Entre recherche et développement : quel choix de valeurs pour l’ingénierie curriculaire ?

Maggy Schneider

Université de Liège,

Facultés de Namur

INRP 13-14 juin 2007

Plan de l'exposé

- ✓ Questionnement sur l'indépendance des démarches descriptive et prescriptive : choix de valeurs incontournable
- ✓ Nécessité d'un « arrière-fond » épistémologique caractérisé et argumenté par le biais d'exemples travaillés en formation
- ✓ Critères et tensions inhérents aux décisions curriculaires

Discours descriptif versus discours prescriptif

A titre de provocation :

- ✓ « Notre livre n'est pas davantage un ouvrage de didactique, s'occupant des phénomènes observés en classe ou cherchant les **meilleures** façons d'enseigner » (N. Rouche)
- ✓ « Guy Brousseau me paraît « obsédé » par les conditions du **bon** fonctionnement des systèmes didactiques; je suis, quant à moi, davantage fasciné par l'étude des conditions de possibilité de leur fonctionnement, tout court - bon ou moins bon »

  (Y. Chevallard)

Discours descriptif versus discours prescriptif

L'éducation peut être l'objet :

- ✓ d'une **démarche prescriptive** : « transformer l'école ou, plus modestement, aider les enseignants à résoudre les problèmes qui se posent à eux »
- ✓ d'une **démarche descriptive** : « élucider le phénomène éducationnel en analysant le fonctionnement des écoles et de tous les acteurs qui les habitent ou gravitent autour d'elles » (M. Crahay en référence à E. Durkheim)

Discours descriptif versus discours prescriptif

Qu'en est-il de la TSD ?

- ✓ Réseau conceptuel propre à analyser des phénomènes d'enseignement/apprentissage y compris dans les classes « ordinaires »
- ✓ A émergé de l'étude de dispositifs didactiques particuliers et d'ingénieries fonctionnant comme méthodologies de recherche mais …
- ✓ on étudie aussi les conditions de transmission et de reproductibilité de ces ingénieries
- ✓ Pourquoi ce choix *a priori* du type de dispositifs didactiques étudiés ?

Discours descriptif versus discours prescriptif

Qu'en est-il de la TAD?

- ✓ Etude de l'écologie des systèmes didactiques qui fait la spécificité de l'approche anthropologique
- ✓ Qu'en est-il des développements récents de la TAD et les « réponses » proposées à l'encontre d'une perspective « monumentaliste » de l'enseignement des mathématiques, en termes de P.E.R. et d'A.E.R.?

Discours descriptif versus discours prescriptif

« La confusion des genres est inacceptable » (M. Crahay), mais doit-on, peut-on vouloir une séparation drastique des approches descriptive et prescriptive, une « autonomie entre recherche et pratique » (Ib.), le discours pédagogique ne pouvant être scientifique sans être érigé en norme et sans empêcher un débat relatif au choix de valeurs ?

Choix de valeurs inévitable non seulement dans les options d'enseignement, mais aussi dans la définition même des objets de recherche

Mise à distance grâce à des cadres théoriques « consistants » et choix de valeurs affiché

Autopsie d'une situation proposée en formation

Recherche des automorphismes du graphe d'un cube : approche proposée par F. Buekenhout et J. Doyen (ULB)

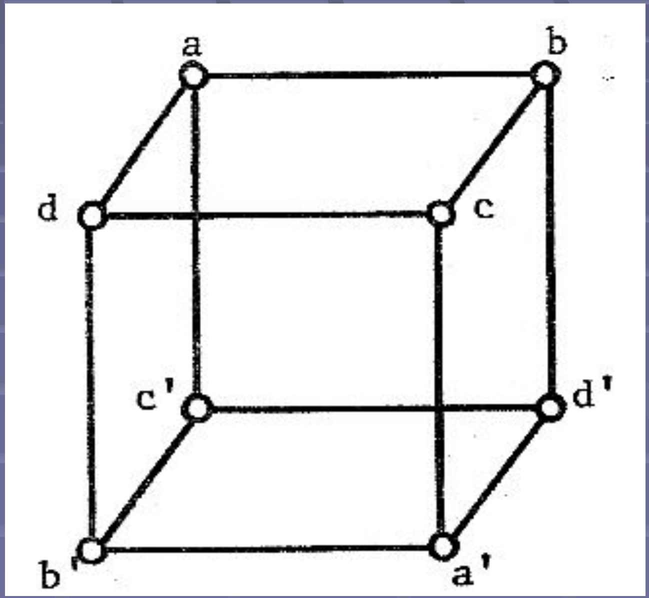
Graphe : ensemble d'éléments appelés *sommets* dont la structure est déterminée par la donnée de certaines paires de sommets qu'on appelle *arêtes*

Automorphisme : permutations de sommets qui appliquent une arête sur une arête et réciproquement

Autopsie d'une situation proposée en formation

Exemples :

- α = (a, b) (c, d) (a', b') (c', d')
- β = (a, b, c, d) (a', b', c', d')
- $\beta \circ \alpha$ = (a, c) (b) (d) (a', c') (b') (d')
- χ = (a) (b) (c) (d) (a') (b') (c') (d')
- δ = (a, d', c, b') (b, a', d, c')

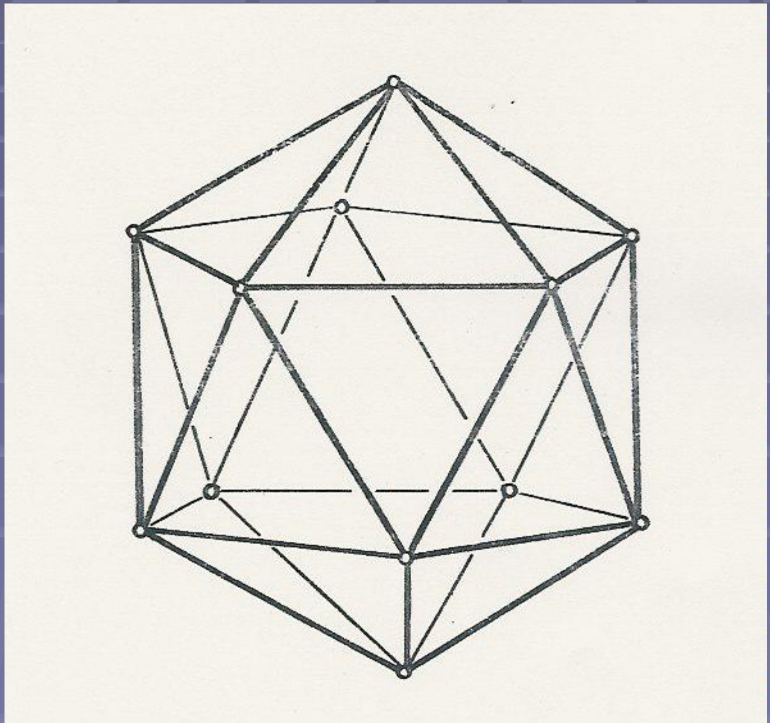


Autopsie d’une situation proposée en formation

- ✓ Certains de ces automorphismes sont facilement interprétables, d’autres non
- ✓ Combien sont-ils ?
- ✓ Comment les décrire tous ?

Autopsie d'une situation proposée en formation

Et dans le cas d'un icosaèdre (12 sommets, 20 faces) ?



Autopsie d'une situation proposée en formation

Les automorphismes d'un ensemble structuré forment un groupe :

« Les groupes d'automorphismes vont jouer un rôle déterminant dans la suite de notre travail. […] Nous verrons comment on peut élaborer à l'aide des groupes, une technique permettant de résoudre de manière quasi mécanique non seulement le problème du cube mais aussi beaucoup d'autres » (F. Buekenhout, J. Doyen)

Autopsie d'une situation proposée en formation

La technique de dénombrement dans le cas du cube :

Soit $G = Aut\ E$ où E est le graphe du cube

$|G| = 8\ |G_a|$ où 8 est le nombre de sommets du cube (l'orbite de a pour G)

$|G_a| = 3\ |G_{ab}|$ où 3 est le nombre de sommets adjacents à a (l'orbite de b pour G_a)

$|G_{ab}| = 2\ |G_{abc}|$ où 2 est le nombre de sommets adjacents à b et non à a (l'orbite de c pour G_{ab})

$|G_{abc}| = 1$

D'où $|G| = 8.3.2.1 = 48$

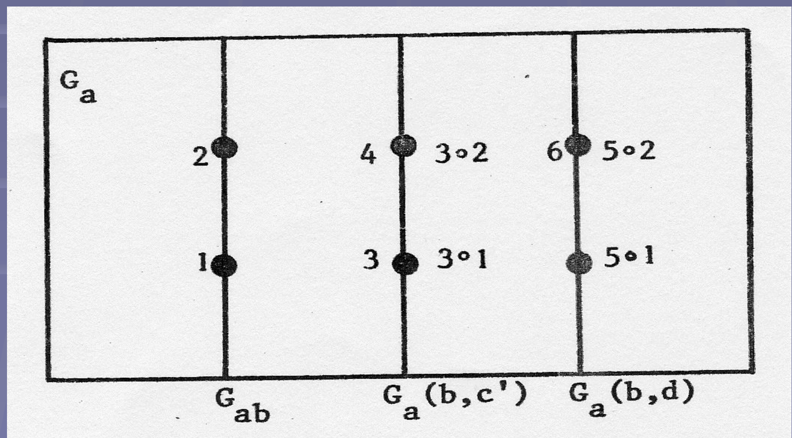
Autopsie d'une situation proposée en formation

La technique des « classes latérales » pour décrire les automorphismes cherchés :

G_{ab} est composé de 2 automorphismes :

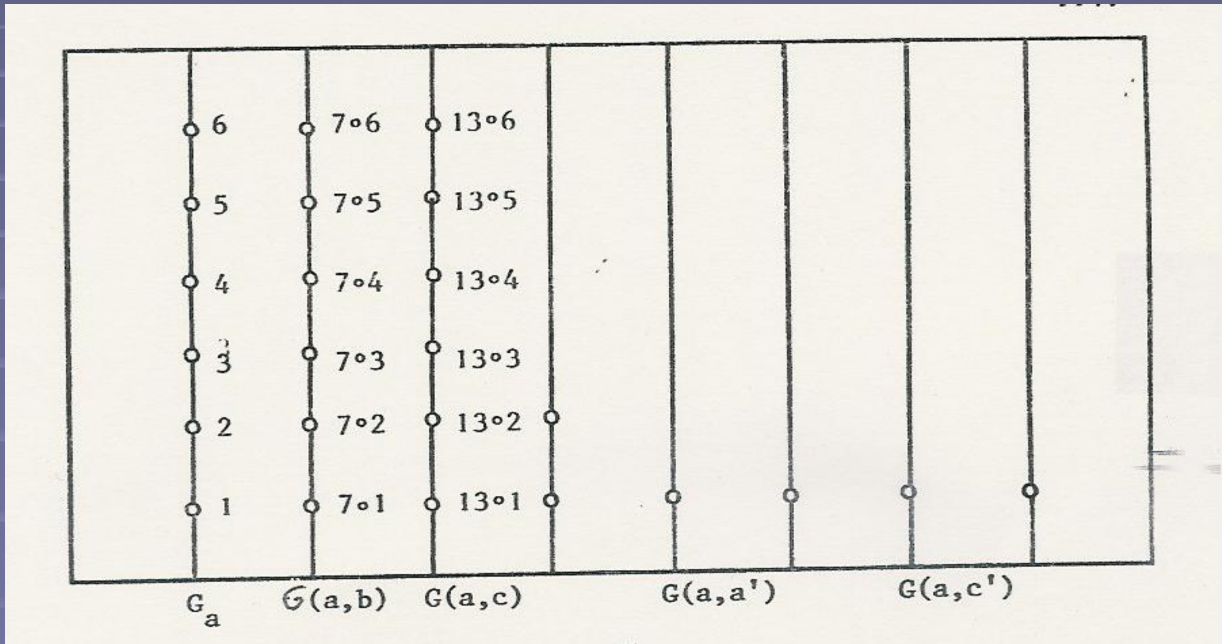
1 = *(a) (b) (c) (d) (a') (b') (c') (d')* et 2 = *(a) (b) (a') (b') (c,d') (c',d)*

G_a est d'ordre 6 et composé de 3 « classes latérales » : G_{ab}, G_a *(b,c')* et G_a*(b,d)* où 3 = *(a) (b,c') (d') (a') (b',c) (d)* et 5 = *(a) (c) (b,d) (a')(c') (b',d')*



Autopsie d'une situation proposée en formation

G, d'ordre 48, est composé de 8 « classes latérales » :



Autopsie d'une situation proposée en formation

Le prix théorique à payer :

- ✓ Les *orbites* de *Aut (E)* regroupent les points de *E* ayant les mêmes propriétés (sommets, milieux arêtes, centres de symétrie, …)
- ✓ Pour tout groupe de permutations *G* d'un ensemble *E* et tout point *p* de *E*, le *stabilisateur* G_p, composé des permutations de *G* qui laissent *p* fixe, est un sous-groupe de *G*
- ✓ Soient un groupe de permutations de *E, p* un point de *E* et *g* un élément de *G*. Si *g(p)* = *q*, alors l'ensemble *G(p, q)* des éléments de G qui transforment *p* en *q* est la *classe latérale* gauche $g \circ G_p$
- ✓ Les classes latérales de *H*, sous-groupe de *G*, ont le même cardinal et forment une partition de *G*
- ✓ Si G est un groupe de permutations fini, Θ une orbite de *G* et *p* un point de Θ, alors $|G| = |\Theta|\ |G_p|$ (la « formule magique »)

Les valeurs sous-jacentes à ce choix

- ✓ Situation fondamentale au sens strict, qui autorise une praxéologie à fort pouvoir « d'économie de pensée »
- ✓ Situation fondamentale d'entrée dans une nouvelle institution
- ✓ Situation fondamentale au sens large : QFPG et/ou RFPD (??)

Situation fondamentale en un sens strict

- ✓ Tâche par rapport à laquelle le savoir visé fournit une technique optimale : on a bien un couple *(Q, R)* et un savoir *S* fonctionnel par rapport à ce couple. Le mot tâche renvoie donc ici à la notion de situation fondamentale
- ✓ Telle que travaillée ici, la situation ne comporte pas de dimension adidactique
- ✓ Le poids du bloc « logos » est grand par rapport au bloc « praxis ». Quid du topos dans la mise en œuvre des techniques et quid de l'évaluation des élèves ?

Situation fondamentale d'entrée dans une nouvelle institution

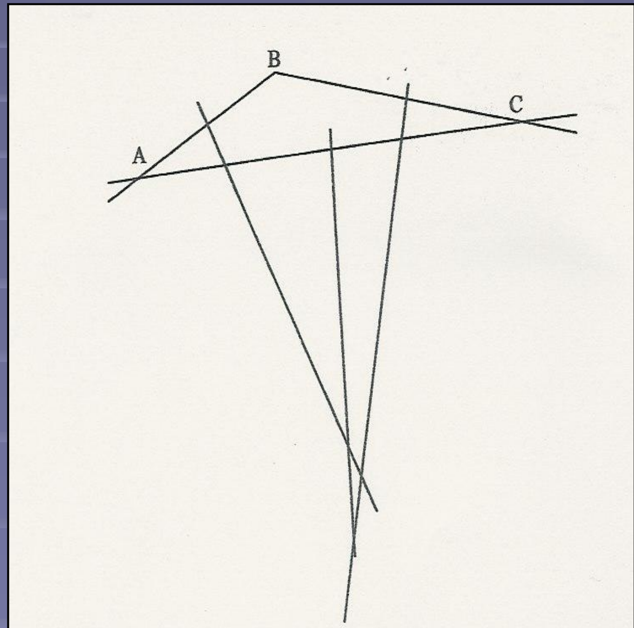
Se définit par rapport à des individus dont on cherche à rendre adéquat au rapport institutionnel leur rapport personnel à certains objets identifiés par cette institution:

- ✓ Pour des élèves qui passent de l'enseignement secondaire à l'enseignement universitaire : leur faire regarder autrement des symétries internes d'une figure géométrique, ainsi que la figure elle-même
- ✓ Pour des élèves-professeurs : être confrontés à un développement mathématique de niveau universitaire qui répond à une question préalable

Situation fondamentale d'entrée dans une nouvelle institution

Analogie avec une situation fondamentale d'entrée dans la géométrie déductive :

« [les élèves] doivent finalement émettre l'hypothèse que ces trois points pourraient n'en représenter qu'un seul et en apporter la preuve ***contre 'l'évidence' de la figure et non pas avec»*** (G.Brousseau)



Situation fondamentale au sens large ?

- ✓ Situation et non problème ? (A. Mercier)
- ✓ Génératrice d'une étude à long terme (QFPG) ?: pas forcément le cas des automorphismes de solides; portée locale des techniques
- ✓ Mais regard à fort pouvoir démultiplicateur (RFPD) :
  - Penser les solides en termes de graphes qui sont des ensembles structurés de « points » et de « liens » orientés ou non : vers la théorie des graphes et la combinatoire
  - Penser les transformations géométriques en termes de groupes et d'orbites : vers une relecture de la géométrie inspirée du programme d'Erlangen de F. Klein qui permet de dégager le raisonnement géométrique de l'intuition spatiale
  - Voir les structures mathématiques comme des outils d'action et de pensée

Les structures comme économie de pensée

« Une structure est un outil pour le mathématicien. Une fois qu'il a discerné, entre les éléments qu'il étudie, des relations satisfaisant aux axiomes d'une structure de type connu, il dispose aussitôt de tout l'arsenal des théorèmes généraux relatifs aux structures de ce type, là où, auparavant, il devait péniblement se forger lui-même des moyens d'attache dont la puissance dépendait de son talent personnel, et qui s'encombraient souvent d'hypothèses inutilement restrictives, provenant des particularités du problème étudié » (Bourbaki)

L'économie de pensée vient du caractère « multi-sens » des structures

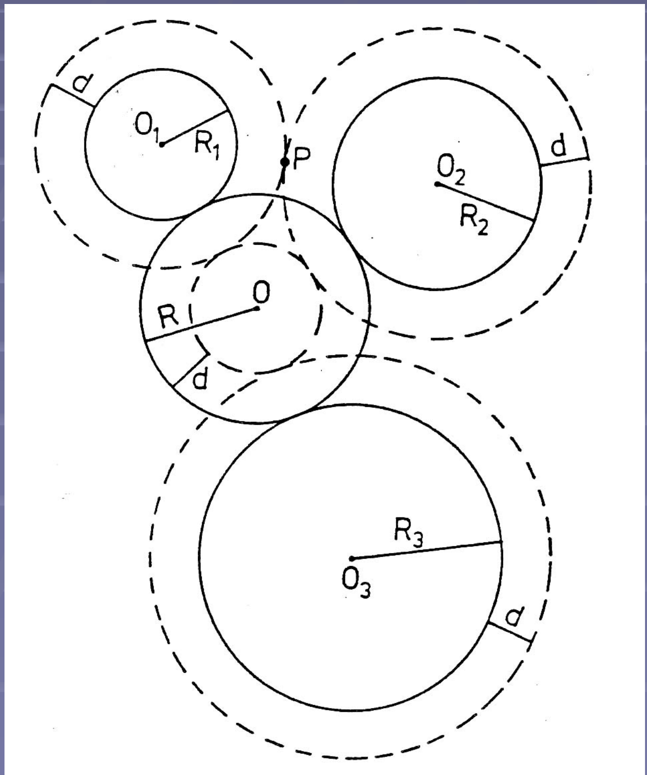
Une situation d'entrée dans la didactique, en particulier dans l'étude de la transposition didactique

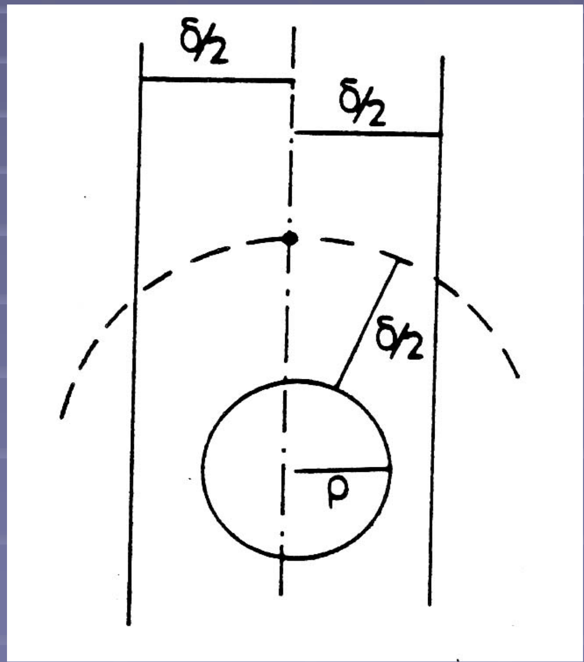
Quelques éléments d'un P.E.R. en « didactique-épistémologie » (Cojerem) :

- ✓ Contraste avec l'introduction du groupe de Klein dans le processus psychodynamique de Diénès
- ✓ Réflexion sur le rôle des groupes de transformations dans l'étude de la géométrie :
  - Transformations qui déforment : oui, mais pour faire quoi? (exemple des inversions)
  - Plonger un théorème dans une géométrie plus globale
  - Démontrer un théorème au sein d'une même géométrie à partir d'un cas particulier

Instrumentalité des inversions

Méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques pour construire un cercle tangent à trois cercles donnés

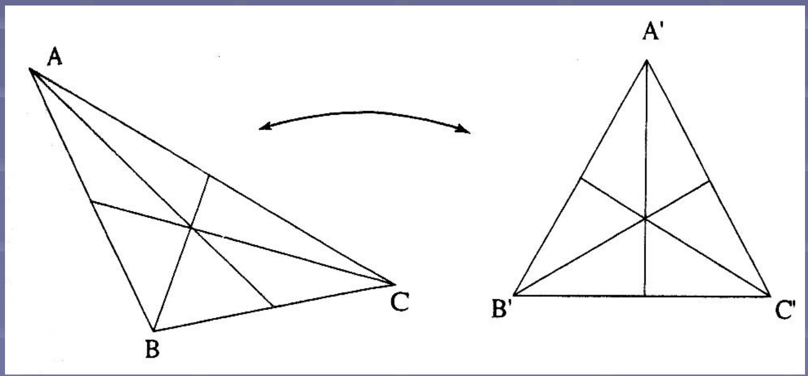




Sortir d’une géométrie

La concourance des médianes d’un triangle quelconque « découle » de celle des hauteurs

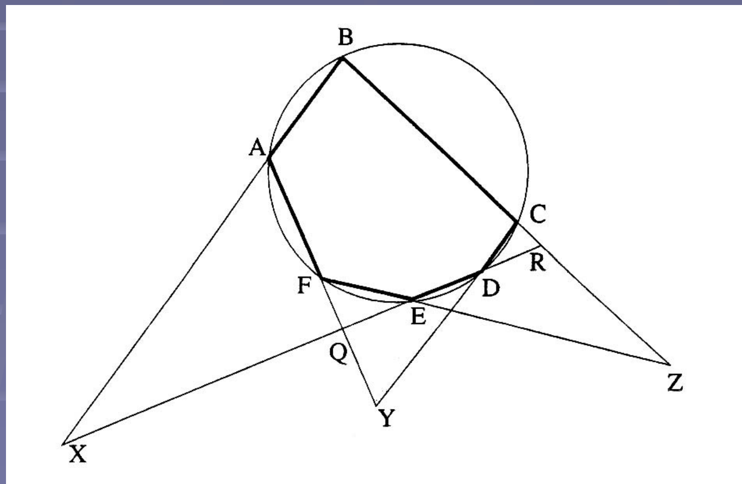
Elle peut être démontrée analytiquement en choisissant les points (0,0), (1,0) et (0,1) comme sommets



Traiter un cas particulier « générique » au sein d'une même géométrie

Le théorème de Pascal : *les paires de côtés opposés d'un hexagone inscrit à une conique se rencontrent en des points alignés*

Extension du cercle aux coniques par projectivité



Un P.E.R. en « didactique-épistémologie »

- ✓ Fonctionnalité des transformations pour étudier des propriétés de figures assurée par des théorèmes de « structure » :
  - Détermination du nombre de points dont il faut connaître l'image pour déterminer les transformations à partir de leurs invariants
  - Caractérisation économe des transformations en jeu à partir d'une définition en termes d'invariants : suppose de considérer les transformations comme affectant le plan entier
  - Etude du caractère transitif du groupe ou caractérisation des orbites d'ensembles privilégiés : cas d'isométrie et de similitude de triangles
- ✓ Ces mêmes cas sont des outils privilégiés pour réduire les problèmes des macro et méso espaces à des propriétés de figures tracées sur une feuille de papier

Mise à distance au moyen d'un discours socio-épistémologique

P.E.R. qui correspond à une question de didactique : « Que faut-il enseigner comme géométrie au collège ? »

Discours relevant de la socio-épistémologie et non de l'épistémologie normative grâce auquel on peut questionner rationnellement une réponse « poinçon » donnée à cette question dans l'institution scolaire et débusquer une position « politiquement correcte » pour la noosphère (analyse de D. Perrin dans le rapport « J.-P. Kahane » de 2002)

Prise de distance par rapport à certaines activités naturalisées

Et la réponse « cœur » ?

Discours socio-épistémologique

A l'opposé de *l'épistémologie normative*, « la *socio-épistémologie* entend étudier les rationalités humaines d'un tout autre point de vue. Au lieu de prétendre dire comment les êtres humains *devraient* raisonner, ces approches essayent de *décrire comment les humains raisonnent*. On y examine les scientifiques comme un anthropologue regarde des sorciers : sans se prononcer sur la valeur que ceux-ci donnent à leurs pratiques (et donc, sans y croire nécessairement) » (G. Fourez)

Un parti-pris : l'épistémologique partout dense dans le didactique

- ✓ Un certain consensus se dessine : l'épistémologie est le ferment de la didactique même si le didactique ne se réduit pas à l'épistémologie
- ✓ La réflexion épistémologique doit être menée à un haut niveau de co-détermination didactique : elle doit être partagée par les enseignants, chercheurs et membres de la noosphère pour les faire sortir de divers types d'autismes
- ✓ Risque de transparence de ce qu'on appelle l'épisté-mologie dont la relativité institutionnelle peut être mise en évidence par la TAD

Les décisions curriculaires : quelques critères et tensions

Les finalités « généreuses » : apprendre aux élèves à apprendre, leur apprendre à résoudre des problèmes, à communiquer, …

- ✓ Problèmes d'opérationnalité
- ✓ Où est le lieu de la transversalité ? Chimère car la transversalité relève de l'intention (B. Rey)

L'intention scripturale : appréhension de l'écriture, non pas seulement comme message adressé à l'autre, mais comme instrument intellectuel pour « ramener le divers du monde à des regroupements dominables ». Ne rejoint-on pas là l'essentiel de la culture mathématique : l'algèbre comme modélisation ultime par des ostensifs performants de divers systèmes mathématiques ou extra-mathématiques ?

Les décisions curriculaires : quelques critères et tensions

Les finalités « citoyennes » :

- ✓ Quid de l'instrumentalité des mathématiques au quotidien ?
- ✓ Posture rationnelle vis-à-vis des mathématiques
- ✓ Difficultés de traitement des questions socialement sensibles au sein des institutions scolaires. Pondération entre médias et milieux. Place des mathématiques dans le traitement de ces questions ?
- ✓ Equilibre entre mathématiques mixtes et mathématiques « multi-sens »

Les décisions curriculaires : quelques critères et tensions

- ✓ Faut-il croiser et comment une entrée par les questions et une entrée par les réponses ? Absence de correspondance univoque : offre une espace pour l'entraînement à la résolution de problèmes !
- ✓ Possibilité de rendre les élèves « actifs »? Mais pas au prix du sacrifice du caractère fondamental des situations (nécessité d'intégrer les A.E.R. dans des P.E.R.)
- ✓ Réponses « poinçons » et/ou réponses « cœur »?
- ✓ Mise à distance des réponses « poinçons » par un discours technologique et socio-épistémologique

Les décisions curriculaires : quelques critères et tensions

- ✓ L’évolution des mathématiques : y a-t-il des valeurs intemporelles ?
- ✓ L’évolution de l’environnement technologique : offre de nouvelles opportunités d’expérimentation, de questionnement et d’illustration mais risque d’une recrudescence des pratiques ostensives ?
- ✓ N’importe quel savoir pourvu qu’il soit fonctionnel ? Fonctionnalité relative et perspective plus ou moins réduite

Les décisions curriculaires : quelques critères et tensions

Et les problèmes d'écologie ?

- ✓ Quels sont les changements susceptibles d'être intégrés dans une pratique quotidienne ?
- ✓ S'en tenir à des propositions modestes ?
- ✓ Formation approfondie des mathématiques élémentaires (F. Klein, Liping Ma, rapport « Kahane », …)

Sans compter les jeux d'influences personnelles dans les commissions de programmes ou d'influences d'un niveau d'enseignement sur d'autres …

Les décisions curriculaires : quelques critères et tensions

Accepter de « détricoter la chaussette » :

- ✓ Avant d'exister par le truchement d'une définition au sein d'une axiomatique, les concepts renvoient à des « objets mentaux » (H. Freudenthal)
- ✓ Quel discours technologique accepte-t-on en « attendant » la théorie standardisée ? Quel type de validation ?
- ✓ La « dialectique outil/objet » (R. Douady) demeure très éclairante pour analyser les « séquelles » de la réforme dite « des mathématiques modernes »

En guise de conclusion

- Privilégier des recherches qui éclairent les choix curriculaires en intégrant, d'une manière ou d'une autre, des dimensions fondamentales du savoir dont on étudie l'apprentissage et/ou l'enseignement
- Concevoir des outils de formation qui coordonnent davantage aspects didactiques et aspects épistémologico-mathématiques; distinguer temps d'action et temps de formation
- Pratiquer la méthode des lieux : chercher un objet répondant à plusieurs contraintes à l'intersection de lieux, chacun étant obtenu en faisant jouer une contrainte à la fois. L'objet : un point, un triangle, une fonction, la signification d'un mot dans un dictionnaire, une maison à acheter, un homme à épouser et un contenu mathématique à proposer dans un programme scolaire !

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = 1 \,/\, -1 = -1.$$