

## Modélisation du phénomène de contact unilatéral avec frottement dans un contexte de grandes déformations

R. CHARLIER et S. CESCOTTO

Département M.S.M., Université de Liège, 6, quai Banning, 4000 Liège, Belgique

Résumé - L'introduction de l'article présente les caractéristiques du phénomène de contact unilatéral avec frottement dans un contexte de grandes déformations. L'obstacle est supposé rigide. Ensuite, on présente les grandeurs fondamentales (contraintes et déformations) et on développe la loi de frottement de Coulomb selon le formalisme élastoplastique. L'ensemble est introduit dans des éléments finis spécifiques, adaptés aux états plan, axisymétrique et tridimensionnel. Le problème de l'objectivité incrémentale est examiné. Pour terminer, des exemples d'application sont présentés.

Abstract - In the paper introduction are presented the main features of the unilateral contact with friction phenomenon, related to the large strains problems. The obstacle or foundation is supposed to be rigid. After that, the generalized stress and strain vectors are presented, and the Coulomb's friction law is developed as an elastoplastic one. Special finite elements are then realized. They can model plane strains, axisymmetric and threedimensional problems. The incremental objectivity problem is discussed. Some numerical examples are concluding the paper.

### INTRODUCTION

Nous étudions dans cet article le contact entre deux corps : d'une part une fondation ou un obstacle rigide, se déplaçant éventuellement, et d'autre part un solide subissant de grandes déformations, telles qu'un élément de sa surface puisse notamment tourner de plusieurs dizaines de degrés. Un exemple du type de problème étudié est l'écrasement par une presse d'un lopin cylindrique en acier de 50 à 75 % de sa hauteur initiale (fig.1)

De grands déplacements et de grandes rotations des surfaces peuvent exister avant leur entrée en contact. Ensuite, si le critère de frottement est atteint, de grands déplacements glissants peuvent être réalisés. En certains points, le contact apparaît, puis disparaît. L'analyse géométrique des positions et déplacements des surfaces est donc fort importante.

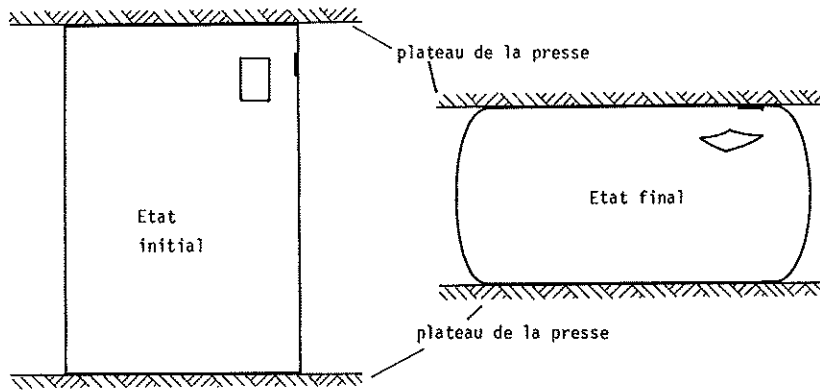


figure 1. Ecrasement d'un lopin d'acier.

D'autre part, le modèle numérique de contact doit être intégré dans un code de calcul par éléments finis prenant en compte les grandes déformations, l'élastoplasticité et l'élastoviscoplasticité. Ces non linéarités s'ajoutent à celles du contact et du frottement. Il semble donc logique de traiter simultanément l'ensemble des non linéarités, et non d'itérer séparément sur chaque problème. Ceci nous a conduit au développement d'une formulation incrémentale du frottement et à l'utilisation de la technique de pénalisation du contact, selon le canevas classique de l'élastoplasticité incrémentale.

Enfin, nous avons choisi de formuler le contact dans des éléments finis de frontière spécialisés dans ce but. Cette option permet d'introduire élégamment le contact dans un programme non-linéaire classique. La structure du code est à peine affectée. Cette technique présente donc beaucoup de souplesse.

#### CONTRAINTES, DEFORMATIONS, PUISSANCE VIRTUELLE

Nous avons choisi d'exprimer l'équilibre du solide dans la configuration courante (déformée et contrainte) à l'aide du principe des puissances virtuelles /1./ Le même principe est appliqué au problème de contact. Le tenseur contrainte de la mécanique du solide est remplacé par le vecteur force par unité de surface appliqué à la frontière déformée du solide. Il est exprimé dans des axes locaux à celle-ci (fig. 2). Nous appelons ce vecteur "contrainte de contact"  $\underline{\sigma}$  :

$$\underline{\sigma}^T = \langle p, \tau_S, \tau_T \rangle \quad (1.)$$

Ainsi défini,  $\underline{\sigma}$  est objectif : il n'est pas affecté par une rotation de corps rigide du solide. Son taux de variation est donc égal à sa dérivée matérielle. Nous utiliserons :

$$\dot{\underline{\sigma}} = \frac{d\underline{\sigma}}{dt} \quad (2.)$$

dans la loi constitutive.

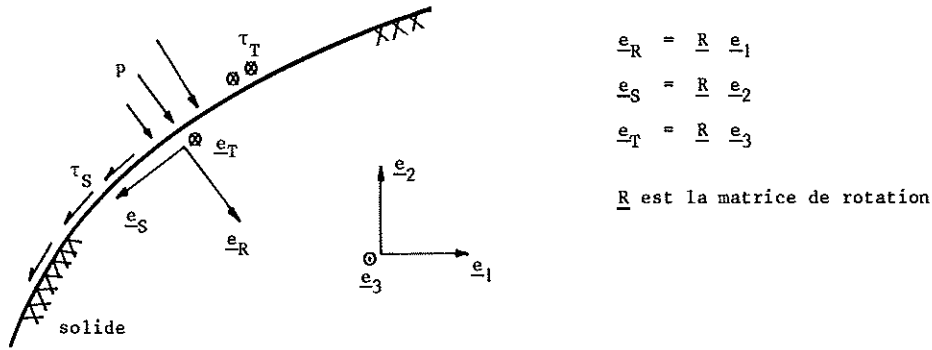


figure 2. Axes locaux et contraintes de contact.

A la vitesse de contrainte  $\dot{\underline{\epsilon}}$  est conjuguée la vitesse de déplacement relatif de la frontière et de la fondation, exprimée dans les mêmes axes locaux. Nous la notons  $\dot{\underline{\epsilon}}$  :

$$\dot{\underline{\epsilon}}^T = \langle \dot{\epsilon}_R, \dot{\epsilon}_S, \dot{\epsilon}_T \rangle \tag{3.}$$

Cette vitesse ne peut être intégrée : le déplacement relatif entre le solide et la fondation n'a pas de sens, car nous nous situons dans un contexte de grands déplacements : à un point du solide correspondent une multitude de points de fondation successifs. Toutefois, la première composante peut subir un traitement spécial. De même que  $\dot{\epsilon}_R$  est conjugué à  $p$ , la profondeur de pénétration  $d$  de la fondation mesurée normalement au solide est conjuguée à la pression  $p$ , et elle peut être aisément calculée à tout instant. Elle n'est pas égale à l'intégrale temporelle de  $\dot{\epsilon}_R$ .

Evaluons la vitesse relative  $\dot{\underline{\epsilon}}$ . Soit  $\underline{x}^s$  le vecteur coordonnées d'un point à la frontière du solide. Le vecteur distance d'un point de la fondation de coordonnées  $\underline{x}^f$  au point du solide est :

$$\underline{u} = \underline{x}^f - \underline{x}^s \tag{4.}$$

Mesurons cette distance en axes locaux :

$$\underline{d} = \underline{R} \underline{u} = \underline{R} (\underline{x}^f - \underline{x}^s) \tag{5.}$$

$\underline{d}$  est une mesure objective du vecteur distance, car il est exprimé dans des axes locaux liés au solide et tournant avec lui. En effet, soit un déplacement rigide du solide et de la fondation. L'ensemble du solide, sa frontière et la fondation sont affectés simultanément par une transla-

tion et - ou une rotation. Les formes des surfaces du solide et de la fondation, et leur position relative ne sont pas affectées par ce déplacement rigide. Donc  $\underline{d}$  ne varie pas.

La vitesse relative de la fondation et du solide s'obtient par dérivation temporelle du vecteur distance :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} &= \frac{d\underline{d}}{dt} = \underline{R} \left( \frac{d\underline{x}^f}{dt} - \frac{d\underline{x}^s}{dt} \right) + \frac{d\underline{R}}{dt} (\underline{x}^f - \underline{x}^s) \\ \dot{\underline{e}} &= \underline{R} (\underline{v}^f - \underline{v}^s) + \dot{\underline{R}} (\underline{x}^f - \underline{x}^s) \end{aligned} \quad (6.)$$

Donc la vitesse relative des deux surfaces n'est pas simplement la projection en axes locaux de la différence des vitesses en axes globaux. Un deuxième terme apparaît, qui tient compte de la vitesse de rotation du trièdre local.

La puissance virtuelle développée à l'interface entre le solide et la fondation, lors d'une perturbation virtuelle cinématiquement admissible des coordonnées  $\delta\underline{x}$ , est  $\delta W$

$$\delta W = \int_{\underline{s}} \underline{\sigma} \cdot \delta \dot{\underline{e}} \, dS \quad (7.)$$

$\underline{s}$  est la surface de l'interface dans la configuration déformée actuelle. Cette expression (7.) montre que les vecteurs  $\underline{\sigma}$  et  $\dot{\underline{e}}$  sont conjugués. Ils sont donc liés par une loi constitutive.

#### LA LOI CONSTITUTIVE DE CONTACT AVEC FROTTEMENT

La relation entre  $\underline{\sigma}$  et  $\dot{\underline{e}}$  dépend essentiellement de la "rhéologie" de l'interface de contact.

Les matériaux mis en contact varient selon les auteurs. Si la plupart des articles s'appliquent à des métaux, d'autres analyses existent aussi : DIETERICH /20/, /21/, GHABOUSSI et al /22/, SCHÄFER /27/ ont étudié le frottement dans les joints rocheux. Le dernier cité a aussi envisagé les mortiers hydrauliques et les joints dans les constructions préfabriquées.

Ainsi que l'écrit GODET /4/, les surfaces de contact sont rugueuses, et des contacts locaux s'établissent aux sommets des aspérités, qui sont plutôt ronds qu'anguleux.

Les surfaces parfaitement "propres" adhèrent les unes aux autres. Les films naturels et artificiels peuvent limiter l'adhésion. Les surfaces industrielles sont toujours couvertes par un ou plusieurs films. Les films naturels peuvent être détruits par le frottement et se reformer entre les passes successives lors des processus multi-passes. Pendant le frottement, des particules se détachent des deux corps en contact (une usure apparaît) et interagissent avec les films.

Dès lors, il apparaît nécessaire de représenter, dans la modélisation du contact avec frottement, la rhéologie des films superficiels, du lubrifiant, et des particules entraînées. Mais ceci est pratiquement impossible. Des théories de la lubrification existent, basées sur les équations de l'élastohydrodynamique /16./. Elles conduisent à lier la contrainte de frottement à la vitesse relative des deux surfaces (théorie visqueuse). CHANDRA et MUKHERJEE /17/, négligeant l'effet de la pression de contact, supposent que la contrainte de frottement ne dépend que de la

vitesse relative des deux surfaces. Leur loi est donc découplée du contact. RICE et RUINA /14/ et DIETERICH /20/,/21/ citent également la vitesse comme un facteur important.

Mais dans les problèmes que nous étudions en général, l'épaisseur de lubrifiant n'est pas suffisante pour éviter que les aspérités se touchent. Le frottement est alors dit semi-fluide. Peu de travaux ont été consacrés à ce cas, limite peu intéressante pour les théoriciens de la lubrification. Nous supposons ici que l'influence du lubrifiant est suffisamment faible pour que les lois du frottement sec soient approximativement valables.

Nous supposons également que la taille des aspérités, la dimension de la rugosité est faible devant la taille des éléments finis développés et devant les dimensions des solides étudiés. Cette hypothèse est semblable à celle qui est faite en plasticité pour étudier le métal comme un continu et non comme un assemblage de cristaux. Les lois phénoménologiques développées ci-dessous sont donc une représentation statistique du phénomène microscopique, ainsi transposé à l'échelle macroscopique. Nous nous écartons ainsi des travaux de ODEN et PIRES /11/,/12/,/13/.

Nous supposons enfin que les rugosités des surfaces des deux solides en contact sont isotropes et le restent. Cette hypothèse n'est manifestement pas toujours vérifiée : le frottement entraîne une usure et une modification de l'état de surface. Il s'ensuit que si un frottement prolongé se produit sur l'une des surfaces en présence dans une direction privilégiée, la loi de frottement devient anisotrope. MROZ et MICHALOWSKI /6/ ont étudié le frottement anisotrope dans un cas particulier de fini de surface et en ont déduit des lois constitutives anisotropes. Dans le contexte de grandes déformations où nous nous situons, cette approche n'est pas directement applicable.

La loi constitutive développée ci-dessous est basée sur l'approche de COULOMB du frottement sec. Nous nous limitons ainsi à la modélisation des effets d'interface. Certains auteurs (AL KHATTAT /31/ , NAGTEGAAL et REBELO /24/, ...) étudient les "glissements" qui se produisent dans l'un des solides à proximité de la surface de contact, suite à un cisaillement plastique du métal. Ils limitent alors la contrainte de frottement à la limite de plasticité initiale en cisaillement pur des métaux. L'écroutissage du métal et l'effet des diverses contraintes dans le métal sont donc négligés. Il nous semble préférable de modéliser spécifiquement et séparément la couche superficielle du métal et son comportement élastoplastique dans une fine couche d'éléments finis de solide.

Nous avons choisi de développer la relation constitutive du contact avec frottement selon le formalisme élastoplastique. CURNIER a utilisé la même formulation dans le domaine des petites déformations /5/, puis l'a appliqué aux grandes déformations élastoplastiques /7/. SIDOROFF /3/ a montré, dans son étude thermodynamique des interfaces de frottement que cette approche est correcte : le glissement est un phénomène mécanique irréversible comparable à ceux qui apparaissent à l'intérieur des solides.

Nous supposons donc qu'il existe dans l'espace des contraintes  $\underline{\sigma}$  un domaine élastique, où les déformations existent mais sont modérées. Ce domaine est limité par le critère de COULOMB. Un état de contrainte situé sur celui-ci provoque des déplacements finis et irréversibles.

Un point dans l'espace des contraintes est privilégié : l'origine des axes, qui correspond

à l'état de contraintes nulles :

$$p = 0, \tau_S = 0, \tau_T = 0, \underline{\sigma} = \underline{0}$$

et à l'absence de contact entre la fondation et la structure. Cet état est décelé par calcul de la distance  $d$  entre le solide et la fondation, mesurée selon la normale  $\underline{e}_R$  à la surface du solide : si  $d \leq 0$ , il n'y a pas de contact ; si  $d > 0$ , il y a contact et interpénétration.

Le domaine élastique est équivalent au contact sans glissement : les deux surfaces en contact ne peuvent se déplacer l'une par rapport à l'autre. Cette condition de blocage absolu ne peut être aisément introduite dans un programme d'éléments finis travaillant de façon incrémentale. Nous utilisons donc la méthode de pénalisation pour modéliser le contact sans glissement, nous acceptons une légère pénétration et un léger glissement relatif de la frontière et de la structure. Nous les liions aux contraintes par :

$$\underline{\sigma} = \underline{C}^e \underline{\varepsilon} ; \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\tau}_S \\ \dot{\tau}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p & 0 & 0 \\ 0 & K_\tau & 0 \\ 0 & 0 & K_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_R \\ \dot{\varepsilon}_S \\ \dot{\varepsilon}_T \end{bmatrix} \quad (8.)$$

$K_p$  et  $K_\tau$  sont les coefficients d'élasticité, ou de pénalisation. Ils doivent être très grands (en comparaison avec la rigidité du solide) afin de limiter au maximum les déplacements relatifs en contact collant, et en particulier l'interpénétration des deux surfaces en contact. Toutefois, les coefficients de pénalisation sont limités par les problèmes de convergence numérique : l'utilisateur n'est pas totalement libre de fixer  $K_p$  et  $K_\tau$ .

La première composante  $p$  du vecteur contrainte  $\underline{\sigma}$  peut être traitée d'une manière différente. Comme la déformation totale  $\underline{\varepsilon}$  n'existe pas, il n'est pas possible d'écrire une forme intégrée de (8.). La loi constitutive est donc hypoélastique, la forme hyperélastique n'existe pas. Par contre, il existe une valeur totale de la première composante

$$\varepsilon_R = d \quad (9a.)$$

Cette valeur est utile (elle indique s'il y a contact ou non) et aisée à calculer. Dès lors, il est possible d'exprimer la pression de contact par la relation hyperélastique

$$p = K_p d \quad (9b.)$$

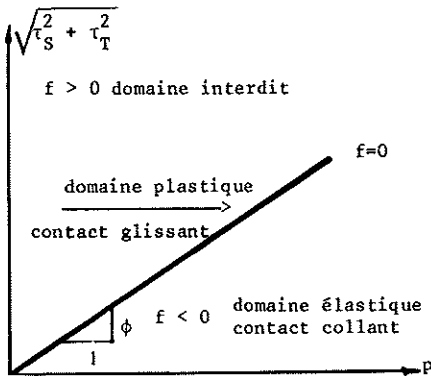


figure 3. Surface de plasticité

Des déformations irréversibles, c'est-à-dire des glissements, apparaissent dès que le critère de plasticité est atteint (fig. 3).

$$f = \sqrt{\tau_S^2 + \tau_T^2} - \phi p$$

- si  $f < 0$  le contact est collant
- si  $f = 0$  le contact est glissant
- $f > 0$  est impossible

(10.)

$\phi$  est le coefficient de frottement

Exprimons la vitesse de déformation irréversible  $\dot{\underline{\epsilon}}^p$ . En plasticité des métaux, on utilise la loi de normalité (plasticité associée)

$$\dot{\underline{\epsilon}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (11.)$$

Il est bien connu que ceci ne peut-être posé dans le cas du contact. Dans le cas des surfaces métalliques, aucune déformation plastique n'est conjuguée à la pression de contact. Dans les joints rocheux par contre, selon le remplissage, une déformation irréversible normale au plan du joint peut exister, mais elle est toujours plus faible que celle prédite par la loi de normalité.

Nous sommes ainsi conduits à utiliser une surface d'écoulement  $g$ , distincte de la surface de plasticité, à laquelle les déformations irréversibles sont normales. Pour les métaux,  $g$  est un cylindre dans l'espace des contraintes :

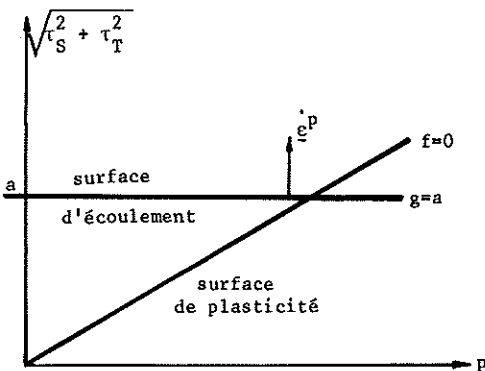


figure 4. Surface d'écoulement

$$g = \sqrt{\tau_S^2 + \tau_T^2} \quad (12.)$$

Pour les roches, on peut choisir un cône ou une surface plus complexe, selon l'idée des "Cap-Models" /1/, /32/, /27/

Ensuite, nous introduisons classiquement le coefficient d'écrouissage  $\mu$  :

$$\dot{\lambda} = \mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \dot{\sigma}_i \quad (13.)$$

et nous utilisons la condition de cohérence de la surface de plasticité  $\dot{f}=0$  pour évaluer  $\mu$ . On a donc

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \dot{\sigma}_i + \frac{\partial f}{\partial \phi} \dot{\phi} = \frac{\dot{\lambda}}{\mu} - \dot{\phi}p \rightarrow \dot{f} = \frac{\dot{\lambda}}{\mu} - \dot{\phi}p = 0 \quad (15.)$$

Le seul paramètre de la surface de plasticité est le coefficient de frottement  $\phi$ . L'écrouissage éventuel consiste donc à modifier  $\phi$ .

L'écrouissage est peu connu : s'agit-il d'un adoucissement ou d'un durcissement ? En d'autres termes,  $\phi$  diminue-t-il ou augmente-t-il ? Ainsi que le montrent notamment les travaux de CODET /4/ et DIETERICH /20, 21/, l'écrouissage existe, et il est conditionné par l'évolution du fini des surfaces suite à l'usure, la présence entre les surfaces de particules arrachées par l'usure ou initialement présentes, la modification du film lubrifiant éventuel ... Nous nous sommes limité au cas de frottement sans écrouissage, car il semble que actuellement, vu les connaissances expérimentales, une telle loi est amplement suffisante. Nous avons donc ici

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = 0, \quad \dot{\phi} = 0. \quad (16.)$$

On obtient alors, par un développement classique /1/ :

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} C_{ij}^e \dot{\epsilon}_j}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} C_{ij}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_j}} \quad (17.)$$

et la relation constitutive est :

$$\dot{\sigma}_i = C_{ij}^e \dot{\epsilon}_j - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_a} C_{ab}^e \dot{\epsilon}_b}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_m} C_{mn}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_n}} C_{ij}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_j} \quad (18.)$$

#### LES ELEMENTS FINIS DE CONTACT

Les éléments de contact, situés à la frontière du solide déformable, sont des surfaces en état tridimensionnel et des lignes en état plan ou axisymétrique. Comme les éléments auxquels ils sont connectés, ils sont isoparamétriques du second degré. La puissance virtuelle est intégrée en surface par la méthode numérique de Gauss. Les axes locaux, les grandeurs géométriques et l'état de contrainte sont donc calculés uniquement aux points d'intégration, situés à l'intérieur de l'élément.

En état plan ou axisymétrique, les éléments sont des lignes à 3 noeuds (fig. 5). Les composantes des axes locaux (fig. 2) peuvent être évaluées sans difficulté /1/.

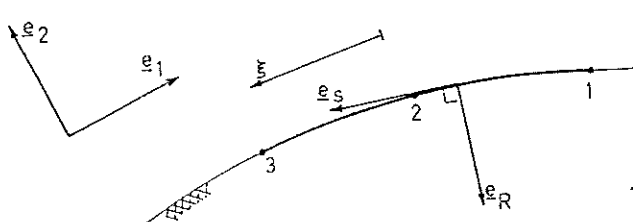


figure 5. L'élément de contact, côté solide

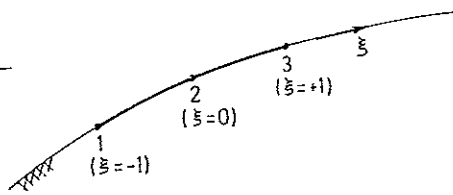


figure 6. L'élément de contact, côté fondation

On obtient sans difficulté les forces nodales énergétiquement équivalentes aux contraintes de contact :

$$F_{L1} = \sum_{PI} \left( -p \frac{dx_2}{d\xi} + \tau_S \frac{dx_1}{d\xi} \right) N_L W$$

$$F_{L2} = \sum_{PI} \left( p \frac{dx_1}{d\xi} + \tau_S \frac{dx_2}{d\xi} \right) N_L W \quad (19.)$$



où  $W$  est le poids d'intégration,  $N_L$  sont les fonctions d'interpolation, et  $\xi$  la coordonnée isoparamétrique.

Il faut encore calculer la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  par (6.), en fonction de la forme et du mouvement de la fondation. Nous développons ici, à titre d'exemple, le cas d'une fondation dont la surface est une courbe de forme parabolique, définie de façon isoparamétrique par 3 noeuds (équivalents aux noeuds structuraux). D'autres formes peuvent être envisagées sans difficulté (droite, cercle, ... /1./). On a

$$\underline{x}^f = N_L \underline{x}_L^f \quad , \quad L = 1,3. \quad (20.)$$

L'indice supérieur  $f$  indique que les grandeurs se rapportent à la fondation. Si  $\underline{x}^s$  est un point de la structure,  $\underline{e}_R$  la normale intérieure unitaire en ce point et  $d$  la distance à  $\underline{x}^s$ , l'équation de la droite normale à la structure est

$$\underline{x} = \underline{x}^s + d \underline{e}_R \quad (21.)$$

A l'intersection de la normale et de la fondation, la distance  $d$  et la coordonnée isoparamétrique  $\xi$  sont données par l'équation vectorielle du second degré

$$\underline{x}^s + d \underline{e}_R = N_L(\xi) \underline{x}_L^f \quad (22.)$$

On obtient ainsi deux couples de valeurs,  $(d_1, \xi_1)$  et  $(d_2, \xi_2)$ . Comment choisir l'un des deux ? Deux conditions sont immédiates :

$$d > 0 \quad (23.)$$

vu l'orientation de  $\underline{e}_R$  comme normale intérieure. Sinon, la frontière et la fondation ne sont pas en contact

$$-1 \leq \xi \leq 1 \quad (24.)$$

sinon le point de contact ne se situe pas entre le 1er et le 3e noeud de définition de la frontière. Ces deux conditions ne suffisent pas toujours à éliminer une au moins des deux intersections possibles.

La comparaison des normales à la structure et à la fondation au point d'intersection permet d'éliminer en toute sécurité un des points, qui représente un faux contact (fig. 7).

Dans les deux cas représentés, la normale  $\underline{e}_R$  à la structure intersecte la fondation en A et B. En A, la structure et la fondation s'interpénètrent, le contact est vrai. En B, le contact est faux. Le produit scalaire des vecteurs normales intérieurs à la structure et à la fondation est négatif en A et positif en B. Son signe est donc un critère efficace lorsque la fondation est composée d'un arc de parabole.

$$\begin{aligned} \underline{e}_R \cdot \underline{n}_A < 0 & \quad \text{contact} \\ \underline{e}_R \cdot \underline{n}_B > 0 & \quad \text{décollement} \end{aligned} \quad (25.)$$

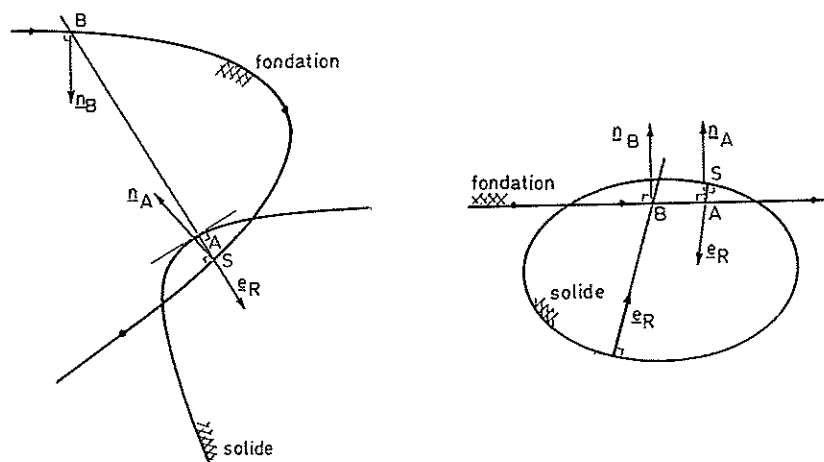


figure 7. Vrai et faux contact.

Il faut encore déterminer la vitesse relative de la fondation et du solide selon l'axe  $e_s$  tangent au solide. La formule (6.) établit la procédure à suivre. Elle tient compte de la vitesse de rotation  $\underline{R}$  du trièdre local.

Nous pouvons évaluer les forces nodales énergétiquement équivalentes aux pressions et frottements appliqués par le solide à la fondation et relatives aux noeuds de la fondation. Le processus est équivalent à celui de la détermination des forces nodales sur l'élément modélisant une frontière chargée. Les équations (19.) sont donc immédiatement valables, à condition que  $N_L$  représente la valeur des fonctions d'interpolation relatives aux noeuds de fondation, au point d'intersection dont la coordonnée  $\xi$  a été calculée par (22.). Les forces nodales ainsi obtenues se placent sur le même pied que les autres réactions, à condition que les noeuds de définition de la fondation soient bloqués. Elles assurent donc l'équilibre de translation des forces appliquées et des réactions.

Une procédure similaire a été développée pour l'état tridimensionnel /1/, /23/. L'élément de frontière du solide est un quadrilatère curviligne à 8 noeuds et 9 points d'intégration de Gauss. Nous avons considéré des frontières planes, cylindriques et tron-coniques. L'intersection de la normale à la frontière du solide et de la fondation (décrite par des noeuds dans "l'esprit isoparamétrique"), la distinction entre vrai et faux contact et les vitesses relatives font l'objet de calculs complexes mais sans difficulté particulière. Faute de place, nous ne pouvons pas les présenter ici.

#### L'OBJECTIVITE INCREMENTALE

La loi de contact avec frottement décrite ci-dessus (18.) est incrémentale :  $\dot{\underline{\sigma}} = f(\underline{\epsilon})$ . Elle doit donc être intégrée dans le temps. L'intégration des lois élastoplastiques a été étudiée par de nombreux auteurs /35 à 42 /. Nous divisons chaque pas en sous-intervalles, dans lesquels nous utilisons la méthode de la "normale moyenne" /36 / et un schéma précis au second

ordre. En présence de grands déplacements, ceci ne suffit pas. Il faut également que les contraintes de contact soient constantes lors d'un mouvement de corps rigide au sens du contact. C'est le problème de l'objectivité incrémentale /33, 34, 43 à 45/.

Considérons un pas tel que, à l'instant initial et à l'instant final, les formes des surfaces en contact et leur position relative sont identiques. Il faut utiliser pendant le pas un champ de déplacement tel que ces formes et position ne varient à aucun moment, et donc tel que la vitesse de déformation au sens de contact (3.) soit nulle.

Supposons que les coordonnées du solide et de la fondation varient linéairement du début à la fin du pas :

$$\underline{x}^\theta = (1-\theta) \underline{x}^A + \theta \underline{x}^B, \quad \underline{v} = (\underline{x}^B - \underline{x}^A) / \Delta t \quad (26.)$$

Pour un déplacement de corps rigide, cette transformation affecte la forme des solides, ou, plus précisément, leur taille, ainsi que le montre la figure 8. En effet, considérons le quadrilatère

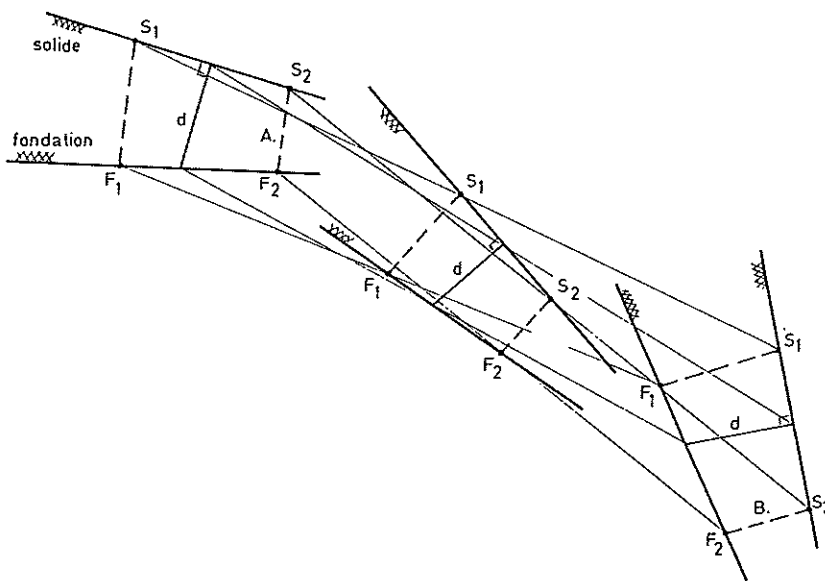


figure 8. Mouvement de corps rigide.

(S1 - S2 - F2 - F1). Ses formes initiales et finales sont égales, mais la transformation (26.) le modifie au cours du pas.

La transformation est isomorphe : les longueurs sont modifiées, mais les angles sont conservés. Il en résulte que, pour un déplacement rigide, le schéma (26.) donne une vitesse tangentielle relative (2e et 3e composante de  $\underline{\epsilon}$ ) nulle, mais une valeur non nulle de la vitesse de pénétration normale  $\epsilon_1$ . Le schéma est objectif pour la vitesse tangentielle mais pas pour la vitesse normale. Nous pouvons aisément le corriger afin de le rendre totalement objectif. Modifions

simplement le calcul de la première composante  $\dot{\epsilon}_1$  de la vitesse de déformation. Soit  $d^A$  et  $d^B$  les profondeurs de pénétration au début et à la fin du pas. La vitesse de pénétration

$$\dot{\epsilon}_1 = (d^B - d^A) / \Delta t \quad (27.)$$

est objective. De plus, elle est cohérente avec les choix que nous avons posé ci-dessus (9.) : la profondeur de pénétration est calculée directement et non par intégration de la vitesse instantanée de pénétration.

#### LA MATRICE TANGENTE D'ITERATION

En calcul non-linéaire, la technique de Newton-Raphson assure généralement la meilleure convergence. Il est donc souhaitable de calculer la matrice tangente d'itération des éléments de contact. Celle-ci peut être obtenue par différentiation des forces nodales énergétiquement équivalentes aux contraintes (19.) par rapport aux coordonnées nodales. Malheureusement, cette opération est extrêmement complexe. En effet, la variation de la position d'un noeud entraîne la modification de la géométrie, de l'orientation du trièdre local, des déformations et des contraintes de contact et de leur chemin d'intégration. La différentiation porte donc sur un grand nombre de termes. Aussi semble-t-il impossible d'en réaliser le développement analytique exact. Nous avons donc implanté son calcul par perturbations numériques très faibles des coordonnées de l'élément. Le coût reste raisonnable car seuls les éléments en contact effectif sont concernés et leur complexité est moindre que celle des éléments de volume. Mais cette technique, jointe à la loi élastoplastique non associée, rend la matrice tangente non-symétrique. Un algorithme de résolution des systèmes non-symétriques doit donc être utilisé.

#### APPLICATIONS

Il est difficile de présenter une application simple et non triviale comprenant de grands déplacements. Nous avons utilisé avec succès le code LAGAMINE, où est implanté le modèle de contact, pour simuler notamment des cas industriels de forgeage, de pliage de tôle, de laminage, etc ... Dans cet article, nous nous limitons à la présentation d'un exemple simple : le déplacement d'un tube axisymétrique par rapport à une matrice rigide. La géométrie et la discrétisation sont présentées sur la figure 9. Le tube est élastique ( $E = 210.000 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0.3$ ). Un déplacement axial  $D$  est imposé à son extrémité droite. Deux cas de frottement ont été analysés : le glissement libre ( $\phi = 0$ ) et un frottement modéré ( $\phi = 0.2$ ). Les vecteurs contraintes de contact, composés de la pression et du frottement, sont représentés sur la figure 10. aux points d'intégration des éléments, dans diverses configurations déformées. L'imprécision géométrique à l'interface de contact est due à la pénalisation. Elle peut être réduite par l'augmentation des coefficients de pénalisation, au prix d'une convergence numérique plus difficile.

#### CONCLUSIONS

Des éléments finis de contact bi- et tridimensionnel ont été développés. Ils sont basés sur l'hypothèse du frottement sec de Coulomb. Ils peuvent modéliser des problèmes de grandes déformations en réalisant de grands pas de calcul. Le programme LAGAMINE, dans lequel ces éléments ont été implantés, a permis la simulation numérique de nombreux problèmes industriels et académiques.

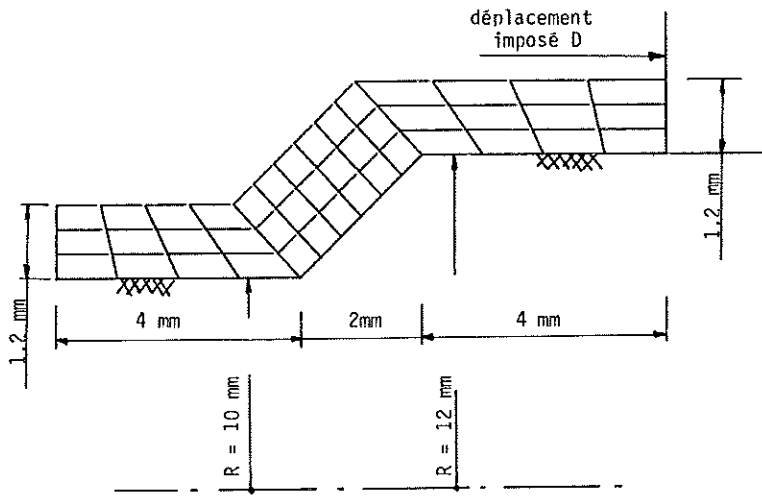


figure 9. Test de contact en grands déplacements - Géométrie

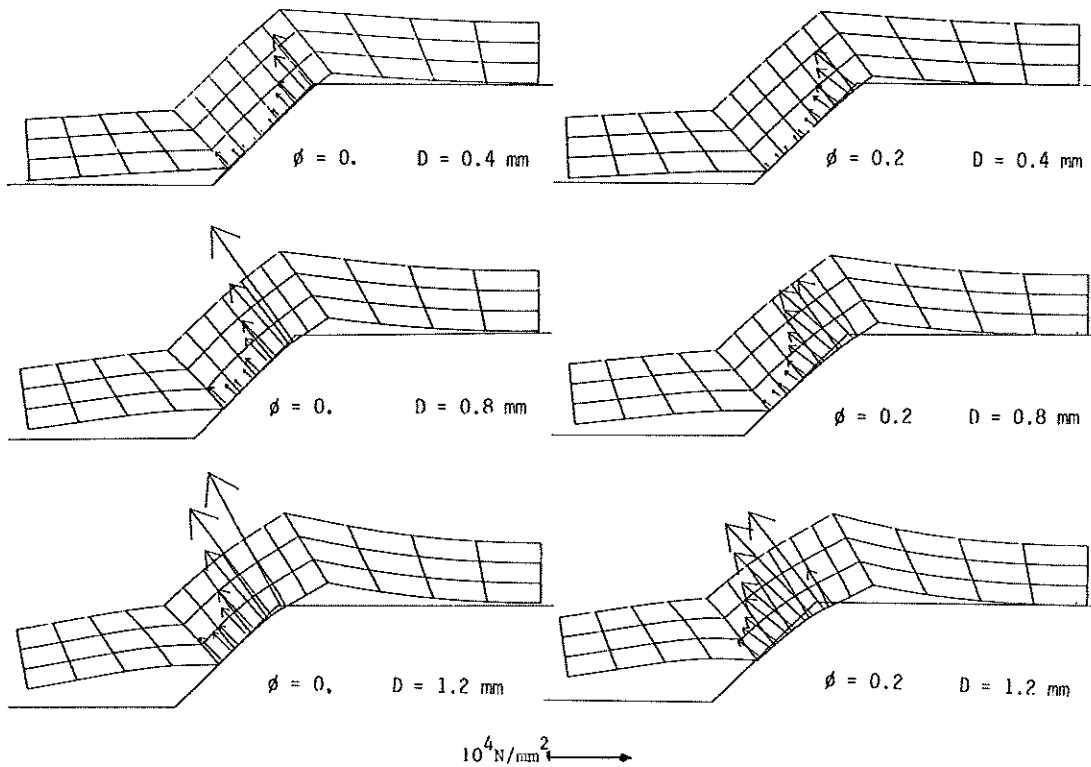


figure 10. Déformation du tube et contraintes de contact

## BIBLIOGRAPHIE

- 1 CHARLIER R. Approche unifiée de quelques problèmes non linéaires de mécanique des milieux continus par la méthode des éléments finis. Thèse de doctorat. dép. M.S.M., Université de Liège, (1977).
- 2 R. CHARLIER, A. GODINAS, S. CESCOTTO. On the modelling of contact problems with friction by the finite element method. Proc. Int. Conf. on SMIRT, Bruxelles (1985).
- 3 F. SIDOROFF. Etude thermodynamique des interfaces de frottement. Proc. of Eurotrib'85 (1985).
- 4 M. CODET. The third body approach : a mechanical view of wear. Wear, 100, pp. 437 - 452 (1984).
- 5 A. CURNIER. A theory of friction. Int. J. Solids Struct., Vol. 20, N° 7, pp. 637 - 684 (1984).
- 6 R. MICHALOWSKI et Z. MROZ. Associated and non associated sliding rules in contact friction problems. Archives of Mechanics, 30, 3, pp. 259 - 276 (1978).
- 7 A. CURNIER. TACT : a contact analysis program. Proc. of the 10th Leeds-Lyon Symposium on Development in numerical and experimental methods applied to tribology (1983).
- 8 R. CHARLIER et A.M. HABRAKEN. On the modelling of tridimensional contact with friction problems in context of large displacements problems. Proc. of NUMIFORM'86, Göteborg (1986).
- 9 L.M. KEER, N. AHMADI et T. MURA. Tangential loading of elastic bodies in contacts. Comp. and Struct., Vol. 19, N° 1-2, pp. 93 - 101 (1984).
- 10 B. FREDRIKSSON, B. TORSTENFELT et N. ENDAHL. Numerical solutions to contact, friction and crack problems with applications. Eng. Comput., Vol. 1, pp. 133 - 143 (1984).
- 11 J.T. ODEN et E.B. PIRES. Non local and non linear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity. J. of Applied Mechanics, Vol. 50, pp. 67-76, (1983).
- 12 J.T. ODEN and E.B. PIRES. Algorithms and numerical results for finite element approximations of contact problems with non-classical friction laws. Comput. and Struct., Vol. 19, N° 1-2, pp. 137-147 (1984).
- 13 E.B. PIRES et J.T. ODEN. Analysis of contact problems with friction under oscillation loads. Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering, 39, pp. 337-362, (1983).
- 14 J.R. RICE et A.L. RUINA. Stability of steady frictional slipping. J. of Applied Mechanics, Vol. 50, pp. 343-349 (1983).
- 15 M.U. RAHMAN, R.E. ROWLANDS, R.D. COOK et T.L. WILKINSON. An iterative procedure for finite element stress analysis of frictional contact problems. Comput. and Struct. Vol. 18, N° 6, pp. 947-954 (1984).
- 16 A. CAMERON. The principles of lubrication Ed. LONGMANS
- 17 A. CHANDRA et S. MUKHERJEE. A finite element analysis of metal forming problems with an elastic-viscoplastic material model. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 20, 1613-1628 (1984).
- 18 J.T. ODEN et T.L. LIN. On the general rolling contact problem for finite deformations of a viscoelastic cylinder. Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering, 57, pp. 297-367 (1986).
- 19 J.C. SIMO, P. WRIGGERS et R.L. TAYLOR. A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering, 50, pp. 163-180 (1985).

- 20 J.H. DIETERICH, Time-dependent friction in rocks. *J. of Geophysical Research*, Vol. 77, n° 20, pp. 3690-2697 (1972).
- 21 J.H. DIETERICH, Modeling of rock friction 1. Experimental results and constitutive equations. *J. of Geophysical Research*, Vol. 84, N° 15, pp. 2161-2168 (1979).
- 22 R. CHARLIER, Le contact avec frottement. Simulation numérique du laminage en cannelures. Rapport semestriel N° 6, Chap. IV, M.S.M., Université de Liège (1985).
- 23 R. CHARLIER, Développement d'un élément fini pour l'analyse tridimensionnelle du contact avec frottement. Simulation numérique du laminage en cannelures. Rapport semestriel N° 7, chapitre II, M.S.M., Université de Liège (1985).
- 24 J.C. NAGTEGAAL et N. REBELO, On the development of a general purpose finite element program for analysis of forming processes. *Proc. of NUMIFORM'86*, Göteborg, pp. 41-50 (1986).
- 25 F.P.T. BAAIJENS, F.E. VELDPAUS et W.A.M. BREKELMANS, On the numerical simulation of contact problems in forming processes. *Proc. of NUMIFORM'86*, Göteborg, pp. 91-96 (1986).
- 26 F.P.T. BAAIJENS, W.A.M. BREKELMANS, F.E. VELDPAUS et F.J.M. STARMANS, A constitutive equation for frictional phenomena including history dependency. *Proc. of NUMIFORM'86*, Göteborg, pp 91-96 (1986).
- 27 SCHÄFER, A contribution to the solution of contact problems with the aid of bond element. *Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering*, 6, pp. 335-354 (1975).
- 28 J. GHABOUSSI, E.L. WILSON et J. ISENBERG, Finite element for rock joints and interfaces. *J. of the Soil Mechanics and Foundation Div., A.S.C.E.*, SM 10, pp. 833-848 (1973).
- 29 NGUYEN DANG HUNG et G. de SAXCE, Contact des corps élastiques par éléments finis et programmation mathématique. *Archiwum Inzynierii Ladowej*, tom XXVI, Z.1, pp. 95-124 (1980).
- 30 NGUYEN DANG HUNG et G. de SAXCE, Frictionless contact of elastic bodies by finite element method and mathematical programming technique. *Comp. and Struct.*, Vol. 11, N° 1-2, pp. 55-67 (1980).
- 31 I. AL-KHATTAT, A continuum model for generalized friction, part II : application in upsetting analysis of a cylinder. *Stanford Univ., Div. of Appl. Mech. SUDAM Report N° 81-7* (1981).
- 32 J.M. DEBATY, Etude du comportement élastoplastique des joints par éléments finis et application au creusement du tunnel de Cointe. Tfe. FSA - Université de Liège, (1987).
- 33 J.C. GELIN et P. PICART, Some computational aspects on the integration of rate constitutive equations - Application to bulk metal forming processes. *Proc. of NUMIFORM'86*, Göteborg, pp. 103-110 (1986).
- 34 H.J. BRAUDEL, M. ABOUAF et J.L. CHENOT, An implicit and incrementally objective formulation for solving elastoplastic problems at finite strain by the F.E.M.. Application to cold forming. *Proc. of NUMIFORM'86*, Göteborg, pp. 255-260, (1986).
- 35 R.D. KRIEG et D.B. KRIEG, Accuracies of numerical solution method for the elastic-perfectly plastic model. *ASME, J. of the Pressure Vessels and Piping Div.*, Vol. 99, pp. 510-515 (1977).
- 36 J.R. RICE et D.M. TRACEY, Computational fracture mechanics. *Proc. Symp. on Num. and Comput. Meth. in Struct. Mech.* Ed. S.J. FENVES, N. PERRONE, A.R. ROBINSON et W.C. SCHNOBRICK, Academic Press pp. 585 ss. (1973).
- 37 J.M.M.C. MARQUES, Stress computation in elastoplasticity. *Eng. Comp.* Vol. 1, pp42-51 (1984).

- 38 C. NYSSSEN. Modélisation par éléments finis du comportement non linéaire des structures aérospatiales. Thèse de doctorat, Université de Liège, F.S.A. (1979).
- 39 H.L. SCHREYER, R.F. KULAK et J.M. KRAMER. Accurate numerical solutions for elastic-plastic models. J. of the Pressure Vessels and Piping Division, ASME, Vol. 101, pp. 226-234 (1979).
- 40 M.ORTIZ et J.C. SIMO. An analysis of a new class of integration algorithms for elasto-plastic constitutive relations. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 23, pp. 353-366 (1986).
- 41 J.C. SIMO et R.L. TAYLOR. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 48, pp. 101-118 (1985).
- 42 B. LORET et J.H. PREVOST. Accurate numerical solutions for DRÜCKER-PRAGER elastic-plastic models. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 54, pp. 259-277 (1986).
- 43 J.C. NAGTEGAAL et J.E. de JONG. Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 17, pp. 15-41 (1981).
- 44 P.M. PINSKY, K.S. PISTER et R.L. TAYLOR. Formulation and numerical integration of elastoplastic and elasto-viscoplastic rate constitutive equations. Univ. of California, Berkeley, rept. N° UCB/SESM - 82/05 (1982).
- 45 P.M. PINSKY, M. ORTIZ et K.S. PISTER. Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 40, N° 2, pp. 137-158 (1983).