Les besoins en mathématiques des futurs professeurs du secondaire

Maggy Schneider

Université de Liège

Séminaire des IREM, Limoges, 15 juin

Un premier fait divers

Réactions d'élèves-professeurs à une citation de Cauchy :

« Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface d'un cercle est la limite vers laquelle converge les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croit de plus en plus […] »

Un premier fait divers

Essais de formalisation :

$$\forall \varepsilon > 0 : | x - a | < \varepsilon$$

ajouter ε très petit ?

$$\forall \varepsilon > 0 : 0 \neq | x - a | < \varepsilon$$

Rapport « sténographique » aux écritures formalisées parfois justifié par des arguments didactiques : c'est une première approche qui « coupe la poire en deux »

Un premier fait divers

Le débat fait apparaître des méconnaissances chez les (élèves)-professeurs :

- L'AS traite de limites de fonctions, non de variables
- La notion de variable a un statut ambigu que ne peuvent réduire les connotations cinématiques : « successives », « s'approchent indéfiniment », « de manière à finir par … »
- L'expression $\forall\varepsilon > 0 : |x - a| < \varepsilon$ caractérise ce qu'on appelle, en ANS, des nombres infiniment proches.
  Se pose alors la question de la non-contradiction de la théorie liée aux questions d'existence

Un rapport flou aux théories mathématiques

- ✓ Les futurs professeurs semblent, d'une part, avoir un rapport non lakatosien aux définitions et, d'autre part, tenir à des éléments emblématiques de la théorie tels que les quantificateurs sous forme symbolisée
- ✓ Situent plus la portée des définitions formalisées pour prouver telle ou telle limite particulière que pour démontrer les théorèmes relatifs à l'algèbre des limites, théorèmes grâce auxquels on peut se passer de ces écritures formalisées

Un rapport flou aux théories mathématiques

- ✓ Ne sont pas au clair avec la question des problèmes d'existence
- ✓ Leur discours didactique entretient une confusion entre « intuition » et « théorie » :
  - Au niveau numérique, glissement d'une définition des nombres en termes de limites de suites au caractère illimité des décimales

    « lim 0,9999 … = 1 »
  - Obstacle géométrique de la limite qui relève d'un obstacle épistémologique plus global : le positivisme empirique

Du côté des élèves : des questions relatives à la pertinence des modèles

- Peut-on obtenir la valeur exacte d'une aire curviligne ou d'une vitesse instantanée au moyen d'un calcul de limites? (obstacle épistémologique)
- Des élèves questionnent la pertinence du modèle vectoriel d'un plan dans l'espace usuel
- D'autres acceptent difficilement que $y = 2x + 1$ représente un plan ou que deux équations cartésiennes sont nécessaires pour définir une droite (obstacle didactique)

Nécessité de reconnaître deux types de rationalité mathématique

- Existence de deux rationalités mathématiques : modélisation et mise en forme déductive
- La rationalité de type « modélisation » n'est guère identifiée, vu le caractère moins canonique du type de validation (E. Rouy)

Difficulté à concevoir une transposition relevant de la construction de modèles

- Le discours des élèves-professeurs ne relève ni d'un type de rationalité, ni de l'autre : discours parsemé de « trous » mais contenant des éléments « emblématiques » de la théorie canonique (E. Rouy)
- Difficulté à imaginer les raisons d'être des savoirs et à reconnaître des formes embryonnaires de ceux-ci chez les élèves

Difficulté à concevoir une transposition relevant de l'organisation déductive

- La rationalité de type « déduction » semble poser problème (G. Cirade) :
  - Adéquation entre définition et démonstration
  - Tension entre organisation déductive globale et îlots déductifs
- Nécessité d'une étude plus globale de la transposition didactique pour penser les organisations déductives locales (exemple d'un parcours pour étudier une question de didactique : « Que faut-il enseigner comme géométrie au collège ? »)

Un parti-pris : l'épistémologique partout dense dans le didactique

- ✓ L'épistémologie est le ferment de la didactique même si le didactique ne se réduit pas à l'épistémologie
- ✓ La réflexion épistémologique doit être menée à un haut niveau de détermination didactique : elle doit être partagée par les enseignants, chercheurs et rédacteurs de programmes
- ✓ Elle peut se penser comme « faire des mathématiques à rebours »

Conclusion

Nécessité d'articuler des savoirs :

- ✓de type mathématique
- ✓de type épistémologique
- ✓de type didactique

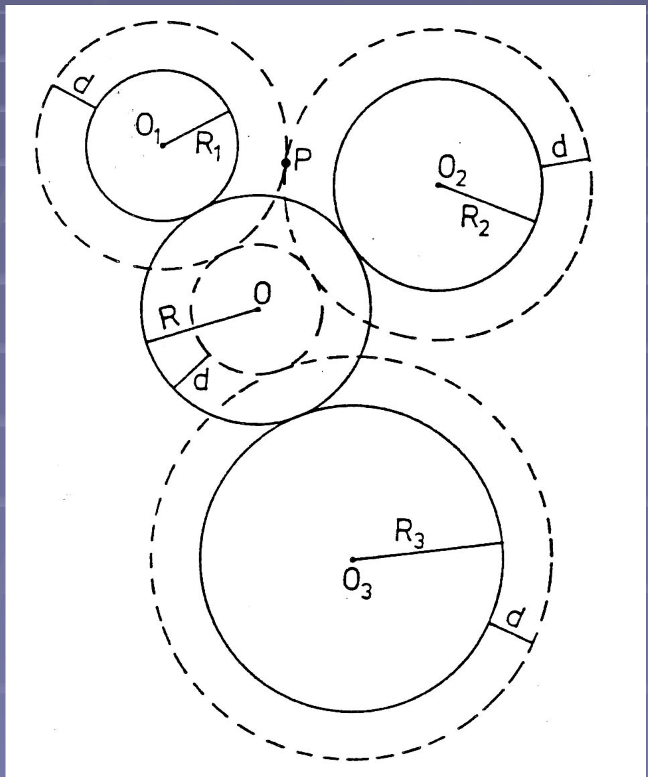
Une situation d'entrée dans la didactique, en particulier dans l'étude de la transposition didactique

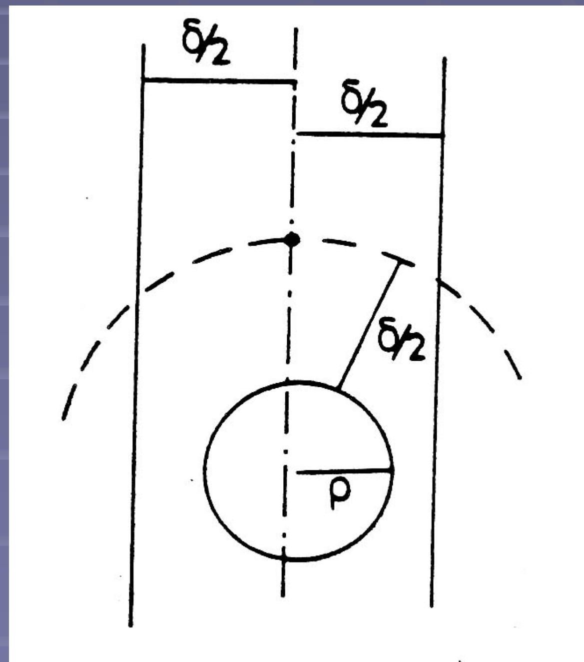
Quelques éléments d'un parcours d'étude en « didactique-épistémologie » sur le rôle des groupes de transformations dans la géométrie :

- Transformations qui déforment : oui, mais pour faire quoi? (exemple des inversions)
- Plonger un théorème dans une géométrie plus globale
- Démontrer un théorème au sein d'une même géométrie à partir d'un cas particulier

Instrumentalité des inversions

Méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques pour construire un cercle tangent à trois cercles donnés

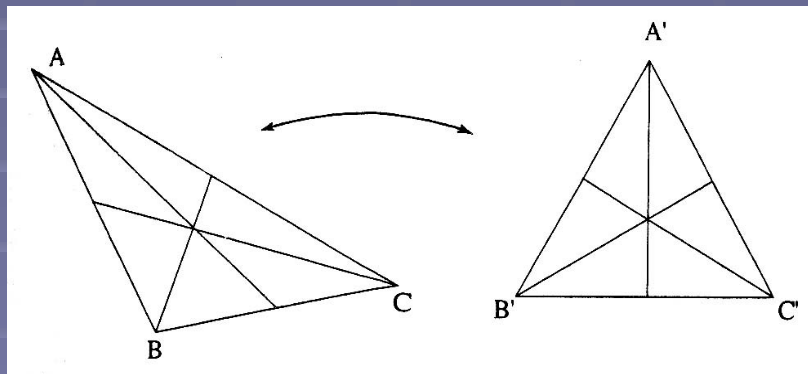




Sortir d’une géométrie

La concourance des médianes d’un triangle quelconque « découle » de celle des hauteurs

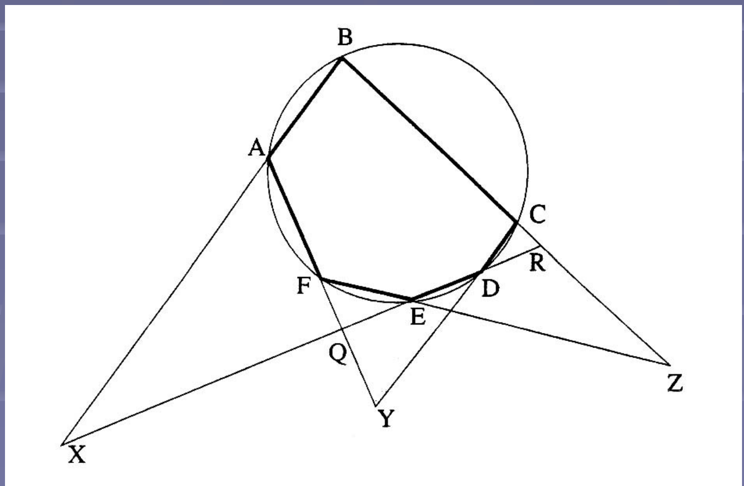
Elle peut être démontrée analytiquement en choisissant les points (0,0), (1,0) et (0,1) comme sommets



Traiter un cas particulier « générique » au sein d'une même géométrie

Le théorème de Pascal : *les paires de côtés opposés d'un hexagone inscrit à une conique se rencontrent en des points alignés*

Extension du cercle aux coniques par projectivité



Un parcours en « didactique-épistémologie »

- ✓ Fonctionnalité des transformations pour étudier des propriétés de figures assurée par des théorèmes de « structure » :
  - Détermination du nombre de points dont il faut connaître l'image pour déterminer les transformations à partir de leurs invariants
  - Caractérisation économe des transformations en jeu à partir d'une définition en termes d'invariants : suppose de considérer les transformations comme affectant le plan entier
  - Etude du caractère transitif du groupe ou caractérisation des orbites d'ensembles privilégiés : cas d'isométrie et de similitude de triangles
- ✓ Ces mêmes cas sont des outils privilégiés pour réduire les problèmes des macro et méso espaces à des propriétés de figures tracées sur une feuille de papier