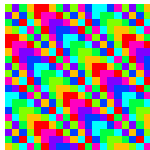


JOUER AVEC LES MOTS, POURQUOI ET COMMENT ?

Michel Rigo

<http://www.discmath.ulg.ac.be/>
<http://orbi.ulg.ac.be/handle/2268/184489>

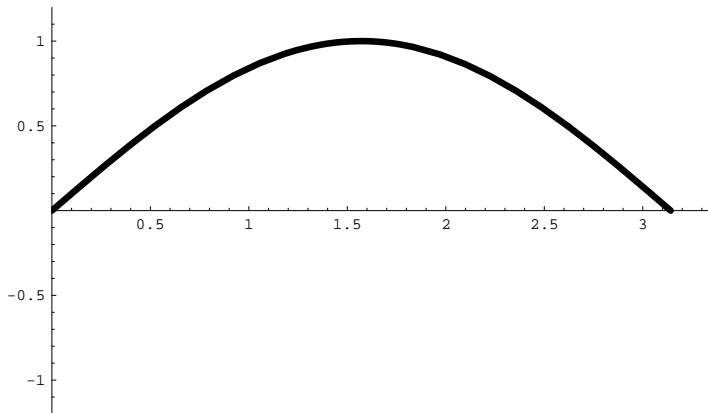
BSSM — 4 août 2015
Brussels Summer School of Mathematics



EXERCICE D'ÉCHAUFFEMENT

Signe de la fonction $\sin(x)$

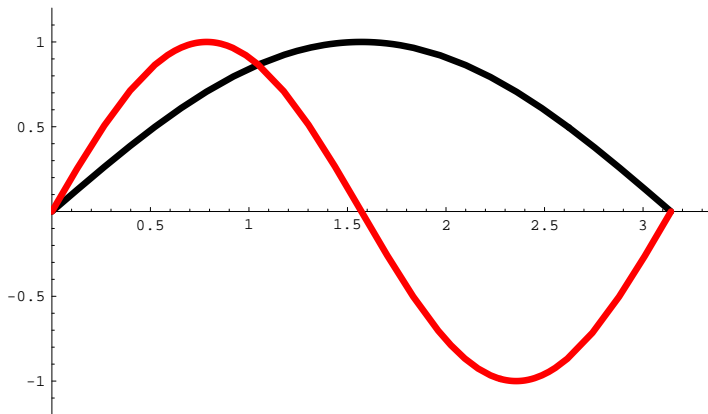
sur $[0, \pi]$?



EXERCICE D'ÉCHAUFFEMENT

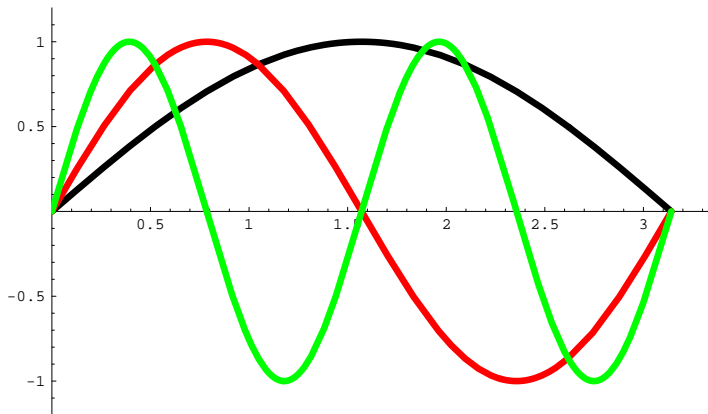
Signe de la fonction $\sin(x) \sin(2x)$

sur $[0, \pi]$?



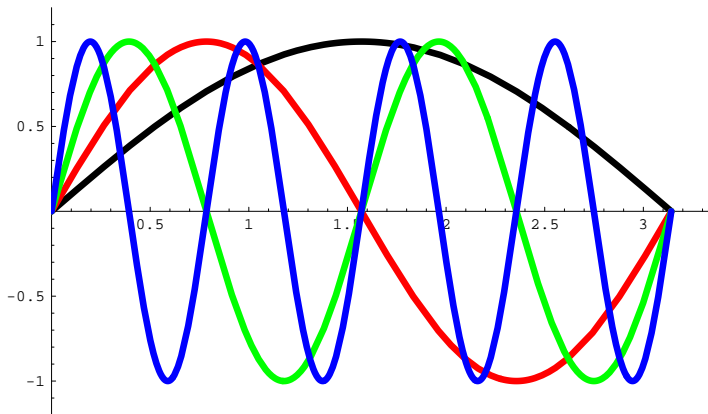
EXERCICE D'ÉCHAUFFEMENT

Signe de la fonction $\sin(x) \sin(2x) \sin(4x)$ sur $[0, \pi]$?



EXERCICE D'ÉCHAUFFEMENT

Signe de la fonction $\sin(x) \sin(2x) \sin(4x) \sin(8x)$ sur $[0, \pi]$?



EXERCICE D'ÉCHAUFFEMENT

QUESTION GÉNÉRALE

Signe sur $[0, \pi]$ de la fonction

$$f_n(x) := \sin(x) \sin(2x) \sin(4x) \cdots \sin(2^n x)$$

L'intervalle $[0, \pi]$ est divisé en 2^n intervalles

$$I_j := \left[\frac{j \pi}{2^n}, \frac{(j+1) \pi}{2^n} \right] \quad j = 0, \dots, 2^n - 1$$

COMMENT CARACTÉRISER *facilement*

le signe de f_n sur I_j pour n grand et $j < 2^n \dots$

Pour les cosinus, on dispose d'une formule :

$$\cos(x) \cos(2x) \cos(4x) \cdots \cos(2^n x) = \frac{\sin(2^{n+1} x)}{2^{n+1} \sin(x)}$$

Un brin de formalisation

Un *alphabet* est un ensemble fini,
e.g., $\{+, -\}$, $\{a, b, c\}$, $\{0, 1, \dots, 9\}$, $\{A, C, G, T\}$.

Soit A un alphabet. Un *mot (fini) de longueur $n \geq 0$* sur A est une application de $\llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ à valeurs dans A , i.e., une suite finie d'éléments de A .

$+ - - +$, $abcbca$, $AGGCTACTTA$

La longueur d'un mot est notée $|w|$.

Le *mot vide* est la suite vide de longueur 0, noté ε .

STRUCTURE DE MONOÏDE

L'ensemble A^* des mots finis sur A muni de l'opération de *concaténation* est un monoïde dont le neutre est ε

$bon \cdot jour = bonjour$

NOTION DE CONVERGENCE

Soit A un alphabet. Un *mot infini* sur A est une application $w : \mathbb{N} \rightarrow A$, i.e., une suite d'éléments de A

14159265358979323846264338327950288419716939937...

- ▶ suite de mots infinis convergeant vers un mot infini limite
- ▶ suite de mots *finis* convergeant vers un mot infini limite

ESPACE MÉTRIQUE

Soit $A^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des mots infinis sur A . Soient $x, y \in A^{\mathbb{N}}$

$x \wedge y$: plus long préfixe commun

$$d : A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad d(x, y) = \begin{cases} 2^{-|x \wedge y|} & , \text{ si } x \neq y \\ 0 & , \text{ si } x = y \end{cases}$$

NOTION DE CONVERGENCE

Soit A un alphabet. Un *mot infini* sur A est une application $w : \mathbb{N} \rightarrow A$, i.e., une suite d'éléments de A

14159265358979323846264338327950288419716939937...

- ▶ suite de mots infinis convergeant vers un mot infini limite
- ▶ suite de mots *finis* convergeant vers un mot infini limite

ESPACE MÉTRIQUE

Soit $A^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des mots infinis sur A . Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A^{\mathbb{N}}$

$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$: plus long préfixe commun

$$d : A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 2^{-|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}|} & , \text{ si } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ 0 & , \text{ si } \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

DISTANCE ULTRAMÉTRIQUE

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$,
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ si et seulement si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$,
3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$,
4. $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (inégalité triangulaire),
 $\forall \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A^{\mathbb{N}}, d(\mathbf{w}, \mathbf{x}) \leq \max\{d(\mathbf{w}, \mathbf{y}), d(\mathbf{y}, \mathbf{x})\}$.

Digression. Soient $p \geq 2$ premier et x entier. On a $x = p^n q$ et la valuation p -adique $\nu_p(x) = n$. Extension à \mathbb{Q} par $\nu_p(a/b) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$.

La valeur absolue p -adique (non archimédienne) sur le champ \mathbb{Q} est $|x|_p = p^{-\nu_p(x)}$ si $x \neq 0$ et $|0|_p = 0$.

On a $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$ et la distance correspondante $d(x, y) = |x - y|_p$ est ultramétrique.

DISTANCE ULTRAMÉTRIQUE

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$,
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ si et seulement si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$,
3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$,
4. $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (inégalité triangulaire),
 $\forall \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A^{\mathbb{N}}, d(\mathbf{w}, \mathbf{x}) \leq \max\{d(\mathbf{w}, \mathbf{y}), d(\mathbf{y}, \mathbf{x})\}$.

Digression. Soient $p \geq 2$ premier et x entier. On a $x = p^n q$ et la valuation p -adique $\nu_p(x) = n$. Extension à \mathbb{Q} par $\nu_p(a/b) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$.

La valeur absolue p -adique (non archimédienne) sur le champ \mathbb{Q} est $|x|_p = p^{-\nu_p(x)}$ si $x \neq 0$ et $|0|_p = 0$.

On a $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$ et la distance correspondante $d(x, y) = |x - y|_p$ est ultramétrique.

boule de centre $abbbb\cdots$ et de rayon $1/2$

$$\{\mathbf{x} \in A^{\mathbb{N}} \mid d(\mathbf{x}, abbbb\cdots) \leq 1/2\}$$

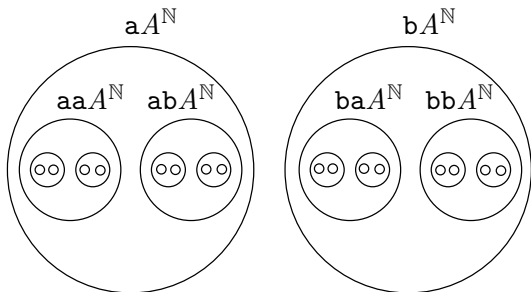


FIGURE : Une représentation de $\{a, b\}^{\mathbb{N}}$.

- ▶ *Tout point appartenant à une boule en est le centre;*
- ▶ *si $B \cap B' \neq \emptyset$, alors $B \subseteq B'$ ou $B' \subseteq B$.*

CONVERGENCE

Soit $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ une suite de mots infinis sur A .

Cette suite *converge* vers $\mathbf{y} \in A^{\mathbb{N}}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N, d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) < \epsilon.$$

Pour tout ℓ , il existe N tel que pour tout $n \geq N$, les mots infinis \mathbf{x}_n ont tous le *même préfixe de longueur ℓ* .

NB : $A^{\mathbb{N}}$ est un espace métrique complet et compact.

CONVERGENCE DE MOTS FINIS

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de mots **finis** sur A . Soit $z \notin A$.

Cette suite *converge* vers $\mathbf{y} \in A^{\mathbb{N}}$ si

la suite $(x_n z^\omega)_{n \geq 0}$ converge vers \mathbf{y} .

CONVERGENCE

Soit $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$ une suite de mots infinis sur A .

Cette suite *converge* vers $\mathbf{y} \in A^{\mathbb{N}}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N, d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) < \epsilon.$$

Pour tout ℓ , il existe N tel que pour tout $n \geq N$, les mots infinis \mathbf{x}_n ont tous le *même préfixe de longueur ℓ* .

NB : $A^{\mathbb{N}}$ est un espace métrique complet et compact.

CONVERGENCE DE MOTS FINIS

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de mots **finis** sur A . Soit $z \notin A$.

Cette suite *converge* vers $\mathbf{y} \in A^{\mathbb{N}}$ si

la suite $(x_n z^\omega)_{n \geq 0}$ converge vers \mathbf{y} .

Exemple dans $\{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}}$, développement en fractions continues
de $\pi - 3$

$$\frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{7 + \frac{1}{15}}$$

$$\frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}}$$

$$\frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292}}}}$$

142857142857 142857142857 142857142857 ...

141509433962264 1509433962264 15094339 ...

141592920353982300884955752212389380 ...

14159265301190260407226149477372968400 ...

Si $\#A \geq 2$, $A^{\mathbb{N}}$ est **non dénombrable**.

Cependant, les “algorithmes pouvant engendrer un mot infini de $A^{\mathbb{N}}$ ” (i.e., si on fournit n par exemple en base 2, l’algorithme calcule le n ème symbole du mot) forment un ensemble dénombrable.

Turing, On **computable numbers**, with an application to the Entscheidungsproblem, Proc. London Math. Soc. 1937.

↪ On va chercher des algorithmes “simples”
(hiérarchie de Chomsky, complexité de Chaitin–Kolmogorov).

CONSTRUCTION SIMPLE DE MOTS INFINIS

Soit A^* le monoïde des mots finis sur A . Un *morphisme* est une application $f : A^* \rightarrow A^*$ telle que $f(uv) = f(u)f(v)$ pour tous $u, v \in A^*$.

DÉFINITION

Un *morphisme prolongeable sur a* est tel que

- ▶ $f(a) = au$ avec $u \neq \varepsilon$ et
- ▶ $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f^n(a)| = +\infty$.

EXEMPLE 1 (LONGUEUR CONSTANTE)

$t : + \mapsto +- , - \mapsto -+$ est prolongeable, $|t^n(+)| = 2^n$.

EXEMPLE 2

$u : a \mapsto abc, b \mapsto ac, c \mapsto bac$ est prolongeable sur a ,
 $|u^{n+1}(a)| \geq 2|u^n(a)|$.

EXEMPLE 3 (MORPHISME DE FIBONACCI)

$f : a \mapsto ab, b \mapsto a$ est prolongeable sur a ,
 $|f^n(a)| = F_n$.

EXEMPLE 4

$g : a \mapsto ba, b \mapsto ab$ n'est pas prolongeable.

EXEMPLE 5

$h : a \mapsto ab, b \mapsto \varepsilon$ n'est pas prolongeable,
 $|h^n(a)| = 2$ pour tout $n \geq 1$.

CONSTRUCTION SIMPLE DE MOTS INFINIS

Soit $f : A^* \rightarrow A^*$ un morphisme prolongeable sur a .

EXERCICE

1. Si $f(a) = au$, exprimer $f^n(a)$.
2. Montrer que $f^n(a)$ est un préfixe de $f^{n+1}(a)$.
3. Conclure que $(f^n(a))_{n \geq 0}$ converge vers un mot infini limite.
4. Etendre f sur $A^{\mathbb{N}}$ et montrer que ce mot infini limite est un point fixe de f .

$$f^\omega(a) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(a).$$

Un morphisme prolongeable permet donc de définir aisément un mot infini (ensemble des **mots purement morphiques**).

EXEMPLE 1

$t : + \mapsto +-, - \mapsto -+$

$$\begin{aligned}t(+)&= +- \\t^2(+)&= +--+ \\t^3(+)&= +- -+ -+ +- \\t^4(+)&= +- -+ -+ + - -+ + - -+ \\&\vdots\end{aligned}$$

EXEMPLE 2

$f : a \mapsto abc, b \mapsto ac, c \mapsto bac$

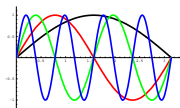
$$f(a) = abc$$

$$f^2(a) = abcacbac$$

$$f^3(a) = abcacbacabcacbacacbac$$

$$f^4(a) = abcacbacabcacbacacbacabcacbacacbac \cdots bac$$

\vdots



Retour au problème initial

COMMENT CARACTÉRISER *facilement*

le signe de f_n sur I_j pour n grand et $j < 2^n \dots$

En particulier, doit-on déterminer le signe de chaque intervalle pour déterminer le signe d'un seul d'entre eux ? Doit-on disposer de $sign(I_0), \dots, sign(I_{j-1})$ pour déterminer $sign(I_j)$?

+ - - + - + + - - + + - + - - + + - + - - + + - - + + - - + + - ...

$+ \mapsto +-, \quad - \mapsto -+$

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| <hr/> | | | | | | | | | | | | | | | |
| + | - | - | + | - | + | + | - | - | + | + | - | + | - | - | ... |

$+ \mapsto +-, \quad - \mapsto -+$

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| \oplus | - | - | + | - | + | + | - | - | + | + | - | + | - | - | ... |

$+ \mapsto +-, \quad - \mapsto -+$

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| \oplus | \ominus | - | + | - | + | + | - | - | + | + | - | + | - | - | ... |

$+ \mapsto +-, \quad - \mapsto -+$

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| <hr/> | | | | | | | | | | | | | | | |
| + | ⊖ | - | + | - | + | + | - | - | + | + | - | + | - | - | ... |

$+ \mapsto +-, \quad - \mapsto -+$

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|-----------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| + | - | \ominus | \oplus | - | + | + | - | - | + | + | - | + | - | - | ... |

$+ \mapsto +-, \quad - \mapsto -+$

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|-----|
| | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | |
| + | - | ⊖ | + | - | + | + | - | - | + | + | - | + | - | - | ... | |

$+\mapsto+-, -\mapsto-+$

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|-----------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|-----|
| | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | |
| + | - | - | + | \ominus | \oplus | + | - | - | + | + | - | + | - | - | ... | |

$+ \mapsto +-, \quad - \mapsto -+$

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| <hr/> | | | | | | | | | | | | | | | |
| + | - | - | \oplus | - | + | + | - | - | + | + | - | + | - | - | ... |

$+ \mapsto +-, \quad - \mapsto -+$

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|----------|-----------|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| <hr/> | | | | | | | | | | | | | | | |
| + | - | - | + | - | + | \oplus | \ominus | - | + | + | - | + | - | - | ... |

$+ \mapsto +-, \quad - \mapsto -+$

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| <hr/> | | | | | | | | | | | | | | | |
| + | - | - | + | - | + | \oplus | - | - | + | + | - | + | - | - | ... |

$+ \mapsto +-, \quad - \mapsto -+$

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|----------|---|---|---|---|---|----------|-----------|---|-----|-----|
| | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | |
| + | - | - | + | - | + | \oplus | - | - | + | + | - | \oplus | \ominus | - | ... | |

$$t_{2n} = t_n, \quad t_{2n+1} = -t_n$$

MORPHISMES DE LONGUEUR CONSTANTE

Soit $f : A^* \rightarrow A^*$ tel que $|f(a)| = k$ pour tout $a \in A$.

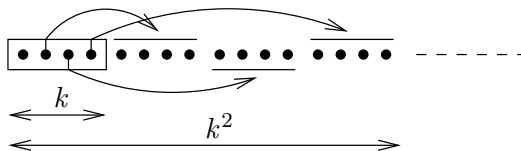


FIGURE : Morphisme de longueur constante $k = 4$.

$$\mathbf{x} = f^\omega(a) = x_0 x_1 x_2 \cdots x_q \cdots \cdots x_j \cdots \cdots$$

LEMME FONDAMENTAL (SIMPLE EXERCICE)

Soit j , $k^m \leq j < k^{m+1}$. On a $j = kq + r$, $k^{m-1} \leq q < k^m$ et $0 \leq r < k$. Le symbole x_j est le $(r + 1)$ -ième symbole dans $f(x_q)$.

$$t_{2n} = t_n, \quad t_{2n+1} = -t_n$$

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|-----------|---|----------|---|---|----------|---|---|---|---|---|---|-----------|---|-----|-----|
| | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | |
| \oplus | \ominus | - | \oplus | - | + | \oplus | - | - | + | + | - | + | \ominus | - | ... | |

$$\begin{aligned}
 13 &= 2.6 + 1 = 2.(2.3 + 0) + 1 = 2.(2.(2.1 + 1) + 0) + 1 \\
 &= 2.(2.(2.(2.0 + 1) + 1) + 0) + 1
 \end{aligned}$$

$$\text{rep}_2(n) = 1101$$

Ainsi, connaissant l'écriture en base 2 de j , on détermine directement le signe de la fonction sur I_j .

$$t_{2n} = t_n, \quad t_{2n+1} = -t_n$$

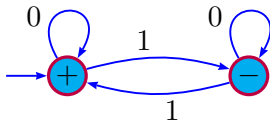
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|-----|
| | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | |
| ⊕ | ⊖ | - | ⊕ | - | + | ⊕ | - | - | + | + | - | + | ⊖ | - | ... | |

$$\begin{aligned}
 13 &= 2.6 + 1 = 2.(2.3 + 0) + 1 = 2.(2.(2.1 + 1) + 0) + 1 \\
 &= 2.(2.(2.(2.0 + 1) + 1) + 0) + 1
 \end{aligned}$$

$$\text{rep}_2(n) = 1101$$

Ainsi, connaissant l'écriture en base 2 de j , on détermine directement le signe de la fonction sur I_j .

$+ \mapsto +-, \quad - \mapsto -+$

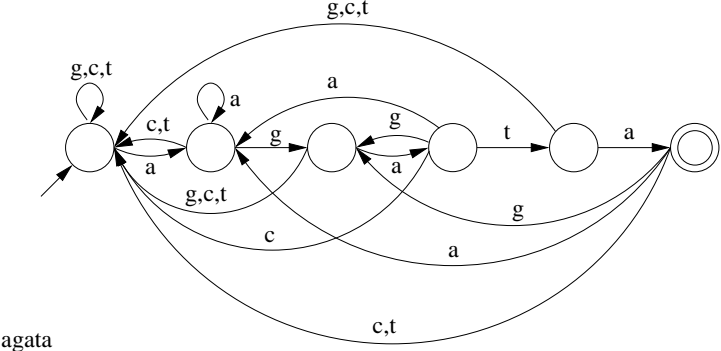


On introduit la notion d'*automate fini déterministe*

- ▶ Q ensemble d'états
- ▶ $q_0 \in Q$ état initial
- ▶ $\delta : Q \times A \rightarrow Q$ fonction de transition

On étend la fonction de transition à $\delta : Q \times A^* \rightarrow Q$

Recherche d'un mot dans un texte...

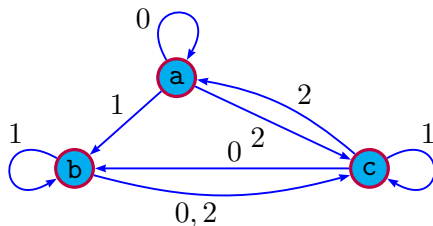


Complexité linéaire par rapport à l'entrée

MORPHISMES DE LONGUEUR CONSTANTE

L'exemple de $+ - - + - + + - \dots$ se généralise :

$$f : \begin{cases} a \mapsto abc \\ b \mapsto cbc \\ c \mapsto bca \end{cases}$$



$$f^\omega(a) = abccbcbcabcacbcbcacbcbaabc \dots$$

PROPOSITION (A. COBHAM 1972)

Si $\mathbf{x} = x_0x_1x_2 \dots$ est point fixe d'un morphisme f de longueur constante $k \geq 2$ et débutant par a , alors pour l'automate associé

$$\forall j, \quad x_j = \delta_f(a, \text{rep}_k(j))$$

RÉCIPROQUE (A. COBHAM 1972)

Soient $k \geq 2$ et un automate fini déterministe

- ▶ A comme ensemble d'états,
- ▶ $a \in A$ comme état initial,
- ▶ $\llbracket 0, k-1 \rrbracket$ comme alphabet, (k arcs sortant de chaque état)
- ▶ $\delta(a, 0) = a$.

Alors, le mot infini x défini par

$$\forall j, \quad x_j = \delta(a, \text{rep}_k(j))$$

est engendré par le morphisme prolongeable sur a de longueur constante k et associé à l'automate.

Ensemble des *mots infinis k -automatiques*.

Généralisations

- ▶ Ajout d'un codage (projection) / automates avec sortie

$$f^\omega(a) = \mathbf{a}b\mathbf{c}c\mathbf{b}c\mathbf{b}c\mathbf{a}b\mathbf{c}a\mathbf{c}b\mathbf{c}b\mathbf{c}a\mathbf{c}b\mathbf{c}b\mathbf{c}a\mathbf{a}b\mathbf{c} \dots$$

$$g(f^\omega(a)) = 010010100100010100010100010 \dots$$

$$\{\text{mots purement morphiques}\} \subsetneq \{\text{mots morphiques}\}$$

- ▶ Etude des ensembles k -reconnaissables de nombres

$$\{1, 4, 6, 9, 13, 15, 19, 21, 25, \dots\}$$

- ▶ Longueur non constante, $a \mapsto ab$, $b \mapsto a$

$$abaababaabaababaab \dots$$

\rightsquigarrow systèmes de numération non standards

- ▶ Cadre multi-dimensionnel
- ▶ Codage/représentation de systèmes dynamiques discrets

$\{\text{mots automatiques}\} \subsetneq \{\text{mots morphiques}\}$

- ▶ fréquence d'apparition d'un symbole
- ▶ ordre de croissance, thm. de Cobham de 1969
- ▶ fonction de complexité

$f : a \mapsto ab, b \mapsto a$

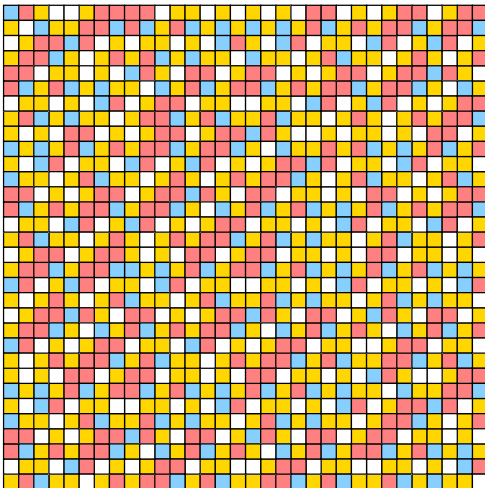
$f^\omega(a) = abaababaabaababaababaababaababaababaababaabab \dots$

*Est-ce qu'un mot infini engendré par un morphisme de longueur 2
peut aussi l'être par un morphisme de longueur 3 ?*



A. Cobham

<http://recursed.blogspot.com/2010/04/alan-cobham.html>



J.-P. Allouche, T. Johnson, Finite automata and morphisms in **assisted musical composition**, Journal of New Music Research (1995).



Tom Johnson : “Les automates finis n’occupent qu’un chapitre dans mon livre *Self-Similar Melodies* (1996), mais en 1997 j’eus envie d’étudier des suites de cette sorte plus rigoureusement et de composer une collection de *Automatic Music for six percussionists*. Les sept premiers mouvements furent créés à Moscou par l’ensemble de Marc Pekarsky.”

Applications

1. Combinatoire des mots : *étude des configurations, motifs évitables, dénombrement, énumération, structure,...*
2. Théorie des nombres
3. Géométrie discrète
- (4.) Système de numération, ensembles reconnaissables, vérification
- (5.) Théorie des jeux combinatoires

Un **carré** : coco, 0120212101, uu

THÉORÈME

Si $\#A = 2$, tout mot suffisamment long contient un carré.

- ▶ Si $\#A > 2$?
- ▶ Peut-on éviter les cubes sur deux lettres ?

Un **carré** : coco, 0120212101, uu

THÉORÈME

Si $\#A = 2$, tout mot suffisamment long contient un carré.

- ▶ Si $\#A > 2$?
- ▶ Peut-on éviter les cubes sur deux lettres ?

Un **chevauchement** : *cvcvc*, *ananas*

Tout cube débute/se termine par un chevauchement

THÉORÈME (THUE 1906)

Le mot de Thue–Morse ne contient pas de chevauchement

+ - - + - + + - - + + - + - - + - + + - + - - + + - - + - + + - ...

M. Morse, Recurrent geodesics on a surface of negative curvature,
Trans. Amer. Math. Soc. 22 (1921) 84–100.

Preuve (Lothaire)

LEMME

Soit $X = \{ab, ba\}$.

Si $x \in X^*$, alors axa et $bx b$ n'appartiennent aucun des deux à X^* .

Par récurrence sur $|x|$.

Cas de base, $x = \varepsilon$.

Supposons le résultat OK pour les mots de longueur $< n$.

Soit $x \in X^*$ de longueur n .

Par l'absurde, supposons que $u = axa \in X^*$.

$$u = abyba, \quad |y| = |x| - 2$$

et $y \in X^*$ donc $x = byb \notin X^*$, absurde.

Preuve (Lothaire)

LEMME

Soit $X = \{ab, ba\}$.

Si $x \in X^*$, alors axa et $bx b$ n'appartiennent aucun des deux à X^* .

Par récurrence sur $|x|$.

Cas de base, $x = \varepsilon$.

Supposons le résultat OK pour les mots de longueur $< n$.

Soit $x \in X^*$ de longueur n .

Par l'absurde, supposons que $u = axa \in X^*$.

$$u = abyba, \quad |y| = |x| - 2$$

et $y \in X^*$ donc $x = byb \notin X^*$, absurde.

Preuve (Lothaire)

LEMME

Soit $X = \{ab, ba\}$.

Si $x \in X^*$, alors axa et $bx b$ n'appartiennent aucun des deux à X^* .

Par récurrence sur $|x|$.

Cas de base, $x = \varepsilon$.

Supposons le résultat OK pour les mots de longueur $< n$.

Soit $x \in X^*$ de longueur n .

Par l'absurde, supposons que $u = axa \in X^*$.

$$u = abyba, \quad |y| = |x| - 2$$

et $y \in X^*$ donc $x = byb \notin X^*$, absurde.

LEMME “OVERLAP-FREE MORPHISM”

Soit f tel que $f(a) = ab$, $f(b) = ba$.

Si w est sans chevauchement, $f(w)$ aussi.

Supposons que $f(w)$ contient un chevauchement

$$f(w) = xcvvcy, \quad c \in \{a, b\}, \quad v, x, y \in \{a, b\}^*$$

Thèse : w contient un chevauchement.

\rightsquigarrow exploiter le fait que f est de **longueur constante**.

$$f(w) = xcvcvcy$$

$|cvcvc| = 3 + 2|v|$ est impair, $|f(w)|$ pair $\Rightarrow |xy|$ impair.

► Montrer que $|v|$ est impair

- Si $|x|$ pair, alors $cvcv, cy \in X^*$.
supposons $|v|$ pair, alors $cvc \in X^*$, contradiction.
- Si $|x|$ impair, alors $vcvc, y \in X^*$.
supposons $|v|$ pair, alors $cvc \in X^*$, contradiction.

$$f(w) = xcvcvcy$$

$|cvcvc| = 3 + 2|v|$ est impair, $|f(w)|$ pair $\Rightarrow |xy|$ impair.

- ▶ Montrer que $|v|$ est impair
 - ▶ Si $|x|$ pair, alors $cvcv, cy \in X^*$.
supposons $|v|$ pair, alors $cvc \in X^*$, contradiction.
 - ▶ Si $|x|$ impair, alors $vcvc, y \in X^*$.
supposons $|v|$ pair, alors $cvc \in X^*$, contradiction.

COMBINATOIRE DES MOTS

On peut conclure

1. Si $|x|$ pair.

$$f(w) = \underbrace{x}_{\text{pair}} \underbrace{c \overbrace{v}^{\text{impair}}}_{\text{pair}} \underbrace{cv}_{\text{pair}} cy \in X^*$$

$$x, cv, cy \in X^* \Rightarrow \exists r, s, t : f(r) = x, f(s) = cv, f(t) = cy$$

$$w = rsst$$

s, t débutent par la même lettre,
donc sst débute par un chevauchement.

2. Si $|x|$ impair.

$$f(w) = \underbrace{xc}_{\text{pair}} \underbrace{\overbrace{v}^{\text{impair}}}_{\text{pair}} \underbrace{cvc}_{\text{pair}} y \in X^*$$

COMBINATOIRE DES MOTS

On peut conclure

1. Si $|x|$ pair.

$$f(w) = \underbrace{x}_{\text{pair}} \underbrace{c \overbrace{v}^{\text{impair}}}_{\text{pair}} \underbrace{cv}_{\text{pair}} cy \in X^*$$

$$x, cv, cy \in X^* \Rightarrow \exists r, s, t : f(r) = x, f(s) = cv, f(t) = cy$$
$$w = rsst$$

s, t débutent par la même lettre,
donc sst débute par un chevauchement.

2. Si $|x|$ impair.

$$f(w) = \underbrace{xc}_{\text{pair}} \underbrace{\overbrace{v}^{\text{impair}}}_{\text{pair}} \underbrace{cvc}_{\text{pair}} y \in X^*$$

COMBINATOIRE DES MOTS

On peut conclure

1. Si $|x|$ pair.

$$f(w) = \underbrace{x}_{\text{pair}} \underbrace{c \overbrace{v}^{\text{impair}}}_{\text{pair}} \underbrace{cv}_{\text{pair}} cy \in X^*$$

$$x, cv, cy \in X^* \Rightarrow \exists r, s, t : f(r) = x, f(s) = cv, f(t) = cy$$

$$w = rsst$$

s, t débutent par la même lettre,
donc sst débute par un chevauchement.

2. Si $|x|$ impair.

$$f(w) = \underbrace{xc}_{\text{pair}} \underbrace{\overbrace{v}^{\text{impair}}}_{\text{pair}} \underbrace{cvc}_{\text{pair}} y \in X^*$$

COMBINATOIRE DES MOTS

On peut conclure

1. Si $|x|$ pair.

$$f(w) = \underbrace{x}_{\text{pair}} \underbrace{c \overbrace{v}^{\text{impair}}}_{\text{pair}} \underbrace{cv}_{\text{pair}} cy \in X^*$$

$$x, cv, cy \in X^* \Rightarrow \exists r, s, t : f(r) = x, f(s) = cv, f(t) = cy$$
$$w = rsst$$

s, t débutent par la même lettre,
donc sst débute par un chevauchement.

2. Si $|x|$ impair.

$$f(w) = \underbrace{xc}_{\text{pair}} \underbrace{\overbrace{v}^{\text{impair}}}_{\text{pair}} \underbrace{cvc}_{\text{pair}} y \in X^*$$

COROLLAIRE

Existence d'un mot sur 3 lettres sans carré

$\{a, ab, abb\}$ code

$abb|ab|a|abb|a|ab|abb|ab|a|ab|abb|a|abb|ab|a|ab \dots$

$321312321231321 \dots$

Un carré abélien : `abcbca`

Peut-on construire un mot infini sur 3 lettres sans carré abélien ?

0102010

0102101

Un carré abélien : abcbca

Peut-on construire un mot infini sur 3 lettres sans carré abélien ?

0102010

0102101

V. Keränen (ICALP'1992) fournit un morphisme de longueur 85 répondant à la question !

$a \mapsto abcacdcbcadcdbdabacabadbabcdbcbacbcdcacbabd$
 $abacadcbedcacdbcbacbcdcacdcdbcdadbdcbca;$

$b \mapsto bcdbdadcdadbadaacabcdbcbacbcdcacdcdbcdadbdcbca$
 $bcdbdadcdadbdaacdbcdcdadbdadcadabacadcdb;$

$c \mapsto cdacabadabacbabdbcdcacdcdbcdadbdadcadabacadcdb$
 $cdcacbadabacabdadcadabacabadbabcdbbadac;$

$d \mapsto dabdbcbabcdbcbacdadbdadcadabacabadbabcdbbadac$
 $dadbdcbabcbdbcabadbabcdbcbacbcdcacbabd;$

J. Cassaigne, J. D. Currie, L. Schaeffer, J. Shallit, *Avoiding Three Consecutive Blocks of the Same Size and Same Sum*, [arXiv:1106.5204](https://arxiv.org/abs/1106.5204)

$$\varphi : 0 \mapsto 03, 1 \mapsto 43, 3 \mapsto 1, 4 \mapsto 01$$

$$\varphi^\omega(0) = 031430110343430310110110314303434303434 \dots$$

ne contient aucun cube additif, e.g., 041340.

Le problème de Prouhet (1851) – Tarry – Escott

Mémoire sur quelques relations entre les puissances de nombres

Partitionner $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ de telle sorte que

$$\{0, \dots, 2^n - 1\} = \{a_1, \dots, a_{2^{n-1}}\} \cup \{b_1, \dots, b_{2^{n-1}}\}$$

$$\sum_{j=1}^{2^{n-1}} a_j = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b_j, \quad \sum_{j=1}^{2^{n-1}} a_j^2 = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b_j^2, \quad \dots, \quad \sum_{j=1}^{2^{n-1}} a_j^{n-1} = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b_j^{n-1}$$

$$\prod_{i=0}^{\infty} (1 - X^{2^i}) = \sum_{j=0}^{\infty} t_j X^j$$

Le problème de Prouhet (1851) – Tarry – Escott

Mémoire sur quelques relations entre les puissances de nombres

Partitionner $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ de telle sorte que

$$\{0, \dots, 2^n - 1\} = \{a_1, \dots, a_{2^{n-1}}\} \cup \{b_1, \dots, b_{2^{n-1}}\}$$

$$\sum_{j=1}^{2^{n-1}} a_j = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b_j, \quad \sum_{j=1}^{2^{n-1}} a_j^2 = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b_j^2, \quad \dots, \quad \sum_{j=1}^{2^{n-1}} a_j^{n-1} = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b_j^{n-1}$$

$$\prod_{i=0}^{\infty} (1 - X^{2^i}) = \sum_{j=0}^{\infty} t_j X^j$$

THÉORIE DES NOMBRES

Exhiber des **nombre**s transcendants (sur \mathbb{Q})

- ▶ nombre
s de Liouville (approximations diophantiennes)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{10^{j!}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_j}{k^{j!}}, \quad k \geq 2, a_j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$$

- ▶ e
- ▶ π

Quid des *nombre*s k -automatiques?

011010011001011010010110... \leftrightarrow 0,4124540314078330...

$$x_0 x_1 x_2 \dots \leftrightarrow \sum_{j \geq 0} \frac{x_j}{k^{j+1}}$$

CONJECTURE COBHAM, HARTMANIS–STEARNS'1965

- ▶ mot ultimement périodique \leftrightarrow nombre rationnel
 - ▶ mot k -automatique non périodique \rightarrow *nombre transcendant*?
-
- ▶ Si α est un nombre algébrique irrationnel, alors le développement en base k de α ne peut pas être engendré par un **automate fini**?
 - ▶ Existe-t-il un nombre algébrique irrationnel dont les n premiers chiffres puissent être calculés en $\mathcal{O}(n)$ opérations?

Fonction de complexité $p_{\mathbf{w}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \#\text{Fac}_{\mathbf{w}}(n)$

$$p_{\mathbf{w}}(m+n) \leq p_{\mathbf{w}}(m)p_{\mathbf{w}}(n), \quad p_{\mathbf{w}}(n) \leq (\#A)^n$$

$$p_{\mathbf{w}}(n) \leq p_{\mathbf{w}}(n+1)$$

THÉORÈME (MORSE–HEDLUND)

Les conditions suivantes sont équivalentes

- ▶ \mathbf{w} est ultimement périodique, $\mathbf{w} = uv^\omega$
- ▶ il existe N tel que $p_{\mathbf{w}}(N) \leq N$
- ▶ $p_{\mathbf{w}}$ est borné
- ▶ il existe m tel que $p_{\mathbf{w}}(m) = p_{\mathbf{w}}(m+1)$

Si \mathbf{w} non périodique, alors $p_{\mathbf{w}}(n) \geq n+1$ pour tout n .

COMPLEXITÉ DES MOTS AUTOMATIQUES

Si w est un mot k -automatique, alors $p_w(n)$ est en $\mathcal{O}(n)$

Preuve (désubstitution)

$$f^\omega(a) = abbaabbaababbabaababbaabbabaab \dots$$

$$(f^2)^\omega(a) = ab|ba|ba|ab|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ab|ba|ba|ab| \dots$$

$$(f^3)^\omega(a) = ab|ba|ba|ab|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ba|ab| \dots$$

$$(f^4)^\omega(a) = ab|ba|ba|ab|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ba|ab| \dots$$

$$4 < n \leq 8, \quad k^{m-1} < n \leq k^m, \quad (\#A)^2 k^m < (\#A)^2 k n$$

REMARQUE PANSIOT (1984)

Soit w un mot purement morphique (non périodique),
alors $p_w(n)$ est en $\Theta(n)$, $\Theta(n \log n)$, $\Theta(n \log \log n)$ ou $\Theta(n^2)$.

COMPLEXITÉ DES MOTS AUTOMATIQUES

Si w est un mot k -automatique, alors $p_w(n)$ est en $\mathcal{O}(n)$

Preuve (désubstitution)

$$f^\omega(a) = abbaabbaababbabaababbaabbabaab \dots$$

$$(f^2)^\omega(a) = ab|ba|ba|ab|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ab|ba|ab| \dots$$

$$(f^3)^\omega(a) = ab|ba|ba|ab|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ba|ab| \dots$$

$$(f^4)^\omega(a) = ab|ba|ba|ab|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ba|ab| \dots$$

$$4 < n \leq 8, \quad k^{m-1} < n \leq k^m, \quad (\#A)^2 k^m < (\#A)^2 k n$$

REMARQUE PANSIOT (1984)

Soit w un mot purement morphique (non périodique),
alors $p_w(n)$ est en $\Theta(n)$, $\Theta(n \log n)$, $\Theta(n \log \log n)$ ou $\Theta(n^2)$.

COMPLEXITÉ DES MOTS AUTOMATIQUES

Si w est un mot k -automatique, alors $p_w(n)$ est en $\mathcal{O}(n)$

Preuve (désubstitution)

$$f^\omega(a) = abbaabbaababbabaababbaabbabaab \dots$$

$$(f^2)^\omega(a) = ab|ba|ba|ab|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ab|ba|ab|\dots$$

$$(f^3)^\omega(a) = ab|ba|ba|ab|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ab|ba|ab|\dots$$

$$(f^4)^\omega(a) = ab|ba|ba|ab|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ab|ba|ab|\dots$$

$$4 < n \leq 8, \quad k^{m-1} < n \leq k^m, \quad (\#A)^2 k^m < (\#A)^2 k n$$

REMARQUE PANSIOT (1984)

Soit w un mot purement morphique (non périodique),
alors $p_w(n)$ est en $\Theta(n)$, $\Theta(n \log n)$, $\Theta(n \log \log n)$ ou $\Theta(n^2)$.

COMPLEXITÉ DES MOTS AUTOMATIQUES

Si w est un mot k -automatique, alors $p_w(n)$ est en $\mathcal{O}(n)$

Preuve (désubstitution)

$$f^\omega(a) = abbaabbaababbabaababbaabbabaab \dots$$

$$(f^2)^\omega(a) = ab|ba|ba|ab|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ab|ba|ab| \dots$$

$$(f^3)^\omega(a) = ab|ba|ba|ab|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ab|ba|ab| \dots$$

$$(f^4)^\omega(a) = ab|ba|ba|ab|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ab|ba|ab| \dots$$

$$4 < n \leq 8, \quad k^{m-1} < n \leq k^m, \quad (\#A)^2 k^m < (\#A)^2 k n$$

REMARQUE PANSIOT (1984)

Soit w un mot purement morphique (non périodique),
alors $p_w(n)$ est en $\Theta(n)$, $\Theta(n \log n)$, $\Theta(n \log \log n)$ ou $\Theta(n^2)$.

COMPLEXITÉ DES MOTS AUTOMATIQUES

Si w est un mot k -automatique, alors $p_w(n)$ est en $\mathcal{O}(n)$

Preuve (désubstitution)

$$f^\omega(a) = abbaabbaababbabaababbaabbabaab \dots$$

$$(f^2)^\omega(a) = ab|ba|ba|ab|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ab|ba|ba|ab|\dots$$

$$(f^3)^\omega(a) = ab|ba|ba|ab|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ab|ba|ba|ab|\dots$$

$$(f^4)^\omega(a) = ab|ba|ba|ab|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ab|ba|ba|ab|\dots$$

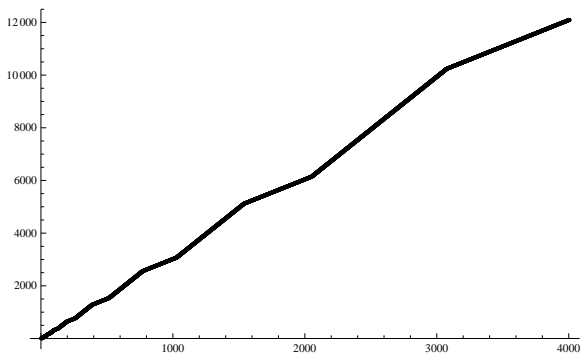
$$4 < n \leq 8, \quad k^{m-1} < n \leq k^m, \quad (\#A)^2 k^m < (\#A)^2 k n$$

REMARQUE PANSIOT (1984)

Soit w un mot purement morphique (non périodique),
alors $p_w(n)$ est en $\Theta(n)$, $\Theta(n \log n)$, $\Theta(n \log \log n)$ ou $\Theta(n^2)$.

Complexité du mot de Thue–Morse
(de Luca, Varricchio; Cassaigne; Brlek)

$$p_t(n) = \begin{cases} 4n - 2 \cdot 2^m - 4, & \text{if } 2 \cdot 2^m < n \leq 3 \cdot 2^m; \\ 2n + 4 \cdot 2^m - 2, & \text{if } 3 \cdot 2^m < n \leq 4 \cdot 2^m. \end{cases}$$



THÉORÈME BUGEAUD–ADAMCZEWSKI 2007

Si w est le développement en base k d'un nombre algébrique irrationnel, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_w(n)}{n} = +\infty$$

COROLLAIRE

Les nombres automatiques non périodiques sont transcendants.

THÉORIE DES NOMBRES

Soient \mathbb{K} un corps, $a(n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{K}$. La suite $a(n)$ satisfait une *relation de récurrence linéaire* sur \mathbb{K} si

$$a(n) = k_1 a(n-1) + \dots + k_d a(n-d), \quad \forall n \gg$$

SKOLEM–MAHLER–LECH

Soit $a(n)$ une suite linéaire récurrente sur un corps de **caractéristique 0**. Alors, l'ensemble

$\mathcal{Z}(a) = \{n \in \mathbb{N} \mid a(n) = 0\}$ est **ultimement périodique**.

REMARQUE

Si \mathbb{K} est un **corps fini**, $a(n)$ (et donc $\mathcal{Z}(a)$) est trivialement ultimement périodique.

Si \mathbb{K} est un corps infini de caractéristique $p > 0$...

EXEMPLE 1 (LECH)

$$a(n) := (1 + t)^n - t^n - 1 \in \mathbb{F}_p(t).$$

La suite a satisfait la relation linéaire sur $\mathbb{F}_p(t)$, pour $n > 3$

$$a(n) = (2+2t) a(n-1) + (1+3t+t^2) a(n-2) - (t+t^2) a(n-3).$$

On a

$$a(p^j) = (1 + t)^{p^j} - t^{p^j} - 1 = 0$$

alors que $a(n) \neq 0$ si n n'est pas une puissance de p . Dès lors, on obtient

$$\mathcal{Z}(a) = \{1, p, p^2, p^3, \dots\}.$$

EXEMPLE 2 (DERKSEN)

Soit la suite $a(n)$ de $\mathbb{F}_p(x, y, z)$ définie par

$$a(n) := (x + y + z)^n - (x + y)^n - (x + z)^n - (y + z)^n + x^n + y^n + z^n.$$

On peut montrer que :

- ▶ La suite $a(n)$ satisfait une relation de récurrence linéaire.
- ▶ L'ensemble des zéros est donné par

$$\mathcal{Z}(a) = \{p^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{p^n + p^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

$\mathcal{Z}(a)$ peut sembler *plus pathologique* qu'en caractéristique nulle.
Cependant, on peut penser aux mots p -automatiques !

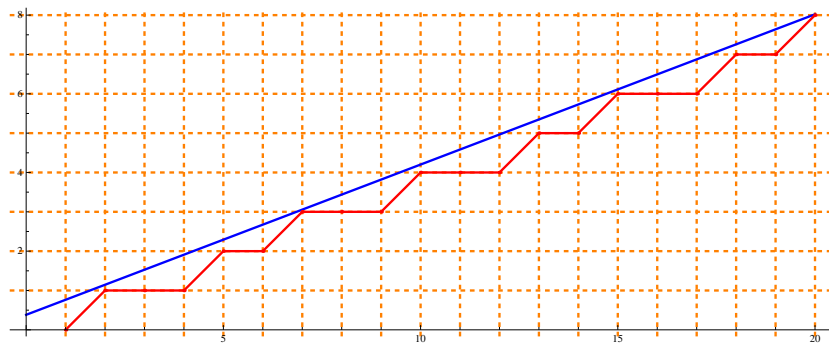
THÉORÈME (H. DERKSEN'2007)

Soit $a(n)$ une suite linéaire récurrente sur un corps de caractéristique p . Alors la suite caractéristique de l'ensemble $\mathcal{Z}(a)$ est un mot p -automatique.

Derksen décrit précisément la forme des automates possibles :
Tout mot p -automatique n'est pas un ensemble $\mathcal{Z}(a)$ pour une suite linéaire récurrente sur un corps de caractéristique p .

GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

Discrétisation de droites (pente irrationnelle)



abaababaabaababaababaababaababaababaababaabab...

↪ Tester si une suite de "pixels" décrit un segment de droite ?

\mathbb{Q}/\mathbb{Z} est l'ensemble des points d'ordre fini dans \mathbb{R}/\mathbb{Z}

$$\alpha \text{ rationnel} \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n, \{m\alpha\} = \{n\alpha\}.$$

$$\text{Si } \alpha = p/q, \quad \left\{ \frac{(q+1)p}{q} \right\} = \{p/q\}$$

Supposons qu'il existe $m < n$ tels que $\{m\alpha\} = \{n\alpha\}$.

Alors $(n - m)\alpha$ est un entier r et $\alpha = r/(n - m) \in \mathbb{Q}$

GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

\mathbb{Q}/\mathbb{Z} est l'ensemble des points d'ordre fini dans \mathbb{R}/\mathbb{Z}

$$\alpha \text{ rationnel} \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n, \{m\alpha\} = \{n\alpha\}.$$

$$\text{Si } \alpha = p/q, \quad \left\{ \frac{(q+1)p}{q} \right\} = \{p/q\}$$

Supposons qu'il existe $m < n$ tels que $\{m\alpha\} = \{n\alpha\}$.

Alors $(n - m)\alpha$ est un entier r et $\alpha = r/(n - m) \in \mathbb{Q}$

EXERCICE (THM. DE KRONECKER)

Si α est irrationnel, alors
l'ensemble des $\{n\alpha\}$, $n \in \mathbb{N}$, est dense dans $[0, 1]$.

Soit N . On partitionne $[0, 1]$ en intervalles de longueur $1/N$.

“Pigeonhole principle” : deux éléments $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{(N+1)\alpha\}$
appartiennent au même intervalle.

Si $i < j \leq N+1$ tels que $k/N < \{i\alpha\} < \{j\alpha\} < (k+1)/N$,

$$\{(j-i)\alpha\} < 1/N \text{ et on considère les } \{n(j-i)\alpha\}$$

Si $i < j \leq N+1$ tels que $k/N < \{j\alpha\} < \{i\alpha\} < (k+1)/N$,

$$1 - 1/N < \{(j-i)\alpha\} < 1$$

EXERCICE (THM. DE KRONECKER)

Si α est irrationnel, alors
l'ensemble des $\{n\alpha\}$, $n \in \mathbb{N}$, est dense dans $[0, 1]$.

Soit N . On partitionne $[0, 1]$ en intervalles de longueur $1/N$.

“Pigeonhole principle” : deux éléments $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{(N+1)\alpha\}$
appartiennent au même intervalle.

Si $i < j \leq N+1$ tels que $k/N < \{i\alpha\} < \{j\alpha\} < (k+1)/N$,

$$\{(j-i)\alpha\} < 1/N \text{ et on considère les } \{n(j-i)\alpha\}$$

Si $i < j \leq N+1$ tels que $k/N < \{j\alpha\} < \{i\alpha\} < (k+1)/N$,

$$1 - 1/N < \{(j-i)\alpha\} < 1$$

EXERCICE (THM. DE KRONECKER)

Si α est irrationnel, alors
l'ensemble des $\{n\alpha\}$, $n \in \mathbb{N}$, est dense dans $[0, 1]$.

Soit N . On partitionne $[0, 1]$ en intervalles de longueur $1/N$.

“Pigeonhole principle” : deux éléments $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{(N+1)\alpha\}$
appartiennent au même intervalle.

Si $i < j \leq N+1$ tels que $k/N < \{i\alpha\} < \{j\alpha\} < (k+1)/N$,

$$\{(j-i)\alpha\} < 1/N \text{ et on considère les } \{n(j-i)\alpha\}$$

Si $i < j \leq N+1$ tels que $k/N < \{j\alpha\} < \{i\alpha\} < (k+1)/N$,

$$1 - 1/N < \{(j-i)\alpha\} < 1$$

EXERCICE (THM. DE KRONECKER)

Si α est irrationnel, alors
l'ensemble des $\{n\alpha\}$, $n \in \mathbb{N}$, est dense dans $[0, 1]$.

Soit N . On partitionne $[0, 1]$ en intervalles de longueur $1/N$.

“Pigeonhole principle” : deux éléments $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{(N+1)\alpha\}$
appartiennent au même intervalle.

Si $i < j \leq N+1$ tels que $k/N < \{i\alpha\} < \{j\alpha\} < (k+1)/N$,

$$\{(j-i)\alpha\} < 1/N \text{ et on considère les } \{n(j-i)\alpha\}$$

Si $i < j \leq N+1$ tels que $k/N < \{j\alpha\} < \{i\alpha\} < (k+1)/N$,

$$1 - 1/N < \{(j-i)\alpha\} < 1$$

On a même un résultat plus fort de "distribution uniforme"

THÉORÈME (WEYL 1916)

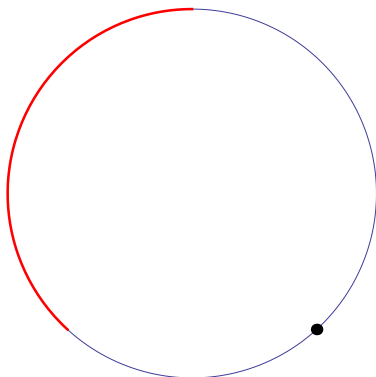
Soient $0 < a < b < 1$. Si α est irrationnel, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\#\{k < n \mid a < \{k\alpha\} < b\}}{n} = b - a.$$

GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

Réalisation de systèmes dynamiques discrets

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}, R : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$$

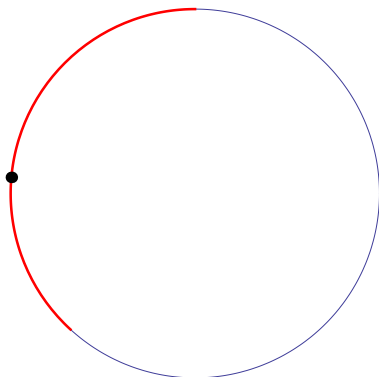


$$I_a = [0, 1 - \alpha[, I_b = [1 - \alpha, 1[, a$$

GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

Réalisation de systèmes dynamiques discrets

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $R : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, $x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$

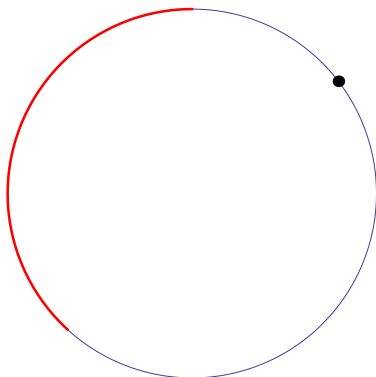


$I_\alpha = [0, 1 - \alpha[$, $I_b = [1 - \alpha, 1[$, ab

GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

Réalisation de systèmes dynamiques discrets

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}, R : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$$

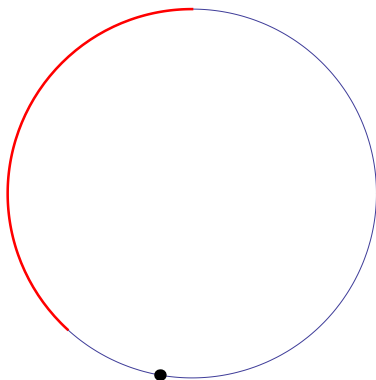


$$I_\alpha = [0, 1 - \alpha[, I_b = [1 - \alpha, 1[, aba$$

GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

Réalisation de systèmes dynamiques discrets

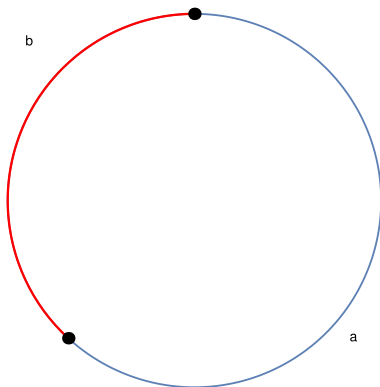
$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $R : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, $x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$



$I_\alpha = [0, 1 - \alpha[$, $I_b = [1 - \alpha, 1[$, $abaa$

GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

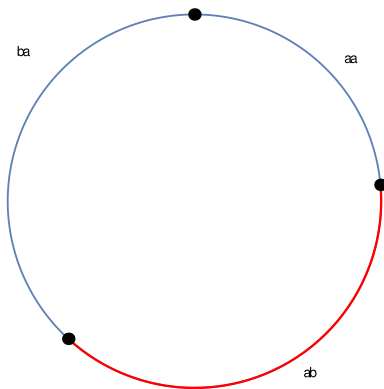
I_b



I_a, I_b

GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

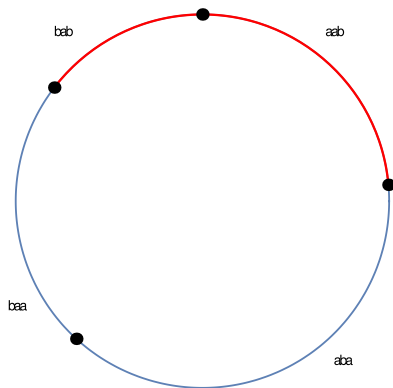
$R^{-1}(I_b)$



$I_a \cap R^{-1}(I_a)$, $I_a \cap R^{-1}(I_b)$, $I_b \cap R^{-1}(I_a)$

GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

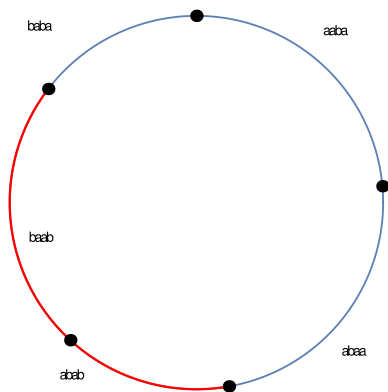
$R^{-2}(I_b)$



$I_a \cap R^{-1}(I_a) \cap R^{-2}(I_b)$, $I_a \cap R^{-1}(I_b) \cap R^{-2}(I_a)$,
 $I_b \cap R^{-1}(I_a) \cap R^{-2}(I_a)$, $I_b \cap R^{-1}(I_a) \cap R^{-2}(I_b)$

GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

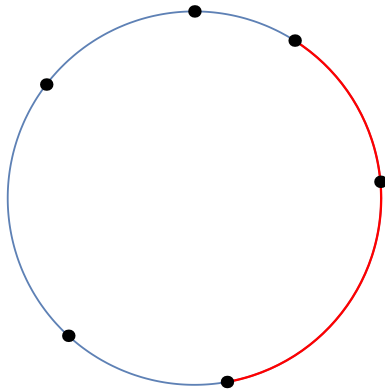
$R^{-3}(I_b)$



$I_{aab} \cap R^{-3}(I_a)$, $I_{aba} \cap R^{-3}(I_a)$, $I_{aba} \cap R^{-3}(I_b)$
 $I_{baa} \cap R^{-3}(I_b)$, $I_{bab} \cap R^{-3}(I_a)$

GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

$R^{-4}(I_b)$



$I_{aabaa}, I_{aabab}, I_{abaab},$
 $I_{ababa}, I_{baaba}, I_{babaa}$

Les *mots sturmiens* sont caractérisés de diverses façons

- ▶ sont de complexité $p(n) = n + 1$ (minimale)
- ▶ mots mécaniques de pente irrationnelle
- ▶ codage de rotations
- ▶ mots aperiodiques et *équilibrés*,

$$\forall u, v \in \text{Fac}_n, \quad -1 \leq |u|_a - |v|_a \leq 1.$$

cf. aussi les suites de Beatty

$$\lfloor (n+1)\varphi \rfloor - \lfloor n\varphi \rfloor$$

COMPLEXITÉ DU MOT DE G. ROTE (JNT 1994)

$$x_n = \begin{cases} a & \text{si } \{n\alpha\} < 1/2 \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$,

$$\mathbf{x}_\varphi = ababaababbabaababbaba \dots$$

n'est pas sturmien, $p(2) = 4$.

- ▶ J.-P. Allouche, M. Mendès France, Euler, Pisot, Prouhet-Thue-Morse, Wallis and the [duplication of sines](#), *Monatsh. Math.* **155** (2008), 301-315.
- ▶ M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 1983.
[ouvrage collectif jetant les bases de la combinatoire des mots](#)
- ▶ F. Gouvêa, *p-adic Numbers - An Introduction*, Universitext, Springer
- ▶ M. Rigo, *Formal Languages, Automata and Numeration Systems*, vol. 1, ISTE-Wiley, 2014.
[se veut cours d'introduction à la combinatoire des mots](#)
- ▶ M. Rigo, *Théorie des automates et langages formels*, notes de cours ULg, <http://www.discmath.ulg.ac.be/>
- ▶ A. Cobham, Uniform tag sequences, *Math. Systems Theory* 6 (1972), 164–192.
[article fondateur sur les suites automatiques](#)

- ▶ J.-P. Allouche, J. Shallit, *Automatic Sequences : Theory, Applications, Generalizations*, Cambridge University Press, (2003).
[la bible des suites automatiques](#)
- ▶ V. Bruyère, G. Hansel, C. Michaux, R. Villemaire, Logic and p -recognizable sets of integers, *Bull. Belg. Math. Soc.* 1 (1994), 191–238.
[très beau survol !](#)
- ▶ J. Berstel, D. Perrin, The origins of combinatorics on words, *European J. Combin.* 28 (2007), 996–1022.
- ▶ J.-P. Allouche, J. Shallit, The ubiquitous [Prouhet-Thue-Morse sequence](#), *Sequences and their applications* (Singapore, 1998), 1–16, Springer Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Springer, London, 1999.
- ▶ M. Rigo, Le problème de Prouhet, *Losanges* 19 (2012), 42–53.
[article de vulgarisation autour du problème de Prouhet](#)

- ▶ V. Berthé, M. Rigo (Eds), *Combinatorics, Automata and Number Theory*, vol. 135 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
ouvrage collectif : fonction de complexité, transcendance
Bugeaud-Adamczewski,...
- ▶ H. Derksen, A [Skolem-Mahler-Lech theorem](#) in positive characteristic and finite automata, *Invent. Math.* 168 (2007), 175–224.
- ▶ G. Hansel, A [simple proof of the Skolem-Mahler-Lech theorem](#), *Theoret. Comput. Sci.* 43 (1986), 91–98.
- ▶ M. Lothaire, *Algebraic Combinatorics on Words*, vol. 90 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
ouvrage collectif, chapitre sur les mots sturmiens
- ▶ V. Berthé, [Discrete Geometry](#) and Symbolic Dynamics, *The Kiselmanfest : An International Symposium in Complex Analysis and Digital Geometry* (2006).