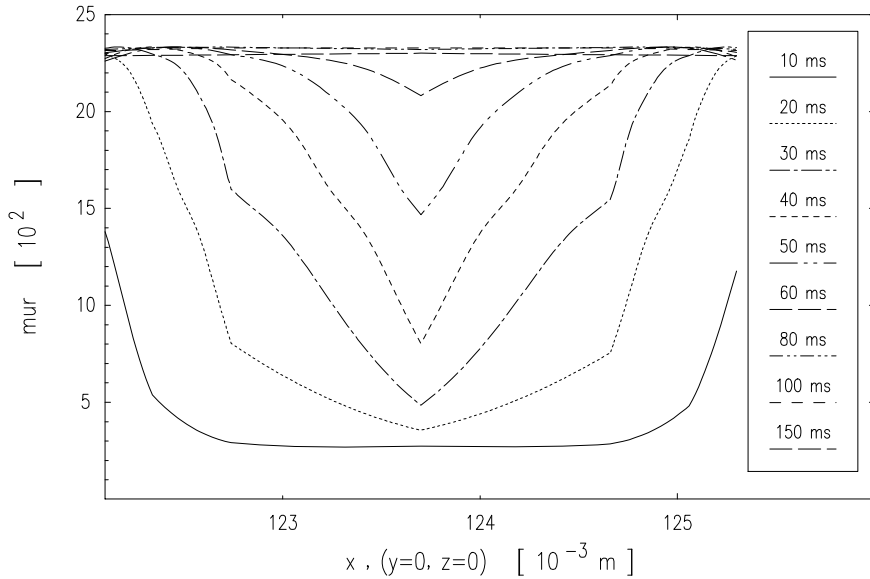


Fig. 6b. Variation de la perméabilité magnétique relative le long de l'épaisseur de la plaque (sur S<sub>3</sub> et y = 0, z = 0) à des instants successifs.

L'induction moyenne sur une surface est définie comme étant la densité de flux moyen au travers de cette surface ; sa direction est donc implicitement donnée. La figure 7 montre les variations temporelles de l'induction moyenne calculée et mesurée dans les plaques d'acier sur les surfaces S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub> et S<sub>3</sub>. Le tableau 1 compare les valeurs calculées et mesurées aux instants t = 20 ms, 60 ms, 150 ms. Les écarts entre les valeurs calculées et mesurées apparaissent être plus élevés lors du phénomène transitoire. Cependant, un très bon accord est obtenu au temps t = 150 ms, c'est-à-dire en régime presque établi.

Les variations temporelles de la perméabilité magnétique relative calculée sur la surface des plaques aux points P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub> et P<sub>3</sub> sont représentées à la figure 8. La saturation magnétique dans la plaque centrale, au point P<sub>1</sub>, y apparaît clairement. Il est intéressant d'observer cette figure en parallèle avec les figures 7 et 1.3, cette dernière représentant la courbe μ<sub>r</sub>-h de l'acier, pour en particulier remarquer une certaine similitude entre les courbes μ<sub>r</sub>-h et μ<sub>r</sub>(P<sub>1</sub>).

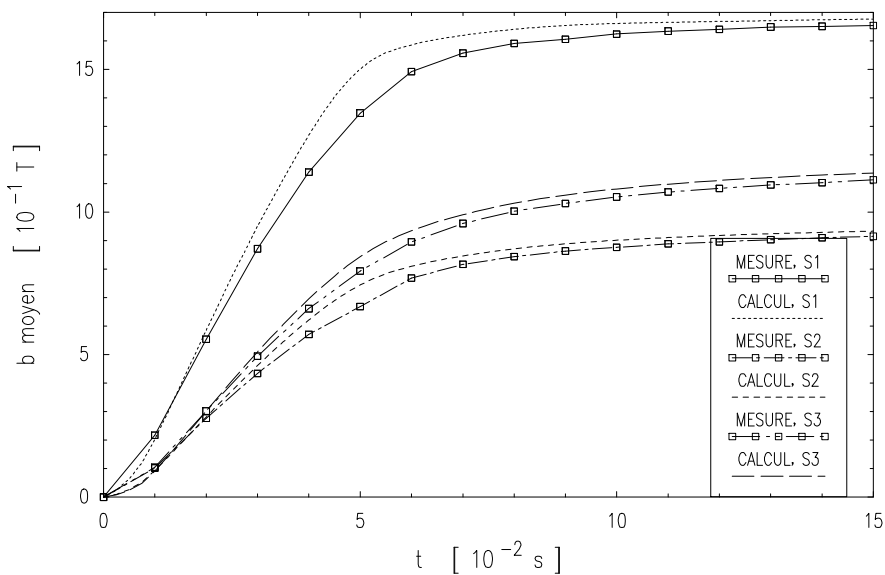


Fig. 7. Variations temporelles de l'induction moyenne calculée et mesurée dans les plaques d'acier sur les surfaces S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub>, S<sub>3</sub>.



Position	Induction moyenne (T)					
	t = 20 ms		t = 60 ms		t = 150 ms	
	calcul	mesure	calcul	mesure	calcul	mesure
S <sub>1</sub>	0.585 (5.6 %)	0.554	1.586 (6.3 %)	1.492	1.676 (1.3 %)	1.654
S <sub>2</sub>	0.281 (1.4 %)	0.277	0.809 (5.3 %)	0.768	0.933 (2.0 %)	0.915
S <sub>3</sub>	0.302 (0.0 %)	0.302	0.934 (4.4 %)	0.895	1.137 (2.1 %)	1.113

Tableau 1. Comparaison entre les valeurs calculées et mesurées de l'induction moyenne sur les surfaces S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub>, S<sub>3</sub> en t = 20 ms, 60 ms, 150 ms (les écarts entre ces valeurs sont donnés entre parenthèses).

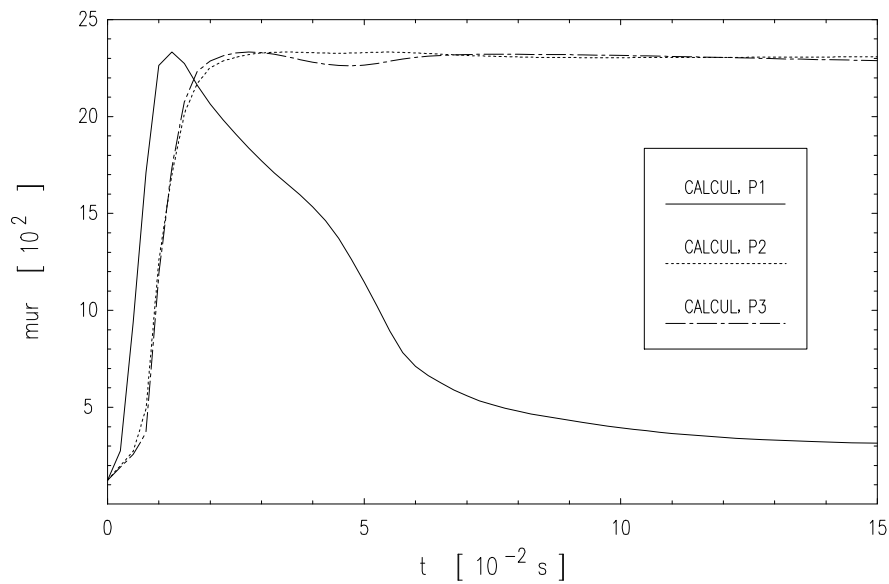


Fig. 8. Variations temporelles de la perméabilité magnétique relative calculée dans les plaques d'acier aux points P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>.

Les échanges de flux magnétique entre les plaques sont illustrés à la figure 9a, qui montre la distribution spatiale de l'induction moyenne le long des plaques en t = 150 ms.

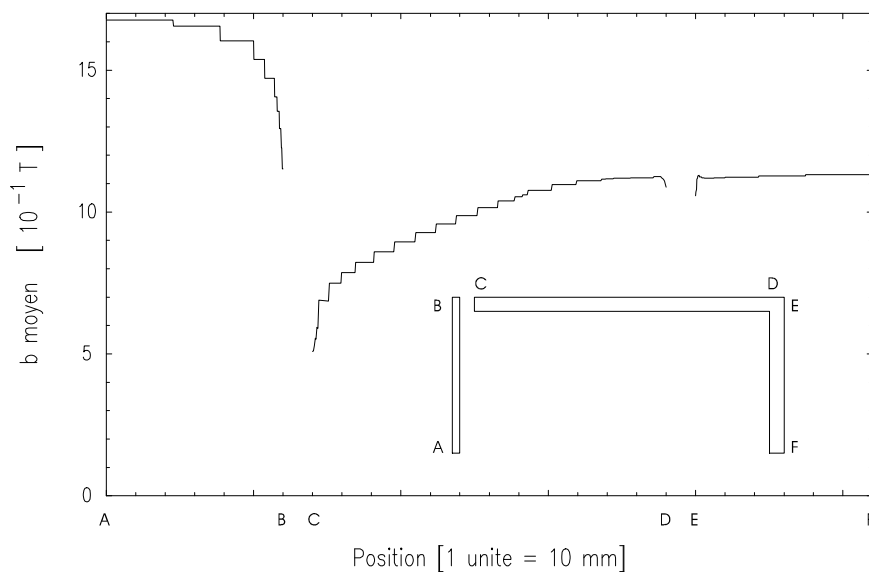


Fig. 9a. Distribution spatiale de l'induction moyenne le long des plaques en t = 150 ms.

La variation de la perméabilité magnétique relative le long des plaques est représentée à la figure 9b. La saturation magnétique de la plaque centrale y est mise en évidence, le long de la coupe AB, où la perméabilité est plus faible.

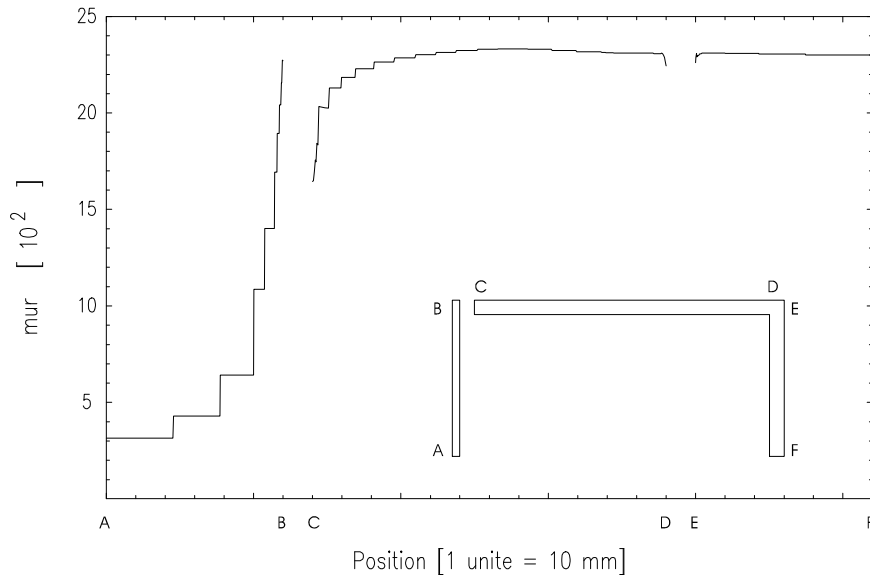


Fig. 9b. Variation de la perméabilité magnétique relative le long des plaques en  $t = 150$  ms.

### 3.3 Densité de courant induit

La distribution de la densité de courant induit, sur des plans de coupe particuliers dans la plaque coudée, est représentée aux figures 10a-b, à l'instant  $t = 25$  ms. Nous pouvons y observer que le courant est plus élevé en surface qu'au centre de la plaque. Ce phénomène traduit un effet pelliculaire.

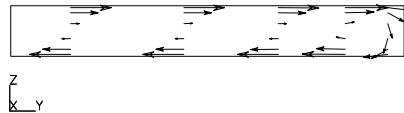


Fig. 10a. Champ de densité de courant en  $\{x = 41.8 \text{ mm}, 0 \leq y \leq 25 \text{ mm}, 60 \leq z \leq 63.2 \text{ mm}\}$  et en  $t = 25$  ms ;  
 $(j_{\min} = 3.25 \cdot 10^4 \text{ A/m}^2, j_{\max} = 2.14 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2)$ .

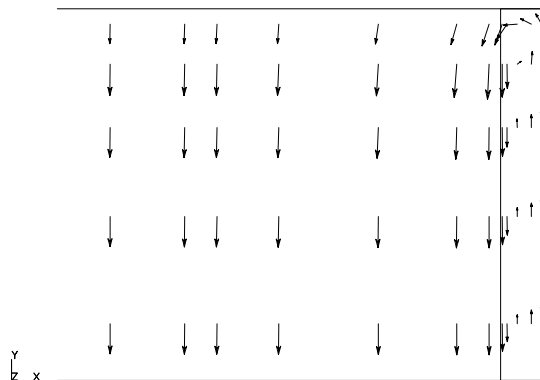


Fig. 10b. Champ de densité de courant en  $\{91.7 \leq x \leq 125.3 \text{ mm}, 0 \leq y \leq 25 \text{ mm}, z = 60 \text{ mm}\}$  et en  $t = 25$  ms ;  
 $(j_{\min} = 5.42 \cdot 10^3 \text{ A/m}^2, j_{\max} = 2.96 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2)$ .

L'approximation de la densité de courant induit le long de l'épaisseur des plaques est constante dans chaque couche d'éléments. Notons qu'en réalité, cette approximation n'est pas

constante dans chaque élément entier, en ce sens qu'elle peut varier dans d'autres directions ; c'est une conséquence des fonctions de base d'arête utilisées. La variation de la densité de courant induit le long de l'épaisseur de la plaque, en direction du point  $P_2$ , est représentée à la figure 11 à des instants successifs. Nous pouvons observer que la densité de courant induit sur la surface de la plaque est souvent sous-estimée, et parfois surestimée, à cause des variations en escalier ("marches"). Il faudrait procéder à un lissage de ces variations de façon à obtenir des valeurs sur la surface plus proches des valeurs réelles, ce qui constituerait en quelque sorte une extrapolation. Un tel lissage a été réalisé grâce à des interpolations polynomiales, avec comme supports les milieux de chacune des marches, suivies d'une correction qui assure la conservation du courant. Ces lissages spatiaux sont également représentés à la figure 11 en correspondance avec les variations initiales en escalier. La figure 12 montre de tels lissages de la densité de courant le long de la même coupe que précédemment (en direction du point  $P_2$ ) et à des instants successifs.

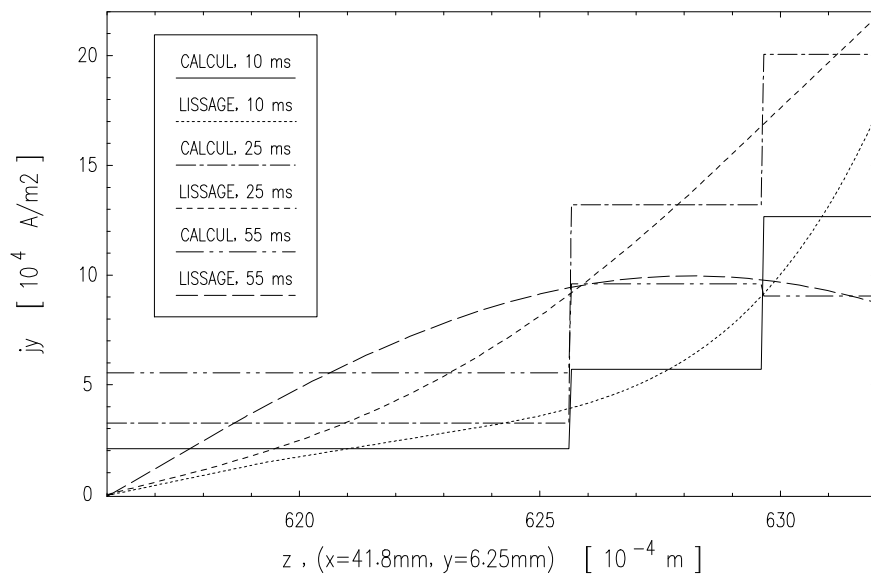


Fig. 11. Variations de la densité de courant induit le long de l'épaisseur de la plaque en direction du point  $P_2$ .

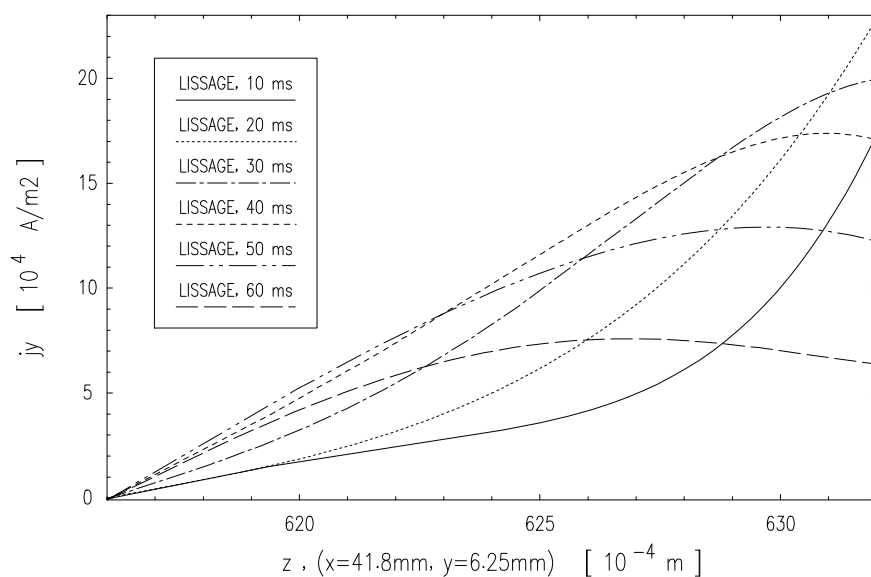


Fig. 12. Lissage de la variation de la densité de courant induit le long de l'épaisseur de la plaque en direction du point  $P_2$ .

Les figures 13a-b-c montrent les variations temporelles de la densité de courant induit calculée et mesurée sur les surfaces des plaques aux points P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub> et P<sub>3</sub>, respectivement. Les courants calculés, ainsi que les courants lissés spatialement, y sont représentés. Il apparaît que les formes et les valeurs des densités de courant sont très affectées par l'interpolation. Les allures des résultats lissés spatialement approchent les formes mesurées, excepté au point P<sub>1</sub> où la forme initiale, non lissée, est meilleure. Le tableau 2 compare les densités de courant induit calculées et mesurées au temps  $t = 17.5$  ms. C'est environ à cet instant que les courants induits atteignent leur maximum.

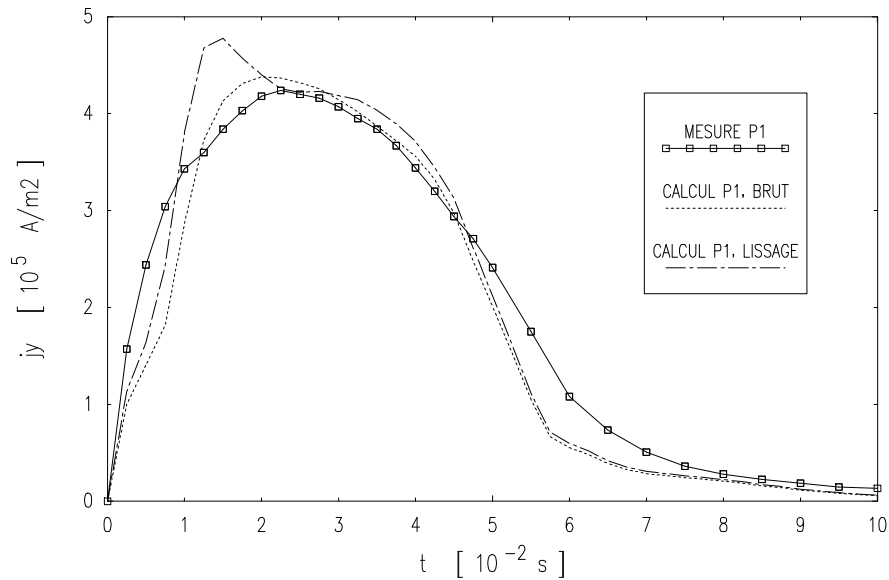


Fig. 13a. Variation temporelle de la densité de courant induit sur la surface de la plaque au point P<sub>1</sub>.

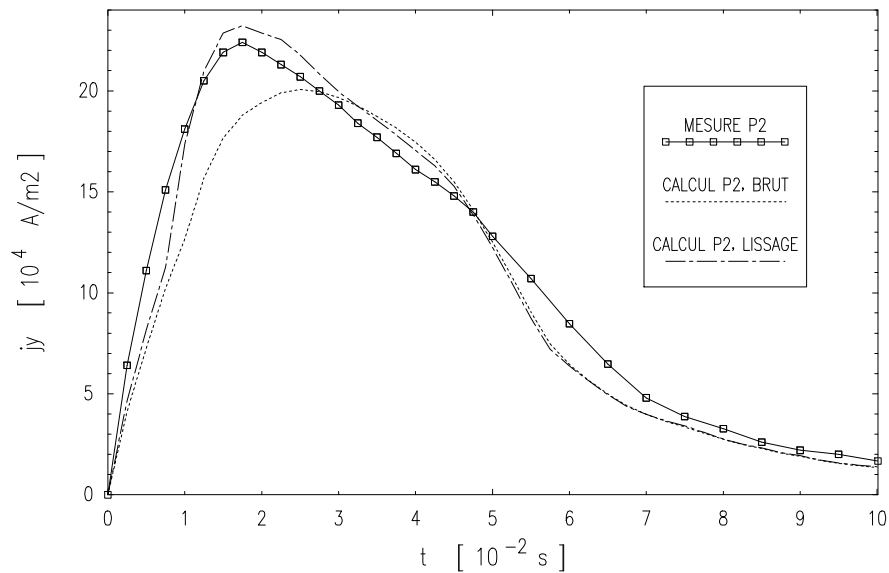


Fig. 13b. Variation temporelle de la densité de courant induit sur la surface de la plaque au point P<sub>2</sub>.

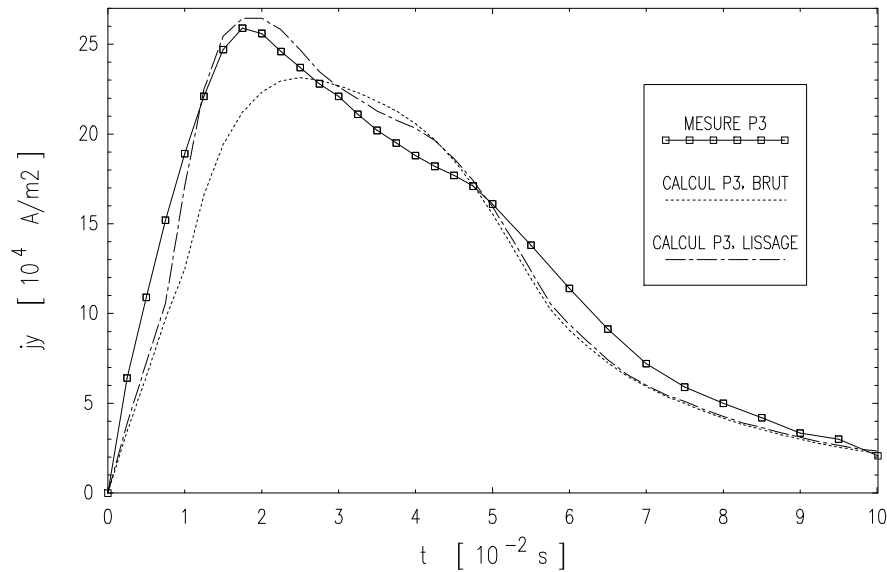


Fig. 13c. Variation temporelle de la densité de courant induit sur la surface de la plaque au point P<sub>3</sub>.

Point examiné	Densité de courant induit $ j_y $ en $t = 17.5$ ms ( $\times 10^4$ A/m <sup>2</sup> )		
	calcul, initial	calcul, lissage spatial	mesure
P <sub>1</sub>	4.31 (6.9 %)	4.57 (13. %)	4.03
P <sub>2</sub>	1.88 (16. %)	2.32 (3.6 %)	2.24
P <sub>3</sub>	2.12 (18. %)	2.64 (1.9 %)	2.59

Tableau 2. Comparaison entre les densités de courant induit calculées et mesurées sur la surface des plaques aux points P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub> en  $t = 17.5$  ms (les écarts entre ces valeurs sont donnés entre parenthèses).

### 3.4 Conclusions

Ce problème magnétodynamique transitoire non linéaire a nécessité l'application de plusieurs méthodes numériques pour mener à bien sa résolution. Le phénomène transitoire a demandé une discrétisation temporelle par la méthode d'Euler implicite. Le caractère non linéaire des matériaux a conduit à un système d'équations non linéaires dont la résolution a pu être réalisée grâce à la méthode de Newton-Raphson, suivie de la méthode ICCG. Une méthode d'approximation de la courbe de saturation des matériaux par des splines cubiques a également été utilisée. Le traitement de l'inducteur s'est fait par l'intermédiaire d'une coupure.

Le maillage du domaine étudié a été réalisé afin que sa finesse soit plus élevée dans les régions où les variations du champ sont plus importantes, en particulier dans le voisinage de l'entrefer. Il serait cependant intéressant d'avoir recours à des techniques automatiques d'adaptation de maillage afin de pouvoir contrôler quantitativement la finesse nécessaire dans certaines régions. De plus, le développement d'éléments d'ordre supérieur devrait contribuer à une amélioration de précision, en particulier pour l'approximation de la densité de courant.

Le bon accord entre les résultats du calcul et ceux de la mesure contribue à la validation des méthodes appliquées. Nous voudrions faire remarquer que le laboratoire qui a réalisé les mesures compte en effectuer de nouvelles afin d'élucider les causes de certaines différences entre calcul et mesure, obtenues par plusieurs codes de calcul internationaux (Nakata, Takahashi & Fujiwara, 1992).



# Conclusions générales

---

Nos recherches ont consisté en la modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires. Cette modélisation doit permettre le calcul de la répartition tridimensionnelle des champs électromagnétiques dans les dispositifs électrotechniques afin de faciliter leurs phases de conception et d'optimisation.

Nous avons étudié les différentes théories qui interviennent dans la modélisation des problèmes physiques, tant du point de vue continu que discret. Il s'agit en particulier de l'étude des espaces fonctionnels continus et discrets, des formulations fortes et faibles, de la discrétisation d'un domaine de l'espace à trois dimensions (maillage), de la méthode des éléments finis et de la définition générale des éléments finis liés à un maillage. Une telle étude a permis de dégager et de créer des outils d'un grand intérêt dans le domaine de la modélisation des problèmes électromagnétiques. C'est ainsi que nous avons développé, sur le plan théorique, une famille d'éléments finis spéciaux qui possède des propriétés remarquables pour la discrétisation des champs électromagnétiques, et même des potentiels dont ils peuvent dériver. Il s'agit d'éléments mixtes construits sur un assemblage de trois types d'éléments géométriques, des tétraèdres, des hexaèdres et des prismes à base triangulaire. Ils font apparaître des degrés de liberté naturels, associés aux noeuds, aux arêtes, aux facettes et aux volumes du maillage. Sur le plan numérique, et comme le prévoyait la théorie, ces éléments se sont révélés d'une grande qualité lors de leur utilisation dans diverses formulations discrètes en magnétostatique et en magnétodynamique (bon conditionnement numérique, conditions d'interface rigoureuses et respectées, ...).

Chacun des champs scalaires ou vectoriels qui intervient dans les formulations a sa place dans un des espaces d'approximation défini.

Les **potentiels scalaires** sont approximés par des **éléments nodaux**, dont les degrés de liberté sont les valeurs des potentiels aux noeuds du maillage. Le **champ magnétique**, le **champ électrique** et les **potentiels vecteur magnétiques ou électriques** sont approximés par des **éléments d'arête**. Les degrés de liberté associés sont les circulations de ces champs le long des arêtes du maillage. La continuité de la composante tangentielle de ces champs vectoriels reste assurée au niveau discret. De plus, l'image par le gradient de l'espace d'approximation des éléments nodaux est incluse dans l'espace couvert par les éléments d'arête. Ainsi, lorsqu'un des champs vectoriels précédents dérive d'un potentiel scalaire, la relation qui a lieu entre ce champ et le champ scalaire correspondant peut être satisfaite exactement. De plus, le traitement des domaines multiples connexes et des **potentiels multivoques** peut être effectué de façon exacte, tout aussi rigoureuse.

C'est l'ensemble de ces propriétés qui fait de l'espace des éléments d'arête un espace d'approximation d'accueil naturel pour tous les champs vectoriels, physiques ou potentiels, caractérisés par une continuité tangentielle et dont la circulation le long d'un contour est directement liée à des notions physiques, telles que celles de flux.

Les notions de flux apparaissent naturelles dans l'espace des **éléments de facette**. Ces derniers permettent d'approximer l'**induction magnétique** et la **densité de courant**. Les

degrés de liberté associés sont les flux de ces champs au travers des facettes du maillage. La continuité de la composante normale de ces champs est assurée au niveau discret, de même que la conservation de leur flux (flux magnétique ou courant). De plus, l'espace des éléments de facette contient l'image par le rotationnel de l'espace des éléments d'arête. Ainsi, lorsque l'induction magnétique dérive d'un potentiel vecteur magnétique, ou lorsque la densité de courant dérive d'un potentiel vecteur électrique, les relations qui ont lieu entre ces champs discrets sont vérifiées exactement. De plus, la propriété qui lie l'espace des éléments d'arête à l'espace des éléments de facette conduit naturellement à une **condition de jauge**, qui assure l'unicité des champs dans l'espace des éléments d'arête. Cette jauge est basée sur des notions topologiques, telles que celles d'arbre et de co-arbre, et peut s'exprimer de façon rigoureuse au niveau discret.

Un des avantages de la suite des éléments finis développés est qu'ils permettent d'interpoler des champs vectoriels sans imposer leur continuité totale, mais seulement celle de leur composante tangentielle ou normale. Leur champ d'application est par conséquent plus général que celui des éléments finis classiques, nodaux. Ces derniers ne peuvent généralement assurer qu'une continuité totale. Ils ne peuvent par conséquent s'appliquer qu'aux potentiels vecteur magnétiques et électriques qui peuvent être continus. Ces derniers doivent alors être unis à des potentiels scalaires pour conduire aux champs physiques qui en dérivent (formulations  $\mathbf{t}-\omega$  et  $\mathbf{a}-v$ ). Le rôle des potentiels scalaires complémentaires est justement de permettre une discontinuité des champs physiques, en assurant uniquement la continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{h}$  avec la formulation  $\mathbf{t}-\omega$  et de la composante normale de  $\mathbf{b}$  avec la formulation  $\mathbf{a}-v$ .

Les formulations que nous avons développées en détail sont celles dont la discrétisation profite au maximum des avantages des éléments finis spéciaux définis. Il s'agit des **formulations  $\mathbf{h}-\phi$**  et en  $\mathbf{a}^*$ . La première formulation est basée sur l'utilisation du **champ magnétique  $\mathbf{h}$**  dans les matériaux conducteurs, magnétiques ou non, où des courants induits sont susceptibles d'apparaître, et sur l'utilisation du **potentiel scalaire magnétique  $\phi$**  dans les matériaux non conducteurs. De plus, une technique spéciale de traitement des inducteurs a été développée et est basée sur la définition d'un champ source généralisé lié à une condition de jauge dans l'espace des éléments d'arête. La seconde formulation est basée sur la définition d'un **potentiel vecteur magnétique modifié  $\mathbf{a}^*$** , dont dérive l'induction magnétique, qui est une primitive temporelle du champ électrique dans les matériaux conducteurs et qui est lié à une condition de jauge dans les matériaux non conducteurs afin d'assurer son unicité (c'est encore la condition de jauge naturelle dans l'espace des éléments d'arête qui est utilisée). Il est clair que les autres formulations peuvent également être discrétisées dans l'espace des éléments finis spéciaux mais elles ont pour inconvénient d'ajouter une inconnue scalaire.

Sur base des formulations discrètes développées, nous avons mis au point un **logiciel de calcul de champ magnétique et de courants induits dans des structures tridimensionnelles**. Ces dernières peuvent comporter des matériaux magnétiques linéaires et non linéaires, c'est-à-dire saturables. Les matériaux peuvent être conducteurs ou non conducteurs. S'ils sont conducteurs, ils peuvent être le siège de courants imposés et de courants induits. Les **régimes dynamiques transitoires et sinusoïdaux** ainsi que le **régime statique** peuvent être traités.

Des problèmes-test internationaux, pour lesquels nous disposons soit d'une solution analytique, soit de résultats expérimentaux, ont été résolus. Pour chacun d'entre eux, le très bon accord entre le calcul et la mesure, ou la théorie, a permis de valider les différentes méthodes numériques implémentées. De plus, les caractéristiques principales des méthodes d'approximation ont pu être analysées, en particulier en ce qui concerne les vérifications



fortes et faibles de certaines relations et équations (conditions aux limites et d'interface, équations fortes et faibles), pour conclure à la qualité des éléments finis développés. Enfin, les différentes étapes qui interviennent dans la modélisation d'un problème sont mises en évidence. Des problèmes industriels peuvent maintenant être envisagés.

L'étude des éléments finis spéciaux nous a conduit à exposer des concepts encore très peu détaillés dans la littérature. Et c'est là une des originalités du travail d'exposer des concepts nouveaux, liés à d'autres notions mieux connues, pour ainsi constituer des bases solides particulièrement bien adaptées à la modélisation des problèmes de l'électromagnétisme. Ces bases ont certes donné lieu à l'étude de plusieurs formulations, mais leur robustesse, aux niveaux continu et discret, va permettre de les étendre à des modélisations de plus en plus complexes.

Les perspectives de recherches futures sont nombreuses et une forte motivation existe du fait de l'intérêt scientifique international que l'on y porte. Différents axes de recherches peuvent être envisagés.

Un premier axe concerne l'**adaptation de maillage**, c'est-à-dire son raffinement dans certaines régions, où les variations de champ sont importantes, et sa dilatation dans d'autres régions, où les variations de champ sont moins importantes. Une telle adaptation nécessite le développement de techniques d'estimation d'erreur.

Une amélioration de la précision peut également être obtenue en augmentant l'ordre d'approximation dans les éléments finis, c'est-à-dire en ajoutant des fonctions de base dans les espaces d'approximation (Nédélec, 1980, 1986 ; Wang, 1992 ; Webb & Forghani, 1993). Pour une même précision, un maillage réalisé à l'aide d'éléments d'ordre supérieur peut être moins fin mais en contrepartie le nombre relatif d'inconnues par élément est plus élevé, ce qui conduit alors à un compromis. Quelle que soit la technique utilisée, une meilleure précision va de pair avec une augmentation du nombre de degrés de liberté.

Il apparaît ainsi intéressant de développer des **éléments finis d'ordre supérieur**, tout en veillant à conserver les propriétés que vérifient les éléments déjà définis, d'ordre I.

Un autre axe de recherche vise au calcul des **forces électromagnétiques**, avant d'aborder l'étude du mouvement et des déformations. Une méthode basée sur le principe des travaux virtuels semble très bien adaptée aux éléments d'arête (Bossavit, 1990d, 1992a, 1992b ; Ren & Bossavit, 1991 ; Ren & Razek, 1992). Ces éléments permettent d'exprimer la coénergie magnétique ou l'énergie magnétique en termes de circulation du champ magnétique le long des arêtes ou en termes du flux de l'induction magnétique à travers les facettes suivant le type de formulation utilisée. La force magnétique peut être obtenue en dérivant la coénergie ou l'énergie magnétique par rapport aux paramètres de position, en maintenant constant respectivement la circulation du champ magnétique ou le flux magnétique. D'autres méthodes sont également envisageables, telle que la méthode du tenseur de Maxwell (Müller, 1990 ; Ren, 1994 ; Ren & Razek, 1990a).

Dans le but de représenter correctement les domaines non bornés, il serait intéressant de développer des techniques adaptées, telles que l'utilisation d'éléments infinis ou la méthode des éléments frontière. En particulier, il existe des méthodes de transformation géométrique qui ramènent un espace non borné à un espace borné, qu'il s'agit alors de mailler (Brunotte, Meunier & Imhoff, 1992 ; Freeman & Lowther, 1988, 1989 ; Imhoff, Meunier & Sabonnadière, 1990 ; Lowther, Freeman & Forghani, 1989). Ces méthodes ont l'avantage de maintenir le caractère creux de la matrice du système d'équations algébriques, contrairement à la méthode des éléments frontière.

Il est également intéressant de développer des éléments finis spéciaux adaptés à la modélisation de régions minces ou de régions présentant un effet pelliculaire prononcé (Guerin, 1992 ; Krähenbühl, 1990 ; Ren & Razek, 1990c ; Rodger & al., 1991 ; Rodger & Atkinson, 1988 ; Rodger, Leonard & Lai, 1992). Dans ces cas presque limites, les éléments finis volumiques devraient être en nombre trop important pour couvrir les régions minces. De même, des problèmes de mauvais conditionnement numérique pourraient survenir du fait d'un trop fort allongement ou d'une trop forte déformation de ces éléments. Une solution consiste à modéliser les régions minces à l'aide d'éléments surfaciques et à supposer connue une variation des grandeurs physiques suivant l'épaisseur de ces régions, l'épaisseur réelle de la région mince étant prise en compte lors de l'intégration des termes matriciels.

# Notations et formules

---

## Notations

### Conventions de numérotation

Un **chapitre** est numéroté en chiffres romains, une **partie** est désignée par une lettre, une **section** par des chiffres arabes, une **sous-section** à l'aide de chiffres arabes à la suite de ceux de la section, et ainsi de suite.

Les **formules**, les **figures** et les **tableaux** sont numérotés par section. Une référence à une formule extérieure à une section courante est composée de la numérotation de la section contenant la formule, suivie par le numéro local de cette formule. Lorsque cette référence se fait au sein d'un même chapitre, ou d'une même partie, la numérotation de ce chapitre, ou de cette partie, est omise. Par exemple :

- la numérotation 'II.A.3.1' signifie "chapitre II, partie A, section 3, sous-section 1" ;
- la numérotation de formule (12) est relative à la formule (12) dans la section courante ;
- la numérotation de formule (2.12) est relative à la formule (12) dans la section 2 de la partie courante, ou à défaut du chapitre courant ;
- la numérotation de formule (IV.B.2.12) est relative à la formule (12) dans la section 'IV.B.2', extérieure au chapitre courant.

### 1. Généralités

$\stackrel{\text{def}}{=}$	égalité de définition
$\Rightarrow$	signe d'implication
$\forall$	quel que soit
$\exists$	il existe
i.e.	c'est-à-dire
$\emptyset$	ensemble vide
$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker (0 si $i \neq j$ , 1 si $i = j$ , $i$ et $j \in \mathbb{N}$ )

### 2. Notations relatives aux ensembles et aux applications

Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$ , trois ensembles, et  $A$ , une partie de  $E$ . On note :

$\{x \in E ; P\}$	le sous-ensemble de $E$ formé des éléments $x$ vérifiant la propriété $P$
$E \setminus A$ ou $A^C$	le complémentaire de $A$ dans $E$ (l'ensemble $E$ est sous-entendu dans la seconde notation ; il n'y a cependant pas d'ambiguïté si on limite cette notation au cas où $E$ est l'ensemble global d'étude)

$x \in E \rightarrow f(x) \in F$  l'application (ou fonction) de  $E$  dans  $F$  qui, à l'élément  $x$  de  $E$ , fait correspondre son image  $f(x)$  dans  $F$ . Cette application est dite de type  $E \rightarrow F$  ( $E$  dans  $F$ ).

$f|_A$  la restriction de  $f : E \rightarrow F$  au sous-ensemble  $A$  de  $E$

### 3. Notations relatives à la topologie

$\overline{A}$  la fermeture de  $A$

$\overset{\circ}{A}$  l'intérieur de  $A$

$\partial A$  ou  $\Gamma$  la frontière de  $A$

### 4. Notations relatives aux nombres

Soit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Dans  $\mathbb{R}^3$ , nous notons  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ .

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  le produit scalaire de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  appartenant à  $\mathbb{R}^3$

$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$  le produit vectoriel de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  appartenant à  $\mathbb{R}^3$

$|\mathbf{x}|$  la norme euclidienne de  $\mathbf{x} : |\mathbf{x}| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$

### 5. Notations relatives aux espaces de fonctions

Soit  $\Omega$ , un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ . On note :

$C(\Omega)$  l'espace des fonctions continues sur  $\Omega$

$L^2(\Omega)$  l'espace des fonctions (scalaires) intégrables sur  $\Omega$  telles que leur carré soit également intégrable

$L^2(\Omega)$  l'espace des fonctions vectorielles intégrables sur  $\Omega$  telles que leur carré soit également intégrable

Soient  $F$  et  $G$ , deux espaces fonctionnels. On note :

$F \oplus G$  la somme directe de  $F$  et  $G$

$F \otimes G$  le produit tensoriel de  $F$  et  $G$

$F^\perp$  l'orthogonal de  $F$

$\dim(F)$  la dimension algébrique de  $F$

### 6. Notations relatives aux opérateurs linéaires

Soit  $A$ , une application linéaire (ou opérateur linéaire) définie dans  $X$ , à valeurs dans  $Y$ . On note :

$\text{dom}(A)$  le domaine de  $A$

$\text{ker}(A)$  le noyau de  $A$

$\text{cod}(A)$  ou  $\text{Im}(A)$  l'image de  $A$

$A^*$  l'adjoint de  $A$

### 7. Notations relatives aux fonctions

Soit  $f$ , une fonction sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , éventuellement vectorielle (alors notée  $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ ). On note :

$\frac{\partial f}{\partial x}$  ou  $\partial_x f$  la dérivée partielle de  $f$  par rapport à la variable  $x$

$\frac{\partial^i f}{\partial x^i}$ ou $\partial_x^i f$	la dérivée partielle d'ordre $i$ , de $f$ par rapport à la variable $x$
$\text{grad } f$ ou $\nabla f$	le gradient de $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \nabla f \stackrel{\text{def}}{=} (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) ; n=3$
$\text{div } \mathbf{f}$ ou $\nabla \cdot \mathbf{f}$	la divergence de $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 :$ $\nabla \cdot \mathbf{f} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z ; n=3$
$\text{rot } \mathbf{f}$ ou $\nabla \wedge \mathbf{f}$	le rotationnel de $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 :$ $\nabla \wedge \mathbf{f} \stackrel{\text{def}}{=} (\partial_y f_z - \partial_z f_y, \partial_z f_x - \partial_x f_z, \partial_x f_y - \partial_y f_x) ; n=3$
$\Delta f$	le laplacien de $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} :$ $\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \cdot \nabla f = \partial_x^2 f_x + \partial_y^2 f_y + \partial_z^2 f_z ; n=3$
$f _{\partial\Omega}$ ou $f _{\Gamma}$	la trace de $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sur $\partial\Omega$
$\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} _{\partial\Omega}$	la trace normale de $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ sur $\partial\Omega$
$\mathbf{n} \wedge \mathbf{f} _{\partial\Omega}$	la trace tangentielle de $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ sur $\partial\Omega$
$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} _{\partial\Omega}$ ou $\mathbf{n} \cdot \text{grad } f _{\partial\Omega}$	la trace normale de $\text{grad } f$ sur $\partial\Omega$
$\delta$ ou $\delta(x)$	la distribution de Dirac

## 8. Notations relatives aux grandeurs physiques

Quelques grandeurs physiques, couramment utilisées, sont données ci-après, avec leurs unités :

$\mathbf{h}$	le champ magnétique (A/m)
$\mathbf{b}$	l'induction magnétique (T, i.e. tesla)
$\mathbf{e}$	le champ électrique (V/m)
$\mathbf{d}$	le champ de déplacement électrique (C/m <sup>2</sup> )
$\mathbf{j}$	la densité de courant de conduction (A/m <sup>2</sup> )
$\phi$	un potentiel scalaire magnétique (A)
$\mathbf{a}$	un potentiel vecteur magnétique (Wb/m)
$\rho_v$	la densité volumique de charge électrique (C/m <sup>3</sup> )
$\mu$	la perméabilité magnétique (H/m)
$\varepsilon$	la permittivité électrique (F/m)
$\omega$	la pulsation d'un signal sinusoïdal ( $\omega=2\pi f$ , où $f$ est la fréquence, en Hz)

## 9. Notations relatives au maillage

Soit  $M_h$ , ou  $M_h(\Omega)$ , le maillage d'un domaine  $\Omega$ . Les ensembles d'entités géométriques de ce maillage sont notés :

$N$	l'ensemble des noeuds de $M_h$
$A$	l'ensemble des arêtes de $M_h$
$F$	l'ensemble des facettes de $M_h$
$V$	l'ensemble des volumes, ou éléments géométriques, de $M_h$

Leurs dimensions algébriques sont notées  $\#N$ ,  $\#A$ ,  $\#F$ ,  $\#V$ .

Un sous-ensemble d'entités d'un sous-ensemble de  $M_h(\Omega)$  est noté à l'aide du même indice que le sous-ensemble de  $\Omega$  correspondant ; par exemple,  $N_c$  est l'ensemble des noeuds de  $\Omega_c$ , avec  $N_c \subset N$  et  $\Omega_c \subset \Omega$ .

## Formules

### 1. Formules d'analyse vectorielle

Soient  $f$  et  $g$ , des champs scalaires, et  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$ , des champs de vecteurs, tous définis dans un ouvert  $\Omega$ . On a les identités suivantes :

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \cdot \mathbf{a} + \nabla \cdot \mathbf{b}$$

$$\nabla \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \wedge \mathbf{a} + \nabla \wedge \mathbf{b}$$

$$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$$

$$\nabla \cdot (f \mathbf{a}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{a} + f (\nabla \cdot \mathbf{a})$$

$$\nabla \wedge (f \mathbf{a}) = (\nabla f) \wedge \mathbf{a} + f (\nabla \wedge \mathbf{a})$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{b} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) + \mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{b})$$

$$\nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{b})$$

$$\nabla \wedge (\nabla f) = 0 \quad (\text{i.e., le rotationnel d'un gradient est nul})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{a}) = 0 \quad (\text{i.e., la divergence d'un rotationnel est nul})$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) = \dots \quad (\text{produit mixte})$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

### 2. Théorèmes fondamentaux d'analyse vectorielle

Soient  $\Omega$ , un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , et  $\partial\Omega$ , sa frontière. Nous notons  $\mathbf{n}$  le champ des vecteurs unitaires normaux à  $\partial\Omega$  et orientés vers l'extérieur de  $\Omega$ . Soit  $\Sigma$ , une surface dans  $\Omega$ , de contour  $\partial\Sigma$ , et soient  $f$ , du type  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $\mathbf{a}$ , du type  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ . On a les formules intégrales suivantes :

$$\int_{\Omega} \text{grad } f \, dv = \oint_{\partial\Omega} f \mathbf{n} \, ds, \quad \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{a} \, dv = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \wedge \mathbf{a} \, ds,$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{a} \, dv = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \, ds \quad (\text{théorème de la divergence}),$$

$$\int_{\Sigma} (\mathbf{n} \wedge \text{grad } f) \, ds = \oint_{\partial\Sigma} f \, dl, \quad \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{a} \, ds = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{a} \cdot dl \quad (\text{théorème de Stokes})$$

# Bibliographie

---

- ABRAMOWITZ M. & STEGUN I. A. (1972), *Handbook of mathematical functions*, Dover.
- ALBANESE R. & RUBINACCI G. (1988), *Integral formulation for 3D eddy-current computation using edge elements*, IEE Proceedings, Vol. 135, Pt. A, No. 7, pp. 457-462.
- ALBANESE R. & RUBINACCI G. (1990a), *Magnetostatic field computations in terms of two-component vector potentials*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 29, pp. 515-532.
- ALBANESE R. & RUBINACCI G. (1990b), *Treatment of multiply connected regions in two-component electric vector potential formulations*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 2, pp. 650-653.
- ALBANESE R. & RUBINACCI G. (1992), *Solution of TEAM Workshop problem 10*, in Third International TEAM Workshop (Albanese R., Coccorese E., Crutzen Y. & Molfino P., eds.), No. EUR 14173 EN, pp. 27-36.
- BASS J. (1968a), *Cours de mathématiques, Tome I*, Masson et Cie, Paris.
- BASS J. (1968b), *Cours de mathématiques, Tome II*, Masson et Cie, Paris.
- BASS J. (1971), *Cours de mathématiques, Tome III*, Masson et Cie, Paris.
- BEDROSIAN G., CHARI M. V. K. & JOSEPH J. (1993), *Comparison of full and reduced potential formulations for low-frequency applications*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, No. 2, pp. 1321-1324.
- BIRO O. (1988), *Use of a two-component vector potential for 3-D eddy current calculations*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No. 1, pp. 102-105.
- BIRO O. & PREIS K. (1989), *On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 25, No. 4, pp. 3145-3159.
- BIRO O. & PREIS K. (1990), *Finite element analysis of 3-D eddy currents*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 2, pp. 418-423.
- BIRO O., PREIS K., RENHART W., RICHTER K. R. & VRISK G. (1990), *Performance of different vector potential formulations in solving multiply connected 3-D eddy current problems*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 2, pp. 438-441.
- BIRO O., PREIS K., VRISK G., RICHTER K. R. & TICAR I. (1993), *Computation of 3-D magnetostatic fields using a reduced scalar potential*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, No. 2, pp. 1329-1332.
- BOITE R. & NEIRYNCK J. (1976), *Théorie des réseaux de Kirchhoff*, Traité d'électricité de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Volume IV, Editions Georgis, Suisse.
- BOSSAVIT A. (1981), *On the numerical analysis of eddy-current problems*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., No. 27, pp. 303-318.
- BOSSAVIT A. (1982), *On finite elements for the electricity equation*, in The Mathematics of Finite Elements and Applications IV (J.R. Whiteman, ed.), Academic Press (London), pp. 85-92.
- BOSSAVIT A. (1984a), *Introduction théorique à "TRIFOU"*, Actes du colloque Modélisation et Calcul en Electromagnétisme et Applications (MODELEC), pp. 81-96.
- BOSSAVIT A. (1984b), *Eddy-currents in a system of moving conductors*, in The Mechanical Behavior of Electromagnetic Solid Continua (G.A. Maugin, ed.), North-Holland (Amsterdam), pp. 345-350.
- BOSSAVIT A. (1984c), *Two dual formulations of the 3-D eddy-currents problem*, The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL), pp. 103-116.
- BOSSAVIT A. (1986a), *Traitement du potentiel scalaire magnétique extérieur dans le cas d'un domaine multiplement connexe. Application au code TRIFOU*, E.D.F. Bulletin de la Direction des Etudes et des Recherches, Série C, Mathématiques, Informatique, No. 1, pp. 61-75.
- BOSSAVIT A. (1986b), *"TRIFOU" et la magnétostatique*, E.D.F. Bulletin de la Direction des Etudes et des Recherches, Série C, Mathématiques, Informatique, No. 2, pp. 101-109.

- BOSSAVIT A. (1986c), *Le calcul des courants de Foucault en trois dimensions par éléments finis et éléments de frontière associés*, Revue Roumaine des Sciences et Techniques - Electrotechnique et Energétique, Vol. 31, No. 4, pp. 365-377.
- BOSSAVIT A. (1986d), *"Mixed" finite elements ("edge elements") in 3-D eddy-currents computations*, COMPUMAG, Graz, pp. 16-19.
- BOSSAVIT A. (1986e), *Le chauffage par induction des pièces d'acier : aperçus théoriques*, Revue Générale d'Electricité, No. 1, pp. 10-32.
- BOSSAVIT A. (1987), *On the condition "h normal to the wall" in magnetic field problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 1541-1550.
- BOSSAVIT A. (1988a), *Le calcul des courants de Foucault en trois dimensions en présence de corps magnétiques parfaits à l'aide du code "Trifou" : le cas simplement connexe*, E.D.F. Bulletin de la Direction des Etudes et des Recherches, Série C, Mathématiques, Informatique, No. 1, pp. 59-76.
- BOSSAVIT A. (1988b), *Whitney forms : a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism*, IEE Proceedings, Vol. 135, Pt. A, No. 8, pp. 493-499.
- BOSSAVIT A. (1988c), *Magnetostatic problems in multiply connected regions : some properties of the curl operator*, IEE Proceedings, Vol. 135, Pt. A, No. 3, pp. 179-187.
- BOSSAVIT A. (1988d), *A rationale for "edge-elements" in 3-D fields computations*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No. 1, pp. 74-79.
- BOSSAVIT A. (1988e), *Mixed finite elements and the complex of Whitney forms*, The Mathematics of Finite Elements and Applications VI, Academic Press, pp. 137-144.
- BOSSAVIT A. (1988f), *Le calcul des courants de Foucault, en dimension 3, en présence de corps à haute perméabilité magnétique*, Revue de Physique Appliquée, No. 23, pp. 1147-1159.
- BOSSAVIT A. (1989a), *Calcul des courants induits et des forces électromagnétiques dans un système de conducteurs mobiles*, Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, Vol. 23, No. 2, pp. 235-259.
- BOSSAVIT A. (1989b), *Un nouveau point de vue sur les éléments mixtes*, Bulletin de la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, No. 20, pp. 23-35.
- BOSSAVIT A. (1989c), *Edge-elements for scattering problems*, E.D.F. Bulletin de la Direction des Etudes et des Recherches, Série C, Mathématiques, Informatique, No. 2, pp. 17-33.
- BOSSAVIT A. (1989d), *Modèles et modélisation en électrotechnique*, Techniques de l'Ingénieur, traité Généralité, No. A 1 207, pp. 1-25.
- BOSSAVIT A. (1989e), *Magnetostatics with scalar potentials in multiply connected regions*, IEE Proceedings, Vol. 136, Pt. A, No. 5, pp. 260-261.
- BOSSAVIT A. (1990a), *A numerical approach to transient 3D non-linear eddy-current problems*, Applied Electromagnetics in Materials, No. 1, pp. 65-75.
- BOSSAVIT A. (1990b), *Dynamique d'un système de conducteurs reliés à des sources de courants. Application au "problème du missile"*, E.D.F. Bulletin de la Direction des Etudes et des Recherches, Série C, Mathématiques, Informatique, No. 2, pp. 1-9.
- BOSSAVIT A. (1990c), *Eddy-currents and forces in deformable conductors*, Mechanical Modelling of New Electromagnetic Materials, pp. 235-242.
- BOSSAVIT A. (1990d), *Forces in magnetostatics and their computation*, Journal of Applied Physics, Vol. 67, No. 9, pp. 5812-5814.
- BOSSAVIT A. (1990e), *Introduction théorique aux méthodes mixtes en électromagnétisme : la complémentarité en magnéto-statique*, Cours 'Trifou', pp. 1-33.
- BOSSAVIT A. (1990f), *Solving Maxwell's equations in a closed cavity, and the question of spurious modes*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 2, pp. 702-705.
- BOSSAVIT A. (1990g), *Le calcul des courants de Foucault en dimension 3, avec le champ électrique comme inconnue. I : Principes*, Revue de Physique Appliquée, No. 25, pp. 189-197.
- BOSSAVIT A. (1990h), *h-oriented and b-oriented methods in problem 13*, Proceeding Toronto ACES/TEAM Workshop, 25-26 octobre 1990.
- BOSSAVIT A. (1991a), *Sur les représentations des champs par potentiels et leur rôle dans les méthodes intégrales*, E.D.F. Bulletin de la Direction des Etudes et des Recherches, Série C, Mathématiques, Informatique, No. 1, pp. 39-51.



- BOSSAVIT A. (1991b), *Mixed elements and a two-phase free boundary problem in magnetostatics*, E.D.F. Bulletin de la Direction des Etudes et des Recherches, Série C, Mathématiques, Informatique, No. 3, pp. 1-10.
- BOSSAVIT A. (1991c), *Notions de géométrie différentielle pour l'étude des courants de Foucault et des méthodes numériques en électromagnétisme*, in Méthodes numériques en électromagnétisme, Editions Eyrolles, pp. 1-147.
- BOSSAVIT A. (1992a), *Edge-element computation of the force field in deformable bodies*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, No. 2, pp. 1263-1266.
- BOSSAVIT A. (1992b), *On local computation of the electromagnetic force field in deformable bodies*, International Journal of Applied Electromagnetics in Materials, No. 2, pp. 333-343.
- BOSSAVIT A. (1993), *A theoretical approach to the question of biological effects of low frequency fields*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, No. 2, pp. 1399-1402.
- BOSSAVIT A. & MAYERGOYZ I. (1989), *Edge-elements for scattering problems*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 25, No. 4, pp. 2816-2821.
- BOSSAVIT A. & VÉRITÉ J.-C. (1982), *A mixed FEM-BIEM method to solve 3-D eddy-current problems*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 18, No. 2, pp. 431-435.
- BOSSAVIT A. & VÉRITÉ J.-C. (1983), *The "TRIFOU" code : Solving the 3-D eddy currents problem by using  $h$  as state variable*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 19, No. 6, pp. 2465-2470.
- BOSSAVIT A. & VÉRITÉ J.-C. (1985), *Modélisation d'une machine sans fer avec le code Trifou*, Revue Générale d'Electricité, No. 3, pp. 227-232.
- BOULLAULT F. (1992), *Formulations magnétiques 3D pour la résolution des équations de la magnétodynamique*, Revue Générale d'Electricité, No. 2, pp. 17-23.
- BOULLAULT F., REN Z. & RAZEK A. (1990), *Calculation of 3D eddy current problems by an hybrid  $T-\Omega$  method*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 2, pp. 481.
- BREZIS H. (1983), *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris.
- BRUNOTTE X., MEUNIER G. & IMHOFF J.-F. (1992), *Modélisation éléments finis de l'infini par transformation*, Revue Générale d'Electricité, No. 2, pp. 51-58.
- CARPENTER C. J. (1977), *Comparison of alternative formulations of 3-dimensional magnetic-field and eddy-current problems at power frequencies*, IEE Proceedings, Vol. 124, No. 11, pp. 1026-1034.
- CHARI M. V. K. & SILVESTER P. P., eds. (1980), *Finite Element in Electrical and Magnetic Field Problems*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- CHARI M. V. K., BREDOSIAN G. & D'ANGELO J. (1993), *Finite element applications in electrical engineering*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, No. 2, pp. 1306-1314.
- CHARI M. V. K., KONRAD A., PALMO M. A. & D'ANGELO J. (1982), *Three-dimensional vector potential analysis for machine field problems*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 18, No. 2, pp. 436-446.
- CIRIC I. R. (1992), *Formulas for the magnetic field of polygonal cross section current coils*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, No. 2, pp. 1064-1067.
- COULOMB J.-L. & SABONNADIÈRE J.-C. (1985), *CAO en électrotechnique*, Hermes Publishing, Paris.
- DAHLQUIST G. & BJÖRCK A. (1974), *Numerical methods*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- DAUTRAY R. & LIONS J.-L. (1987a), *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Volume 1, Modèles physiques*, Masson, Paris.
- DAUTRAY R. & LIONS J.-L. (1987b), *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Volume 2, L'opérateur de Laplace*, Masson, Paris.
- DAUTRAY R. & LIONS J.-L. (1987c), *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Volume 3, Transformations, Sobolev, Opérateurs*, Masson, Paris.
- DAUTRAY R. & LIONS J.-L. (1988a), *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Volume 4, Méthodes variationnelles*, Masson, Paris.
- DAUTRAY R. & LIONS J.-L. (1988b), *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Volume 5, Spectre des opérateurs*, Masson, Paris.
- DAUTRAY R. & LIONS J.-L. (1988c), *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Volume 6, Méthodes intégrales et numériques*, Masson, Paris.

- DE COULON F. & JUFER M. (1978), *Introduction à l'électrotechnique*, Traité d'électricité de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Volume I, Editions Georgis, Suisse.
- DEMERDASH N. A. & WANG R. (1990), *Theoretical and numerical difficulties in 3D vector potential methods in finite element magnetostatic computations*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 5, pp. 1656-1658.
- DESCHAMPS G. A. (1970), *Exterior differential forms*, in Mathematics Applied to Physics, ch. III (G.A. Deschamps & al., eds.), Springer-Verlag (New York), pp. 111-161.
- DESCHAMPS G. A. (1981), *Electromagnetics and differential forms*, Proceeding of the IEEE, Vol. 69, No. 6, pp. 676-696.
- DHATT G. & TOUZOT G. (1981), *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine.
- DULAR P. (1990), *Répartition du champ magnétique tridimensionnel engendré par une structure quelconque*, Travail de fin d'études, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège.
- DULAR P., ADRIAENS J.-P., DELINCÉ F., GENON A., LEGROS W. & NICOLET A. (1991), *Vector potential boundary element method for three dimensional magnetostatic*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 27, No. 5, pp. 3808-3810.
- DULAR P., GENON A., HODY J.-Y., NICOLET A., MAUHIN J. & LEGROS W. (1993), *Coupling between edge finite elements, nodal finite elements and boundary elements for the calculation of 3-D eddy currents*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, No. 2, pp. 1470-1474.
- DULAR P., HODY J.-Y., NICOLET A., GENON A. & LEGROS W. (1994), *Mixed finite elements associated with a collection of tetrahedra, hexahedra and prisms*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, No. 5, pp. 2980-2983.
- DULAR P., NICOLET A., GENON A. & LEGROS W. (1993), *Solution of problem 10 with an h-formulation using edge finite elements built on hexahedra*, Proceedings of the Fourth International TEAM Workshop, Miami, Florida, O. A. Mohammed ed., pp. 23-25.
- DULAR P., NICOLET A., GENON A. & LEGROS W. (1995), *A discrete sequence associated with mixed finite elements and its gauge condition for vector potentials*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 31, No. 3, pp. 1356-1359.
- DURAND E. (1953), *Electrostatique et magnétostatique*, Masson, Paris.
- DURAND E. (1968), *Magnétostatique*, Masson, Paris.
- DWOYER D. L., HUSSAINI M. Y. & VOIGT R. G., eds. (1988), *Finite Elements, Theory and Application*, Springer-Verlag, Inc., New York.
- EMSON C. R. I. (1991), *Finite element methods applied to electromagnetic field problems*, in Méthodes numériques en électromagnétisme, Editions Eyrolles, pp. 149-274.
- EMSON C. R. I. & SIMKIN J. (1983), *An optimal method for 3-D eddy currents*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 19, No. 6, pp. 2450-2452.
- ENGELS H. (1980), *Numerical quadrature and cubature*, Academic Press.
- FIELD J. C. G. (1988), *Electromagnetism and semantics*, IEE Proceedings, Vol. 135, Pt. A, No. 8, pp. 523-527.
- FOURNET G. (1985), *Electromagnétisme à partir des équations locales*, Masson, Paris.
- FREEMAN E. M. & LOWTHER D. A. (1988), *A novel mapping technique for open boundary finite element solutions to Poissons equation*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No. 6, pp. 2934-2936.
- FREEMAN E. M. & LOWTHER D. A. (1989), *An open boundary technique for axisymmetric and three dimensional magnetic and electric field problems*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 25, No. 5, pp. 4135-4137.
- FUJIWARA K. (1992), *3-D magnetic field computation using edge element*, Proceedings of the 5th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering, 28-30 septembre, pp. 185-211.
- GALLAGHER R. H. (1976), *Introduction aux éléments finis*, Editions Pluralis.
- GARDIOL F. (1979), *Electromagnétisme*, Traité d'électricité de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Volume III, Editions Georgis, Suisse.
- GUERIN CH. (1992), *Rapport bibliographique et théorique sur les éléments spéciaux (modélisation des régions minces)*, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble (URA CNRS 355).
- HAMMOND P. (1981), *Energy Methods in Electromagnetism*, Oxford University Press, Oxford.
- HAMMOND P. (1986), *Electromagnetism for Engineers, An Introductory Course*, Pergamon Press, Ltd.

- HARROLD C. S. & SIMKIN J. (1985), *Cutting multiply connected domains*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 21, No. 6, pp. 2495-2498.
- HUEBNER K. H. (1975), *The Finite Element Method for Engineers*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- IMHOFF J.-F., MEUNIER G. & SABONNADIÈRE J.-C. (1990), *Finite element modeling of open boundary problems*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 2, pp. 588-591.
- INGARDEN R. S. & JAMIOLKOWSKI A. (1985), *Classical electrodynamic*, Elsevier.
- IRONS B. & AHMAD S. (1986), *Techniques of Finite Elements*, Ellis Horwood, Ltd.
- ITO M., TAJIMA F. & KANAZAWA H. (1990), *Evaluation of force calculating methods*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 5, pp. 1035-1038.
- JILES D. (1991), *Magnetism and magnetic materials*, Chapman and Hall.
- JOHNSON C. (1987), *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Cambridge University Press, Cambridge.
- JUFER M. (1985), *Transducteurs électromécaniques*, Traité d'électricité de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Volume IX, Presses polytechniques romandes, Suisse.
- KAMEARI A. (1988a), *Three dimensional eddy current calculation using finite element method with A-V in conductor and  $\Omega$  in vacuum*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No. 1, pp. 118-121.
- KAMEARI A. (1988b), *Results for benchmark calculations of problem 4 (the FELIX brick)*, International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL), Vol. 7, No. 1, pp. 65-80.
- KAMEARI A. (1990), *Calculation of transient 3D eddy current using edge elements*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 2, pp. 466-469.
- KLADAS A. G. & TEGOPOULOS J. A. (1992), *A new scalar potential formulation for 3-D magnetostatics necessitating no source field calculation*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, No. 2, pp. 1103-1106.
- KOTIUGA P. R. (1987), *On making cuts for magnetic scalar potentials in multiply connected regions*, Journal of Applied Physics, Vol. 61, No. 8, pp. 3916-3918.
- KOTIUGA P. R. (1988), *Toward an algorithm to make cuts for magnetic scalar potentials in finite element meshes*, Journal of Applied Physics, Vol. 63, No. 8, pp. 3357-3359.
- KOTIUGA P. R. (1989), *An algorithm to make cuts for magnetic scalar potentials in tetrahedral meshes based on the finite element method*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 25, No. 5, pp. 4129-4131.
- KOTIUGA P. R. (1990), *Magnetostatics with scalar potentials in multiply connected regions*, IEE Proceedings, Vol. 137, Pt. A, No. 4, pp. 231-232.
- KRÄHENBÜHL L. (1990), *A theory of thin layer in electrical engineering, Application to eddy current calculation inside a shell using the BIE software PHI3D*, Fourth International Symposium, IGTE, Gratz, 10-12 octobre.
- KRAWCZYK A. & TEGOPOULOS J. A. (1993), *Numerical modelling of eddy currents*, Oxford University Press.
- LAFARA R. L. (1973), *Computer methods for science and engineering*, Hayden Book Company, Inc., New Jersey.
- LAMAUDIÈRE J.-F. (1991), *Compte rendu de validation de la version transitoire de TRIFOU sur le problème n°4 du TEAM Workshop*, Rapport interne d'Electricité de France, Direction des Etudes et Recherches, Service Informatique et Mathématiques Appliquées, Département Mécanique et Modèles Numériques, No. 773-07.
- LOWTHER D. A., FREEMAN E. M. & FORGHANI B. (1989), *A sparse matrix open boundary method for finite element analysis*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 25, No. 4, pp. 2810-2812.
- MAGELE CH., STÖGNER H. & PREIS K. (1988), *Comparison of different finite element formulations for 3D magnetostatic problems*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No. 1, pp. 31-34.
- MAYERGOYZ I. D., CHARI M. V. K. & D'ANGELO J. (1987), *A new scalar potential formulation for three-dimensional magnetostatic problems*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 23, No. 6, pp. 3889-3894.
- MOHAMMED O. A. & ÜLER F. G. (1991), *3-D finite element time-varying fields and eddy currents in nonlinear thin steel channels*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 27, No. 5, pp. 4008-4011.
- MOHAMMED O. A., ÜLER F. G. & MING Z. (1990), *3-D finite element transient field and eddy current computations in nonlinear thin steel plates over a coil*, The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL), Supplement A, pp. 269-271.
- MORSE PH. M. & FESHBACH H. (1953a), *Methods of theoretical physics, Part I*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York.

- MORSE PH. M. & FESHBACH H. (1953b), *Methods of theoretical physics, Part II*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York.
- MÜLLER W. (1990), *Comparison of different methods of force calculation*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 5, pp. 1058-1061.
- NAKATA T. & FUJIWARA K. (1990), *Finite element analysis of 3-D non-linear transient eddy current model (Problem 10)*, The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL), Supplement A, pp. 272-274.
- NAKATA T., TAKAHASHI N. & FUJIWARA K. (1990), *Investigation of a model to verify softwares for 3-D nonlinear eddy current analysis*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 2, pp. 501-504.
- NAKATA T., TAKAHASHI N. & FUJIWARA K. (1992), *Summary of results for benchmark problem 10 (steel plates around a coil)*, in Third International TEAM Workshop (Albanese R., Coccorese E., Crutzen Y. & Molfino P., eds.), No. EUR 14173 EN, pp. 211-221.
- NAKATA T., TAKAHASHI N., FUJIWARA K. & IMAI T. (1990), *Effect of permeability of magnetic materials on errors of the  $T$ - $\Omega$  method*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 2, pp. 698-701.
- NAKATA T., TAKAHASHI N., FUJIWARA K. & MARAMATSU K. (1988), *Comparison of various methods for 3-D eddy current analysis*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No. 6, pp. 3159-3161.
- NAKATA T., TAKAHASHI N., FUJIWARA K. & OKADA Y. (1988), *Improvements of the  $T$ - $\Omega$  method for 3-D eddy current analysis*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No. 1, pp. 94-97.
- NAKATA T., TAKAHASHI N., FUJIWARA K. & OLSZEWSKI P. (1990), *Verification of softwares for 3-D eddy current analysis using IEEJ model*, Advances in Electrical Engineering Software, pp. 349-360.
- NAKATA T., TAKAHASHI N., FUJIWARA K. & SHIRAKI Y. (1990), *Comparison of different finite elements for 3-D eddy current analysis*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 2, pp. 434-437.
- NAKATA T., TAKAHASHI N., FUJIWARA K., IMAI T. & MURAMATSU K. (1991), *Comparison of various methods of analysis and finite elements in 3-D magnetic field analysis*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 27, No. 5, pp. 4073-4076.
- NAKATA T., TAKAHASHI N., FUJIWARA K., OKAMOTO N. & MURAMATSU K. (1992), *Improvements of convergence characteristics of Newton-Raphson method for nonlinear magnetic field analysis*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, No. 2, pp. 1048-1051.
- NAYFEH M. H. & BRUSSEL M. K. (1985), *Electricity and Magnetism*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- NÉDÉLEC J.-C. (1980), *Mixed finite elements in  $R_3$* , Numerische Mathematik, Vol. 35, pp. 315-341.
- NÉDÉLEC J.-C. (1986), *A new family of mixed finite elements in  $R_3$* , Numerische Mathematik, Vol. 50, pp. 57-81.
- NICOLET A. (1991), *Modélisation du champ magnétique dans les systèmes comprenant des milieux non linéaires*, Thèse de doctorat, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège.
- PERRY M. P. (1985), *Low Frequency Electromagnetic Design*, Marcel Dekker, Inc.
- PICHON L. & RAZEK A. (1992), *Calcul de modes résonnants dans les cavités hyperfréquences*, Revue Générale d'Electricité, No. 2, pp. 47-50.
- PREIS K., BARDI I., BIRO O., MAGELE C., RENHART W., RICHTER K. R. & VRISK G. (1991), *Numerical analysis of 3D magnetostatic fields*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 27, No. 5, pp. 3798-3803.
- PREIS K., BARDI I., BIRO O., MAGELE C., VRISK G. & RICHTER K. R. (1992), *Different finite element formulations of 3D magnetostatic fields*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, No. 2, pp. 1056-1059.
- PRESS W. H., FLANNERY B. P., TEUKOLSKY S. A. & VETTERLING W. T. (1989), *Numerical recipes, The art of scientific computing*, Cambridge University Press, Cambridge.
- PRESTON T. W. & REECE A. B. J. (1982), *Solution of 3-dimensional eddy current problems : the  $T$ - $\Omega$  method*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 18, No. 2, pp. 486-491.
- RAMO S., WHINNERY J. R. & VAN DUZER T. (1984), *Fields and waves in communication electronics, Second edition*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- REN Z. (1994), *Comparison of different force calculation method in 3D finite element modelling*, à paraître dans IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, (présenté à COMPUMAG 93, Miami).
- REN Z. & BOSSAVIT A. (1991), *A new approach to eddy-current problems in deformable conductors, and some numerical evidence about its validity*, Applied Electromagnetics in Materials, Elsevier.

- REN Z. & RAZEK A. (1990a), *Force calculation by Maxwell stress tensor in 3D hybrid finite element - boundary integral formulation*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 5, pp. 2774-2776.
- REN Z. & RAZEK A. (1990b), *New technics in solving three-dimensional multiply connected eddy-current problems*, IEE Proceedings, Vol. 137, Pt. A, No. 3, pp. 135-140.
- REN Z. & RAZEK A. (1990c), *A coupled electromagnetic-mechanical model for thin conductive plate deflection analysis*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 5, pp. 1650-1652.
- REN Z. & RAZEK A. (1992), *Local force computation in déformable bodies using edge elements*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, No. 2, pp. 1212-1215.
- REN Z. & RAZEK A. (1993), *A strong coupled model for analysing dynamic behaviours of nonlinear electromechanical devices*, à paraître dans Transactions on Magnetics (présenté à COMPUMAG 93, Miami).
- REN Z., BOUILLAULT F., RAZEK A., BOSSAVIT A. & VÉRITÉ J.-C. (1990), *A new hybrid model using electric field formulation for 3-D eddy currents problems*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 2, pp. 470-473.
- REN Z., LI C. & RAZEK A. (1992), *Hybrid FEM-BIM formulation using electric and magnetic variables*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, No. 2, pp. 1647-1650.
- REINHART W., STÖGNER H. & PREIS K. (1988), *Calculation of 3D eddy current problems by finite element method using either an electric or a magnetic vector potential*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No. 1, pp. 122-125.
- RICHARD N. (1992), *Formulation Lagrangienne utilisant les formes différentielles pour le calcul des courants de Foucault dans des conducteurs en mouvement*, Note Technique No.I.92.05, ISPRA, pp. 1-41.
- ROBERT PH. (1979), *Matériaux de l'électrotechnique*, Traité d'électricité de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Volume II, Editions Georgis, Suisse.
- RODGER D. & ATKINSON N. (1988), *Finite element method for 3D eddy current flow in thin conducting sheets*, IEE Proceedings, Vol. 135, Pt. A, No. 6, pp. 369-374.
- RODGER D., LEONARD P. J. & LAI H. C. (1992), *Interfacing the general 3D A- $\phi$  method with a thin sheet conductor model*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, No. 2, pp. 1115-1117.
- RODGER D., LEONARD P. J., LAI H. C. & HILL-COTTINGHAM R. J. (1991), *Surface elements for modelling eddy currents in high permeability materials*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 27, No. 6, pp. 4995-4997.
- SADIKU M. N. O. (1992), *Numerical Techniques in Electromagnetics*, CRC Press, Inc.,
- SAKIYAMA K., KOTERA H. & AHAGON A. (1990), *3-D electromagnetic field mode analysis using finite element method by edge element*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 5, pp. 1759-1761.
- SCARPA P. (1987), *Détermination des forces magnétiques régissant le mouvement du plasma dans un disjoncteur à arc tournant*, Thèse de doctorat, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège.
- SCHUTZ B. (1980), *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge University Press.
- SCHWAB A. J. (1988), *Field theory concepts*, Springer-Verlag, Inc., New York.
- SCHWARTZ L. (1965), *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris.
- SILVESTER P. P. & FERRARI R. L. (1990), *Finite elements for electrical engineers, Second edition*, Oxford University Press.
- SMITH G. D. (1985), *Numerical solution of partial differential equations : finite difference methods, Third edition*, Oxford University Press.
- SMYTHE W. R. (1968), *Static and dynamic electricity, Third edition*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York.
- STOER J. & BULIRSCH R. (1980), *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag, Inc., New York.
- STRATTON J. A. (1941), *Electromagnetic theory*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York.
- STROUD A. (1971), *Approximate calculation of multiple integrals*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- TAKAHASHI N., NAKATA T., FUJIWARA K. & IMAI T. (1992), *Investigation of effectiveness of edge elements*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, No. 2, pp. 1619-1622.
- TSUKERMAN I. A., KONRAD A., BEDROSIAN G. & CHARI M. V. K. (1993), *A survey of numerical methods for transient eddy current problems*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, No. 2, pp. 1711-1716.
- VAN WELIJ J. S. (1985), *Calculation of eddy currents in terms of h on hexahedra*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 21, No. 6, pp. 2239-2241.

- VASSALLO C. (1980), *Electromagnétisme classique dans la matière*, Dunod, Paris.
- VÉRITÉ J.-C. (1983), *Trifou : un code de calcul tridimensionnel des courants de Foucault*, E.D.F. Bulletin de la Direction des Etudes et des Recherches, Série C, Mathématiques, Informatique, No. 2, pp. 79-92.
- VÉRITÉ J.-C. (1987), *Calculation of multivalued potentials in exterior regions*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 23, No. 3, pp. 1881-1887.
- VÉRITÉ J.-C. (1990), *Advanced 3D electromagnetic formulations and applications*, in Industrial Application of Electromagnetic Computer Codes (Crutzen Y. R. & al., eds.), pp. 137-160.
- VÉRITÉ J.-C. & AL. (1984), *TRIFOU : Un code de calcul tridimensionnel des courants de Foucault*, Actes du colloque Modélisation et Calcul en Electromagnétisme et Applications (MODELEC), pp. 343-358.
- VICHNEVETSKY R. (1981), *Computer Methods for Partial Differential Equations, Volume I, Elliptic Equations and the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- VISSCHER P. B. (1988), *Fields and electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- VOURDAS A. & BINNS K. J. (1989), *Magnetostatics with scalar potentials in multiply connected regions*, IEE Proceedings, Vol. 136, Pt. A, No. 2, pp. 49-54.
- WAIT J. R. (1987), *Electromagnetic wave theory*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- WAIT R. & MITCHELL A. R. (1985), *Finite Element Analysis and Applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- WANG J.-S. (1992), *On "edge" based finite elements and method of moments solutions of electromagnetic scattering and coupling*, Dissertation presented to The Graduate Faculty of The University of Akron.
- WEBB J. P. (1993), *Edge elements and what they can do for you*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, No. 2, pp. 1460-1465.
- WEBB J. P. & FORGHANI B. (1989), *A single scalar potential method for 3D magnetostatics using edge elements*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 25, No. 5, pp. 4126-4128.
- WEBB J. P. & FORGHANI B. (1990), *A scalar-vector method for 3D eddy current problems using edge elements*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 5, pp. 2367-2369.
- WEBB J. P. & FORGHANI B. (1993), *Hierarchical scalar and vector tetrahedra*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, No. 2, pp. 1495-1498.
- WHITEMAN J. R., ed. (1988), *The Mathematics of Finite Elements and Applications VI*, Academic Press, Ltd.
- ZIENKIEWICZ O. C., LYNESS J. & OWEN D. R. J. (1977), *Three-dimensional magnetic field determination using a scalar potential - A finite element solution*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 13, No. 5, pp. 1649-1656.

# Table des matières

---

<b>Introduction .....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre I Modélisation en électrotechnique.....</b>	<b>5</b>
1. Position du problème .....	5
1.1 Modélisation.....	5
1.2 Grandeurs physiques locales et globales.....	5
2. Equations de Maxwell .....	6
2.1 Equations de Maxwell dans le vide .....	6
2.2 Equations de Maxwell des milieux continus.....	7
2.3 Forme intégrale des équations de Maxwell.....	9
2.4 Conditions de transmission .....	10
2.5 Lois de comportement .....	10
2.6 Formalisme complexe.....	14
3. Formulations magnétostatiques .....	15
3.1 Formulation magnétostatique en potentiel scalaire.....	15
3.2 Formulation magnétostatique en potentiel vecteur .....	19
3.3 Comparaison des formulations en potentiels scalaire et vecteur.....	20
4. Formulations magnétodynamiques .....	22
4.1 Formulation magnétodynamique en champ magnétique.....	22
4.2 Formulation magnétodynamique en potentiel vecteur électrique.....	23
4.3 Formulation magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique .....	24
4.4 Formulation magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique modifié.....	25
4.5 Comparaison des formulations magnétodynamiques .....	26
4.6 Vers une discrétisation des formulations .....	26
<b>Chapitre II Modèles aux dérivées partielles .....</b>	<b>27</b>
<b>Partie A Structure mathématique continue .....</b>	<b>27</b>
1. Position du problème .....	27
2. Outils de base.....	27
2.1 Espaces fonctionnels.....	27
2.2 Les opérateurs gradient, rotationnel, divergence .....	29
2.3 Noyaux et images des opérateurs grad, rot et div .....	35
2.4 Décomposition de l'espace $L^2(\Omega)$ .....	40
3. Structure mathématique .....	42
3.1 Domaine d'étude.....	42
3.2 Structure de base.....	42
3.3 Structure duale.....	43
3.4 Structure générale .....	45
<b>Partie B Structure mathématique discrète.....</b>	<b>46</b>
1. Discrétisation .....	46
1.1 Méthode des éléments finis.....	46
1.2 Objectif poursuivi .....	47
2. Eléments finis .....	47

2.1	Définition d'un élément fini.....	47
2.2	Élément fini unisolvant.....	48
2.3	Degrés de liberté.....	49
2.4	Espaces d'éléments finis.....	50
3.	Une suite d'espaces d'éléments finis.....	50
3.1	Introduction.....	50
3.2	Éléments géométriques.....	50
3.3	Fonctions de base.....	51
3.4	Degrés de liberté.....	56
3.5	Continuité des fonctions de base.....	57
3.6	Suite des espaces d'éléments finis.....	57
4.	Sous-espaces particuliers de l'espace des éléments d'arête.....	59
4.1	Noyaux de l'opérateur rotationnel.....	60
4.2	Sous-espaces jaugés.....	65
<b>Annexe.....</b>		<b>70</b>
1.	Transformations géométriques.....	70
1.1	Paramétrisation de l'élément réel.....	70
1.2	Expression des dérivées – matrice jacobienne de transformation.....	70
1.3	Expression des intégrales volumiques.....	71
2.	Éléments finis.....	71
2.1	Éléments isoparamétriques.....	71
2.2	Éléments de référence.....	71
2.3	Fonctions de base d'arête dans les éléments réels.....	79
<b>Chapitre III Problème de la magnétostatique.....</b>		<b>81</b>
<b>Partie A Formulation continue.....</b>		<b>81</b>
1.	Position du problème.....	81
2.	Modèle mathématique.....	81
2.1	Equations.....	81
2.2	Loi de comportement.....	82
2.3	Conditions aux limites.....	82
2.4	Diagramme de Tonti.....	82
3.	Sources du champ magnétique.....	83
3.1	Les sources extérieures.....	83
3.2	Les inducteurs bobinés.....	83
4.	Formulations.....	83
4.1	Formulations faibles avec potentiels.....	86
4.2	Formulations faibles sans potentiels.....	87
4.3	Formulation forte de la loi de comportement.....	88
<b>Partie B Formulation discrète.....</b>		<b>89</b>
1.	Discrétisation.....	89
2.	Formulation en potentiel scalaire magnétique.....	89
2.1	Espaces fonctionnels.....	89
2.2	Forme matricielle de la formulation faible.....	90
3.	Formulation en potentiel vecteur magnétique.....	95
3.1	Espace fonctionnel.....	95
3.2	Forme matricielle de la formulation faible.....	95
<b>Chapitre IV Problème des courants induits.....</b>		<b>99</b>
<b>Partie A Formulation continue.....</b>		<b>99</b>
1.	Position du problème.....	99



2.	Modèle mathématique .....	100
2.1	Equations .....	100
2.2	Lois de comportement .....	100
2.3	Conditions aux limites .....	100
2.4	Diagramme de Tonti .....	101
3.	Sources du champ magnétique .....	102
3.1	Les sources extérieures .....	102
3.2	Les inducteurs bobinés .....	102
3.3	Les inducteurs massifs .....	102
4.	Formulations .....	103
5.	Formulations conformes en $h$ .....	104
5.1	Formulation mixte en $h$ et $e$ .....	104
5.2	Formulation en $h$ .....	105
6.	Formulations conformes en $b$ .....	108
6.1	Formulation mixte en $e$ et $h$ .....	108
6.2	Formulation en $e$ .....	109
6.3	Formulation en $a^*$ .....	109
<b>Partie B Formulation discrète .....</b>		<b>111</b>
1.	Discrétisation .....	111
2.	Formulation en champ magnétique .....	111
2.1	Espaces fonctionnels .....	111
2.2	Forme matricielle de la formulation faible .....	112
3.	Formulation en potentiel vecteur magnétique modifié .....	118
3.1	Espace fonctionnel .....	118
3.2	Forme matricielle de la formulation faible .....	119
<b>Chapitre V Résultats .....</b>		<b>123</b>
<b>Problème de la sphère .....</b>		<b>123</b>
1.	Position du problème .....	123
1.1	Description générale .....	123
1.2	Description de la géométrie et des matériaux .....	123
1.3	Description de l'excitation .....	124
1.4	Grandeurs à calculer .....	124
1.5	Solutions analytiques .....	125
2.	Modélisation .....	126
2.1	Formulation utilisée .....	126
2.2	Types d'éléments finis utilisés .....	126
2.3	Conditions aux limites et symétries .....	126
2.4	Méthode de calcul .....	128
3.	Résultats en magnétostatique .....	128
3.1	Définition des maillages .....	128
3.2	Analyse de résultats .....	130
3.3	Conclusions .....	135
4.	Résultats en magnétodynamique sinusoïdale .....	136
4.1	Définition des maillages .....	136
4.2	Analyse de résultats .....	137
4.3	Conclusions .....	146
<b>Noyau magnétique et inducteur (Problème statique linéaire) .....</b>		<b>147</b>
1.	Définition du problème .....	147
1.1	Description générale .....	147

1.2	Description de la géométrie et des matériaux .....	147
1.3	Grandeurs à calculer .....	147
2.	<b>Modélisation</b> .....	149
2.1	Formulation utilisée .....	149
2.2	Types d'éléments finis utilisés .....	149
2.3	Conditions aux limites et symétries .....	149
2.4	Méthodes de calcul .....	150
2.5	Prise en compte de l'inducteur.....	150
3.	<b>Résultats</b> .....	154
3.1	Définition du maillage .....	154
3.2	Induction magnétique .....	155
3.3	Influence de la perméabilité.....	156
3.4	Conclusions .....	158
	<b>Brique conductrice trouée ("La brique de FELIX") .....</b>	<b>159</b>
1.	<b>Définition du problème</b> .....	159
1.1	Description générale .....	159
1.2	Description de la géométrie et des matériaux .....	159
1.3	Description de l'excitation.....	159
1.4	Grandeurs à calculer .....	160
2.	<b>Modélisation</b> .....	160
2.1	Formulations utilisées.....	160
2.2	Types d'éléments finis utilisés .....	161
2.3	Conditions aux limites et symétries .....	161
2.4	Prise en compte du trou .....	162
2.5	Méthode de calcul.....	163
3.	<b>Résultats</b> .....	163
3.1	Définition des maillages .....	163
3.2	Analyse des résultats.....	165
3.3	Conclusions .....	178
	<b>Plaques d'acier autour d'un inducteur (Problème transitoire non linéaire).....</b>	<b>179</b>
1.	<b>Définition du problème</b> .....	179
1.1	Description générale .....	179
1.2	Description de la géométrie et des matériaux .....	179
1.3	Description de l'excitation.....	181
1.4	Grandeurs à calculer .....	182
2.	<b>Modélisation</b> .....	183
2.1	Formulation utilisée .....	183
2.2	Types d'éléments finis utilisés .....	183
2.3	Conditions aux limites et symétries .....	183
2.4	Prise en compte de l'inducteur.....	184
2.5	Méthodes de calcul .....	185
3.	<b>Résultats</b> .....	185
3.1	Définition du maillage .....	185
3.2	Densité de flux magnétique .....	186
3.3	Densité de courant induit.....	192
3.4	Conclusions .....	195
	<b>Conclusions générales</b> .....	<b>197</b>
	<b>Notations et formules</b> .....	<b>201</b>
	<b>Bibliographie</b> .....	<b>205</b>