



Estimation de spectres de singularités par des méthodes de grandes déviations basées sur les ondelettes

Céline ESSER

`celine.esser@univ-lille1.fr`

Université Lille 1 – Laboratoire Paul Painlevé

Séminaire de Probabilités et Statistique
Lille – 2 décembre 2015

Travail en collaboration avec
F. BASTIN, T. KLEYNTSENS, S. NICOLAY (Liège)
S. JAFFARD (Paris Est – Créteil)

Introduction

- On souhaite caractériser la régularité ponctuelle d'une fonction f

Définition

Soient $f \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in [0, 1]$. La fonction f appartient à l'espace de Hölder $C^{\alpha}(x_0)$ s'il existe un voisinage V de x_0 et une constante $C > 0$ tels que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^{\alpha} \quad \forall x \in V.$$

Introduction

- On souhaite caractériser la régularité ponctuelle d'une fonction f

Définition

Soient $f \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \geq 0$. La fonction f appartient à l'espace de Hölder $C^{\alpha}(x_0)$ s'il existe un voisinage V de x_0 , une constante $C > 0$ et un polynôme P de degré plus petit que α tels que

$$|f(x) - P(x)| \leq C|x - x_0|^{\alpha} \quad \forall x \in V.$$

Introduction

- On souhaite caractériser la régularité ponctuelle d'une fonction f

Définition

Soient $f \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \geq 0$. La fonction f appartient à l'espace de Hölder $C^{\alpha}(x_0)$ s'il existe un voisinage V de x_0 , une constante $C > 0$ et un polynôme P de degré plus petit que α tels que

$$|f(x) - P(x)| \leq C|x - x_0|^{\alpha} \quad \forall x \in V.$$

L'exposant de Hölder de f en x_0 est défini par

$$\begin{aligned} h_f(x_0) &= \sup \{ \alpha \geq 0 : f \in C^{\alpha}(x_0) \} \\ &= \liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{\log |f(x) - f(x_0)|}{\log |x - x_0|} \quad \text{lorsque } h_f(x_0) < 1 \end{aligned}$$

Introduction

- On souhaite caractériser la régularité ponctuelle d'une fonction f

Définition

Soient $f \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \geq 0$. La fonction f appartient à l'espace de Hölder $C^{\alpha}(x_0)$ s'il existe un voisinage V de x_0 , une constante $C > 0$ et un polynôme P de degré plus petit que α tels que

$$|f(x) - P(x)| \leq C|x - x_0|^{\alpha} \quad \forall x \in V.$$

L'exposant de Hölder de f en x_0 est défini par

$$\begin{aligned} h_f(x_0) &= \sup \{ \alpha \geq 0 : f \in C^{\alpha}(x_0) \} \\ &= \liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{\log |f(x) - f(x_0)|}{\log |x - x_0|} \quad \text{lorsque } h_f(x_0) < 1 \end{aligned}$$

- $h_f(x)$ peut varier considérablement d'un point à l'autre
- les points avec un exposant de Hölder donné peuvent être situés sur des ensembles fractals

—> détermination de leur dimension de Hausdorff

Dimension de Hausdorff

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ et $s > 0$. On pose

$$\mathcal{H}_\delta^s(B) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_j)^s : (B_j)_{j \in \mathbb{N}} \text{ } \delta\text{-recouvrement de } B \right\}.$$

et on définit la s -mesure extérieure de Hausdorff \mathcal{H}^s par

$$\mathcal{H}^s(B) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(B) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(B)$$

Remarque. La restriction de \mathcal{H}^n à la tribu borélienne est, à une constante multiplicative près, la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^n

$$\mathcal{H}^n(B) = c_n \mathcal{L}_n(B) \text{ où } c_n = \frac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(n/2)}$$

Dimension de Hausdorff

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ et $s > 0$. On pose

$$\mathcal{H}_\delta^s(B) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_j)^s : (B_j)_{j \in \mathbb{N}} \text{ } \delta\text{-recouvrement de } B \right\}.$$

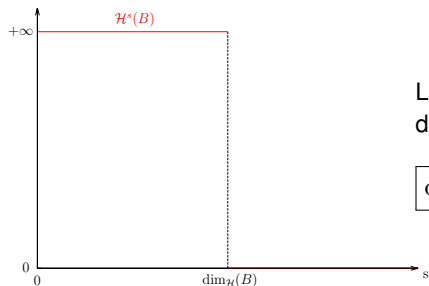
et on définit la s -mesure extérieure de Hausdorff \mathcal{H}^s par

$$\mathcal{H}^s(B) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(B) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(B)$$

Remarque. La restriction de \mathcal{H}^n à la tribu borélienne est, à une constante multiplicative près, la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^n

$$\mathcal{H}^n(B) = c_n \mathcal{L}_n(B) \text{ où } c_n = \frac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(n/2)}$$

Il existe une valeur critique pour laquelle $s \mapsto \mathcal{H}^s(B)$ "saute" de l'infini à 0.



La **dimension de Hausdorff** $\dim_{\mathcal{H}}(B)$ de B est définie par

$$\dim_{\mathcal{H}}(B) = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(B) = \infty\}$$

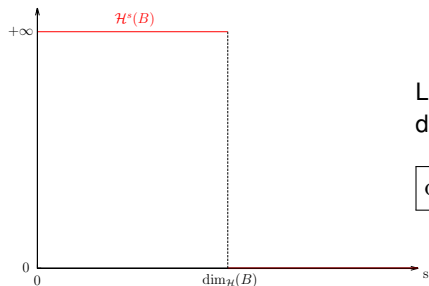
Définition

Le **spectre de singularités** d'une fonction $f \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R})$ est la fonction

$$d_f : h \mapsto \dim_{\mathcal{H}}\{x \in \mathbb{R} : h_f(x) = h\}.$$

→ d_f fournit une description géométrique de la répartition des singularités de f

Il existe une valeur critique pour laquelle $s \mapsto \mathcal{H}^s(B)$ "saute" de l'infini à 0.



La **dimension de Hausdorff** $\dim_{\mathcal{H}}(B)$ de B est définie par

$$\dim_{\mathcal{H}}(B) = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(B) = \infty\}$$

Définition

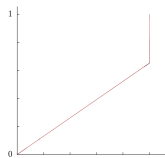
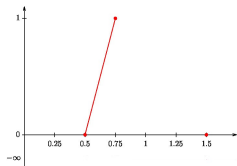
Le **spectre de singularités** d'une fonction $f \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R})$ est la fonction

$$d_f : h \mapsto \dim_{\mathcal{H}}\{x \in \mathbb{R} : h_f(x) = h\}.$$

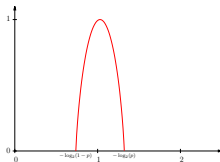
→ d_f fournit une description géométrique de la répartition des singularités de f

Exemples

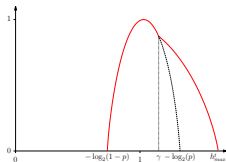
- Fonction de Weierstraß: $W(x) = \sum_{n \geq 0} a^n \cos(b^n \pi x)$, $h_W(x) = -\frac{\log a}{\log b} \forall x$
- Fonction de Riemann: $R(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n^2 \pi x)}{n^2}$
- Processus de Lévy:



- Cascade



- Cascade Seuillée



Remarque. En réalité, on ne sait presque rien sur la forme générale des spectres.

Formalisme multifractal

Un **formalisme multifractal** est une méthode qui permet d'estimer le spectre de singularités d'une fonction à partir de quantités "globales" qui sont numériquement calculables.

Plusieurs formalismes basés sur une décomposition en ondelettes du signal ont été proposées.

→ Ces formalismes reposent sur une caractérisation de l'exposant de Hölder par les coefficients d'ondelettes

Avantage. Facile à implémenter et relativement stable d'un point de vue numérique.

- Le formalisme de Frisch-Parisi (1985) et l'utilisation classique des espaces de Besov conduisent à une perte d'information (seulement l'enveloppe concave et la partie croissante des spectres peuvent être estimés).
- Wavelet leaders method (S. Jaffard, 2004): Modification du formalisme de Frisch-Parisi en utilisant les wavelet leaders du signal à la place des ses coefficients d'ondelette.
 - Détection des parties croissantes et décroissantes de spectre concaves.
- Introduction des espaces de type \mathcal{S}^ν (J.M. Aubry, S. Jaffard, 2005) basés sur les histogrammes des coefficients d'ondelette.
 - Détection de la partie croissante de spectres concaves et non-concaves.
- Combinaison des deux méthodes précédentes pour obtenir la **leaders profile method**.
 - Détection des parties croissante et décroissante de spectre concaves et non-concaves.

- Le formalisme de Frisch-Parisi (1985) et l'utilisation classique des espaces de Besov conduisent à une perte d'information (seulement l'enveloppe concave et la partie croissante des spectres peuvent être estimés).
- Wavelet leaders method (S. Jaffard, 2004): Modification du formalisme de Frisch-Parisi en utilisant les wavelet leaders du signal à la place des ses coefficients d'ondelette.
 - Détection des parties croissantes et décroissantes de spectre concaves.
- Introduction des espaces de type \mathcal{S}^ν (J.M. Aubry, S. Jaffard, 2005) basés sur les histogrammes des coefficients d'ondelette.
 - Détection de la partie croissante de spectres concaves et non-concaves.
- Combinaison des deux méthodes précédentes pour obtenir la **leaders profile method**.
 - Détection des parties croissante et décroissante de spectre concaves et non-concaves.

- Le formalisme de Frisch-Parisi (1985) et l'utilisation classique des espaces de Besov conduisent à une perte d'information (seulement l'enveloppe concave et la partie croissante des spectres peuvent être estimés).
- Wavelet leaders method (S. Jaffard, 2004): Modification du formalisme de Frisch-Parisi en utilisant les wavelet leaders du signal à la place des ses coefficients d'ondelette.
 - Détection des parties croissantes et décroissantes de spectre concaves.
- Introduction des espaces de type S^ν (J.M. Aubry, S. Jaffard, 2005) basés sur les histogrammes des coefficients d'ondelette.
 - Détection de la partie croissante de spectres concaves et non-concaves.
- Combinaison des deux méthodes précédentes pour obtenir la **leaders profile method**.
 - Détection des parties croissante et décroissante de spectre concaves et non-concaves.

- Le formalisme de Frisch-Parisi (1985) et l'utilisation classique des espaces de Besov conduisent à une perte d'information (seulement l'enveloppe concave et la partie croissante des spectres peuvent être estimés).
- Wavelet leaders method (S. Jaffard, 2004): Modification du formalisme de Frisch-Parisi en utilisant les **wavelet leaders** du signal à la place des ses coefficients d'ondelette.
 - Détection des parties croissantes et décroissantes de spectre concaves.
- Introduction des espaces de type S^ν (J.M. Aubry, S. Jaffard, 2005) basés sur les histogrammes des coefficients d'ondelette.
 - Détection de la partie croissante de spectres concaves et non-concaves.
- Combinaison des deux méthodes précédentes pour obtenir la **leaders profile method**.
 - Détection des parties croissante et décroissante de spectre concaves et non-concaves.

- Le formalisme de Frisch-Parisi (1985) et l'utilisation classique des espaces de Besov conduisent à une perte d'information (seulement l'enveloppe concave et la partie croissante des spectres peuvent être estimés).
- Wavelet leaders method (S. Jaffard, 2004): Modification du formalisme de Frisch-Parisi en utilisant les **wavelet leaders** du signal à la place des ses coefficients d'ondelette.
 - Détection des parties croissantes et décroissantes de spectre concaves.
- Introduction des espaces de type S^ν (J.M. Aubry, S. Jaffard, 2005) basés sur les **histogrammes** des coefficients d'ondelette.
 - Détection de la partie croissante de spectres concaves et non-concaves.
- Combinaison des deux méthodes précédentes pour obtenir la **leaders profile method**.
 - Détection des parties croissante et décroissante de spectre concaves et non-concaves.

- Le formalisme de Frisch-Parisi (1985) et l'utilisation classique des espaces de Besov conduisent à une perte d'information (seulement l'enveloppe concave et la partie croissante des spectres peuvent être estimés).
- Wavelet leaders method (S. Jaffard, 2004): Modification du formalisme de Frisch-Parisi en utilisant les **wavelet leaders** du signal à la place des ses coefficients d'ondelette.
 - Détection des parties croissantes et décroissantes de spectre concaves.
- Introduction des espaces de type S^ν (J.M. Aubry, S. Jaffard, 2005) basés sur les **histogrammes** des coefficients d'ondelette.
 - Détection de la partie croissante de spectres concaves et non-concaves.
- Combinaison des deux méthodes précédentes pour obtenir la **leaders profile method**.
 - Détection des parties croissante et décroissante de spectre concaves et non-concaves.

Plan de l'exposé.

1. Ondelettes et exposant de Hölder
2. Wavelet leaders method
3. Leaders profile method
4. Exemples théoriques
5. Comparaison théorique des formalismes
6. Illustrations numériques

Ondelettes et exposant de Hölder

Base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$. Soit un couple de fonctions Φ, Ψ telles que, en notant,

$$\begin{cases} \Phi_k : x \mapsto \Phi(x - k), & k \in \mathbb{Z} \\ \Psi_{j,k} : x \mapsto \Psi(2^j x - k), & j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

la famille $\{\Phi_k, 2^{j/2}\Psi_{j,k} : j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Choix des ondelettes. L'ondelette mère Ψ est

- bien localisée: il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|\Psi(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- oscillante: il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \Psi(x) dx = 0 \quad \forall n \in \{0, \dots, N - 1\}.$$

Ondelettes et exposant de Hölder

Base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$. Soit un couple de fonctions Φ, Ψ telles que, en notant,

$$\begin{cases} \Phi_k : x \mapsto \Phi(x - k), & k \in \mathbb{Z} \\ \Psi_{j,k} : x \mapsto \Psi(2^j x - k), & j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

la famille $\{\Phi_k, 2^{j/2}\Psi_{j,k} : j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Choix des ondelettes. L'ondelette mère Ψ est

- bien localisée: il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|\Psi(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- oscillante: il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \Psi(x) dx = 0 \quad \forall n \in \{0, \dots, N - 1\}.$$

Base d'ondelette de $L^2(\mathbb{T})$. Une base de $L^2(\mathbb{T})$ est donnée par la fonction constante égale à 1 et les ondelettes périodisées

$$\psi_{j,k} : x \mapsto \sum_{l \in \mathbb{Z}} \Psi_{j,k}(x - l), \quad j \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}.$$

Les coefficients d'ondelettes d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ sont définis par

$$c_{j,k} := 2^j \int_0^1 f(x) \psi_{j,k}(x) dx$$

→ $c_{j,k}$ donne une information sur le comportement de f au voisinage de

$$\lambda = \lambda(j, k) := \left\{ x \in \mathbb{R} : 2^j x - k \in [0, 1[\right\} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right[$$

Hypothèse. On suppose que $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Base d'ondelette de $L^2(\mathbb{T})$. Une base de $L^2(\mathbb{T})$ est donnée par la fonction constante égale à 1 et les ondelettes périodisées

$$\psi_{j,k} : x \mapsto \sum_{l \in \mathbb{Z}} \Psi_{j,k}(x - l), \quad j \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}.$$

Les **coefficients d'ondelettes** d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ sont définis par

$$c_{j,k} := 2^j \int_0^1 f(x) \psi_{j,k}(x) dx$$

→ $c_{j,k}$ donne une information sur le comportement de f au voisinage de

$$\lambda = \lambda(j, k) := \{x \in \mathbb{R} : 2^j x - k \in [0, 1[\} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right[$$

Hypothèse. On suppose que $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Notations.

- Si $j \in \mathbb{N}$, on note Λ_j l'ensemble des intervalles dyadiques de $[0, 1[$ de taille 2^{-j}
- Si $\lambda = \lambda(j, k)$, on utilise la notation $c_{j,k}$ ou c_λ pour les coefficients d'ondelettes

Definition

Les **coefficients dominants / wavelet leaders** de f sont définis par

$$d_{j,k} = d_\lambda := \sup_{\lambda' \subset 3\lambda} |c_{\lambda'}|, \quad \lambda \in \Lambda_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

- Si $x \in [0, 1[$, on note $\lambda_j(x)$ l'unique intervalle de Λ_j qui contient x , et $d_j(x) := d_{\lambda_j(x)}$ le coefficient dominant associé.

	x				k				
	(0, 0)				(1, 0)				
	(0,1)		(1,1)		(2,1)		(3,1)		
j	(0,2)	(1,2)	(2,2)	$\lambda_j(x)$	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)	...
				⋮					

Régularité Höldérienne et coefficients dominants

Si f est uniformément Hölderienne, alors l'exposant de Hölder de f en x est donné par

$$h_f(x) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log d_j(x)}{\log 2^{-j}}.$$

Interprétation. $d_j(x) \sim 2^{-h_f(x)j}$, i.e.

$$x \in \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right] \implies d_{j,k} \sim 2^{-h_f(x)j}$$

	x				k			
	(0, 0)				(1, 0)			
	(0, 1)		(1, 1)		(2, 1)		(3, 1)	
j	(0, 2)	(1, 2)	$3 \lambda_j(x)$			(5, 2)	(6, 2)	(7, 2)
								...
				⋮				

Régularité Höldérienne et coefficients dominants

Si f est uniformément Hölderienne, alors l'exposant de Hölder de f en x est donné par

$$h_f(x) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log d_j(x)}{\log 2^{-j}}.$$

Interprétation. $d_j(x) \sim 2^{-h_f(x)j}$, i.e.

$$x \in \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right] \implies d_{j,k} \sim 2^{-h_f(x)j}$$

	x				k				
	(0, 0)				(1, 0)				
	(0, 1)		(1, 1)		(2, 1)		(3, 1)		
j	(0, 2)	(1, 2)	3 $\lambda_j(x)$			(5, 2)	(6, 2)	(7, 2)	
								...	

Régularité Höldérienne et coefficients dominants

Si f est uniformément Hölderienne, alors l'exposant de Hölder de f en x est donné par

$$h_f(x) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log d_j(x)}{\log 2^{-j}}.$$

Interprétation. $d_j(x) \sim 2^{-h_f(x)j}$, i.e.

$$x \in \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right] \implies d_{j,k} \sim 2^{-h_f(x)j}$$

	x				k			
	(0, 0)				(1, 0)			
	(0, 1)		(1, 1)		(2, 1)		(3, 1)	
j	(0, 2)	(1, 2)	3 $\lambda_j(x)$			(5, 2)	(6, 2)	(7, 2)
							...	

Régularité Höldérienne et coefficients dominants

Si f est uniformément Hölderienne, alors l'exposant de Hölder de f en x est donné par

$$h_f(x) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log d_j(x)}{\log 2^{-j}}.$$

Interprétation. $d_j(x) \sim 2^{-h_f(x)j}$, i.e.

$$x \in \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right] \implies d_{j,k} \sim 2^{-h_f(x)j}$$

Wavelet leaders method

On considère la fonction d'échelle η_f définie par

$$\eta_f(q) := \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log 2^{-j} \sum_{\lambda \in \Lambda_j}^* d_\lambda^q}{\log 2^{-j}}.$$

Le spectre de singularités de f est alors estimé par la fonction

$$L_f : h \mapsto \inf_q \{hq - \eta_f(q)\} + 1$$

Argument heuristique.

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} d_\lambda^q \sim 2^{(1-\eta_f(q))j}$$

Si λ est un intervalle dyadique contenant un point x tel que $h_f(x) = h$, alors $d_\lambda \sim 2^{-hj}$. En utilisant la définition de la dimension de Hausdorff, il y a $2^{d_f(h)j}$ tels intervalles. La contribution de ces intervalles dans la somme est donc

$$2^{(d_f(h)-qh)j}$$

Wavelet leaders method

On considère la fonction d'échelle η_f définie par

$$\eta_f(q) := \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log 2^{-j} \sum_{\lambda \in \Lambda_j}^* d_\lambda^q}{\log 2^{-j}}.$$

Le spectre de singularités de f est alors estimé par la fonction

$$L_f : h \mapsto \inf_q \{hq - \eta_f(q)\} + 1$$

Argument heuristique.

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} d_\lambda^q \sim 2^{(1-\eta_f(q))j}$$

Si λ est un intervalle dyadique contenant un point x tel que $h_f(x) = h$, alors $d_\lambda \sim 2^{-hj}$. En utilisant la définition de la dimension de Hausdorff, il y a $2^{d_f(h)j}$ tels intervalles. La contribution de ces intervalles dans la somme est donc

$$2^{(d_f(h)-qh)j}$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} d_\lambda^q \sim 2^{(1-\eta_f(q))j}$$

La contribution dominante sera celle correspondant à un h tel que l'exposant $d_f(h) - qh$ est le plus grand possible

$$\implies \sup_h \{d_f(h) - qh\} = 1 - \eta_f(q)$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} d_\lambda^q \sim 2^{(1-\eta_f(q))j}$$

La contribution dominante sera celle correspondant à un h tel que l'exposant $d_f(h) - qh$ est le plus grand possible

$$\implies \sup_h \{d_f(h) - qh\} = 1 - \eta_f(q)$$

$$\implies \inf_q \{hq - \eta_f(q)\} + 1 = d_f(h)$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} d_\lambda^q \sim 2^{(1-\eta_f(q))j}$$

La contribution dominante sera celle correspondant à un h tel que l'exposant $d_f(h) - qh$ est le plus grand possible

$$\implies \sup_h \{d_f(h) - qh\} = 1 - \eta_f(q)$$

$$\implies \inf_q \{hq - \eta_f(q)\} + 1 \geq d_f(h)$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} d_\lambda^q \sim 2^{(1-\eta_f(q))j}$$

La contribution dominante sera celle correspondant à un h tel que l'exposant $d_f(h) - qh$ est le plus grand possible

$$\implies \sup_h \{d_f(h) - qh\} = 1 - \eta_f(q)$$

$$\implies \inf_q \{hq - \eta_f(q)\} + 1 \geq d_f(h)$$

Propriétés.

- L_f est indépendant de la base d'ondelettes choisie
- Si f est uniformément Höldérienne, $d_f(h) \leq L_f(h)$ pour tout $h \geq 0$
- L_f est **concave** \rightarrow Limites du formalisme!

Leaders profile method

On considère la fonction

$$\rho_f(h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : 2^{-(h+\varepsilon)j} \leq d_\lambda \leq 2^{-(h-\varepsilon)j}\}}{\log 2^j}.$$

Interprétation. Il y a approximativement $2^{\rho_f(h)j}$ coefficients de taille 2^{-hj} .

Argument heuristique. Considérons les points x tels que $h_f(x) = h$.

- $d_j(x) \sim 2^{-hj}$ et il y a environ $2^{\rho_f(h)j}$ intervalles dyadiques de taille 2^{-j} de ce type.
- En utilisant la définition de la dimension de Hausdorff, il y a environ $2^{d_f(h)j}$ intervalles dyadiques de taille 2^{-j} qui recouvrent les points x tels que $h_f(x) = h$.

$$\implies \rho_f(h) = d_f(h)$$

Leaders profile method

On considère la fonction

$$\rho_f(h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : 2^{-(h+\varepsilon)j} \leq d_\lambda \leq 2^{-(h-\varepsilon)j}\}}{\log 2^j}.$$

Interprétation. Il y a approximativement $2^{\rho_f(h)j}$ coefficients de taille 2^{-hj} .

Argument heuristique. Considérons les points x tels que $h_f(x) = h$.

- $d_j(x) \sim 2^{-hj}$ et il y a environ $2^{\rho_f(h)j}$ intervalles dyadiques de taille 2^{-j} de ce type.
- En utilisant la définition de la dimension de Hausdorff, il y a environ $2^{d_f(h)j}$ intervalles dyadiques de taille 2^{-j} qui recouvrent les points x tels que $h_f(x) = h$.

$$\boxed{\implies \rho_f(h) = d_f(h)}$$

Leaders profile method

On considère la fonction

$$\rho_f(h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : 2^{-(h+\varepsilon)j} \leq d_\lambda \leq 2^{-(h-\varepsilon)j}\}}{\log 2^j}.$$

Interprétation. Il y a approximativement $2^{\rho_f(h)j}$ coefficients de taille 2^{-hj} .

Argument heuristique. Considérons les points x tels que $h_f(x) = h$.

- $d_j(x) \sim 2^{-hj}$ et il y a environ $2^{\rho_f(h)j}$ intervalles dyadiques de taille 2^{-j} de ce type.
- En utilisant la définition de la dimension de Hausdorff, il y a environ $2^{d_f(h)j}$ intervalles dyadiques de taille 2^{-j} qui recouvrent les points x tels que $h_f(x) = h$.

$$\implies \rho_f(h) \geq d_f(h)$$

Leaders profile method

On considère la fonction

$$\rho_f(h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : 2^{-(h+\varepsilon)j} \leq d_\lambda \leq 2^{-(h-\varepsilon)j}\}}{\log 2^j}.$$

Interprétation. Il y a approximativement $2^{\rho_f(h)j}$ coefficients de taille 2^{-hj} .

Argument heuristique. Considérons les points x tels que $h_f(x) = h$.

- $d_j(x) \sim 2^{-hj}$ et il y a environ $2^{\rho_f(h)j}$ intervalles dyadiques de taille 2^{-j} de ce type.
- En utilisant la définition de la dimension de Hausdorff, il y a environ $2^{d_f(h)j}$ intervalles dyadiques de taille 2^{-j} qui recouvrent les points x tels que $h_f(x) = h$.

$$\implies \rho_f(h) \geq d_f(h)$$

Problèmes.

- ρ_f peut dépendre de la base d'ondelettes choisie
- la définition de ρ_f est numériquement instable

On considère les fonctions

$$\nu_f^+(h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : d_\lambda \geq 2^{-(h+\varepsilon)j}\}}{\log 2^j}$$

et

$$\nu_f^-(h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : d_\lambda \leq 2^{-(h-\varepsilon)j}\}}{\log 2^j}.$$

Le spectre de singularités de f est alors estimé par la fonction

$$\nu_f := \min\{\nu_f^+, \nu_f^-\}$$

Propriétés.

- ν_f^+ est l'enveloppe croissante de ρ_f , ν_f^- est l'enveloppe décroissante de ρ_f
- ν_f est indépendant de la base d'ondelettes choisie
- Si f est uniformément Höldérienne, $d_f(h) \leq \nu_f(h)$ pour tout $h \geq 0$

On considère les fonctions

$$\nu_f^+(h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : d_\lambda \geq 2^{-(h+\varepsilon)j}\}}{\log 2^j}$$

et

$$\nu_f^-(h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : d_\lambda \leq 2^{-(h-\varepsilon)j}\}}{\log 2^j}.$$

Le spectre de singularités de f est alors estimé par la fonction

$$\nu_f := \min\{\nu_f^+, \nu_f^-\}$$

Propriétés.

- ν_f^+ est l'enveloppe croissante de ρ_f , ν_f^- est l'enveloppe décroissante de ρ_f
- ν_f est indépendant de la base d'ondelettes choisie
- Si f est uniformément Höldérienne, $d_f(h) \leq \nu_f(h)$ pour tout $h \geq 0$

Exemples théoriques

1. Mouvement Brownien fractionnaire

Presque sûrement, l'exposant de Hölder d'un mouvement Brownien fractionnaire B_H de paramètre de Hurst $H \in]0, 1[$ est constant et égal à H . Les méthodes présentées permettent donc d'obtenir une **estimation du paramètre du Hurst**.

Validité du formalisme.

$$d_{B_H} = \nu_{B_H}$$

Idée. Dans une base d'ondelette bien choisie, les coefficients d'ondelette de B_H se comportent comme

$$c_{j,k} = 2^{-Hj} \xi_{j,k} \quad \text{où} \quad \xi_{j,k} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, on montre qu'avec une probabilité 1, il existe une échelle J telle que

$$j^{4H} 2^{-Hj} \leq d_{j,k} \leq j 2^{-Hj} \quad \forall j \geq J, k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$$

Exemples théoriques

1. Mouvement Brownien fractionnaire

Presque sûrement, l'exposant de Hölder d'un mouvement Brownien fractionnaire B_H de paramètre de Hurst $H \in]0, 1[$ est constant et égal à H . Les méthodes présentées permettent donc d'obtenir une **estimation du paramètre du Hurst**.

Validité du formalisme.

$$d_{B_H} = \nu_{B_H}$$

Idée. Dans une base d'ondelette bien choisie, les coefficients d'ondelette de B_H se comportent comme

$$c_{j,k} = 2^{-Hj} \xi_{j,k} \quad \text{où} \quad \xi_{j,k} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, on montre qu'avec une probabilité 1, il existe une échelle J telle que

$$j^{4H} 2^{-Hj} \leq d_{j,k} \leq j 2^{-Hj} \quad \forall j \geq J, k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$$

2. Lacunary Wavelet Series

Fixons $\eta \in (0, 1)$ et $\alpha > 0$. On considère

$$(g_{j,k})_{j,k} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bern}(2^{-(1-\eta)j}).$$

Les coefficients d'ondelettes de la Lacunary Wavelet Series $R_{\alpha,\eta}$ sont définis par

$$c_{j,k} = g_{j,k} 2^{-\alpha j} \quad \forall j \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}.$$

Avec une probabilité 1, le spectre de singularités de $R_{\alpha,\eta}$ est donné par

$$d_{R_{\alpha,\eta}}(h) = \begin{cases} \frac{h\eta}{\alpha} & \text{si } h \in [\alpha, \frac{\alpha}{\eta}], \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Validité du formalisme.

$$d_{F_p} = \nu_{F_p}$$

2. Lacunary Wavelet Series

Fixons $\eta \in (0, 1)$ et $\alpha > 0$. On considère

$$(g_{j,k})_{j,k} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bern}(2^{-(1-\eta)j}).$$

Les coefficients d'ondelettes de la Lacunary Wavelet Series $R_{\alpha,\eta}$ sont définis par

$$c_{j,k} = g_{j,k} 2^{-\alpha j} \quad \forall j \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}.$$

Avec une probabilité 1, le spectre de singularités de $R_{\alpha,\eta}$ est donné par

$$d_{R_{\alpha,\eta}}(h) = \begin{cases} \frac{h\eta}{\alpha} & \text{si } h \in [\alpha, \frac{\alpha}{\eta}], \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Validité du formalisme.

$$d_{F_p} = \nu_{F_p}$$

$$\nu_{F_p}(h) = \begin{cases} \frac{h\eta}{\alpha} & \text{si } h \in [\alpha, \frac{\alpha}{\eta}], \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Idée.

- Avec une probabilité 1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que

$$d_{j,k} \geq 2^{-j(\frac{\alpha}{\eta} + \varepsilon)} \quad \forall j \geq J, k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}.$$

- Avec une probabilité 1, pour tout $\eta' > \eta$, il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que

$$\#\{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\} : c_{j,k} = 2^{-\alpha j}\} \leq 2^{\eta' j} \quad \forall j \geq J.$$

- $\#\{k : d_{j,k} \geq 2^{-(h+\varepsilon)j}\} \leq \sum_{j' \leq \frac{h+\varepsilon}{\alpha} j} \#\{k' : c_{j',k'} = 2^{-\alpha j'}\} \leq \sum_{j' \leq \frac{h+\varepsilon}{\alpha} j} 2^{\eta' j'}$

$$\implies \frac{\log \#\{k : d_{j,k} \geq 2^{-(h+\varepsilon)j}\}}{\log 2^j} \sim \eta \frac{h}{\alpha}$$

3. Random Wavelet Series

On dit que

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{j,k} \psi_{j,k}$$

est une Random Wavelet Series si

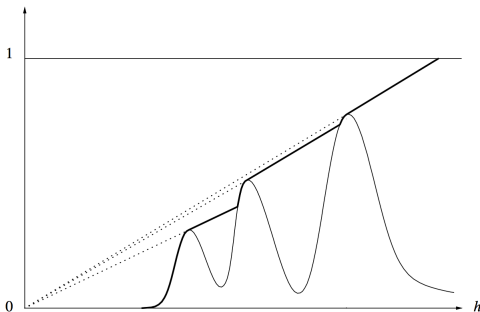
1. pour tout j , les $c_{j,k}$ sont des variables aléatoires identiquement distribuées; la loi de $-\frac{\log |c_{j,k}|}{\log 2^j}$ est notée ρ_j ;
2. les $c_{j,k}$ sont tous indépendants;
3. il existe un $\alpha_{\min} > 0$ tel que

$$\rho(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log (2^j \rho_j([\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]))}{\log 2^j}$$

est strictement négatif pour tout $\alpha < \alpha_{\min}$.

Avec une probabilité 1, le spectre de singularités de f est donné par

$$d_f(h) = \begin{cases} h \sup_{\alpha \in (0, h]} \frac{\rho(\alpha)}{\alpha} & \text{si } h \in [h_{\min}, h_{\max}], \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$



Validité du formalisme.

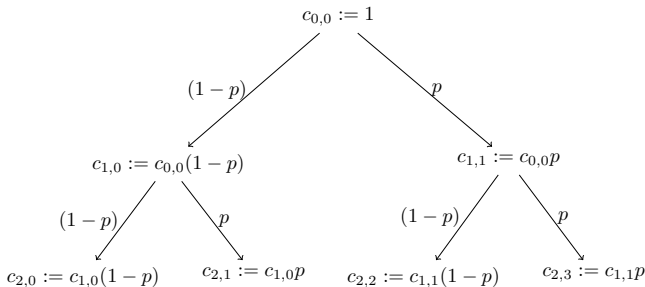
$$d_f = \nu_f$$

4. Cascades

Soit $p \in]0, 1[$. La série d'ondelette F_p considérée est définie via ses coefficients d'ondelette

$$c_{j,k} = p^{n(j,k)}(1-p)^{j-n(j,k)}$$

où $n(j, k)$ est le nombre de 1 parmi les j coordonnées de la décomposition dyadique de $k2^{-j}$.



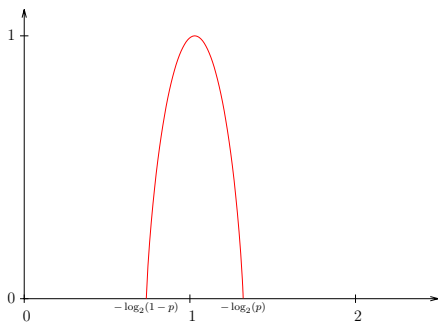
Si $p \in]0, 1/2[$, le spectre de singularités de F_p est

$$d_{F_p}(h) = -(\alpha \log_2(\alpha) + (1 - \alpha) \log_2(1 - \alpha)),$$

où

$$\alpha = \frac{h + \log_2(1 - p)}{\log_2(1 - p) - \log_2 p},$$

pour tout $h \in [-\log_2(1 - p), -\log_2 p]$.

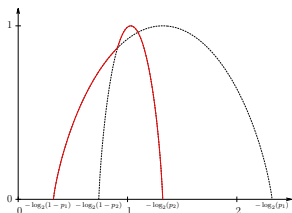


Validité du formalisme

$$d_{F_p} = \nu_{F_p}$$

Exemples liés.

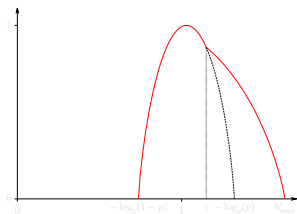
- Sommes de cascades.



Validité du formalisme

$$d_{F_{p_1} + F_{p_2}} = \nu_{F_{p_1} + F_{p_2}}$$

- Cascades seuillées. $c_\lambda^t = c_\lambda \mathbf{1}_{|\cdot| \geq 2^{-\gamma j}}(c_\lambda)$

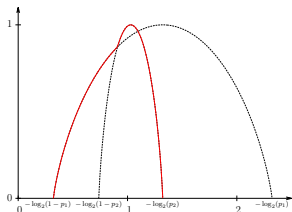


Validité du formalisme

$$d_{F^t} = \nu_{F^t}$$

Exemples liés.

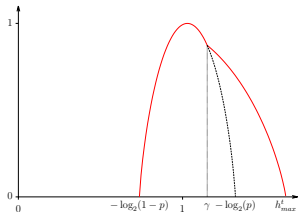
- Sommes de cascades.



Validité du formalisme

$$d_{F_{p_1} + F_{p_2}} = \nu_{F_{p_1} + F_{p_2}}$$

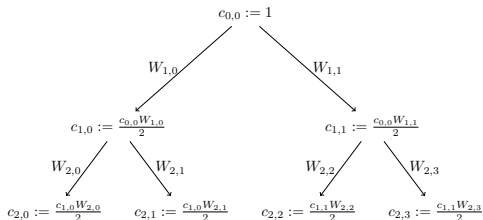
- Cascades seuillées. $c_\lambda^t = c_\lambda \mathbf{1}_{|\cdot| \geq 2^{-\gamma j}}(c_\lambda)$



Validité du formalisme

$$d_{F^t} = \nu_{F^t}$$

- Cascades de Mandelbrot. Soit W une variable aléatoire positive telle que $\mathbb{E}[\log W] = 1/2$. On considère une suite $(W_{j,k})_{j,k}$ de copies indépendantes de W , et on définit les coefficients d'ondelettes comme suit:



Spectre de singularités d'une cascade log-normale:

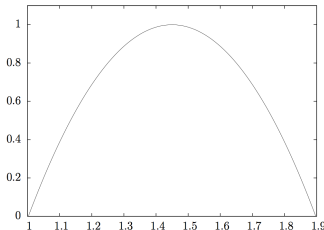


Figure : $\mu = -0.42 \log 2$, $\sigma^2 = 0.1 \log 2$

Comparaison théorique des formalismes

Proposition

Si ν_f prend la valeur $-\infty$ en dehors d'un compact de $[0, +\infty[$, alors

$$d_f(h) \leq \nu_f(h) \leq L_f(h)$$

pour tout $h \in \mathbb{R}$ et L_f est l'enveloppe concave de ν_f .

Idée. Montrer que

$$\eta_f(q) = \inf_h \{hq - \nu_f(h)\} + 1, \quad \forall q$$

Or, par définition

$$L_f(h) = \inf_q \{hq - \eta_f(q)\} + 1, \quad \forall h$$

→ Utiliser les propriétés de la transformation de Legendre

Comparaison théorique des formalismes

Proposition

Si ν_f prend la valeur $-\infty$ en dehors d'un compact de $[0, +\infty[$, alors

$$d_f(h) \leq \nu_f(h) \leq L_f(h)$$

pour tout $h \in \mathbb{R}$ et L_f est l'enveloppe concave de ν_f .

Idée. Montrer que

$$\eta_f(q) = \inf_h \{hq - \nu_f(h)\} + 1, \quad \forall q$$

Or, par définition

$$L_f(h) = \inf_q \{hq - \eta_f(q)\} + 1, \quad \forall h$$

→ Utiliser les propriétés de la transformation de Legendre

Illustrations numériques

1. Mouvement Brownien fractionnaire

Rappel. Presque sûrement, l'exposant de Hölder d'un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in]0, 1[$ est égal à H en tout point.

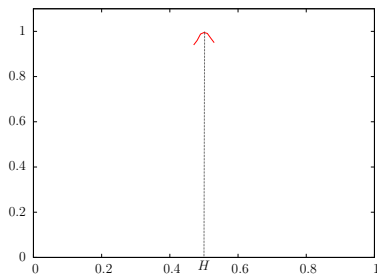
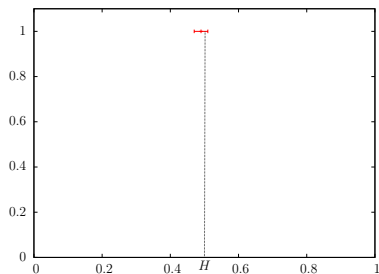


Figure : Estimation du spectre d'un mouvement Brownien par la *wavelet leaders method* à gauche et la *leaders profile method* à droite.

2. Cascades

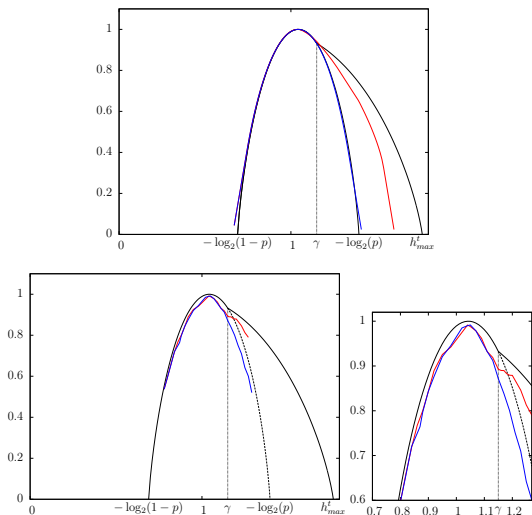


Figure : En bleu (resp. rouge), spectre d'une cascade de paramètre $p = 0.38$ (resp. de son seuillage d'ordre $\gamma = 1.15$).

Cascades de Mandelbrot.

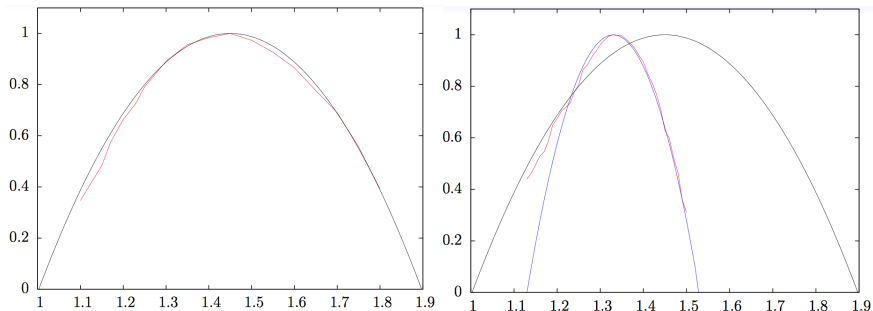


Figure : Spectre d'une cascade (resp. de la somme de deux cascades) log-normale de paramètres $\mu = -0.42 \log 2$, $\sigma^2 = 0.1 \log 2$ (resp. $\mu = -0.42 \log 2$, $\sigma^2 = 0.1 \log 2$ et $\mu = -0.33 \log 2$, $\sigma^2 = 0.02 \log 2$). En rouge, estimation par la leaders profile method

3. Processus de Lévy

Si le processus de Lévy X ne possède pas de partie Brownienne, son spectre de singularités est presque sûrement donné par

$$d_X(h) = \beta h, \quad \forall h \in [0, 1/\beta]$$

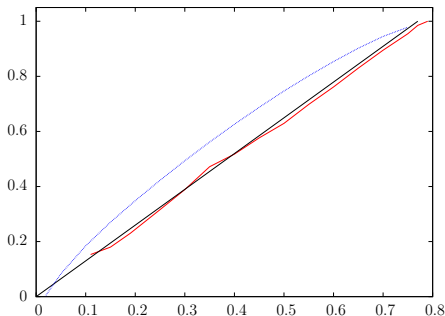


Figure : Spectre d'un processus de Lévy sans partie Brownienne. En bleu, estimation par la *wavelet leaders method*. En rouge, estimation par la *leaders profile method*.

Si le processus de Lévy a une partie Brownienne, son spectre des singularité est presque sûrement donné par

$$d_X(h) = \begin{cases} \beta h & \text{if } h \in [0, 1/2[\\ 1 & \text{if } h = 1/2 \end{cases}$$

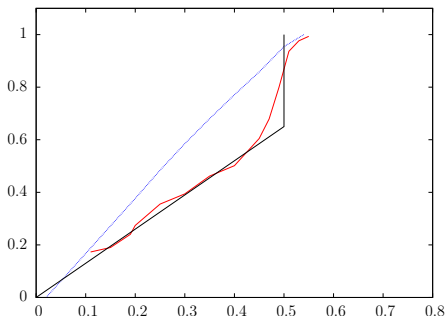


Figure : Spectre d'un processus de Lévy avec partie Brownienne. En bleu, estimation par la *wavelet leaders method*. En rouge, estimation par la *leaders profile method*.

Conclusions

Résultats sur la leaders profile method

- Elle permet de détecter des spectres de singularités que **les autres méthodes proposées n'étaient pas capable de détecter**;
- Elle donne le spectre théorique pour certaines **fonctions spécifiques**;
- Elle donne toujours une **borne supérieure** pour le spectre.

Comparaison avec la wavelet leaders method

- D'un point de vue théorique, elle donne des résultats aussi bon que la wavelet leaders method dans le cas concave, et des **meilleurs résultats dans le cas non-concave**;
- D'un point de vue pratique
 - Résultats aussi bons que la wavelet leaders method dans le cas monofractal;
 - Résultats **meilleurs** dans le cas **non-concave**;
 - Résultats **moins bons** pour les **petites valeurs** de l'exposant de Hölder;

→ les deux méthodes sont complémentaires
- L'implémentation de la méthode permet de détecter la **présence de deux signaux**.

Conclusions

Résultats sur la leaders profile method


- Elle permet de détecter des spectres de singularités que **les autres méthodes proposées n'étaient pas capable de détecter**;
- Elle donne le spectre théorique pour certaines **fonctions spécifiques**;
- Elle donne toujours une **borne supérieure** pour le spectre.


Comparaison avec la wavelet leaders method


- D'un point de vue théorique, elle donne des résultats aussi bon que la wavelet leaders method dans le cas concave, et des **meilleurs résultats dans le cas non-concave**;
- D'un point de vue pratique
 - Résultats aussi bons que la wavelet leaders method dans le cas monofractal;
 - Résultats **meilleurs** dans le cas **non-concave**;
 - Résultats **moins bons** pour les **petites valeurs** de l'exposant de Hölder;


→ les deux méthodes sont complémentaires
- L'implémentation de la méthode permet de détecter la **présence de deux signaux**.

Références I


 A. Arneodo, E. Bacry, and J.F. Muzy.
Random cascades on wavelet dyadic trees.
Journal of Mathematical Physics, 39(8):4142–4163, 1998.

 J.M. Aubry and S. Jaffard.
Random wavelet series.
Comm. Math. Phys., 227:483–514, 2002.

 F. Bastin, C. Esser, and S. Jaffard.
Large deviation spectra based on wavelet leaders.
Accepted for publication in *Rev. Iberoamericana*.

 J. Barral and S. Seuret.
From multifractal measures to multifractal wavelet series.
J. Fourier Anal. Appl., 11:589–614, 2005.

 I. Daubechies.
Ten Lectures on Wavelets.
CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 1992.

 C. Esser, T. Kleyntssens, and S. Nicolay.
A multifractal formalism for non-concave and non-increasing spectra: the leaders profile method.
Submitted for publication.

Références II



S Jaffard.

The multifractal nature of Lévy processes.

Probab. Theory Relat. Fields, 114:207–227, 1999.



S. Jaffard.

On lacunary wavelet series.

Ann. Appl. Probab., 10(1):313–329, 2000.



S. Jaffard.

Wavelet techniques in multifractal analysis, fractal geometry and applications: A jubilee of Benoit Mandelbrot.

Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 72:91–151, 2004.



P.G. Lemarié and Y. Meyer.

Ondelettes et bases hilbertiennes.

Revista Math.Iberoamericana, 1:1–18, 1986.



Y. Meyer.

Ondelettes et opérateurs.

Hermann, 1990.