Etude de quelques modèles fonctionnels entre caractérisation mathématique et exploitation à d'autres disciplines

Maggy Schneider
Université de Liège, Belgique

Grenoble, 30 août 2011

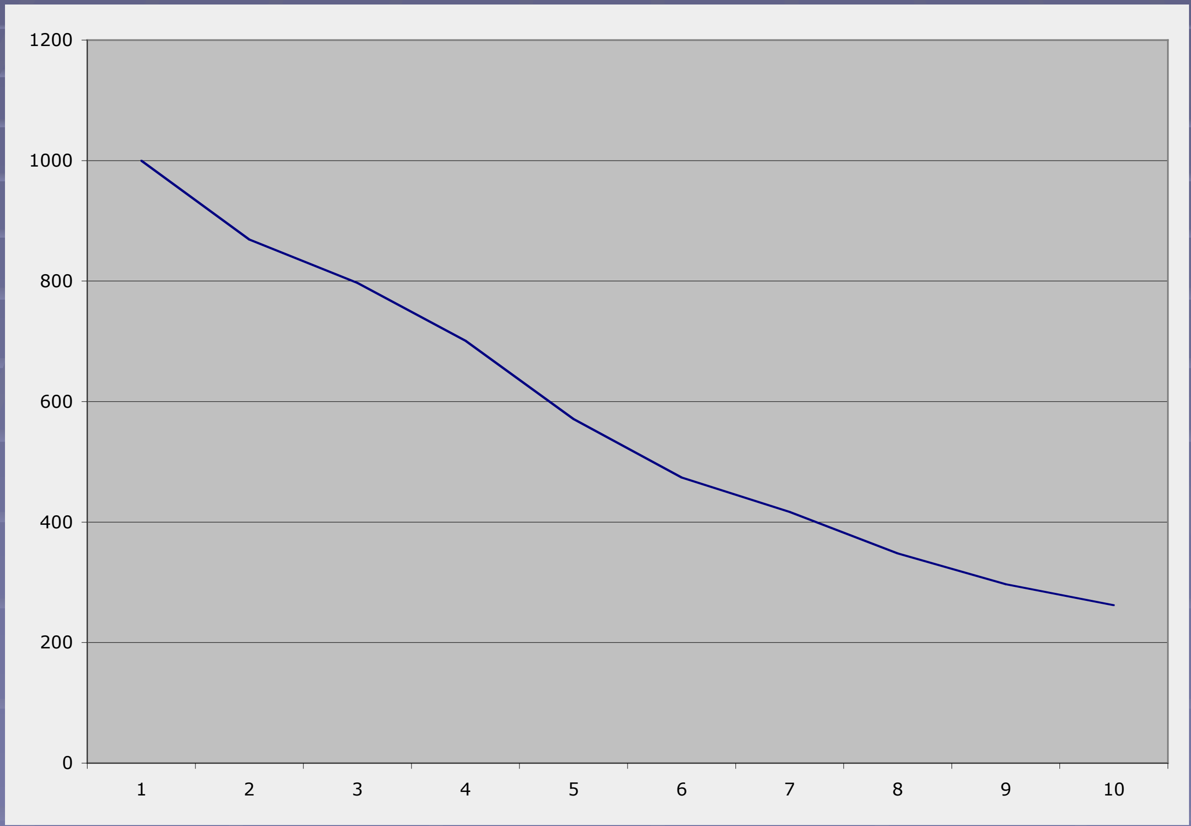
Question testée par la « commission des outils d'évaluation »

Un détecteur à scintillations est utilisé pour mesurer la radioactivité d'un échantillon. L'activité d'un échantillon est évaluée par le nombre d'impulsions par minute que reçoit le détecteur; elle varie avec le temps et peut être décrite par un type de fonction que tu as étudié. On te demande de construire un graphique à partir des données du tableau, puis de déterminer une fonction qui modélise le phénomène et ensuite de discuter l'adéquation de ton modèle aux données fournies.

(Une fonction du type exponentiel convient-elle? Pourquoi ?)

Question testée par la « commission des outils d'évaluation »

- Examen et traduction des données: graphique cartésien



Question testée par la « commission des outils d'évaluation »

Examen et traduction des données

Temps (jours) t	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270
Activité A (impulsion/min)	1000	869	797	701	571	474	417	348	291	262

$$\frac{869}{1000} \approx 0{,}869 \quad \frac{797}{869} \approx 0{,}917 \quad \frac{701}{797} \approx 0{,}879 \quad \frac{571}{701} \approx 0{,}801 \quad \frac{474}{571} \approx 0{,}830$$

$$\frac{417}{474} \approx 0{,}879 \quad \frac{348}{417} \approx 0{,}834 \quad \frac{291}{348} \approx 0{,}836 \quad \frac{262}{291} \approx 0{,}900$$

Question testée par la « commission des outils d'évaluation »

Choix d'un modèle exponentiel paramétré:

$A(t) = a\ b^t$

Détermination de *a* = 1000

Détermination de *b* (p.ex. 0,995) à partir d'un autre couple de valeurs du tableau

Etude de l'adéquation du modèle

Temps (jours) t	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270
Activité A (impulsion/min)	1000	869	797	701	571	474	417	348	291	262

Question testée par la « commission des outils d'évaluation »

Difficultés des élèves :

- ✓ à identifier un modèle adéquat dans le cas où il n'est pas précisé
- ✓ à exploiter le graphique ou la régularité numérique du tableau
- ✓ à paramétriser le modèle ou à le faire convenablement
- ✓ à ajuster le modèle et exploiter le tableau pour juger de son adéquation

Question testée par la « commission des outils d'évaluation »

Interviews des élèves et des professeurs qui permettent de supposer un « manque à enseigner » que l'analyse de la transposition didactique standard permet de confirmer :

- *« Je ne savais pas comment mettre l'énoncé et le problème demandé en rapport avec la théorie et les exercices faits en classe ».* (un élève)
- *« Avant ce test, je n'avais jamais proposé ce type d'exercices à mes élèves. Les résultats le prouvent... Il me faudra mieux préparer mes élèves à ce type d'exercices ».* (un professeur)

Une question du BAC qui fait scandale

- Question relative à une population de bactéries dont « la vitesse d'accroissement est proportionnelle au nombre de bactéries en présence »
- Désarroi des lycéens français dû, en particulier, à la présence de plusieurs paramètres et à la mobilisation d'une équation différentielle

Un débat sur la place octroyée aux aspects expérimentaux

P. ex. Ferrier et Gaud sur la radioactivité :

- Caractère aléatoire de la désintégration radioactive et difficulté à faire sentir aux élèves, sans introduire les variables aléatoires, le lien entre le discret (aspect macro) et le continu (aspect micro)
- Difficulté de trouver un dispositif expérimental pour expérimenter, dans le secondaire, la proportionnalité de ΔN à Δt et à $N(t)$
- Faisabilité didactique du modèle probabiliste de la radioactivité

Un débat sur la place octroyée aux aspects expérimentaux

- Partager les « jeux de rôles » entre professeurs de mathématiques et professeurs d'autres disciplines ?
- Accepter que, en mathématiques, ce soit le caractère « multi-sens » des modèles qui fait leur efficacité et qui procure une économie de pensée ?
- Oui, à condition …

Une position didactique pour le cours de mathématique

- Dégager, de contextes divers, des modèles mathématiques qui rendent compte de plusieurs systèmes intra ou extra-mathématiques
- Sans forcément approfondir les aspects expérimentaux et en misant sur l'interdisciplinarité
- Mais en ayant soin de construire les objets mathématiques comme répondant à ces modèles : en l'occurrence, des fonctions qui sont solutions d'équations différentielles ou, plus généralement, d'équations fonctionnelles

L'exemple des fonctions exponentielles (et logarithmiques)

- Les équations fonctionnelles concernées :

$$
\begin{aligned}
f(x_1 \cdot x_2) &= f(x_1) + f(x_2), \\
f(x_1 + x_2) &= f(x_1) \cdot f(x_2), \\
f'(x) &= \frac{k}{x}, \\
f'(x) &= k f(x).
\end{aligned}
$$

- Et les contextes : croissance de populations, radioactivité, échelles logarithmiques, loi de Weber et Fechner et décibel, …

Une 1ère approche : densification de suites géométriques

- Toutes les demi-heures

temps	0	1/2	1	3/2	2	5/2	…	n
Nb. de bactéries	10000	x	2•10000	z	4 •10000			2^n •10000

$$\frac{x}{10000} = \frac{2\cdot 10000}{x} \quad \text{ou} \quad x^2 = 2\cdot 10000^2 \text{ donc } x = 10000\sqrt{2}$$

$$\frac{z}{2\cdot 10000} = \frac{4\cdot 10000}{z} \quad \text{ou} \quad z^2 = 8\cdot 10000^2 \text{ donc } z = \sqrt{8}\cdot 10000 = 2\sqrt{2}\cdot 10000$$

Densification des suites géométriques-expérimentation

O: Trouvez le rapport qui soit le même pour toutes les demi-heures. Comment le calculer ?

E: Prenons la moyenne des deux :(3/2+4/3)/2=17/12. Si on prend cent bactéries au début, ... il est mieux de prendre cent vingt bactéries, le calcul sera plus simple. On part de cent vingt bactéries. Après une demi-heure, on a 120 (17/12)=170. Après une deuxième demi-heure, on a 240,83333 bactéries (le calcul fait à l'aide d'une calculatrice). C'est très proche de deux cent quarante, mais pas deux cent quarante.

E’ :Donc dix-sept sur douze n'est pas précis.

O: Comment trouver ce rapport ?

E": Il est proche de 17/12, mais un peu plus bas. Une bactérie en plus sur une heure c'est peu de chose. J'obtiens le rapport de 1/240 de trop

E’ :Je prends 120, après une heure, je dois avoir 240.

$17/12 \cdot 120 = 120$

$120(17/12)^2 = 240,833$

E’ :Si je mets au carré, $(17/12)^2 = 2,0069444$.

O: Pourquoi ce rapport dix-sept sur douze n'est -il pas bon?

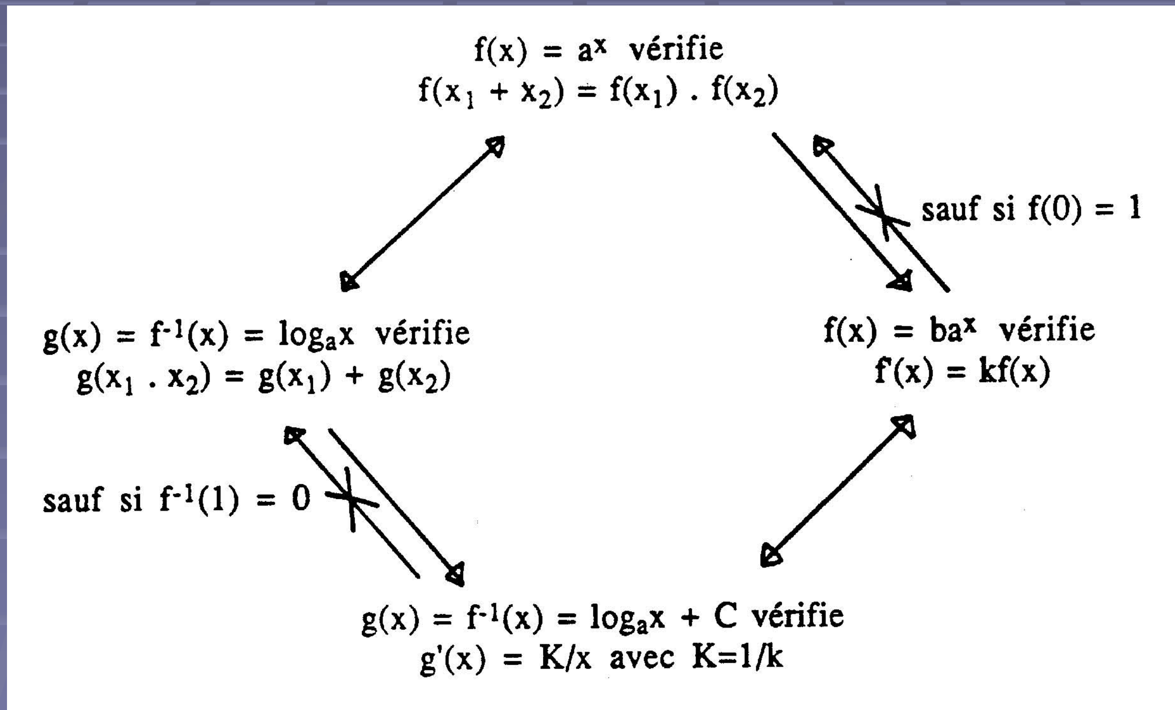
E’ :Car dix-sept sur douze au carré n'est pas égal à 2.

O: Donc quel est le bon rapport ?

E’ :C'est la racine de 2.

Etude des caractéristiques mathématiques

Aspects graphiques, aspects numériques, liens entre les diverses équations fonctionnelles et leurs solutions



L'exemple des fonctions sinusoïdales : contenus du programme

- Valeur approchée de π
- Angles et arcs
- Définition du radian
- Cercle trigonométrique, angle orienté, nombres trigonométriques des angles orientés
- Angles associés
- Formules fondamentales
- Equations et résolution de problèmes
- Fonctions de référence : *sin x* et *cos x*
- Formules d'addition, …

Intentions outillées d'observations

- « Motiver » une extension des nombres trigonométriques des secteurs angulaires utilisés dans la résolution de triangles en 3ème,

  nombres positifs comme rapports de longueurs dans les triangles rectangles
- Trouver du « liant » entre ces divers contenus enseignés de manière trop « saucissonnée »,

  ainsi que faire des liens avec d'autres contenus extra ou intra-mathématiques : phénomènes périodiques en physique, rotations et autres transformations, nombres complexes

Pourquoi le radian ?

Quelques réponses d’ (élèves)-professeurs :

- *« Un angle de a radians intercepte un arc qui mesure a rayons. Donc, le radian a une représentation géométrique … »*

  Et le degré ?

- *« Cela simplifie des formules comme celles du périmètre et de l’aire d’un cercle »*

Pourquoi le radian ?

- *« Le radian, étant un rapport de deux longueurs, n'a pas d'unité. Ainsi , on préfère l'utiliser en physique car on peut les multiplier « sans conséquences » par des mesures. Par exemple, dans l'expression sin (at), at est bien un temps. Qu'en serait-il si l'angle a était exprimé en degrés ? Peut-on multiplier des degrés et des temps ? »*
- *« Le radian est une unité de mesure 'naturelle' de l'angle puisqu'il prend comme référence une longueur caractéristique intrinsèque au cercle »*

Pourquoi le radian ?

- *« A présent, toutes les fonctions trigonométriques sont définies en radians. Le radian est également bien présent en physique »*
- *« On veut une fonction qui soit le sinus d'un réel et non le sinus d'un angle »*
- *« lim (sinx/x) égale 1 quand x tend vers 0 »*
- *« x est une approximation de sinx : ça permet de linéariser des problèmes »*
- *« D sinx = cos x »*
- Dans un dictionnaire des mathématiques (Bouvier et al.) : *« Radian : unité de mesure d'angles et d'arcs de cercle »*

Mouvements harmoniques

- On lie souvent fonctions trigonométriques et phénomènes périodiques
- Parmi ceux-ci, les phénomènes harmoniques jouent un rôle particulier
- Et leur modélisation via les fonctions sinusoïdales va permettre de relier les contenus de programmes

Les mouvements harmoniques

Quelques oscillateurs harmoniques supposés non amortis pendant un certain temps :

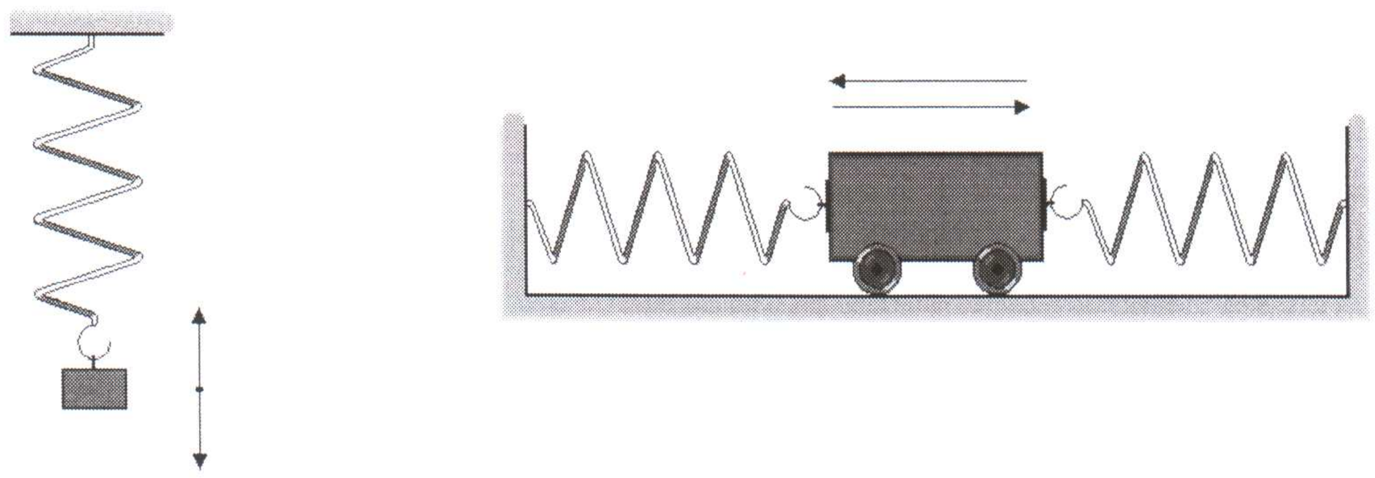
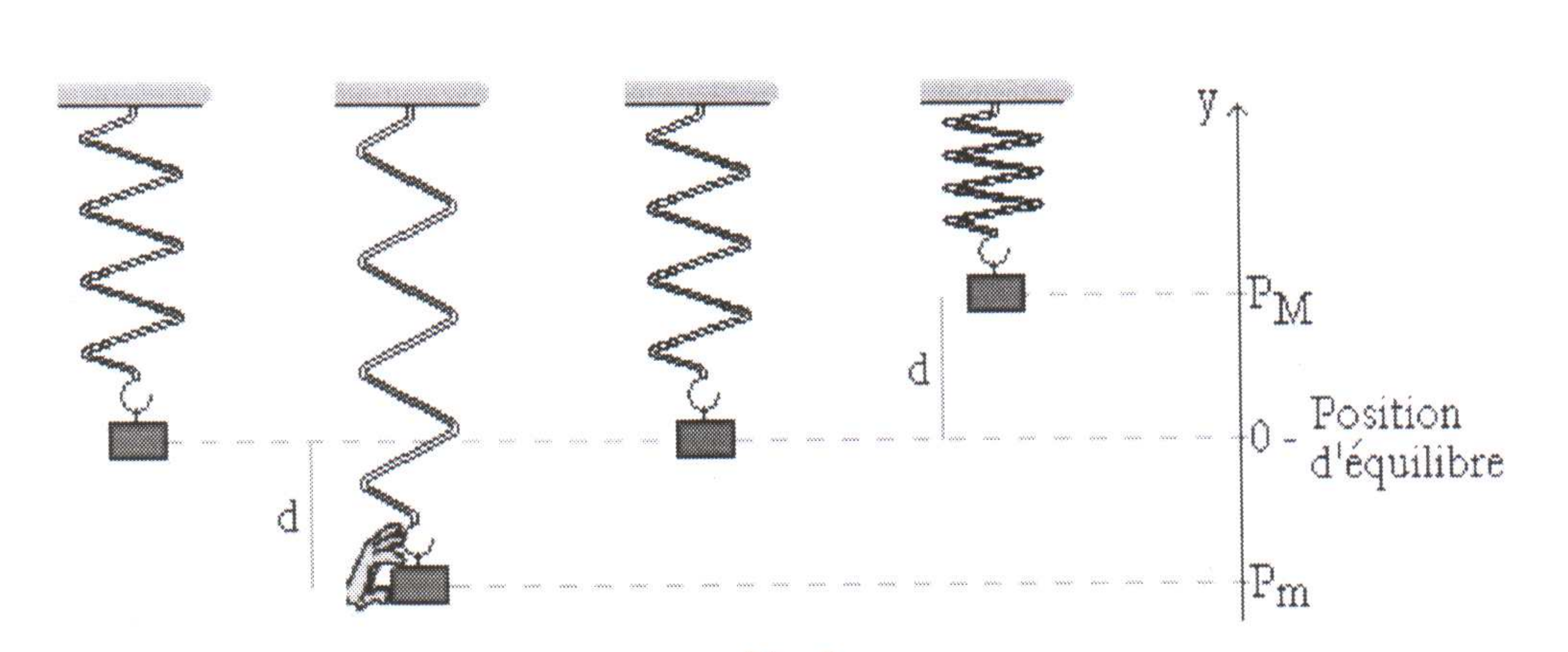


Fig. 1

Les mouvements harmoniques

Positionner un corps en fonction du temps



Les mouvements harmoniques
Plusieurs graphiques possibles *a priori*

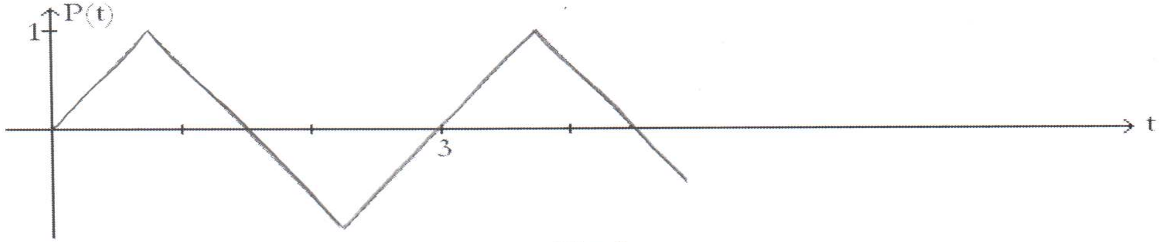


Fig. 3

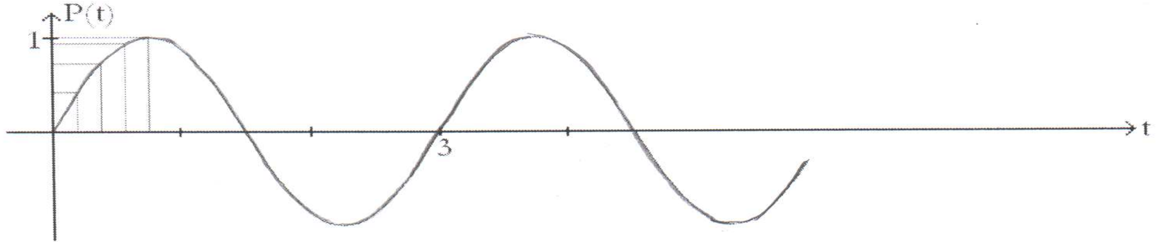


Fig. 4

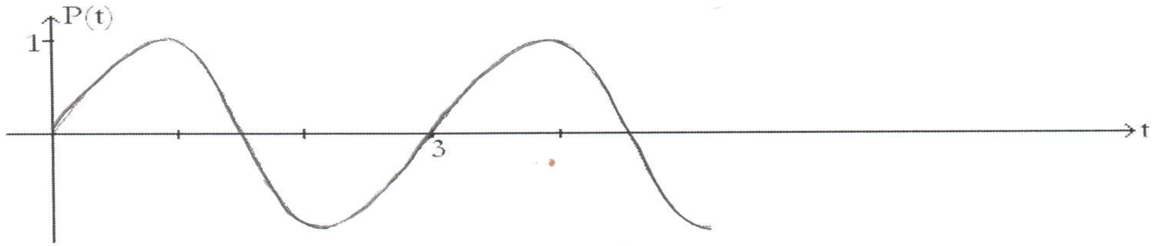


Fig. 5

Les mouvements harmoniques Une première expérience qui permet de trancher

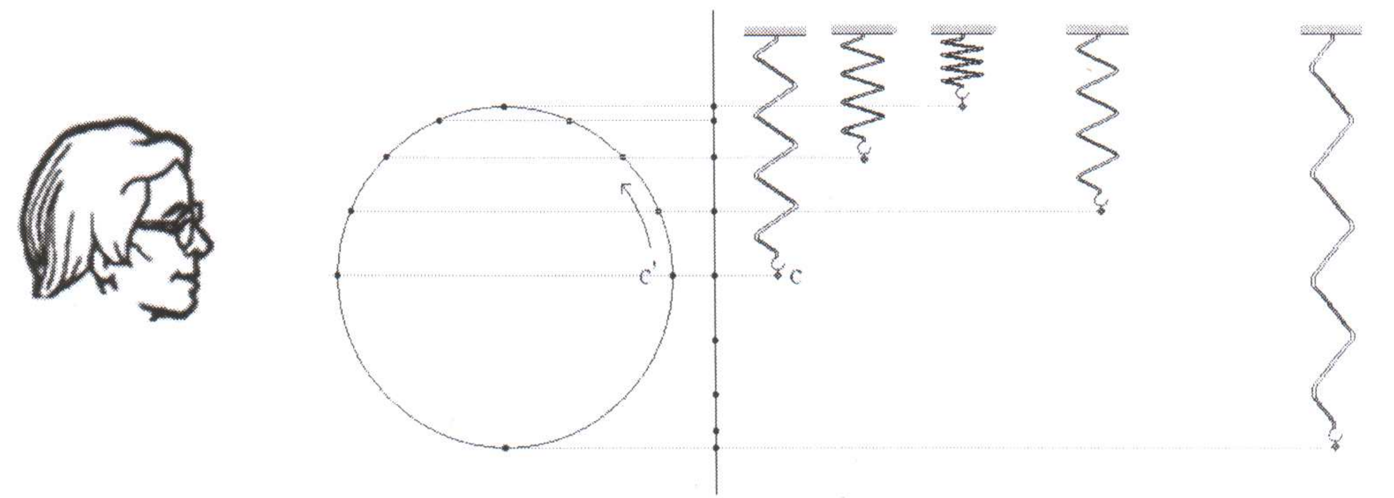
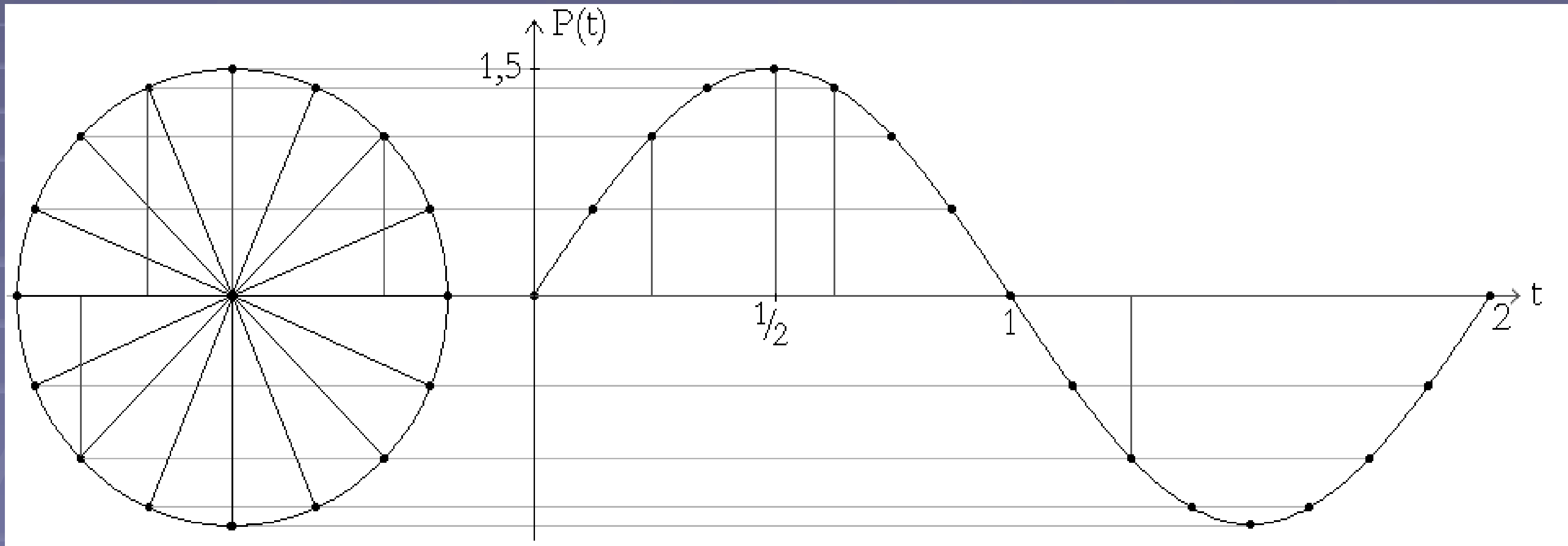


Fig. 7

Un exemple parmi d'autres



Intérêt d'un modèle de référence « adaptable »

- Ces mouvements peuvent changer de période, d'amplitude, de phase, ce qui conduit à des « transformations graphiques » (étirements, translations)
- Construire un modèle de référence avec des unités « adaptables » à chaque phénomène particulier et à chaque « univers » (mécanique céleste pour des phénomènes à l'échelle planétaire, modèle atomique des électrons qui gravitent autour du noyau, …)

Intérêt d'un modèle de référence « adaptable »

- Difficulté de travailler avec les unités conventionnelles du système MKSA
- D'où l'idée de choisir pour unité de longueur le rayon du cercle parcouru par le corps tournant : ce sera l'unité de mesure d'arc
- Et celle de rapporter le temps à l'unité de longueur choisie, c'est-à-dire de considérer le temps unitaire comme étant celui que met le corps qui tourne pour parcourir un arc de même longueur que le rayon du cercle

Les mouvements harmoniques
Questions d'unités de mesures

- L'unité de longueur et celle du temps sont donc choisies comme caractéristiques intrinsèques du phénomène : le rayon du cercle, le temps nécessaire pour parcourir un arc de même longueur que ce rayon. D'où un même nombre-mesure

t	arc
0	0
1,4	1,4
$\pi/2$	$\pi/2$

Retour à l'oscillateur

Le but est de connaître la position P du corps attaché au ressort à tout instant
Supposons que la période est 2π et l'amplitude 1 : déterminer cette position
en $t = \pi / 4$; en $t = \pi / 3$, en $t = 0{,}79$;
en $t = 1{,}4$ (question posée à des élèves qui ne connaissent que le degré comme mesure d'angles

Retour à l'oscillateur

- Mobilisation d'un savoir acquis : la position est donnée par le sinus d'un angle

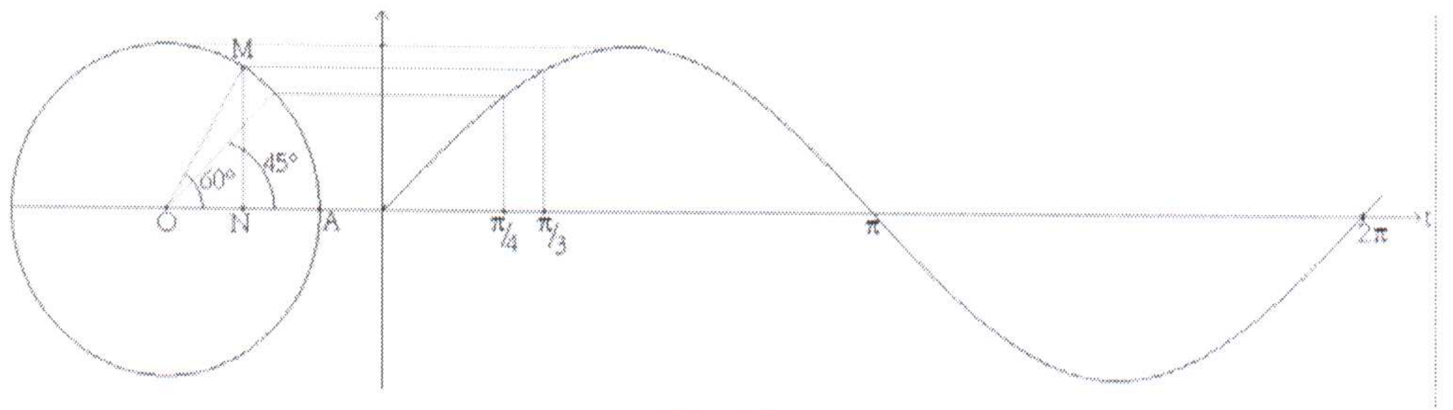


Fig. 16

Retour à l'oscillateur

- Mais, à part dans certains cas, la détermination de l'angle suppose une règle de trois fastidieuse; par exemple, la mesure x d'angle en degrés correspondant à un arc de mesure 1,4 vaut 80,2° :

$$1,4 / 6,28 = x / 360°.$$

- On cherche, de plus, à garder la mémoire des valeurs de t correspondantes dans l'expression de la position. Or, ici, P (1,4) = sin 80,2°

D’où le radian

En supposant que l’unité de mesure d’angle est le radian, défini comme un angle qui intercepte un arc unitaire (qui mesure un « rayon ») :

au temps 1,4, l’arc parcouru vaut 1,4 rayon et l’angle au centre correspondant vaut 1,4 radian

Le tableau numérique « avant »

t	arc	angle	P(t)
0	0	0	0
$\pi / 4$	$\pi / 4$	45°	$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\pi / 3$	$\pi / 3$	60°	$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
1,4	1,4	80,2°	$\sin 80{,}2° \approx 0{,}98$
$\pi / 2$	$\pi / 2$	90°	$\sin 90° = 1$

Le tableau numérique « après »

t	arc	angle	P(t)
0	0	0	0
$\pi / 4$	$\pi / 4$	$\pi / 4$	$\sin \pi / 4$
$\pi / 3$	$\pi / 3$	$\pi / 3$	$\sin \pi / 3$
1,4	1,4	1,4	sin 1,4
$\pi / 2$	$\pi / 2$	$\pi / 2$	$\sin \pi / 2$

Une définition motivée

- En définitive, une fonction sinus qui envoie un réel *x* sur le sinus d'un angle qui mesure, non *x* degrés, mais *x* radians
- Suppose une extension aux autres quadrants des nombres trigonométriques *sin* et *cos* en termes de coordonnées
- Extension qui repose sur les symétries du mouvement du ressort modélisé par un mouvement circulaire et qui motive l'étude des angles associés

Une visée délibérément fonctionnelle …

- Etude des équations et inéquations subordonnée à celle des fonctions

  Il existe une infinité de solutions pour les équations trigonométriques : *« Mais quel intérêt puisqu'on tourne en rond et qu'on est déjà passé par là ».*

  De ce point de vue, le graphique cartésien

  justifie la périodicité des solutions

- Etude des identités et formules orientée vers la transformation algébrique de fonctions

… revisitée au moment de l'étude de la dérivée

Pour faire apparaître l'équation différentielle
y''(t) = - (m/k) y(t) et son ensemble de solutions

- Les aspects expérimentaux portent alors sur l'établissement des lois de la mécanique classique dont *F = ma* et dont on peut déduire des propriétés de mouvements particuliers et sur la détermination des forces en jeu
- Les fonctions de référence correspondent alors à sin x et cos x et l'on revient sur l'intérêt d'avoir défini ces fonctions par rapport au radian

En guise d'exercices et d'évaluation

- Détrôner la « sacro-sainte variation de fonctions »
- Mettre à l'avant-plan la détermination d'un modèle fonctionnel dans un contexte particulier, ce qui suppose une maîtrise des principales classes paramétrées de fonctions, du rôle joué par chacun des paramètres et, éventuellement, de techniques d'ajustement

Conclusion

Choix à débattre, en termes de :

- Articulation avec d'autres disciplines.
- Changements relatifs aux transpositions didactiques habituelles au cours de mathématique