



CEMPI CENTRE EUROPÉEN
POUR LES MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE ET
LEURS INTERACTIONS



Université
de Lille
1 SCIENCES
ET TECHNOLOGIES

Analyse multifractale de la divergence de séries d'ondelettes

Céline ESSER

Celine.Esser@univ-lille1.fr

Université Lille 1 – Laboratoire Paul Painlevé

Séminaire d'analyse fonctionnelle
Lille – 6 novembre 2015

Travail en collaboration avec S. JAFFARD (Université Paris Est - Créteil)

Introduction

Séries de Fourier

- Du Bois Raymond (1873) : Il existe une fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge en un point.

Séries d'ondelettes

Introduction

Séries de Fourier

- Du Bois Raymond (1873) : Il existe une fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge en un point.

Séries d'ondelettes

- Haar (1910) : Construction d'une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$ dans laquelle l'expansion de toute fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ converge uniformément sur tout compact.

Introduction

Séries de Fourier

- Du Bois Raymond (1873) : Il existe une fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge en un point.
- Kahane et Katznelson (1966) : Si $A \subset \mathbb{T}$ est un F_σ de mesure de Lebesgue nulle, il existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge en tout point de A .

Séries d'ondelettes

- Haar (1910) : Construction d'un base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$ dans laquelle l'expansion de toute fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ converge uniformément sur tout compact.

Introduction

Séries de Fourier

- Du Bois Raymond (1873) : Il existe une fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge en un point.
- Kahane et Katznelson (1966) : Si $A \subset \mathbb{T}$ est un F_σ de mesure de Lebesgue nulle, il existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge en tout point de A .

Séries d'ondelettes

- Haar (1910) : Construction d'un base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$ dans laquelle l'expansion de toute fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ converge uniformément sur tout compact.
- Base d'ondelettes et convergence uniforme de l'expansion de toute fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ (Walter 1995).

Introduction

Séries de Fourier

- Du Bois Raymond (1873) : Il existe une fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge en un point.
- Kahane et Katznelson (1966) : Si $A \subset \mathbb{T}$ est un F_σ de mesure de Lebesgue nulle, il existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge en tout point de A .
- Carleson et Hunt (1967) : Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ ($p > 1$), sa série de Fourier converge presque partout.

Séries d'ondelettes

- Haar (1910) : Construction d'un base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$ dans laquelle l'expansion de toute fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ converge uniformément sur tout compact.
- Base d'ondelettes et convergence uniforme de l'expansion de toute fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ (Walter 1995).

Introduction

Séries de Fourier

- Du Bois Raymond (1873) : Il existe une fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge en un point.
- Kahane et Katznelson (1966) : Si $A \subset \mathbb{T}$ est un F_σ de mesure de Lebesgue nulle, il existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge en tout point de A .
- Carleson et Hunt (1967) : Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ ($p > 1$), sa série de Fourier converge presque partout.

Séries d'ondelettes

- Haar (1910) : Construction d'une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$ dans laquelle l'expansion de toute fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ converge uniformément sur tout compact.
- Base d'ondelettes et convergence uniforme de l'expansion de toute fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ (Walter 1995).
- Kelly, Kon et Raphale (1994) : Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ ($p \geq 1$), son expansion en ondelettes converge presque partout.

Introduction

Séries de Fourier

- Du Bois Raymond (1873) : Il existe une fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge en un point.
- Kahane et Katznelson (1966) : Si $A \subset \mathbb{T}$ est un F_σ de mesure de Lebesgue nulle, il existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge en tout point de A .
- Carleson et Hunt (1967) : Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ ($p > 1$), sa série de Fourier converge presque partout.

Question commune.

Soit x un point de divergence du développement de $f \in L^p(\mathbb{T})$. Caractérisation du taux de divergence ? Taille de l'ensemble des points ayant un taux de divergence donné ?

Séries d'ondelettes

- Haar (1910) : Construction d'une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$ dans laquelle l'expansion de toute fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ converge uniformément sur tout compact.
- Base d'ondelettes et convergence uniforme de l'expansion de toute fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ (Walter 1995).
- Kelly, Kon et Raphale (1994) : Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ ($p \geq 1$), son expansion en ondelettes converge presque partout.

Dimension de Hausdorff

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ et $s > 0$. On pose

$$\mathcal{H}_\delta^s(B) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_j)^s : (B_j)_{j \in \mathbb{N}} \text{ } \delta\text{-recouvrement de } B \right\}.$$

et on définit la mesure extérieure de Hausdorff \mathcal{H}^s par

$$\mathcal{H}^s(B) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(B) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(B)$$

Dimension de Hausdorff

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ et $s > 0$. On pose

$$\mathcal{H}_\delta^s(B) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_j)^s : (B_j)_{j \in \mathbb{N}} \text{ } \delta\text{-recouvrement de } B \right\}.$$

et on définit la mesure extérieure de Hausdorff \mathcal{H}^s par

$$\mathcal{H}^s(B) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(B) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(B)$$

Il existe une valeur critique pour laquelle $s \mapsto \mathcal{H}^s(B)$ “saute” de l’infini à 0. La dimension de Hausdorff $\dim_{\mathcal{H}}(B)$ de B est définie par

$$\dim_{\mathcal{H}}(B) = \sup \{ s \geq 0 : \mathcal{H}^s(B) = \infty \}$$

Cas des séries de Fourier

Si $f \in L^p(\mathbb{T})$,

$$\|S_n f\|_\infty \leq C_p n^{1/p} \|f\|_p$$

Question.

Soit $\beta \in [0, 1/p]$. Que peut-on dire sur la taille de l'ensemble des points x tels que $|S_n f(x)| \approx n^\beta$?

Cas des séries de Fourier

Si $f \in L^p(\mathbb{T})$,

$$\|S_n f\|_\infty \leq C_p n^{1/p} \|f\|_p$$

Question.

Soit $\beta \in [0, 1/p]$. Que peut-on dire sur la taille de l'ensemble des points x tels que $|S_n f(x)| \approx n^\beta$?

Aubry (2006)

Si $p > 1$ et si $f \in L^p(\mathbb{T})$, alors

$$\dim_{\mathcal{H}} \left\{ x : \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-\beta} |S_n f(x)| > 0 \right\} \leq 1 - \beta p, \quad \forall \beta \in [0, 1/p].$$

Si $\beta \in [0, 1/p]$ est fixé, le résultat d'Aubry est optimal.

Aubry (2006)

Étant donné un ensemble E tel que $\dim_{\mathcal{H}} E < 1 - \beta p$, il existe $f \in L^p(\mathbb{T})$ tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-\beta} |S_n f(x)| = +\infty \quad \forall x \in E.$$

Si $\beta \in [0, 1/p]$ est fixé, le résultat d'Aubry est optimal.

Aubry (2006)

Étant donné un ensemble E tel que $\dim_{\mathcal{H}} E < 1 - \beta p$, il existe $f \in L^p(\mathbb{T})$ tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-\beta} |S_n f(x)| = +\infty \quad \forall x \in E.$$

Indice de divergence au point x :

$$\beta_f(x) = \inf \{ \beta \geq 0 : |S_n f(x)| = O(n^\beta) \} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log |S_n f(x)|}{\log n}$$

Bayart, Heurteaux (2011)

Quasi-toute fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$ satisfait

$$\dim_{\mathcal{H}} \{x : \beta_f(x) = \beta\} = 1 - \beta p, \quad \forall \beta \in [0, 1/p].$$

Si $\beta \in [0, 1/p]$ est fixé, le résultat d'Aubry est optimal.

Aubry (2006)

Étant donné un ensemble E tel que $\dim_{\mathcal{H}} E < 1 - \beta p$, il existe $f \in L^p(\mathbb{T})$ tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-\beta} |S_n f(x)| = +\infty \quad \forall x \in E.$$

Indice de divergence au point x :

$$\beta_f(x) = \inf \{ \beta \geq 0 : |S_n f(x)| = O(n^\beta) \} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log |S_n f(x)|}{\log n}$$

Bayart, Heurteaux (2011)

Quasi-toute fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$ satisfait

$$\dim_{\mathcal{H}} \{ x : \beta_f(x) = \beta \} = 1 - \beta p, \quad \forall \beta \in [0, 1/p].$$

Pour ces fonctions, on a en particulier

$$\dim_{\mathcal{H}} \left\{ x : \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-\beta} |S_n f(x)| > 0 \right\} = 1 - \beta p, \quad \forall \beta \in [0, 1/p].$$

Divergence de séries d'ondelettes

Soient Φ et Ψ tels que les fonctions

$$\begin{cases} \Phi_k : x \mapsto \Phi(x - k), & k \in \mathbb{Z} \\ \Psi_{j,k} : x \mapsto 2^{j/2}\Psi(2^j x - k), & j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Divergence de séries d'ondelettes

Soient Φ et Ψ tels que les fonctions

$$\begin{cases} \Phi_k : x \mapsto \Phi(x - k), & k \in \mathbb{Z} \\ \Psi_{j,k} : x \mapsto 2^{j/2} \Psi(2^j x - k), & j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Base d'ondelette de $L^2(\mathbb{T})$. Une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$ est donnée par la fonction constante égale à 1 et les ondelettes périodisées

$$\psi_{j,k} : x \mapsto \sum_{l \in \mathbb{Z}} \Psi_{j,k}(x - l), \quad j \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}.$$

Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, ses coefficients d'ondelettes sont notés $c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$.

Divergence de séries d'ondelettes

Soient Φ et Ψ tels que les fonctions

$$\begin{cases} \Phi_k : x \mapsto \Phi(x - k), & k \in \mathbb{Z} \\ \Psi_{j,k} : x \mapsto 2^{j/2} \Psi(2^j x - k), & j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Base d'ondelette de $L^2(\mathbb{T})$. Une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$ est donnée par la fonction constante égale à 1 et les ondelettes périodisées

$$\psi_{j,k} : x \mapsto \sum_{l \in \mathbb{Z}} \Psi_{j,k}(x - l), \quad j \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}.$$

Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, ses coefficients d'ondelettes sont notés $c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$.

Hypothèse. Ψ est à décroissance rapide.

Si $f \in L^p(\mathbb{T})$,

$$|c_{j,k}| \leq C_\psi 2^{j(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})} \|f\|_p \implies \|c_{j,k} \psi_{j,k}\|_\infty \leq C_\psi 2^{\frac{j}{p}}$$

Si $f \in L^p(\mathbb{T})$,

$$|c_{j,k}| \leq C_\psi 2^{j(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \|f\|_p \implies \|c_{j,k} \psi_{j,k}\|_\infty \leq C_\psi 2^{\frac{j}{p}}$$

Aubry (2006)

Si $p > 1$ et si $f \in L^p(\mathbb{T})$, alors

$$\dim_{\mathcal{H}} \left\{ x : \limsup_{J \rightarrow \infty} 2^{-\beta J} \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} |c_{j,k} \psi_{j,k}(x)| > 0 \right\} \leq 1 - \beta p, \quad \forall \beta \in [0, 1/p].$$

Si $f \in L^p(\mathbb{T})$,

$$|c_{j,k}| \leq C_\psi 2^{j(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \|f\|_p \implies \|c_{j,k} \psi_{j,k}\|_\infty \leq C_\psi 2^{\frac{j}{p}}$$

Aubry (2006)

Si $p > 1$ et si $f \in L^p(\mathbb{T})$, alors

$$\dim_{\mathcal{H}} \left\{ x : \limsup_{J \rightarrow \infty} 2^{-\beta J} \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} |c_{j,k} \psi_{j,k}(x)| > 0 \right\} \leq 1 - \beta p, \quad \forall \beta \in [0, 1/p].$$

Réciproquement, si ψ est l'ondelette de Haar, étant donné un ensemble E tel que $\dim_{\mathcal{H}} E < 1 - \beta p$, il existe $f \in L^p(\mathbb{T})$ tel que

$$\limsup_{J \rightarrow \infty} 2^{-\beta J} \left| \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k} \psi_{j,k}(x) \right| = +\infty \quad \forall x \in E.$$

Analyse multifractale de la divergence

Exposant de divergence de f en x :

$$d_f(x) = \sup\{\gamma : \exists C > 0, \exists(i_n, j_n, k_n), |c_{j_n, k_n} \psi_{j_n, k_n}(x)| \geq C 2^{\gamma j_n}\}$$

Spectre de divergence de f

$$D_f : \gamma \mapsto \dim \{x : d_f(x) = \gamma\}$$

Analyse multifractale de la divergence

Exposant de divergence de f en x :

$$d_f(x) = \sup\{\gamma : \exists C > 0, \exists(i_n, j_n, k_n), |c_{j_n, k_n} \psi_{j_n, k_n}(x)| \geq C 2^{\gamma j_n}\}$$

Spectre de divergence de f

$$D_f : \gamma \mapsto \dim \{x : d_f(x) = \gamma\}$$

Remarque. Un exposant de divergence ne donne une divergence de la série d'ondelette que s'il est positif ! Néanmoins, les résultats que nous obtenons sont aussi valides pour des exposants négatifs.

Espaces de Besov

On utilise une ondelette ψ suffisamment régulière (au moins continue par morceaux) et une normalisation L^∞ des ondelettes, i.e. on pose

$$\psi_{j,k} = \psi(2^j x - k), \quad j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}.$$

Les coefficients d'ondelettes de f sont donnés par

$$c_{j,k} = 2^j \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi(2^j x - k) dx.$$

Espaces de Besov

On utilise une ondelette ψ suffisamment régulière (au moins continue par morceaux) et une normalisation L^∞ des ondelettes, i.e. on pose

$$\psi_{j,k} = \psi(2^j x - k), \quad j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}.$$

Les coefficients d'ondelettes de f sont donnés par

$$c_{j,k} = 2^j \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi(2^j x - k) dx.$$

Caractérisation des espaces de Besov. Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p, q > 0$. Alors

$$f \in B_p^{s,q} \iff \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p \right)^{1/p} = \varepsilon_j \quad \text{avec} \quad \varepsilon_j \in l^q$$

$$f \in B_p^{s,q} \iff \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p \right)^{1/p} = \varepsilon_j \quad \text{avec} \quad \varepsilon_j \in l^q$$

En particulier,

$$\exists C > 0 : \forall j \quad \sum_{k=0}^{2^j-1} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p \leq C \implies |c_{j,k}| \leq C^{\frac{1}{p}} 2^{(\frac{1}{p}-s)j}$$

$$f \in B_p^{s,q} \iff \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p \right)^{1/p} = \varepsilon_j \quad \text{avec} \quad \varepsilon_j \in l^q$$

En particulier,

$$\exists C > 0 : \forall j \quad \sum_{k=0}^{2^j-1} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p \leq C \implies |c_{j,k}| \leq C^{\frac{1}{p}} 2^{(\frac{1}{p}-s)j}$$

Conséquence. Si $f \in B_p^{s,q}$, alors

$$d_f(x) \leq \frac{1}{p} - s, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

E., Jaffard (2015)

Si $f \in B_p^{s,q}$, alors pour tout $\gamma \in [-s, \frac{1}{p} - s]$, on a

$$\dim_{\mathcal{H}} \{x : d_f(x) \geq \gamma\} \leq 1 - sp - \gamma p.$$

En particulier, le spectre de divergence de f satisfait

$$D_f(\gamma) \leq 1 - sp - \gamma p.$$

E., Jaffard (2015)

Si $f \in B_p^{s,q}$, alors pour tout $\gamma \in [-s, \frac{1}{p} - s]$, on a

$$\dim_{\mathcal{H}} \{x : d_f(x) \geq \gamma\} \leq 1 - sp - \gamma p.$$

En particulier, le spectre de divergence de f satisfait

$$D_f(\gamma) \leq 1 - sp - \gamma p.$$

Preuve. On pose

$$E_{j,\gamma} := \{k : |c_{j,k}| \geq 2^{\gamma j}\}, \quad E_{j,\gamma}^\varepsilon := \bigcup_{k \in E_{j,\gamma}} \left] k2^{-j} - 2^{(\varepsilon-1)j}, k2^{-j} + 2^{(\varepsilon-1)j} \right[$$

$$E_\gamma^\varepsilon := \limsup_{j \rightarrow +\infty} E_{j,\gamma}^\varepsilon.$$

E., Jaffard (2015)

Si $f \in B_p^{s,q}$, alors pour tout $\gamma \in [-s, \frac{1}{p} - s]$, on a

$$\dim_{\mathcal{H}} \{x : d_f(x) \geq \gamma\} \leq 1 - sp - \gamma p.$$

En particulier, le spectre de divergence de f satisfait

$$D_f(\gamma) \leq 1 - sp - \gamma p.$$

Preuve. On pose

$$E_{j,\gamma} := \{k : |c_{j,k}| \geq 2^{\gamma j}\}, \quad E_{j,\gamma}^\varepsilon := \bigcup_{k \in E_{j,\gamma}} \left] k2^{-j} - 2^{(\varepsilon-1)j}, k2^{-j} + 2^{(\varepsilon-1)j} \right[$$

$$E_\gamma^\varepsilon := \limsup_{j \rightarrow +\infty} E_{j,\gamma}^\varepsilon.$$

Puisque $\sum_k |c_{j,k}| 2^{(s-\frac{1}{p})j} \leq C$, on a

$$\#E_{j,\gamma} \leq C \cdot 2^{(1-sp-\gamma p)j},$$

et donc

$$\dim_{\mathcal{H}}(E_\gamma^\varepsilon) \leq \frac{1 - sp - \gamma p}{1 - \varepsilon}.$$

Si on a

$$\{x : d_f(x) > \gamma\} \subset E_\gamma^\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

on aura alors

$$\dim_{\mathcal{H}}\{x : d_f(x) > \gamma\} \leq 1 - sp - \gamma p \quad \forall \gamma.$$

Si on a

$$\{x : d_f(x) > \gamma\} \subset E_\gamma^\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

on aura alors

$$\dim_{\mathcal{H}}\{x : d_f(x) > \gamma\} \leq 1 - sp - \gamma p \quad \forall \gamma.$$

Par conséquent, pour tout $\delta > 0$, on aura

$$\dim_{\mathcal{H}}\{x : d_f(x) \geq \gamma\} \leq \dim_{\mathcal{H}}\{x : d_f(x) > \gamma - \delta\} \leq 1 - sp - (\gamma - \delta)p$$

d'où

$$\dim_{\mathcal{H}}\{x : d_f(x) \geq \gamma\} \leq 1 - sp - \gamma p.$$

Montrons que

$$x \notin E_\gamma^\varepsilon \implies d_f(x) \leq \gamma$$

Montrons que

$$x \notin E_\gamma^\varepsilon \implies d_f(x) \leq \gamma$$

On estime $|c_{j,k}\psi_{j,k}(x)|$. Rappelons que

$$E_\gamma^\varepsilon = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{k \in E_{j,\gamma}} \left] k2^{-j} - 2^{(\varepsilon-1)j}, k2^{-j} + 2^{(\varepsilon-1)j} \right[$$

Montrons que

$$x \notin E_\gamma^\varepsilon \implies d_f(x) \leq \gamma$$

On estime $|c_{j,k}\psi_{j,k}(x)|$. Rappelons que

$$E_\gamma^\varepsilon = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{k \in E_{j,\gamma}} \left] k2^{-j} - 2^{(\varepsilon-1)j}, k2^{-j} + 2^{(\varepsilon-1)j} \right[$$

1. $k \notin E_{j,\gamma}$ i.e. $|c_{j,k}| < 2^{\gamma j}$, alors $|c_{j,k}\psi_{j,k}(x)| \leq 2^{\gamma j}$.

Montrons que

$$x \notin E_\gamma^\varepsilon \implies d_f(x) \leq \gamma$$

On estime $|c_{j,k}\psi_{j,k}(x)|$. Rappelons que

$$E_\gamma^\varepsilon = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{k \in E_{j,\gamma}} \left] k2^{-j} - 2^{(\varepsilon-1)j}, k2^{-j} + 2^{(\varepsilon-1)j} \right[$$

1. $k \notin E_{j,\gamma}$ i.e. $|c_{j,k}| < 2^{\gamma j}$, alors $|c_{j,k}\psi_{j,k}(x)| \leq 2^{\gamma j}$.

2. $k \in E_{j,\gamma}$ i.e. $|c_{j,k}| \geq 2^{\gamma j}$ Vu la décroissance rapide des ondelettes,

$$\forall N, \exists C_N \text{ tel que } |\psi(2^j x - k)| \leq \frac{C_N}{(1 + |2^j x - k|)^N}.$$

Comme $x \notin E_\gamma^\varepsilon$ et $k \in E_{j,\gamma}$, on a $|2^j x - k| \geq 2^{\varepsilon j}$ si $j \gg$ et donc

$$|\psi(2^j x - k)| \leq C_N 2^{-\varepsilon N j}.$$

Rappelons que $|c_{j,k}| \leq C 2^{-(s-1/p)j}$, d'où

$$|c_{j,k}\psi_{j,k}(x)| \leq C_N C 2^{-(s-1/p)j} 2^{-\varepsilon N j} \leq 2^{\gamma j} \text{ si } j \gg .$$

Optimalité du résultat

E., Jaffard (2015)

Quasi-toute fonction $f \in B_p^{s,q}$ satisfait

$$d_f(x) \in \left[-s, \frac{1}{p} - s \right] \quad \forall x$$

et

$$D_f(\gamma) = \dim_{\mathcal{H}} \{x : d_f(x) = \gamma\} = 1 - sp - \gamma p, \quad \forall \gamma \in \left[-s, \frac{1}{p} - s \right].$$

Optimalité du résultat

E., Jaffard (2015)

Quasi-toute fonction $f \in B_p^{s,q}$ satisfait

$$d_f(x) \in \left[-s, \frac{1}{p} - s \right] \quad \forall x$$

et

$$D_f(\gamma) = \dim_{\mathcal{H}} \{x : d_f(x) = \gamma\} = 1 - sp - \gamma p, \quad \forall \gamma \in \left[-s, \frac{1}{p} - s \right].$$

Remarque. On se place dans un premier temps sur $[0, 1[$ et on considère les ondelettes $\psi_{j,k}$, $j \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$.

Optimalité du résultat

E., Jaffard (2015)

Quasi-toute fonction $f \in B_p^{s,q}$ satisfait

$$d_f(x) \in \left[-s, \frac{1}{p} - s \right] \quad \forall x$$

et

$$D_f(\gamma) = \dim_{\mathcal{H}} \{x : d_f(x) = \gamma\} = 1 - sp - \gamma p, \quad \forall \gamma \in \left[-s, \frac{1}{p} - s \right].$$

Remarque. On se place dans un premier temps sur $[0, 1[$ et on considère les ondelettes $\psi_{j,k}$, $j \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$.

Fonction de saturation F_a :

$$c_{j,k} = \begin{cases} \frac{1}{j^a} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{-\frac{1}{p}J} & \text{avec } \frac{k}{2^j} = \frac{K}{2^J}, K \notin 2\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Montrons que

(1) $F_a \in B_p^{s,q}$

(2) $d_{F_a}(x) \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$ pour tout x

(3) $\dim_{\mathcal{H}} \{x : d_{F_a}(x) = \gamma\} = 1 - sp - \gamma p$ pour tout $\gamma \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$

(4) Construction du G_δ dense à partir de F_a

Montrons que

(1) $F_a \in B_p^{s,q}$

(2) $d_{F_a}(x) \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$ pour tout x

(3) $\dim_{\mathcal{H}} \{x : d_{F_a}(x) = \gamma\} = 1 - sp - \gamma p$ pour tout $\gamma \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$

(4) Construction du G_δ dense à partir de F_a

Lemme

Si $a > \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors $F_a \in B_p^{s,q}$.

Preuve. Pour tout $J \leq j$, il y a 2^J coefficients tels que $\frac{k}{2^J} = \frac{K}{2^J}$. Donc

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p = \frac{1}{j^{ap}} \sum_{J=1}^j 2^J (2^{-\frac{J}{p}})^p = j^{1-ap},$$

et il faut

$$\sum_{j \geq 1} (j^{\frac{1}{p}-a})^q < \infty.$$

Ok si $(\frac{1}{p} - a)q < -1$ i.e. si $a > \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Montrons que

(1) $F_a \in B_p^{s,q}$ ✓

(2) $d_{F_a}(x) \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$ pour tout x

(3) $\dim_{\mathcal{H}} \{x : d_{F_a}(x) = \gamma\} = 1 - sp - \gamma p$ pour tout $\gamma \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$

(4) Construction du G_δ dense à partir de F_a

Lemme

Si $a > \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors $F_a \in B_p^{s,q}$.

Preuve. Pour tout $J \leq j$, il y a 2^J coefficients tels que $\frac{k}{2^j} = \frac{K}{2^J}$. Donc

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p = \frac{1}{j^{ap}} \sum_{J=1}^j 2^J (2^{-\frac{J}{p}})^p = j^{1-ap},$$

et il faut

$$\sum_{j \geq 1} (j^{\frac{1}{p}-a})^q < \infty.$$

Ok si $(\frac{1}{p} - a)q < -1$ i.e. si $a > \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Lemme

Il existe $C > 0$ et (j_l, k_l) , $l \in \{1, \dots, L\}$, tels que

$$\forall x \in [0, 1] \exists l \in \{1, \dots, L\} : |\psi(2^{j_l} x - k_l)| \geq C.$$

Preuve. Pour tout $x \in [0, 1]$, il existe une ondelette $\psi_{j,k}$ telle que $\psi(2^j x - k) \neq 0$. Par continuité, il existe un voisinage I_x de x sur lequel

$$\forall y \in I_x, \quad |\psi(2^j y - k)| \geq C_x > 0.$$

Puisque ces boules recouvrent $[0, 1]$, on peut en extraire un recouvrement fini. □

Lemme

Il existe $C > 0$ et (j_l, k_l) , $l \in \{1, \dots, L\}$, tels que

$$\forall x \in [0, 1] \exists l \in \{1, \dots, L\} : |\psi(2^{j_l} x - k_l)| \geq C.$$

Preuve. Pour tout $x \in [0, 1]$, il existe une ondelette $\psi_{j,k}$ telle que $\psi(2^j x - k) \neq 0$. Par continuité, il existe un voisinage I_x de x sur lequel

$$\forall y \in I_x, \quad |\psi(2^j y - k)| \geq C_x > 0.$$

Puisque ces boules recouvrent $[0, 1]$, on peut en extraire un recouvrement fini. □

Soit $J_0 = \max_{l \in \{1, \dots, L\}} j_l$. Pour tout x et tout j , il existe une ondelette $\psi(2^{j'} x - k')$ telle que $|j' - j| \leq J_0$ et $|\psi(2^{j'} x - k')| \geq C$.

Lemme

Il existe $C > 0$ et (j_l, k_l) , $l \in \{1, \dots, L\}$, tels que

$$\forall x \in [0, 1] \exists l \in \{1, \dots, L\} : |\psi(2^{j_l} x - k_l)| \geq C.$$

Preuve. Pour tout $x \in [0, 1]$, il existe une ondelette $\psi_{j,k}$ telle que $\psi(2^j x - k) \neq 0$. Par continuité, il existe un voisinage I_x de x sur lequel

$$\forall y \in I_x, \quad |\psi(2^j y - k)| \geq C_x > 0.$$

Puisque ces boules recouvrent $[0, 1]$, on peut en extraire un recouvrement fini. □

Soit $J_0 = \max_{l \in \{1, \dots, L\}} j_l$. Pour tout x et tout j , il existe une ondelette $\psi(2^{j'} x - k')$ telle que $|j' - j| \leq J_0$ et $|\psi(2^{j'} x - k')| \geq C$. On a alors

$$|c_{j',k'} \psi(2^{j'} x - k')| \geq C \frac{1}{j'^a} 2^{(\frac{1}{p}-s)j'} 2^{-\frac{1}{p}J'} \geq \frac{2^{-sj'}}{j'^a}.$$

Par conséquent,

$$d_{F_a}(x) \geq -s, \quad \forall x.$$

- (1) $F_a \in B_p^{s,q}$ ✓
- (2) $d_{F_a}(x) \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$ pour tout x ✓
- (3) $\dim_{\mathcal{H}} \{x : d_{F_a}(x) = \gamma\} = 1 - sp - \gamma p$ pour tout $\gamma \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$
- (4) Construction du G_δ dense à partir de F_a

- (1) $F_a \in B_p^{s,q}$ ✓
- (2) $d_{F_a}(x) \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$ pour tout x ✓
- (3) $\dim_{\mathcal{H}} \{x : d_{F_a}(x) = \gamma\} = 1 - sp - \gamma p$ pour tout $\gamma \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$
 → Approximation par les dyadiques
- (4) Construction du G_δ dense à partir de F_a

Approximation par les dyadiques

Remarque. Vu les hypothèses sur ψ , on peut considérer $C > 0$ et un sous-intervalle $\nu \subset [0, 1[$ tels que

$$\forall x \in \nu, \quad |\psi(x)| \geq C.$$

Approximation par les dyadiques

Remarque. Vu les hypothèses sur ψ , on peut considérer $C > 0$ et un sous-intervalle $\nu \subset [0, 1[$ tels que

$$\forall x \in \nu, \quad |\psi(x)| \geq C.$$

Points de type $\alpha \geq 1$. On note $x \in \mathcal{T}_\alpha$ s'il existe (J_n, K_n) tels que

1. $K_n \notin 2\mathbb{Z}$,
2. $x \in \left[\frac{K_n}{2^{J_n}}, \frac{K_n + 1}{2^{J_n}} \right)$,
3. $\left| x - \frac{K_n}{2^{J_n}} \right| \leq \frac{1}{2^{[\alpha J_n]}}$,
4. si k_n correspond à l'intervalle dyadique de taille $2^{-[\alpha J_n]}$ qui contient x , alors

$$2^{[\alpha J_n]}x - k_n \in \nu.$$

1 – 3 : Définit l'ensemble \mathcal{D}_α des points α -approximables par les dyadiques

$$c_{j,k} = \frac{1}{j^a} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{-\frac{1}{p}J_n} \quad \text{où} \quad j = [\alpha J_n], \quad k = k_n$$

1 – 3 : Définit l'ensemble \mathcal{D}_α des points α -approximables par les dyadiques

$$c_{j,k} = \frac{1}{j^a} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{-\frac{1}{p}J_n} \quad \text{où} \quad j = [\alpha J_n], \quad k = k_n$$

4 : l'ondelette correspondante est suffisamment grande au point considéré

$$|\psi_{j,k}(x)| \geq C \quad \text{où} \quad j = [\alpha J_n], \quad k = k_n.$$

1 – 3 : Définit l'ensemble \mathcal{D}_α des points α -approximables par les dyadiques

$$c_{j,k} = \frac{1}{j^a} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{-\frac{1}{p}J_n} \quad \text{où} \quad j = [\alpha J_n], \quad k = k_n$$

4 : l'ondelette correspondante est suffisamment grande au point considéré

$$|\psi_{j,k}(x)| \geq C \quad \text{où} \quad j = [\alpha J_n], \quad k = k_n.$$

Lemme

Si $x \in \mathcal{T}_\alpha$, alors l'exposant de divergence en x est plus grand que $\frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p}$, i.e.

$$\mathcal{T}_\alpha \subseteq \left\{ x : d_{F_a}(x) \geq \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\}.$$

Question. Calcul de $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha$?

- On a $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{D}_\alpha$

Question. Calcul de $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha$?

- On a $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{D}_\alpha$
- $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{D}_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ (en fait, $\mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha}}(\mathcal{D}_\alpha) > 0$) $\implies \dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha \leq \frac{1}{\alpha}$

Question. Calcul de $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha$?

- On a $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{D}_\alpha$
- $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{D}_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ (en fait, $\mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha}}(\mathcal{D}_\alpha) > 0$) $\implies \dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha \leq \frac{1}{\alpha}$
- Techniques d'ubiquité : $\mathcal{T}_\alpha =$ ensemble limsup dont les éléments sont les intervalles $2^{-[\alpha j]}(\nu + k)$ de côté $r_j = c2^{-[\alpha j]}$

Question. Calcul de $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha$?

- On a $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{D}_\alpha$
- $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{D}_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ (en fait, $\mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha}}(\mathcal{D}_\alpha) > 0$) $\implies \dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha \leq \frac{1}{\alpha}$
- Techniques d'ubiquité : $\mathcal{T}_\alpha =$ ensemble limsup dont les éléments sont les intervalles $2^{-[\alpha j]}(\nu + k)$ de côté $r_j = c2^{-[\alpha j]}$
- Ces intervalles "recouvrent bien" $[0, 1[$: si $D > 0$ est choisi suffisamment grand, les intervalles dyadiques de même centre et de côté $Dr_j^{1/\alpha}$ recouvrent $[0, 1[$

$$\implies \dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha = \frac{1}{\alpha}$$

Question. Calcul de $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha$?

- On a $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{D}_\alpha$
- $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{D}_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ (en fait, $\mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha}}(\mathcal{D}_\alpha) > 0$) $\implies \dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha \leq \frac{1}{\alpha}$
- Techniques d'ubiquité : $\mathcal{T}_\alpha =$ ensemble limsup dont les éléments sont les intervalles $2^{-[\alpha j]}(\nu + k)$ de côté $r_j = c2^{-[\alpha j]}$
- Ces intervalles "recouvrent bien" $[0, 1[$: si $D > 0$ est choisi suffisamment grand, les intervalles dyadiques de même centre et de côté $Dr_j^{1/\alpha}$ recouvrent $[0, 1[$

$$\implies \dim_{\mathcal{H}} \mathcal{T}_\alpha = \frac{1}{\alpha}$$

Puisque

$$\mathcal{T}_\alpha \subseteq \left\{ x : d_{F_a}(x) \geq \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\},$$

on en tire que

$$\dim_{\mathcal{H}} \left\{ x : d_{F_a}(x) \geq \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\} = \frac{1}{\alpha}$$

Raffinement du résultat précédent

On a même plus...

- $\mathcal{H}_\alpha^{\frac{1}{2},2}(\mathcal{T}_\alpha) > 0$

Raffinement du résultat précédent

On a même plus...

- $\mathcal{H}_{\alpha}^{\frac{1}{2},2}(\mathcal{T}_{\alpha}) > 0$
- $\left\{ x : d_f(x) > \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ x : d_{F_a}(x) \geq \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} + \frac{1}{n} \right\}}_{\dim_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p}}$

Raffinement du résultat précédent

On a même plus...

- $\mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha}, 2}(\mathcal{T}_\alpha) > 0$

- $\left\{ x : d_f(x) > \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ x : d_{F_a}(x) \geq \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} + \frac{1}{n} \right\}}_{\dim_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p}}$

$$\implies \mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha}, 2} \left(\left\{ x : d_{F_a}(x) > \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\} \right) = 0$$

Raffinement du résultat précédent

On a même plus...

- $\mathcal{H}_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}, 2}(\mathcal{T}_{\alpha}) > 0$

- $\left\{ x : d_f(x) > \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ x : d_{F_a}(x) \geq \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} + \frac{1}{n} \right\}}_{\dim_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p}}$

$$\implies \mathcal{H}_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}, 2} \left(\left\{ x : d_{F_a}(x) > \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\} \right) = 0$$

- $\underbrace{\mathcal{T}_{\alpha}}_{\mathcal{H}_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}, 2} > 0} \subset \left\{ x : d_{F_a}(x) = \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\} \cup \underbrace{\left\{ x : d_{F_a}(x) > \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\}}_{\mathcal{H}_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}, 2} = 0}$

Raffinement du résultat précédent

On a même plus...

- $\mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha}, 2}(\mathcal{T}_\alpha) > 0$

- $\left\{ x : d_f(x) > \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ x : d_{F_a}(x) \geq \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} + \frac{1}{n} \right\}}_{\dim_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p}}$

$$\implies \mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha}, 2} \left(\left\{ x : d_{F_a}(x) > \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\} \right) = 0$$

- $\underbrace{\mathcal{T}_\alpha}_{\mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha}, 2} > 0} \subset \left\{ x : d_{F_a}(x) = \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\} \cup \underbrace{\left\{ x : d_{F_a}(x) > \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\}}_{\mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha}, 2} = 0}$

$$\implies \dim_{\mathcal{H}} \left\{ x : d_{F_a}(x) = \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\dim_{\mathcal{H}} \left\{ x : d_{F_a}(x) = \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\} = \frac{1}{\alpha}, \quad \forall \alpha \geq 1$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathcal{H}} \{x : d_{F_a}(x) = \gamma\} = 1 - sp - \gamma p, \quad \forall \gamma \geq -s$$

$$\dim_{\mathcal{H}} \left\{ x : d_{F_a}(x) = \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\} = \frac{1}{\alpha}, \quad \forall \alpha \geq 1$$

$$\implies \dim_{\mathcal{H}} \{x : d_{F_a}(x) = \gamma\} = 1 - sp - \gamma p, \quad \forall \gamma \geq -s$$

- (1) $F_a \in B_p^{s,q}$ ✓
- (2) $d_{F_a}(x) \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$ pour tout x ✓
- (3) $\dim_{\mathcal{H}} \{x : d_{F_a}(x) = \gamma\} = 1 - sp - \gamma p$ pour tout $\gamma \in \left[-s, \frac{1}{p} - s\right]$ ✓
- (4) Construction du G_δ dense à partir de F_a

Construction de l'ensemble résiduel

Cas $p, q < +\infty$

$$\|f\|_{B_p^{s,q}} = \left(\sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}$$

Construction de l'ensemble résiduel

Cas $p, q < +\infty$

$$\|f\|_{B_p^{s,q}} = \left(\sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}$$

- L'ensemble $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des séries d'ondelettes finies à coefficients rationnels est dense dans $B_p^{s,q}$

Construction de l'ensemble résiduel

Cas $p, q < +\infty$

$$\|f\|_{B_p^{s,q}} = \left(\sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}$$

- L'ensemble $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des séries d'ondelettes finies à coefficients rationnels est dense dans $B_p^{s,q}$
- On considère une suite croissante $(N_n)_n$ telle que les coefficients d'ondelettes de f_n sont nuls pour $j \geq N_n$

Construction de l'ensemble résiduel

Cas $p, q < +\infty$

$$\|f\|_{B_p^{s,q}} = \left(\sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}$$

- L'ensemble $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des séries d'ondelettes finies à coefficients rationnels est dense dans $B_p^{s,q}$
- On considère une suite croissante $(N_n)_n$ telle que les coefficients d'ondelettes de f_n sont nuls pour $j \geq N_n$
- $g_n = f_n + \frac{1}{N_n} F_a$ a les mêmes propriétés de divergence que F_a et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $B_p^{s,q}$

Construction de l'ensemble résiduel

Cas $p, q < +\infty$

$$\|f\|_{B_p^{s,q}} = \left(\sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}$$

- L'ensemble $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des séries d'ondelettes finies à coefficients rationnels est dense dans $B_p^{s,q}$
- On considère une suite croissante $(N_n)_n$ telle que les coefficients d'ondelettes de f_n sont nuls pour $j \geq N_n$
- $g_n = f_n + \frac{1}{N_n} F_a$ a les mêmes propriétés de divergence que F_a et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $B_p^{s,q}$
- On considère le G_δ dense

$$\mathcal{R} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B(g_n, r_n), \quad \text{où} \quad r_n = \frac{1}{2N_n^a} 2^{-\frac{N_n}{p}}$$

$$\mathcal{R} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B(g_n, r_n), \quad \text{où } r_n = \frac{1}{2N_n^a} 2^{-\frac{N_n}{p}}$$

$$f \in B(g_n, r_n) \implies \sum_{j \geq 0} \left(2^{(sp-1)j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |f_{j,k} - g_{j,k}^n|^p \right)^{q/p} < r_n^q$$

$$\mathcal{R} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B(g_n, r_n), \quad \text{où } r_n = \frac{1}{2N_n^a} 2^{-\frac{N_n}{p}}$$

$$\begin{aligned} f \in B(g_n, r_n) &\implies \sum_{j \geq 0} \left(2^{(sp-1)j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |f_{j,k} - g_{j,k}^n|^p \right)^{q/p} < r_n^q \\ &\implies 2^{(s-\frac{1}{p})N_n} \left| f_{N_n,k} - \frac{c_{N_n,k}}{N_n} \right| < r_n \end{aligned}$$

$$\mathcal{R} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B(g_n, r_n), \quad \text{où } r_n = \frac{1}{2N_n^a} 2^{-\frac{N_n}{p}}$$

$$\begin{aligned} f \in B(g_n, r_n) &\implies \sum_{j \geq 0} \left(2^{(sp-1)j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |f_{j,k} - g_{j,k}^n|^p \right)^{q/p} < r_n^q \\ &\implies 2^{(s-\frac{1}{p})N_n} \left| f_{N_n,k} - \frac{c_{N_n,k}}{N_n} \right| < r_n \\ &\implies \left| f_{N_n,k} - \frac{c_{N_n,k}}{N_n} \right| < \frac{1}{2N_n^a} 2^{-sN_n} \end{aligned}$$

$$\mathcal{R} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B(g_n, r_n), \quad \text{où } r_n = \frac{1}{2N_n^a} 2^{-\frac{N_n}{p}}$$

$$f \in B(g_n, r_n) \implies \sum_{j \geq 0} \left(2^{(sp-1)j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |f_{j,k} - g_{j,k}^n|^p \right)^{q/p} < r_n^q$$

$$\implies 2^{(s-\frac{1}{p})N_n} \left| f_{N_n,k} - \frac{c_{N_n,k}}{N_n} \right| < r_n$$

$$\implies \left| f_{N_n,k} - \frac{c_{N_n,k}}{N_n} \right| < \frac{1}{2N_n^a} 2^{-sN_n}$$

$$\implies \left| f_{N_n,k} \right| \geq \frac{1}{N_n} |c_{N_n,k}| - \frac{1}{2N_n^a} 2^{-sN_n}$$

$$f \in \mathcal{R} \implies f \in B(g_{n_l}, r_{n_l}), \quad l \in \mathbb{N}$$

On note $x \in \mathcal{T}_\alpha(f)$ s'il existe une infinité de K_l tels que si $j = N_{n_l}$

1. $K_l \notin 2\mathbb{Z}$,
2. $x \in \left[\frac{K_l}{2^{\lfloor \frac{j}{\alpha} \rfloor}}, \frac{K_l + 1}{2^{\lfloor \frac{j}{\alpha} \rfloor}} \right)$,
3. $\left| x - \frac{K_l}{2^{\lfloor \frac{j}{\alpha} \rfloor}} \right| \leq \frac{1}{2^j}$,
4. si k_l correspond à l'intervalle dyadique de taille 2^{-j} qui contient x , alors

$$2^j x - k_l \in \nu.$$

$$f \in \mathcal{R} \implies f \in B(g_{n_l}, r_{n_l}), \quad l \in \mathbb{N}$$

On note $x \in \mathcal{T}_\alpha(f)$ s'il existe une infinité de K_l tels que si $j = N_{n_l}$

1. $K_l \notin 2\mathbb{Z}$,
2. $x \in \left[\frac{K_l}{2^{\lfloor \frac{j}{\alpha} \rfloor}}, \frac{K_l + 1}{2^{\lfloor \frac{j}{\alpha} \rfloor}} \right)$,
3. $\left| x - \frac{K_l}{2^{\lfloor \frac{j}{\alpha} \rfloor}} \right| \leq \frac{1}{2^j}$,
4. si k_l correspond à l'intervalle dyadique de taille 2^{-j} qui contient x , alors

$$2^j x - k_l \in \nu.$$

Remarque. La définition de $\mathcal{T}_\alpha(f)$ est similaire à celle de \mathcal{T}_α , excepté que seulement une sous-suite d'entiers (définie à partir de f) est prise en compte.

Donc si $x \in \mathcal{T}_\alpha(f)$, on a $|\psi_{j,k_l}(x)| \geq C$ et

$$c_{j,k_l} = \frac{1}{j^a} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{-\frac{1}{p}[\frac{j}{\alpha}]}.$$

pour $j = N_{n_l}$.

Donc si $x \in \mathcal{T}_\alpha(f)$, on a $|\psi_{j,k_l}(x)| \geq C$ et

$$c_{j,k_l} = \frac{1}{j^a} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{-\frac{1}{p}[\frac{j}{\alpha}]}.$$

pour $j = N_{n_l}$. Comme $f \in B(g_{n_l}, r_{n_l})$, on obtient

$$\begin{aligned} |f_{j,k_l}| &\geq \frac{1}{j} |c_{j,k_l}| - \frac{1}{2j^a} 2^{-sj} \\ &\geq \frac{1}{j^{a+1}} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{-\frac{1}{p}[\frac{j}{\alpha}]} - \frac{1}{2j^a} 2^{-sj} \\ &\geq \frac{1}{2j^{a+1}} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{-\frac{1}{p}[\frac{j}{\alpha}]} \end{aligned}$$

si $l \gg$. Donc,

$$d_f(x) \geq \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p}.$$

$$\mathcal{T}_\alpha(f) \subseteq \left\{ x : d_f(x) \geq \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\}$$

Comme fait précédemment, on trouve que

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{T}_\alpha(f)) = \frac{1}{\alpha}$$

et plus précisément que

$$\mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha}, 2}(\mathcal{T}_\alpha(f)) > 0.$$

$$\mathcal{T}_\alpha(f) \subseteq \left\{ x : d_f(x) \geq \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\}$$

Comme fait précédemment, on trouve que

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{T}_\alpha(f)) = \frac{1}{\alpha}$$

et plus précisément que

$$\mathcal{H}^{\frac{1}{\alpha}, 2}(\mathcal{T}_\alpha(f)) > 0.$$

A nouveau, on en déduit que

$$\dim_{\mathcal{H}} \left(\left\{ x : d_f(x) \geq \frac{1}{p} - s - \frac{1}{\alpha p} \right\} \right) = \frac{1}{\alpha}$$

d'où

$$\dim_{\mathcal{H}} \{x : d_f(x) = \gamma\} = 1 - sp - \gamma p, \quad \forall \gamma \geq -s, \quad \forall f \in \mathcal{R}$$



Cas $p < +\infty, q = +\infty$

$$\|f\|_{B_p^{s,q}} = \sup_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p \right)^{1/p}$$

Cas $p < +\infty, q = +\infty$

$$\|f\|_{B_p^{s,q}} = \sup_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{1}{p})j}|^p \right)^{1/p}$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble E_N des fonctions de $B_p^{s,q}$ dont chaque coefficient est un multiple non-nul de $\frac{c_{j,k}}{N}$.

Lemme

L'ensemble $\bigcup_N E_N$ est dense dans $B_p^{s,q}$.

Preuve. Soit $f \in B_p^{s,q}$. Pour tout N , on définit la fonction g^N en posant

$$g_{j,k}^N = \begin{cases} \frac{c_{j,k}}{N} \left[\frac{N}{c_{j,k}} f_{j,k} \right] & \text{si } \left[\frac{N}{c_{j,k}} f_{j,k} \right] \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$g_{j,k}^N = \begin{cases} \frac{c_{j,k}}{N} \left[\frac{N}{c_{j,k}} f_{j,k} \right] & \text{si } \left[\frac{N}{c_{j,k}} f_{j,k} \right] \neq 0 \\ \frac{c_{j,k}}{N} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$|f_{j,k} - g_{j,k}^N| = \frac{|c_{j,k}|}{N} \left| \frac{N}{c_{j,k}} f_{j,k} - \left[\frac{N}{c_{j,k}} f_{j,k} \right] \right| \leq \frac{|c_{j,k}|}{N}$$

et

$$\sup_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} \left| \frac{c_{j,k}}{N} 2^{(s-\frac{1}{p})j} \right|^p \right)^{1/p} = \frac{1}{N} \|F_a\|_{B_p^{s,q}} \rightarrow 0 \text{ si } N \rightarrow \infty$$



$$g_{j,k}^N = \begin{cases} \frac{c_{j,k}}{N} \left[\frac{N}{c_{j,k}} f_{j,k} \right] & \text{si } \left[\frac{N}{c_{j,k}} f_{j,k} \right] \neq 0 \\ \frac{c_{j,k}}{N} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$|f_{j,k} - g_{j,k}^N| = \frac{|c_{j,k}|}{N} \left| \frac{N}{c_{j,k}} f_{j,k} - \left[\frac{N}{c_{j,k}} f_{j,k} \right] \right| \leq \frac{|c_{j,k}|}{N}$$

et

$$\sup_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} \left| \frac{c_{j,k}}{N} 2^{(s-\frac{1}{p})j} \right|^p \right)^{1/p} = \frac{1}{N} \|F_a\|_{B_p^{s,q}} \rightarrow 0 \text{ si } N \rightarrow \infty$$

□

Ensemble résiduel : On pose

$$A_N = E_N + B(0, r_N) \quad \text{où} \quad r_N = \frac{1}{2N^a} 2^{\frac{-N}{p}}$$

et

$$\mathcal{R} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \geq m} A_N.$$

Autres résultats

- Passage à \mathbb{R} : on prend comme fonction de saturation la fonction

$$\widetilde{F}_a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-k} F_a(x - k)$$

Autres résultats

- Passage à \mathbb{R} : on prend comme fonction de saturation la fonction

$$\widetilde{F}_a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-k} F_a(x - k)$$

- Les résultats précédents sont également vérifiés pour les cas $p = q = +\infty$ et $p = +\infty, q < +\infty$, ainsi que dans les espaces de Sobolev.

Autres résultats

- Passage à \mathbb{R} : on prend comme fonction de saturation la fonction

$$\widetilde{F}_a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-k} F_a(x - k)$$

- Les résultats précédents sont également vérifiés pour les cas $p = q = +\infty$ et $p = +\infty, q < +\infty$, ainsi que dans les espaces de Sobolev.
- Résultats similaires obtenus avec la notion de prévalence. L'idée est de considérer les coefficients

$$c_{j,k} = \frac{\xi_{j,k}}{j^a} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{-\frac{1}{p}J}$$

où les $\xi_{j,k} \sim^{iid} \mathcal{N}(0, 1)$.

Autres résultats

- Passage à \mathbb{R} : on prend comme fonction de saturation la fonction

$$\widetilde{F}_a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-k} F_a(x - k)$$

- Les résultats précédents sont également vérifiés pour les cas $p = q = +\infty$ et $p = +\infty, q < +\infty$, ainsi que dans les espaces de Sobolev.
- Résultats similaires obtenus avec la notion de prévalence. L'idée est de considérer les coefficients

$$c_{j,k} = \frac{\xi_{j,k}}{j^a} 2^{(\frac{1}{p}-s)j} 2^{-\frac{1}{p}J}$$

où les $\xi_{j,k} \sim^{iid} \mathcal{N}(0, 1)$.

- Résultats similaires obtenus avec la notion de linéabilité, en prenant l'enveloppe linéaire des F_a , $a > \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Références



J.M. Aubry.

On the rate of pointwise divergence of Fourier and wavelet series in L^p .

J. Approx. Theory, 538 :97–111, 2006.



F. Bayart and Y. Heurteaux.

Multifractal analysis of the divergence of Fourier series.

Ann. Sci. Ec. Norm. Supér., 45 :927–946, 2012. 22 :663–682, 2006.



S. Jaffard.

On the Frisch-Parisi conjecture.

J. Math. Pures Appl., 79(6) :525–552., 2000.



S.E. Kelly, M.A. Kon, and L.A. Raphael.

Local convergence for wavelet expansion.

J. Funct. Anal., 126 :102–138, 1994.



Y. Meyer.

Ondelettes et opérateurs.

Hermann, 1990.



G.G. Walter.

Pointwise convergence of wavelet expansions.

J. Approx. Theory, 80 :108–118, 1995.