Math & Manip à l'école primaire

Marie-France Guissard, Valérie Henry, Pauline Lambrecht, Patricia Van Geet, Sylvie Vansimpsen

Mots clés : Grandeurs, volume

1. Introduction

1.1. Le contexte de la recherche

Le CREM s'est engagé dans une recherche visant à favoriser l'introduction de certains concepts mathématiques par des séquences d'apprentissage intégrant des manipulations effectuées par les élèves [2]. Nous appelons *Math & Manips* ces activités conçues pour que les élèves soient confrontés, par l'enseignant ou par le milieu, à des phénomènes interpellants qui sont organisés en une suite de questions pour lesquelles le recours à l'expérimentation avec divers matériels pédagogiques est propice à une meilleure compréhension. L'activité expérimentale a pour but d'ancrer un nouveau concept dans la réalité.

1.2. La notion de volume à l'école primaire

C'est au cours de la mise au point d'une séquence d'apprentissage visant la construction de la formule du volume du parallélépipède rectangle que s'est posée la question du concept même du volume. Comment l'expliquer aux élèves, quelles conceptions s'en forgent-ils dans leur vie quotidienne et dans leur parcours scolaire ?

La séquence d'apprentissage proposée ici est une tentative de réponse à ces questions, elle nous semble de nature à donner aux élèves des images mentales variées du concept, à diversifier les approches et surtout à ne pas réduire le volume d'un objet à une formule.

Pour trouver le volume d'un objet creux, on peut le remplir par exemple de riz, de sable ou d'eau. Si cet objet est de forme parallélépipédique, le remplir de cubes permet une approche du calcul du volume qui, par la suite, amènera une formule.

Lorsque l'objet est plein, rechercher son volume par remplissage est impossible. Dans ce cas, on considère le volume comme la place qu'occupe l'objet dans l'espace. Il est cependant plus facile de trouver la place que prend un objet lorsqu'il est immergé dans un liquide car, contrairement à l'air, le déplacement du liquide est visible et mesurable.

Nous proposons ci-dessous une suite d'expériences qui amènent à comparer les volumes d'objets creux, que l'on peut remplir, ou d'objets pleins que l'on peut immerger. Notre choix s'est porté sur des objets creux dont les parois sont suffisamment fines pour être négligeables car nous ne souhaitons pas travailler explicitement la distinction entre volume intérieur et volume extérieur d'un objet.

L'objectif de cette suite d'expériences est de construire peu à peu la notion de volume à partir de ces différentes approches, pour ensuite tisser des liens entre elles et finalement arriver à en faire la synthèse.

2. Comparaison d'objets creux

Fig. 1

On présente aux élèves deux boîtes de formes très différentes, par exemple une boîte de conserve de forme cylindrique et une boîte parallélépipédique (figure 1).

La deuxième boîte a été construite de même volume que la première, à l'insu des élèves. Ceux-ci doivent indiquer quelle est la boîte qui peut contenir le plus de riz quand elle est remplie à ras bord.

Une première étape d'estimation à vue, avant toute manipulation, débouche sur des avis partagés car la seule perception visuelle ne permet pas d'affirmer qu'une boîte peut contenir plus ou moins de riz que l'autre. Certains élèves se basent sur des propriétés de l'objet telles la hauteur ou la largeur. L'estimation a justement pour objectif de faire émerger ces premières pré-conceptions.

Les élèves, qui ont du riz à leur disposition, s'engagent ensuite dans une démarche de comparaison. La solution la plus évidente consiste à remplir à ras bord un premier récipient de riz et à transvaser ensuite son contenu dans le second. On constate que le second est également rempli à ras bord. Il arrive cependant que des élèves remplissent les deux boîtes puis réalisent que ces remplissages ne permettent pas de comparaison sans autre matériel.

On conclut que les deux boîtes contiennent la même quantité de riz. On dira qu'elles ont *même volume*.

Cette expérience permet d'associer le volume d'un objet creux à la quantité de matière qu'il peut contenir et de montrer aux élèves que *des objets de formes différentes peuvent avoir le même volume.*

3. Comparaison d'objets pleins

Cette séquence vise à multiplier les expériences pour analyser les liens entre la taille, la forme et la masse d'un objet avec son volume.

3.1. Objets identiques

On présente aux élèves deux boules identiques ([1]) en pâte à modeler (figure 2). Comme ces objets ne peuvent être remplis, on comparera leur volume en les immergeant dans l'eau l'un après l'autre.

Fig. 2

On demande aux élèves laquelle de ces deux boules déplacera le plus d'eau. Les boules étant identiques, les élèves pensent, à juste titre, qu'elles déplacent la même quantité d'eau.

L'objectif ici est surtout de mettre en place la procédure expérimentale qui exige de faire exactement la même expérience avec chacune des deux boules, ce qui implique de retirer la première avant de plonger la seconde. Si on plonge la deuxième boule sans retirer la première, chaque boule déplace la même quantité d'eau, mais les différences de niveau provoquées par ce déplacement dépendent de la forme du récipient.

Sur la paroi d'un récipient contenant de l'eau, un élève, chargé de mener l'expérience devant la classe, colle un morceau d'adhésif transparent sur lequel seront notés par un trait les différents niveaux d'eau. Il note d'un trait le niveau initial de l'eau, immerge ensuite la première boule et note d'un second trait le niveau atteint par l'eau. La différence entre les deux traits permet de se représenter la quantité d'eau déplacée. L'élève retire la première boule et immerge la seconde. Les déplacements d'eau provoqués par chaque boule et les différences de niveau qu'ils engendrent sont identiques (figures 3 et 4).

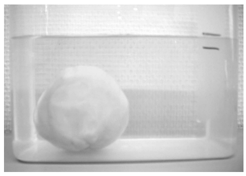

Fig. 3

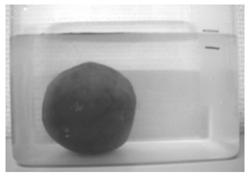

Fig. 4

L'expérience confirme que deux boules identiques déplacent la même quantité d'eau. L'enseignant dégage une première approche de la notion de volume d'un objet plein : *deux objets qui déplacent la même quantité d'eau ont le même volume.*

3.2. Objets de tailles différentes

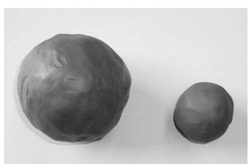

Fig. 5

Cette fois les deux boules de pâte à modeler sont de tailles visiblement différentes (figure 5). On demande de comparer les déplacements d'eau provoqués par l'immersion de chacune de ces deux boules.

Les élèves voient qu'une boule prend plus de place que l'autre et prévoient spontanément que les déplacements d'eau ne seront pas égaux, que la boule la plus grosse déplacera le plus d'eau. Ils confirment leurs observations en réalisant l'expérience, sur le même modèle que l'expérience précédente.

([1]) Pour la suite de l'activité, il est impératif que ces deux boules soient de même volume que la boule de pétanque choisie pour l'expérience 3.4.

Cette expérimentation montre que le déplacement d'eau varie quand le volume varie. Elle complète la première approche de la notion de volume et amène l'enseignant à préciser que *la quantité d'eau déplacée correspond au volume de l'objet* et que *plus le volume de l'objet est important, plus la quantité d'eau déplacée est importante.*

3.3. Objets de formes différentes

On reprend les deux boules identiques en pâte à modeler de la figure 2.

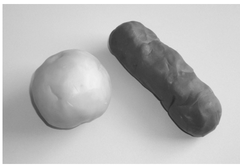

Fig. 6

On en garde une et, devant les élèves, on transforme l'autre en un objet de forme très différente, par exemple un « donut » ou un « colombin » (figure 6).

Les élèves relèvent les caractéristiques de l'objet déformé : il est plus long (ou plus haut) mais plus fin, il contient la même quantité de pâte à modeler, ... Ils formulent ensuite leur prévision quant aux déplacements d'eau provoqués par l'immersion des deux objets.

On constate, lors des expérimentations dans les classes, que les élèves qui pensent, au préalable, que les déplacements d'eau seront différents le justifient en expliquant par exemple qu'un objet long et fin ou haut et mince prend davantage de place qu'une boule. Ceux qui pensent que le niveau de l'eau va rester le même expliquent qu'on n'a ni ajouté ni enlevé de pâte à modeler.

Ensuite, l'expérience est réalisée et l'enseignant rappelle que, lorsque les déplacements d'eau de deux objets immergés tour à tour sont identiques, on dit que ces deux objets ont le même volume. Cette expérience montre que *deux objets de formes différentes peuvent avoir le même volume.*

3.4. Objets de masses différentes

Pour l'expérience suivante, on présente deux boules de même forme et de même diamètre, mais de masses très différentes.

Fig. 7

Dans notre exemple, nous avons choisi une boule de pétanque en acier et une boule en pâte à modeler (figure 7). On demande aux élèves laquelle de ces deux boules a le plus grand volume.

Comme la boule en acier est bien plus lourde que la boule en pâte à modeler, certains élèves pensent qu'en les immergeant, la boule la plus lourde déplacera plus d'eau et aura un volume supérieur à l'autre. En réalisant l'expérience, les élèves voient que les quantités d'eau déplacées par les deux boules sont identiques. Prenant appui sur les conclusions précédentes, ils déduisent que ces deux boules ont même volume.

Cette expérience montre que *deux objets de masses différentes peuvent avoir le même volume.*

3.5. Objets de formes et de masses différentes

Pour terminer, on prend, d'une part, le colombin provenant de la déformation d'une boule en pâte à modeler et d'autre part la boule de pétanque (figure 8).

Fig. 8

On demande aux élèves ce qu'ils peuvent dire du volume de ces deux objets. Dans ce cas, il est fait appel à la réflexion des élèves.

La boule en pâte à modeler et le colombin ont le même volume. La boule en pâte à modeler et la boule d'acier ont également le même volume, donc le volume du colombin est identique au volume de la boule d'acier.

On en déduit que *deux objets de masses et de formes différentes peuvent avoir le même volume.*

Les élèves rencontrent ici la transitivité de l'égalité sans en avoir conscience. La comparaison par immersion peut être réalisée si nécessaire.

4. Remplissage et immersion

L'expérience de la section 2 a montré comment comparer le volume de deux objets creux par remplissage, celles de la section 3 ont donné une méthode pour comparer les volumes d'objets pleins par immersion. Pourrait-on comparer le volume de la boule de pétanque à celui d'une boîte en carton par exemple ?

Pour établir un lien entre les deux méthodes de comparaison, on peut s'intéresser à un objet creux qui peut être soit rempli, soit immergé. Nous avons choisi un cube (2) en plexiglas avec un couvercle qui permet de l'ouvrir ou de le fermer hermétiquement.

Les deux expériences suivantes ont pour but de vérifier si la quantité d'eau que peut contenir ce solide est équivalente à la quantité d'eau déplacée lors de son immersion. Elles mènent à la même conclusion. L'une peut suffire mais il n'est pas inutile d'explorer les deux manières de faire pour permettre à un maximum d'élèves de créer des liens entre les différentes images mentales construites précédemment.

4.1. Première expérience

Le niveau initial est noté d'un trait sur la paroi du récipient contenant de l'eau. Le cube est tout d'abord lesté en y plaçant des pièces de monnaie. Un retour mental sur l'expérience avec la boule de pétanque convaincra les élèves que la modification de la masse n'a pas d'impact sur la quantité d'eau déplacée. Le cube est ensuite fermé puis immergé, et le niveau atteint par l'eau est noté (figure 9).

Dans un second temps, l'enseignant remplit le cube d'eau à ras bord puis verse son contenu dans le récipient (figure 10).

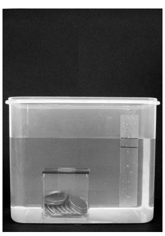

Fig. 9

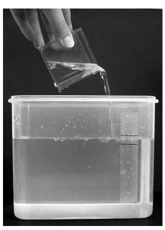

Fig. 10

Le niveau atteint par l'eau correspond à celui noté précédemment. *La quantité d'eau que contient un objet correspond à la quantité d'eau qu'il déplace lors de son immersion.*

4.2. Seconde expérience

L'enseignant immerge le même cube en plexiglas lesté préalablement dans un récipient placé dans un bassin et rempli d'eau à ras bord. L'eau qui déborde est récupérée dans le bassin et correspond à l'eau déplacée lors de l'immersion du cube. Par transvasement, on remarque que cette quantité d'eau permet de remplir exactement le cube. *La quantité d'eau qu'un objet déplace lors de son immersion correspond à la quantité d'eau qu'il contient.*

Ces manipulations fournissent des pistes pour imaginer des expériences permettant de comparer par exemple les volumes d'une boîte en carton et celui d'une boule de pâte à modeler, mais on sent bien que cela se complexifie de plus en plus. Le processus expérimental montre ici ses limites, il va falloir trouver un moyen de « mesurer » le volume pour établir des comparaisons plus aisément.

5. Calculs du volume d'un objet

Les activités de cette section interviennent après une séquence d'apprentissage qui construit pas à pas la formule du volume du parallélépipède rectangle par remplissage de diverses boîtes avec des cubes de différentes tailles. Pour cette séquence, qui n'est pas reprise ici, nous renvoyons à [2] et [5].

Le but est de revenir sur les expériences de mise en place de la notion de volume en étayant les comparaisons de volumes sans mesures, par des comparaisons de mesures en ml, ou des calculs de mesures de volume en cm^3. Ces mesures valident d'une certaine manière les méthodes mises en place :
- pour les objets pleins : immersion et comparaison des quantités d'eau déplacée,
- pour les objets creux : comparaison des quantités contenues.

Ce retour aux expériences initiales permet de garder à l'esprit que le volume est une grandeur physique qu'il ne faudrait pas réduire à quelques formules.

(2) Le choix d'un objet de forme parallélépipédique permettra, lors de la section 5, de comparer par calcul le volume d'eau déplacée au volume de l'objet.

5.1. Objets pleins

Lorsqu'un objet est immergé dans un récipient, son volume correspond au volume de l'eau déplacée. Si le récipient est de forme parallélépipédique, le volume de l'eau déplacée est celui d'un parallélépipède rectangle qui peut être visualisé en entourant la boîte d'élastiques aux différents niveaux atteints par l'eau.

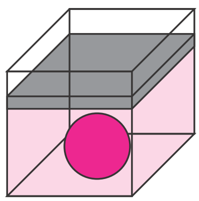

Fig. 11

La longueur et la largeur de ce parallélépipède correspondent respectivement à la longueur et la largeur du récipient dans lequel l'objet est immergé. La hauteur correspond à la différence des niveaux de l'eau avant et après immersion (figure 11).

La formule du calcul du volume d'un parallélépipède rectangle nous donne un moyen de calculer le volume de l'objet immergé.

Le cube en plexiglas

Éprouvons tout d'abord la méthode pour un objet dont le volume peut être obtenu soit par calcul direct, soit par immersion, par exemple le cube en plexiglas lesté de la section 4. Nous le plongeons dans une boîte parallélépipédique transparente de 10 cm d'arête. Le parallélépipède virtuel formé par l'eau déplacée a une longueur et une largeur de 10 cm, une hauteur qu'on ne peut déterminer avec précision et qu'on situe au mieux entre 1,5 et 1,6 cm. Le volume d'eau déplacée est compris entre $10 \times 10 \times 1,5$ soit 150 cm^3 et $10 \times 10 \times 1,6$ cm^3 soit 160 cm^3. Ce procédé donne une valeur approximative du volume de l'objet. Dans notre exemple, une imprécision de lecture de 1 mm sur la hauteur donnera une différence de volume de $0,1 \times 10 \times 10$ cm^3, soit 10 cm^3.

Comparons, pour ce même objet, le volume ainsi obtenu avec le volume calculé à l'aide de la formule. L'arête de ce cube mesure 5,4 cm, son volume est égal à $5,4 \times 5,4 \times 5,4$ soit environ 157 cm^3. La mesure obtenue par la formule est bien comprise dans l'encadrement donné par l'expérience et valide d'une certaine façon la méthode par immersion. Notons que la mesure de l'arête du cube n'est pas non plus exempte d'erreur.

La boule de pâte à modeler

Le calcul du volume par immersion est particulièrement utile pour calculer le volume d'un objet de forme quelconque pour lequel il n'existe pas de formule, un morceau de pâte à modeler par exemple. Les élèves immergent l'objet et calculent le volume du parallélépipède virtuel formé par l'eau déplacée, tout en ayant conscience du niveau de précision du résultat obtenu. Dans notre exemple, la hauteur du parallélépipède virtuel est comprise entre 1,7 et 1,8 cm, le volume de l'objet se situe donc entre 170 cm^3 et 180 cm^3.

Notons que, pour chercher la mesure du volume d'un objet de cette manière, il est nécessaire que l'objet soit de volume assez grand afin que le déplacement d'eau soit visible et mesurable.

Pour se donner un moyen de vérification, malgré l'absence de formule pour calculer le volume de la pâte à modeler, nous proposons une autre démarche qui exploite la conversion des unités de capacité en unités de volume.

On se munit d'un récipient contenant de l'eau à ras bord qu'on place dans un bassin. On immerge le morceau de pâte à modeler utilisé à l'étape précédente, on verse ensuite l'eau récoltée dans le bassin dans un récipient gradué en millilitres. La quantité d'eau recueillie se situe entre 170 ml et 180 ml. Or nous avons calculé que le volume du morceau de pâte à modeler est compris entre 170 et 180 cm^3. Dans le cas où les élèves connaissent déjà la conversion des unités de capacité en unités de volume, l'égalité des nombres de l'encadrement corrobore le résultat précédent et les conforte dans l'idée que 1 ml vaut 1 cm^3. Si les élèves n'ont pas encore abordé la conversion des unités, l'enseignant se sert de l'égalité des nombres des deux encadrements pour amener l'idée que 1 ml vaut 1 cm^3. C'est le moment propice pour mettre en place une activité reliant les mesures de volume et les mesures de capacité.

5.2. Objets creux

La manipulation réalisée à la section 2 nous a montré que les boîtes proposées, parallélépipédique et cylindrique, ont le même volume. Nous avons à présent d'autres outils pour le confirmer.

Pour calculer le volume de la boîte cylindrique, on la remplit d'eau à ras bord. Cette quantité d'eau est ensuite versée dans un récipient gradué. Dans notre exemple, le niveau d'eau se situant à mi-chemin entre 800 ml et 900 ml, la valeur approchée du volume est comprise entre 800 cm^3 et 900 cm^3.

Pour calculer le volume de la boîte parallélépipédique, il suffit d'appliquer la formule, ce qui donne pour notre exemple $17 \times 10 \times 5$ cm^3, soit 850 cm^3. Cette fois encore, le résultat de l'expérience est confirmé par le calcul.

6. Conclusion

La mise au point d'une séquence d'apprentissage sur le volume du parallélépipède rectangle et les expérimentations menées en classe dans ce cadre nous ont fait comprendre à quel point la notion de volume était délicate à circonscrire avec les élèves et, dans un même temps, combien il était nécessaire de poser des bases solides pour la compréhension de ce concept. L'impossibilité d'une définition rigoureuse et complète, à ce stade de l'enseignement, nous a amenés à mettre en place, dans cette séquence, une série d'expériences qui confrontent les pré-conceptions des élèves à la réalité de la situation et conduisent à la création d'images mentales diverses dont la cohérence est progressivement installée. En particulier, la distinction entre les notions de volume d'un objet plein ou creux nous a semblé fondamentale.

Le retour vers les expériences initiales, qui ne permettent que des comparaisons sans mesures, pour en réexploiter les démarches au moment où on dispose de moyens de calcul, nous a semblé essentiel pour tisser des liens entre la démarche expérimentale et le calcul théorique. Ce va-et-vient montre notamment l'intérêt de la démarche expérimentale pour déterminer la mesure d'un volume pour lequel on n'a pas de formule, mais attire aussi l'attention sur les limites de cette démarche, et sur les erreurs expérimentales qu'elle entraîne.

Pour en savoir plus

[1] Bkouche R., Du caractère expérimental des mathématiques. À propos des laboratoires de mathématiques. *Repères IREM* n°70, 2008, pp. 123–137.

[2] CREM *Rapport de recherche Math & Manips*, `http://www.crem.be/#/publications/30`.

[3] Dias T. et Durand-Guerrier V., Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM* n°60, 2005, pp. 61-78.

[4] Guissard M.-F. *et al.*, Math & Manips. *Losanges* n°7, 2010, pp. 39-46.

[5] Guissard M.-F. *et al.*, Math & Manips à l'école primaire. Favoriser l'apprentissage des grandeurs par des manipulations. *Losanges* n°15, 2011, pp. 16-21.

Marie-France Guissard, Valérie Henry, Pauline Lambrecht, Patricia Van Geet et Sylvie Vansimpsen sont chercheuses au CREM, ✉ guissardmf@crem.be

Escalier en colimaçon au sein de la Sagrada Familia à Barcelone.