Les fonctions comme outil de catégorisation; incidences sur le curriculum mathématique dans l'enseignement secondaire

Maggy Schneider
Université de Liège, Belgique

CII Didactique, Lyon, 14 juin 2008

Nature de l’exposé

- ✓ Quelques perspectives pour un PER sur les fonctions
- ✓ Niveau de détermination : domaine mathématique
- ✓ Faire le choix d’un caractère fondamental du savoir

Sources : Krysinska (2007), Schneider (1988, …), AHA et commissions de programmes

Plan de l’exposé

- ✓ Un certain regard sur les fonctions
- ✓ Articulation avec l’enseignement de l’analyse au Lycée
- ✓ Retombées sur l’enseignement de l’algèbre au Collège

Une hiérarchisation à faire dans les « demandes » de l'enseignement supérieur

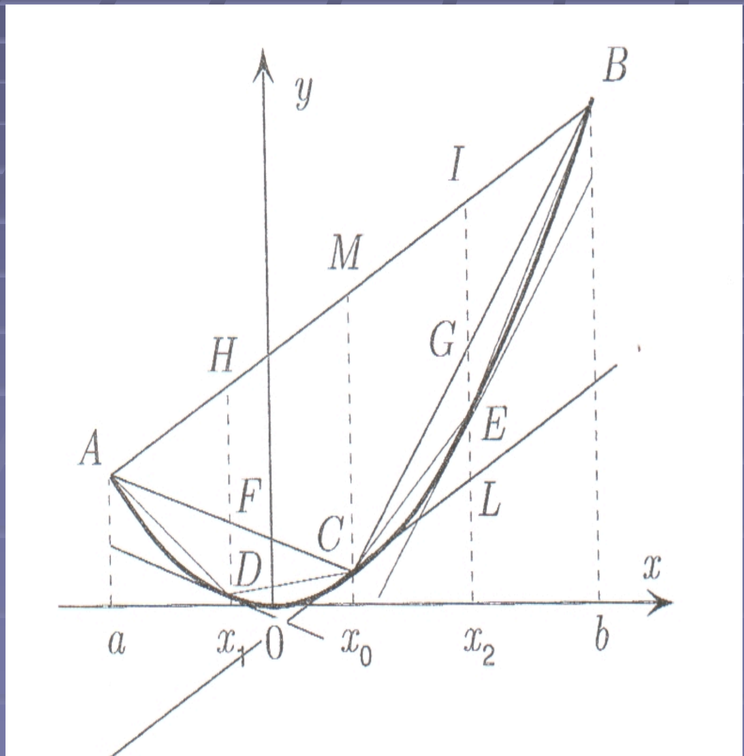
« Fonctions : connaître la notion de fonction et le vocabulaire associé (variable, fonction constante, fonction positive, …) au niveau graphique et/ou analytique ; donner le domaine de définition et le graphe d'une fonction; connaître le vocabulaire élémentaire associé aux graphiques (abscisses, ordonnées …); interpréter le graphe d'une fonction; relier le graphique d'une fonction à une expression analytique; connaître la notion de continuité d'une fonction et pouvoir calculer les limites de fonctions simples; connaître la notion de dérivée d'une fonction; pouvoir établir la fonction résultant de la composition de deux fonctions; connaître les notions de base relatives aux fonctions logarithmes et exponentielles (graphes, dérivées, propriétés élémentaires) » (FUNDP, Projet « prérequis »)

Quelques flashes sur l’émergence des fonctions dans l’histoire

Chez Archimède :

La quadrature du segment de parabole et la cubature de la pyramide sont des problèmes différents bien que relevant tous deux de la méthode d’exhaustion

Quelques flashes sur l'émergence des fonctions dans l'histoire
Un travail à refaire dans chaque cas



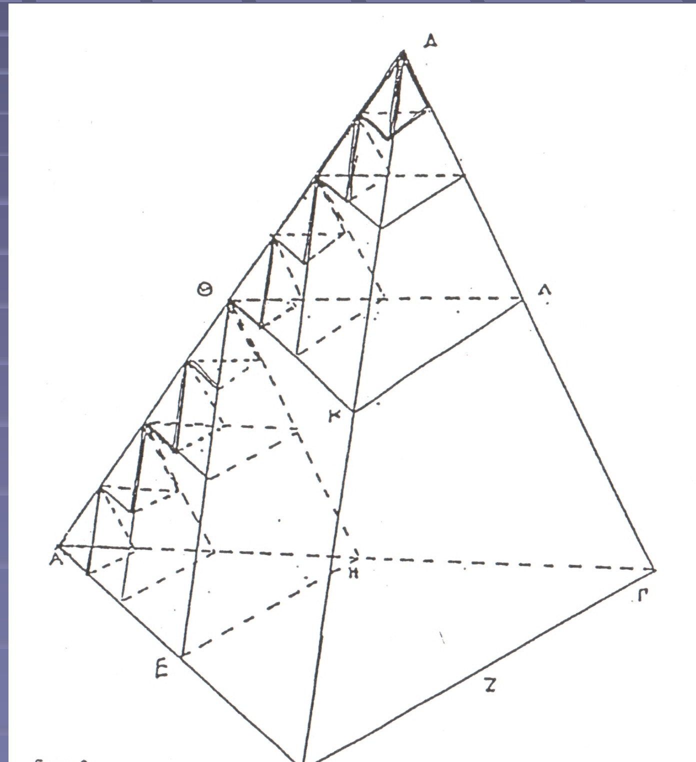


figure 3

Quelques flashes sur l’émergence des fonctions dans l’histoire

- C’est le même problème : primitive d’une fonction du second degré ou limite de sommes de Riemann de même structure
- La détermination d’une aire sous une courbe est un modèle « standard » des problèmes relevant d’une intégrale d’une fonction d’une variable
- Une classification algébrique …

Quelques flashes sur l’émergence des fonctions dans l’histoire

« Mais pour qu’on ait le droit de voir là un “ calcul intégral ”, il faudrait y mettre en évidence, à travers la multiplicité des apparences géométriques, quelque ébauche de classification des problèmes suivant la nature de “ l’intégrand ” sous-jacent. Au XVII^{e} siècle, nous allons le voir, la recherche d’une telle classification devient peu à peu l’un des principaux soucis des géomètres » (Bourbaki)

Quelques flashes sur l'émergence des fonctions dans l'histoire

- Une classification algébrique qui permet d'unifier les problèmes à l'origine du calcul infinitésimal :
  - ✓ Aires et volumes « curvilignes »
  - ✓ Tangentes
  - ✓ Vitesses
  - ✓ Optimisation
- Relève d'un certain degré d'algébrisation (Bolea et al.)

Quelques flashes sur l'émergence des fonctions dans l'histoire

L'objet du calcul infinitésimal formulé :

- en termes de grandeurs chez Newton

  Etant donné la relation liant les quantités fluentes entre elles, déterminer la relation entre les fluxions;

  trouver les fluentes à partir des fluxions

- en termes d'opérateurs de fonctions par Lagrange

  Connaissant une fonction f, trouver ses dérivées et inversement

Choix d’une situation fondamentale

- Une provocation : les fonctions pour permettre le calcul des dérivées (et des primitives) ou les dérivées comme outil d’étude des fonctions ?
- Une « compétence » majeure : connaître les principaux modèles fonctionnels paramétrés, leurs caractéristiques et raisons d’être, leurs opportunités et conditions d’emploi

Choix d’une situation fondamentale

C’est la paramétrisation des modèles fonctionnels qui permet de :

- <u>Catégoriser</u> des phénomènes spécifiques
- <u>Adapter</u> le modèle choisi aux contraintes particulières du problème traité

Choix d’une situation fondamentale

- Quels modèles ?
- Quels critères de choix : entre l’expérimental et la théorie ?
- Le critère de simplicité (Popper)

Etude des modèles fonctionnels paramétrés

- Etude graphique de modèles algébriques
- Modes de validation des caractéristiques mêmes des modèles ?

Etude des modèles fonctionnels paramétrés

- Etudier les fonctions classe par classe mais, le cas échéant, une par une
- Distinguer modèles à « identité graphique » forte des autres
- Admettre une validation hybride pour certains modèles relevant d'un petit nombre d'idéogrammes ($y=af(bx+c)$) : vérité première d'ordre graphique avec une hypothèse implicite de continuité; traduction analytique des translations et affinités particulières
- Rapprocher les modèles des outils d'analyse les plus pertinents

Etude des modèles fonctionnels paramétrés

- Dans une telle étude, certains aspects particuliers sont « relativisés » ou situés autrement : le domaine de définition, le vocabulaire associé aux fonctions, la continuité
- Les cas de limites sont hiérarchisés, étudiés dans un ordre différent et dans un enchevêtrement de deux OM dont il faut assurer la visibilité

Une bicéphalie de fait dans l'enseignement de l'analyse

Deux OM locales émergent d'une analyse empirique de pratiques enseignantes « bicéphales »(Bosch et al., 2003) :

- ✓ L'algèbre des limites, les tâches étant des calculs de limites, tous cas confondus sur base d'un point de vue axiomatique
- ✓ Topologie des limites, les tâches consistant à prouver les propriétés de cette algèbre ou l'existence de limites

Une bicéphalie assumée dont le premier pôle est constitué de deux OM

Deux OM enchevêtrées et à rendre « visibles » :

✓OM « grandeurs » et

✓OM « modélisation fonctionnelle »

Dans chacune d'elles, il ne faut pas réserver le même sort aux différents cas de limites :

✓Limite réelle en une valeur réelle de son domaine de définition ou de continuité

✓Limite réelle en un réel n'appartenant pas au domaine mais à son adhérence

✓Limite réelle aux infinis

✓Limite infinie en un réel

✓Limite infinie aux infinis

OM « Grandeurs »

- Recherche d’aires, de vitesses, … : limites de suites et indéterminations de type « 0/0 »
- Le concept de limite n’est pas, à ce stade, ni un concept unificateur, ni un « proof-generated concept »
- Les questions des élèves sont relatives à la pertinence du modèle : le calcul de la limite donne-t-il bien ce qu’on cherche ?

Souvent le calcul des limites précède celui des dérivées … et pourtant

OM « Grandeurs »

Plan d'un cours de « mathématiques générales » (J. Stewart)

- ✓ Un aperçu du calcul différentiel et intégral
  - ✓ Le problème de l'aire
  - ✓ Le problème de la tangente
  - ✓ La vitesse
  - ✓ La limite d'une suite (paradoxe de Zénon)
  - ✓ La somme d'une série
- ✓ Les limites et dérivées
  - ✓ Les problèmes de tangente et de vitesse
  - ✓ La limite d'une fonction

OM « modélisation fonctionnelle »

- ✓ Quels sont les cas de limites qui apportent le plus à l'étude graphique des fonctions ?
- ✓ Quelles sont les fonctions pour lesquelles l'étude du comportement graphique nécessite vraiment le calcul des limites ? Ou celles pour lesquelles ce calcul suffit presque ?

OM « modélisation fonctionnelle »

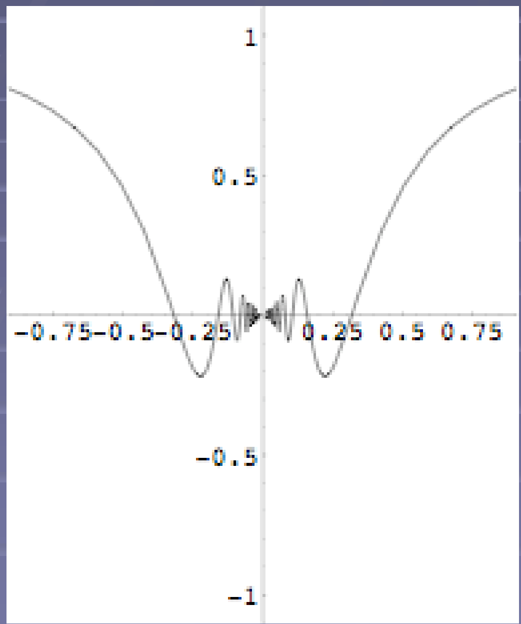
- N’est-il pas « surréaliste » de commencer par un cas tel que limite de $y = x^2$ quand x tend vers 1 ou des fonctions définies par morceaux ?
- Les cas de limites correspondant à l’existence d’asymptotes :
  - sont les plus significatifs du point de vue de la modélisation fonctionnelle
  - peuvent ouvrir sur un questionnement plus théorique : OM « moule déductif »

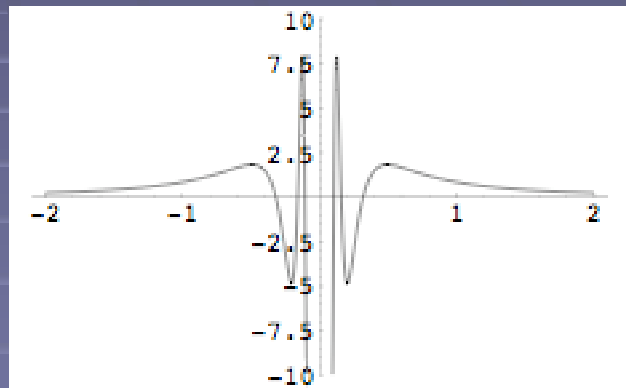
Vers une OM « moule déductif »

Questions sur l'existence d'asymptotes verticales : la fonction *1/ f(x)* possède-t-elle une A.V. là où *f(x)* s'annule? Intérêt d'une preuve car il n'existe plus de technique d'écriture « parlante » comme dans certains cas d'A.H. ou d'A.O.

- ✓ « C'est là où le dénominateur s'annule ». Oui, mais …il existe des graphiques « à trous » et des fonctions sans dénominateur qui ont une A.V.
- ✓ D'où la nécessité de considérer au minimum une hypothèse de continuité et donc des limites en un réel appartenant au domaine de continuité et des cas de limites « tordus » comme contre-exemples
- ✓ C'est dans ce cadre que sont travaillées les premières expressions du concept (formalisé) de limite

Vers une OM « moule déductif »





Quelques écueils de l’enseignement de l’algèbre

- L’absence de fonctionnalité de l’algèbre au collège

  « A l’issue du collège, la manipulation des expressions algébriques n’est tendue vers aucun but extérieur au calcul algébrique, lequel doit trouver en lui-même la source de ses propres exigences. Aussi, les « règles » de cette manipulation sont-elles immotivées, purement formelles, s’exprimant par des consignes elles-mêmes standardisées (développer, factoriser) » (Chevallard)
- Un malaise à propos de la validation des règles algébriques : règles de « conformité », théorèmes « élèves », théorèmes « professeurs » (Mercier, IREM Montpellier)

Quelques écueils de l'enseignement de l'algèbre

- La pseudo-algorithmicité :

  « D'une manière générale, l'enseignement usuel tend à diminuer l'incertitude inhérente à l'activité mathématique en fournissant à l'élève un code de conduite, nulle part explicité comme tel, mais extrêmement prégnant, qui engendre un quasi déterminisme des pratiques mathématiques scolaires, ce que nous nommerons la pseudo-algorithmicité » (Chevallard)

  On a un carré $(1 + \cos 2x)^2$, DONC on le développe

  On a 2 en facteur commun dans $2 + 2\cos 2x$, DONC on factorise : $2 + 2\cos 2x = 2(1 + \cos 2x)$

Quelques écueils de l'enseignement de l'algèbre

- Ignorer que les expressions dénotent :
  - ✓ *Une expression comme y (2x + y) a une valeur numérique qui dépend des valeurs de x et de y et qui n'est pas modifiée par les transformations conformes aux règles algébriques* (Sackur et al.)
  - ✓ *Contraintes versus étiquettes* (Lebeau et Schneider)

Ignorer que les expressions dénotent

Invité à factoriser l'expression

$(2x - 3)^2 - 4(x + 1)(4x - 6) + (4x^2 - 9)$, un élève obtient le résultat « attendu » : $- 4(2x - 3)(x + 2)$.

Mais voici qu'il attend de vous une approbation, et vous le dit : ne se serait-il pas trompé ? Vous croyez habile de lui répondre qu'il pourrait tenter de procéder par lui-même à quelques vérifications, en donnant à x des valeurs numériques simples […].

Votre élève d'occasion, pourtant, ne paraît rien entendre à ce discours. Son étonnement vous étonne. Vous répétez votre suggestion. « On n'a jamais fait ça … », finit-il par avouer. Vous comprenez enfin qu'il n'y a pour lui, à cet instant, aucun lien entre la transformation qu'il a fait subir à l'expression algébrique proposée, d'une part, et le fait de substituer des valeurs numériques à ce… petit x qu'il a si habilement manipulé, d'autre part. Aucun. »

(Chevallard)

Quelques écueils de l'enseignement de l'algèbre

$$\frac{3a+6}{3} = a+2$$

$$\frac{3a+6}{3} = a+6$$

$$\frac{3a+6}{3} = 3a+2$$

Le règne des identités: une histoire belge ?

Réactions de professeurs montrant que ce sont les identités qui gouvernent l'univers algébrique,

malgré l'étude de certaines équations

Difficulté de passer du mode de pensée « inconnue » au mode de pensée « variable » (A. Sierpinska)

Deux compagnies louent des photocopieuses. Elles prennent respectivement 300 $ et 250 $ de location par machine et par mois et 0,04 $ ou 0,06 $ par photocopie.

1. Pour quel nombre de photocopies par mois, le prix de deux compagnies serait le même ?

2. Si vous êtes un grand utilisateur de photocopies, laquelle des deux compagnies choisiriez-vous ?

Baisse de performance observée à la seconde question par rapport à la première.

Obstacle épistémologique ou didactique ?

Construction d'une OM « modélisation fonctionnelle » dès le collège

- L'OM « algèbre » est une OM au service des autres OM (Bosch et Gascon)
- Après OM_{arithm} (programmes de calcul) et $OM_{(in)éqn}$, l'algèbre doit laisser place à la modélisation fonctionnelle au secondaire supérieur (Bosch)

Construction d'une OM « modélisation fonctionnelle » dès le collège

- Proposition d'une OM « modélisation fonctionnelle » qui intègre l'algèbre sans exclure d'autres domaine de fonctionnalité de celle-ci :
  - Géométrie analytique
  - Calcul de grandeurs

Construction d’une OM « modélisation fonctionnelle » dès le collège

- Un démarrage par les « problèmes de dénombrement » :
  - ✓ Regard d’emblée fonctionnel : il n’y a plus de difficulté de passer du mode de pensée « inconnue » au mode de pensée « variable »
  - ✓ Dénotation incontournable
  - ✓ Travail d’équations
  - ✓ Equivalence de modèles : fonctionnalité des identités
  - ✓ Contraste entre fonction, équation, identité qui restaure l’incertitude

Construction d'une OM « modélisation fonctionnelle » dès le collège

Etape	1	2	3	4	…	***n***
Nombre	1	1+4	1+4+9	1+4+9+16	…	$\mathbf{1+2^2+\ldots+\mathit{n}^2}$

Etape	1	2	3	4	…	***n***
Nombre	1	8	27	64	…	n^3

Construction d’une OM « modélisation fonctionnelle » dès le collège

- Faire de l’étude de modèles fonctionnels un des principaux enjeux des problèmes de dénombrement
- Mais quels modèles privilégier au début?
- Comment les valider ?

Choix des premiers modèles : nombres triangulaires, carrés, … ?

Etape	1	2	3	4	…	***n***
Nombre	1	1+4	1+4+9	1+4+9+16	…	$\mathbf{1+2^2+\ldots+}\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}$

Etape	1	2	3	4	…	***n***
Nombre	1	8	27	64	…	$\boldsymbol{n}^{\mathbf{3}}$

Choix des premiers modèles : progressions arithmétiques ou géométriques… ?

Etape	1	2	3	4	…	n
Nombre	5	5+4	$5+2\times4$	$5+3\times4$	…	$5+(n-1)\times4$

Etape	1	2	3	4	…	n
Nombre	2	2×3	2×3^2	2×3^3	…	$2\times3^{n-1}$

Intérêt des progressions arithmétiques ou géométriques

- Offrent une double lecture, itérative et fonctionnelle
- Validation assurée par la définition du produit comme addition répétée et de la puissance comme multiplication répétée
- Faisabilité d’un classement qui se peut se traduire par un paramétrage
- Sources de modèles continus importants : fonctions du premier degré, fonctions exponentielles et logarithmiques
- A contraster rapidement avec d’autres modèles et d’autres types d’équations : e.a. des seconds degrés sous forme factorisée

Densifier les modèles : une dialectique entre numérique et algébrique une validation « socioconstructiviste »

Les modèles sont définis en fonction de projets précis : leur validation n'est pas fondée sur le critère de non-contradiction mais sur la pertinence du modèle eu égard au projet :

- Exemple de la fonctions sinus
- Exemple de la fonction exponentielle

Regard socioconstructiviste au sens des épistémologues

Densifier les modèles :
une dialectique entre numérique et algébrique
une validation « socioconstructiviste »

- Les modèles exponentiels et logarithmiques : préserver une régularité qui préfigure les équations fonctionnelles $f(x+y) = f(x)f(y)$ et $f(xy) = f(x)+f(y)$
- Construction progressive du sens de l'ostensif 2^x pour des *x* appartenant à des ensembles de plus en plus vastes : jusqu'à l'axiome des intervalles emboîtés et la continuité numérique

- 2		0	1/2	1	?	2	3	4	4,6
?		1	?	2	3	2^2	2^3	2^4	?

Densifier les modèles : une dialectique entre numérique et algébrique une validation « socioconstructiviste »

- Le numérique aux commandes de l'algébrique ou l'algébrique aux commandes du numérique :

  L'exemple des nombres relatifs et la volonté d'associer un seul ostensif algébrique à cette entité géométrique qu'est une droite : $y = ax + b$

Fonctions, (in)équations, identités

- Dans cette OM, les fonctions constituent le principal objet d'étude
- Les équations et inéquations sont interprétées en termes fonctionnels y compris graphiquement
- Les identités sont des outils de transformations de fonctions en fonction de besoins particuliers : factoriser pour obtenir les racines, …

Fonctions, (in)équations, identités

- Les problèmes de dénombrement amènent la question de l'équivalence de deux modèles pour un même système (Noirfalise)
- Mais leur caractère discret n'autorise qu'une falsification des règles non « conformes »
- Le calcul des grandeurs reste alors un créneau intéressant de validation socioconstructiviste qui suppose implicitement que le continu géométrique a son équivalent numérique

En guise de conclusion

- Des OM enchevêtrées
- Des modes de validation hybrides : de la difficulté d'accepter un discours technologique qui ne soit pas calqué sur une théorie standardisée
- Des dispositifs didactiques susceptibles d'assurer la « visibilité » de chacune de ces OM