

Rapport VF-24

ELEMENT DE COQUE A GEOMETRIE DE REVOLUTION

J-F. DEBONGNIE

JUIN 1974

INTRODUCTION

Dans le cas des structures à géométrie axisymétrique, on peut décomposer un champ de déplacements quelconques en série de Fourier.

A chaque mode de Fourier correspond une charge et, vu l'orthogonalité de la base choisie, on peut faire une analyse séparée de chaque mode.

La rapidité de convergence dépend de la régularité de la mise en charge. Mais, dans la plupart des cas, la convergence est suffisamment rapide pour permettre l'étude d'un petit nombre de modes. Il s'agit donc d'une procédure simple et économique.

Pour l'étude dynamique des structures, l'étude séparée de chaque mode circonférentiel permet de filtrer tous les autres modes qui sont souvent très rapprochés. C'est là un très grand avantage.

Il existe cependant une limitation à cette étude. S'il est possible de décomposer en série de Fourier toutes les charges rencontrées dans la pratique, les fixations sont un peu plus délicates. Pratiquement, seules les fixations présentant la même périodicité que le mode considéré peuvent être représentées. Ceci recouvre cependant un très grand nombre d'applications pratiques.

Le présent rapport présente l'élément de coque à géométrie axisymétrique (type 18 dans la bibliothèque SAMCEF). La théorie correspondante a été développée dans un rapport antérieur [10] .

Dans un premier chapitre, on expose les caractéristiques essentielles de l'élément. Partant de la discrétisation de l'élément, on expose la dérivation de l'énergie de déformation, et les diverses options prises par le programme quant à la mise en charge.

Comme bien souvent en coordonnées curvilignes, les contraintes conjuguées aux paramètres des champs de déplacements n'ont pas d'interprétation simple. On calcule donc des moyennes par intégration directe de la loi de Hooke. Le choix de ces moyennes est discuté dans les applications numériques.

L'utilisation de coordonnées cylindriques conduit à des singularités au voisinage de l'axe. On démontre que la quadrature de GAUSS permet cependant de calculer exactement les intégrales nécessaires.

Enfin, l'élément permet d'étudier les sandwichs symétriques.

Aux chapitres 2 et 3, le lecteur trouvera une série d'applications numériques en statique et en vibrations. Dans ce dernier domaine, il existe un assez grand nombre de références. Les résultats sont comparés et discutés. En statique, par contre, il existe peu d'exemples dans la littérature, sauf pour les sollicitations axisymétriques. C'est pourquoi, dans la plupart des cas, on s'est référé à des solutions analytiques qui sont alors rapidement exposées. Dans un certain nombre de cas, les mêmes problèmes ont été traités par l'élément d'âme de multicouche (type 16), ce qui a permis de comparer les résultats.

CHAPITRE 1. ELEMENT DE COQUE DE REVOLUTION EN SOLLICITATION ASYMETRIQUE

1. Le système d'axes propres est défini par deux coordonnées décrivant le feuillet moyen et une troisième, prise selon la normale (fig. 1).

Pour le feuillet moyen, on utilise les variables suivantes:

r : distance à l'axe

s : coordonnée curviligne de la courbe génératrice

ϕ : angle de la tangente à la génératrice avec la verticale

θ : angle de rotation autour de l'axe.

Un point quelconque de la coque a donc pour coordonnées le triplet (s, θ, z) , où z est la distance orthogonale du point considéré au feuillet moyen.

La déformation de la coque est déterminée par des hypothèses de type REISSNER : on pose

$$\begin{cases} u_l = u + z\alpha \\ u = v + z\beta \\ u_z = w \end{cases}$$

Les déplacements sont développés en série de Fourier selon θ :

$$u(s, \theta) = \sum_{n,m} u_{nm}(s) \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$v(s, \theta) = \sum_{n,m} u_{nm}(s) \sin(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$w(s, \theta) = \sum_{n,m} w_{nm}(s) \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$\alpha(s, \theta) = \sum_{n,m} \alpha_{nm}(s) \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$\beta(s, \theta) = \sum_{n,m} \beta_{nm}(s) \sin(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

Dès lors, les déformations s'expriment par

$$\epsilon_{ss} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_s}} (\overline{\epsilon_{ss}} + z \overline{X_{ss}})$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_\theta}} (\overline{\epsilon_{\theta\theta}} + z \overline{X_{\theta\theta}})$$

$$\gamma_{s\theta} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_\theta}} (\overline{\gamma_\theta} + z \overline{\delta_\theta}) + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_s}} (\overline{\gamma_s} + z \overline{\delta_s})$$

$$\gamma_{sz} = \frac{\overline{\gamma_{sz}}}{1 + \frac{z}{R_s}}$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\overline{\gamma_{\theta z}}}{1 + \frac{z}{R_\theta}}$$

avec,

$$\overline{\epsilon_{ss}} = \sum_{nm} \left(\frac{du_{nm}}{ds} + \frac{w_{nm}}{R_s} \right) \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$\overline{\epsilon_{\theta\theta}} = \sum_{nm} \left(+ \frac{n}{r} v_{nm} + \frac{u_{nm}}{r} \frac{dr}{ds} + \frac{w_{nm}}{R_\theta} \right) \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$\bar{X}_{ss} = \sum_{nm} \left(\frac{d\alpha_{nm}}{ds} \right) \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$\bar{X}_{\theta\theta} = \sum_{nm} \left(\frac{1}{r} \alpha_{nm} \frac{dr}{ds} + \frac{n}{r} \beta_{nm} \right) \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$\bar{Y}_s = \sum_{nm} \left(\frac{dv_{nm}}{ds} \right) \sin(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$\bar{Y}_{\theta} = \sum_{nm} \left(-\frac{n}{r} u_{nm} - v_{nm} \frac{dr}{ds} \right) \sin(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$\bar{Y}_{sz} = \sum_{nm} \left(\alpha_{nm} + \frac{dw_{nm}}{ds} - \frac{u_{nm}}{R_s} \right) \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$\bar{Y}_{\theta z} = \sum_{nm} \left(\beta_{nm} - \frac{n}{r} w_{nm} - \frac{v_{nm}}{R_{\theta}} \right) \sin(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$\bar{\delta}_s = \sum_{nm} \left(\frac{d\beta_{nm}}{ds} \right) \sin(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$\bar{\delta}_{\theta} = \sum_{nm} \left(-\frac{n}{r} \alpha_{nm} - \frac{1}{r} \beta_{nm} \right) \sin(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

On a évidemment

$$\frac{dr}{ds} = \sin\phi$$

Pour $\frac{1}{R} \neq 0$, $\sin\phi$ varie. Néanmoins, les déformations sont calculées à partir de la^s valeur de $\sin\phi$ prise dans le tronc de cône sécant.

2. Discrétisation des champs de déplacements et de rotations

Dans chaque élément, on utilise la coordonnée normalisée

$$\xi = \frac{s}{l}$$

La coordonnée ξ varie entre 0 et 1, ce qui assure le meilleur conditionnement à la matrice de connexion.

Pour le degré k ($k=2,3$) et pour un harmonique (n,m) donné, on pose alors

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \dots + \alpha_{n+1} \xi^n \\ v = \beta_1 + \beta_2 \xi + \dots + \beta_{n+1} \xi^n \\ w = \gamma_1 + \gamma_2 \xi + \dots + \gamma_{n+1} \xi^n \\ \alpha = \delta_1 + \dots + \delta_n \xi^{n-1} \\ \beta = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_n \xi^{n-1} \end{array} \right.$$

soit, sous forme globale,

$$u = M(x,y,z) a$$

où u sont les déplacements, et a les paramètres du champ.

Les déplacements nodaux q sont reliés aux paramètres a par la matrice de connexion C :

$$q = Ca.$$

On calcule alors les déformations par les formules du paragraphe 1 soit, formellement,

$$\epsilon = \partial u = \partial Ma = Ba = BC^{-1} q$$

3. Loi de Hooke

La loi de Hooke s'écrit, pour l'extension

$$\begin{bmatrix} N_{ss} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{s\theta} \\ N_{\theta s} \end{bmatrix} = H^M \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{ss} \\ \bar{\epsilon}_{\theta\theta} \\ \bar{\gamma}_s \\ \bar{\gamma}_\theta \end{bmatrix} = H^M \epsilon_M$$

avec

$$H_{11}^M = E_s h / (1 - \nu_{s\theta} \nu_{\theta s})$$

$$H_{22}^M = E_\theta h / (1 - \nu_{s\theta} \nu_{\theta s})$$

$$H_{33}^M = H_{44}^M = G_{s\theta} h = H_{34}^M = H_{43}^M$$

$$H_{12}^M = H_{21}^M = \nu_{s\theta} E_s h$$

, valeurs "de membrane"

Pour la flexion et le cisaillement,

$$\begin{bmatrix} Q_s \\ Q_\theta \\ M_{ss} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{s\theta} \\ M_{\theta s} \end{bmatrix} = H^P \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_{sz} \\ \bar{\gamma}_{\theta z} \\ \bar{\chi}_{ss} \\ \bar{\chi}_{\theta\theta} \\ \bar{\delta}_s \\ \bar{\delta}_\theta \end{bmatrix} = H^P \epsilon_P$$

où

$$H_{11}^P = G_{sz} h$$

$$H_{22}^P = G_{\theta z} h$$

$$H_{33}^P = E_s h^3/12 (1 - \nu_{s\theta} \nu_{\theta s})$$

$$H_{44}^P = E_\theta h^3/12 (1 - \nu_{s\theta} \nu_{\theta s})$$

$$H_{34}^P = \nu_{s\theta} E_\theta h^3/12 (1 - \nu_{s\theta} \nu_{\theta s}) = H_{43}^P$$

$$H_{55}^P = H_{66}^P = H_{56}^P = H_{65}^P = G_{s\theta} h^3/12$$

4. Energie de déformation

L'énergie de déformation s'obtient par

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^h (\epsilon_M^T H^M \epsilon_M + \epsilon_p^T H^p \epsilon_p) r ds ,$$

On peut scinder cette expression en

$$\begin{aligned} U &= \sum_{nm} \int_0^{2\pi} \left[W_{nm}^{(1)} \cos^2(n\theta + m \frac{\pi}{2}) + W_{nm}^{(2)} \sin^2(n\theta + m \frac{\pi}{2}) \right. \\ &\quad \left. + W_{nm}^{(3)} \sin(n\theta + m \frac{\pi}{2}) \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2}) \right] d\theta \\ &= \sum_{nm} \left[k_{nm}^{(1)} \pi W_{nm}^{(1)} + k_{nm}^{(2)} \pi W_{nm}^{(2)} \right] \end{aligned}$$

où

$$k_{nm}^{(1)} = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \neq 0 \\ 2 & \text{pour } n = 0, m = 0 \\ 0 & \text{pour } n = 0, m = 1 \end{cases}$$

$$k_{nm}^{(2)} = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \neq 0 \\ 0 & \text{pour } n = 0, m = 0 \\ 2 & \text{pour } n = 0, m = 1 \end{cases}$$

5. Matrice des tensions

On peut aisément s'apercevoir que les tensions faibles $b = I$ a n'ont pas d'interprétation simple. Par conséquent, on intégrera directement la loi de Hooke. Les moyennes choisies sont du type

$$\bar{N} = \int_0^1 N d\xi$$

Il s'agit de moyennes sur la projection de l'élément dans le plan méridien. Ces moyennes peuvent être attribuées au milieu de cette projection. Le choix de ces moyennes est discuté dans les applications.

6. Forces de pression

Les forces de pression peuvent être posées

- constantes,
- linéaires à cubiques.

Dans le premier cas, on donne une valeur de la pression.

Dans les autres, on donne les valeurs aux sommets, puis éventuellement une ou deux valeurs intermédiaires.

Le travail de la pression s'écrit

$$\int_0^{2\pi} r d\theta \int_0^1 \rho p w d\xi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho p \sum_{nm} w_{nm} \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2}) d\xi$$

$$= \sum_{nm} k_{nm} \pi \rho p_{nm} w_{nm}$$

où

$$P_{nm} = \frac{1}{k_{nm} \pi} \int_0^{2\pi} p \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2}) d\xi$$

est l'harmonique (n,m) de la pression. C'est cette valeur qui doit être donnée par l'utilisateur.

7. Application de forces en un noeud

Une force quelconque est décomposable en ses composantes W, U, V, A, B conjuguées aux déplacements w, u, v, α, β,

Le travail s'écrit

$$\begin{aligned} & \sum_{nm} \int_0^{2\pi} r \left[W_{nm} \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2}) + U_{nm} \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2}) \right. \\ & \quad \left. + V_{nm} \sin(n\theta + m \frac{\pi}{2}) + A_{nm} \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2}) + B_{nm} \sin(n\theta + m \frac{\pi}{2}) \right] d\theta \\ & = \sum_{nm} \left[W_{nm} w_{nm} + U_{nm} u_{nm} + V_{nm} v_{nm} + A_{nm} \alpha_{nm} + B_{nm} \beta_{nm} \right], \end{aligned}$$

ce qui définit les harmoniques (n,m) des charges conjuguées :

$$W_{nm} = r \int_0^{2\pi} W \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2}) d\theta$$

$$U_{nm} = r \int_0^{2\pi} U \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2}) d\theta$$

$$V_{nm} = r \int_0^{2\pi} V \sin(n\theta + m \frac{\pi}{2}) d\theta$$

$$B_{nm} = r \int_0^{2\pi} B \sin(n\theta + m \frac{\pi}{2}) d\theta$$

Ce sont ces charges qui doivent être introduites dans le programme.

8. Termes thermiques

En présence d'un accroissement de température $T_0 + z T_1$, ($T_1 = \Delta T/h$) l'énergie de déformation s'écrit

$$W = N_{ss}(T) \bar{\epsilon}_{ss} + N_{\theta\theta}(T) \bar{\epsilon}_{\theta\theta} + M_{ss}(T) \bar{X}_{ss} + M_{\theta\theta}(T) \bar{X}_{\theta\theta} + W_2$$

8.1 Les tensions sont donc du type

$$N_{ss} = N_{ss}(T) + \frac{\partial W_2}{\partial \bar{\epsilon}_{ss}}, \text{ etc ...}$$

Ce qui signifie qu'on voit apparaître un terme indépendant de tensions. Nous supposons le tenseur des coefficients de dilatation diagonal dans les axes propres. On écrira les dilatations thermiques libres en découplant la membrane de la plaque:

$$\epsilon_{ss}(T) = \alpha_{ss}^M T_0$$

$$\epsilon_{\theta\theta}(T) = \alpha_{\theta\theta}^M T_0$$

$$X_{ss}(T) = \alpha_{ss}^P T_1$$

$$X_{\theta\theta}(T) = \alpha_{\theta\theta}^P T_1$$

Les tensions thermiques sont donc

$$N_{ss}(T) = -k_s^M T_0 h$$

$$N_{\theta\theta}(T) = -k_\theta^M T_0 h$$

$$M_{ss}(T) = -k_s^P T_1 \frac{h^3}{12}$$

$$M_{\theta\theta}(T) = -k_\theta^P T_1 \frac{h^3}{12}$$

$$\text{où } k_s^M = E_s^M (\alpha_{ss}^M + \nu_{s\theta} \alpha_{\theta\theta}^M) / (1 - \nu_{s\theta} \nu_{\theta s})$$

$$k_\theta^M = E_\theta^M (\alpha_{\theta\theta}^M + \nu_{\theta s} \alpha_{ss}^M) / (1 - \nu_{s\theta} \nu_{\theta s})$$

$$k_s^P = E_s^P (\alpha_{ss}^P + \nu_{s\theta} \alpha_{\theta\theta}^P) / (1 - \nu_{s\theta} \nu_{\theta s})$$

$$k_\theta^P = E_\theta^P (\alpha_{\theta\theta}^P + \nu_{\theta s} \alpha_{ss}^P) / (1 - \nu_{s\theta} \nu_{\theta s})$$

et on calcule les moyennes comme pour les tensions élastiques, par

$$\overline{N_{ss}(T)} = \int_0^1 N_{ss}(T) d\xi$$

8.2 Le terme d'énergie thermique peut être interprété comme un terme d'énergie potentielle. En effet,

$$W(T) = \sigma(T) \varepsilon = \sigma(T) B a .$$

Intégrant sur l'élément, on a alors

$$\int_{\text{él.}} W(T) dV = \int_{\text{él.}} \sigma(T)^T B a dV = - f(T)^T a$$

où

$$f(T) = - \int_{\text{él.}} \sigma(T)^T B dV$$

est la charge conjuguée aux paramètres de champ.

La charge thermique est donc

$$g(T) = C^{-1T} f(T)$$

Remarque : Les températures introduites par l'utilisateur seront pour l'harmonique (n,m)

$$T_{nm} = \frac{1}{k_{nm} \pi} \int_0^{2\pi} T \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2}) d\theta$$

$$\Delta T_{nm} = \frac{1}{k_{nm} \pi} \int_0^{2\pi} \Delta T \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2}) d\theta$$

9. Matrice des masses

L'énergie cinétique rapportée à une section s'écrit

$$T = \frac{1}{2} (u, v, w, \alpha, \beta) J \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

où $J = \text{diag} (\rho_M h_M, \rho_M h_M, \rho_p h_p, \rho_R \frac{h^3}{12}, \rho_R \frac{h^3}{12})$.

ρ_R et ρ_p sont pris égaux sauf dans le cas du sandwich.

10. Option de sandwich symétrique (figure 4)

10.1. Masse

L'énergie cinétique a pour expression

$$2T = \int_{-\frac{h-e}{2}}^{\frac{h+e}{2}} \rho_1 (\dot{u}_s^2 + \dot{u}_\theta^2 + \dot{u}_z^2) (1 + \frac{z}{R_s}) (1 + \frac{z}{R_\theta}) dz$$

$$+ \left[\begin{array}{l} \frac{h+e}{2} \\ \frac{h-e}{2} \end{array} + \begin{array}{l} -\frac{h-e}{2} \\ -\frac{h+e}{2} \end{array} \right] \rho_2 (\dot{u}_s^2 + \dot{u}_\theta^2 + \dot{u}_z^2) (1 + \frac{z}{R_s}) (1 + \frac{z}{R_\theta}) dz \}$$

Posant $\dot{u}_s = \dot{u} + z\dot{\alpha}$

$$\dot{u}_\theta = \dot{v} + z\dot{\beta}$$

$$\dot{u}_z = \dot{w}$$

on obtient, en négligeant les termes en $\frac{h}{R_s}$ et $\frac{h}{R_\theta}$,

$$2T = \left[\rho_1 (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) (h-e) + \rho_1 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \frac{(h-e)^3}{12} \right. \\ \left. + \rho_2 (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) \cdot 2e + \rho_2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \frac{6h^2e + 2e^3}{12} \right].$$

On retrouve donc la forme normale

$$2T = \rho_M h (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + \rho_P h \dot{w}^2 + \rho_R \frac{h^3}{12} (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2),$$

avec

$$\rho_M = \rho_P = \frac{\rho_1 (h-e) + 2\rho_2 e}{h}$$

$$\rho_R = \frac{\rho_1 (h-e)^3 + \rho_2 (6h^2 e + 2e^3)}{h^3}$$

10.2. Raideur

10.2.1. Champ d'extension : seule les semelles résistent à l'extension. Par conséquent, la matrice de Hooke H^M a la forme classique, mais on y pose $h = 2e$

10.2.2. Champs de flexion et de cisaillement

Seules les semelles résistent à la flexion. Par contre l'âme seule résiste au cisaillement. Par conséquent, l'inertie

$\frac{h^3}{12}$ est à remplacer par

$$\frac{1}{12} (6h^2 e + 2e^3) = \frac{h^3}{12} \cdot \frac{6e}{h}$$

En cisaillement, on pose simplement

$$H_{\text{cis}} = (h-e) \begin{bmatrix} G_{sz} & \\ & G_{\theta z} \end{bmatrix}$$

11. Intégration

Dans ce qui précède, on a vu apparaître des intégrales du type

$$\int_0^1 \xi^k r^\ell d\xi$$

avec $r = a + b\xi$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $\ell = -1, 0, 1$.

Pour $\ell \geq 0$, l'intégration ne pose pas de problèmes, puisqu'il s'agit de polynomes. Par contre, les intégrales du type

$$\int_0^1 \frac{\xi^k}{r} d\xi$$

sont plus délicates à évaluer. Il y a lieu de distinguer trois cas :

a) b/a est grand, ce qui signifie que la variation relative du rayon est importante. Dans ce cas, on écrit simplement

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{(a+b\xi)} = \frac{1}{b} \int_0^b \frac{d(b\xi)}{(b\xi)+a} = \frac{1}{b} \ln \left| \frac{b+a}{a} \right| .$$

Les intégrales

$$I_k = \int_0^1 \frac{\xi^k}{r} d\xi$$

s'obtiennent alors par récurrence :

$$I_k = \int_0^1 \frac{\xi^k}{a+b\xi} d\xi = \frac{1}{b} \int_0^1 \frac{b\xi^k + a\xi^{k-1}}{a+b\xi} d\xi - \frac{a}{b} \int_0^1 \frac{\xi^{k-1}}{a+b\xi} d\xi$$

soit

$$I_k = \frac{1}{bk} - \frac{a}{b} I_{k-1}$$

b) Lorsque $\frac{b}{a}$ est petit, le procédé ci-dessus devient imprécis. Mais du fait de la faible variation du rayon, les fonctions à intégrer sont bien approchées par des polynomes. On intègre donc par la méthode de GAUSS à 5 points.

c) Lorsque le rayon est nul à l'une des extrémités, l'intégration est plus délicate. Dans ce cas, la fonction $\frac{1}{r}$ n'est pas intégrable. Cependant, les déformations doivent rester finies. Cette condition physique permet d'ailleurs de déterminer les conditions aux limites appropriées. Elles se présentent dans le cas général sous la forme

$$\sum_i a_i \phi_i(\xi) = 0$$

Dans la combinaison linéaire, toutes les singularités ont disparu. Par contre, les fonctions $\phi_i(\xi)$ ne sont pas nécessairement intégrables. On sait cependant qu'elles sont continues dans l'ouvert $]0,1[$. Cette propriété est très importante.

La solution se trouve dans la quadrature numérique de GAUSS. La quadrature de GAUSS à $(n+1)$ points sur $]0,1[$ peut être considérée comme une fonctionnelle linéaire, définie sur $C_0]0,1[$. La linéarité provient de sa structure même;

$$G(x) = \sum_{i=1}^{n+1} H_i f(x_i)$$

où x_i et H_i représentent respectivement les points et les poids de GAUSS. La continuité n'est exigée que sur l'ouvert, car les points de GAUSS sont tous intérieurs.

D'autre part, pour tout polynome de degré $(2n+1)$, la quadrature de GAUSS

coïncide avec l'intégrale :

$$G \left(P_{2n+1}(x) \right) = I \left(P_{2n+1}(x) \right)$$

Où $P_{2n+1}(x)$ est un polynome de degré $(2n+1)$.

Par conséquent, si les fonctions $\phi_i(x)$ ne sont pas intégrables mais sont continues sur $]0, 1[$, et si leur combinaison linéaire est intégrable, on peut calculer leur quadrature de GAUSS terme à terme. Bien plus, si leur combinaison linéaire est un polynome de degré $(2n+1)$, on a

$$I \left(\sum_i \alpha_i \phi_i(x) \right) = G \left(\sum_i \alpha_i \phi_i(x) \right) = \sum_i \alpha_i G(\phi_i(x)).$$

Dans notre cas, l'énergie de déformation s'écrit sous la forme

$$W(\xi) = \frac{W_0(\xi)}{r} + W_1(\xi)$$

$$= \frac{W_0(\xi)}{a+b\xi} + W_1(\xi),$$

où W_0 et W_1 sont des polynomes de degré $(2n+1)$. Les conditions aux limites assurent que $W(\xi)$ est fini pour $r=0$. Cela entraîne $W_0(\xi)$ en $r = 0$. Nécessairement, $W_0(\xi)$ doit donc être de la forme

$$(a+b\xi) W^*(\xi),$$

où $W^*(\xi)$ est un polynome et , finalement,

$$W(\xi) = W^*(\xi) + W_1(\xi)$$

Cette fonction est un polynome de degré $(2n+1)$. On peut donc dire que la quadrature de GAUSS, calculée par combinaison linéaire des quadratures des fonctions rencontrées, même non intégrables, conduit finalement au calcul correct de l'intégrale. Les conditions aux limites peuvent en particulier être spécifiées séparément par une contrainte linéaire.

12. Déplacements généralisés en axes structuraux

12.1. Les axes structuraux sont les axes R, Z, θ des coordonnées cylindriques.

Les déplacements sont donc U_R, U_Z, U_θ . Pour les rotations, la connexion exige l'introduction d'une troisième rotation fictive γ autour de l'axe perpendiculaire au feuillet moyen. On transforme alors simplement le triplet (β, γ, α) en $(\phi_R, \phi_Z, \phi_\theta)$

12.2. Les rotations internes sont toujours condensées. L'élément se présente donc en axes structuraux comme aux figures 2 et 3.

13. Conditions aux limites en $r=0$

Il s'agit de trouver sous quelles conditions les déformations sont finies en $r=0$.

Ces conditions sont

$$\begin{array}{l}
 n=0, m=0 \\
 \\
 n=0, m=1
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \sin \phi = 0 \rightarrow U_R = 0 \\
 \sin \phi \neq 0 \rightarrow U_R = 0, \alpha = 0 \\
 \\
 \sin \phi = 0 \rightarrow v = 0 \\
 \sin \phi \neq 0 \rightarrow v = 0, \beta = 0
 \end{array} \right.$$

$$n=1 \left\{ \begin{array}{l} \sin\phi = 1 \rightarrow \phi_R = \phi_Z, U_Z = 0, U_R + v = 0 \\ \sin\phi \neq 1 \rightarrow \alpha = 0, \beta = 0, U_Z = 0, U_R + v = 0 \end{array} \right.$$

$$n \neq 0, \neq 1 \rightarrow U_R, U_Z, v, \alpha, \beta = 0 .$$

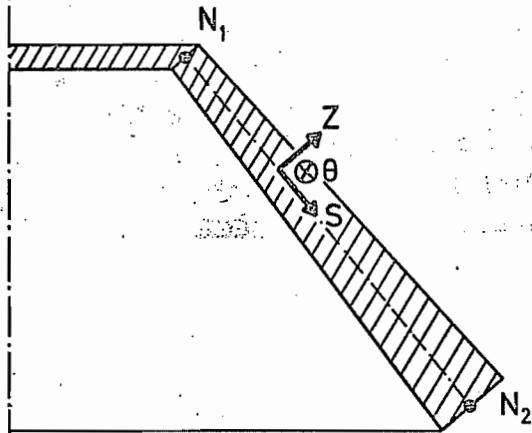


FIG. 1
DEFINITION
DES AXES

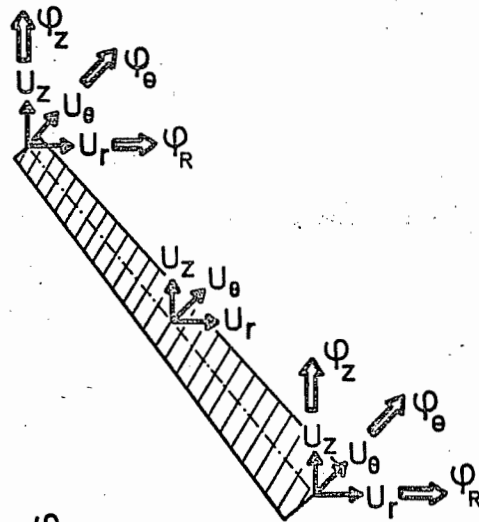


FIG. 2
DEGRE 2
15 D.D.L.

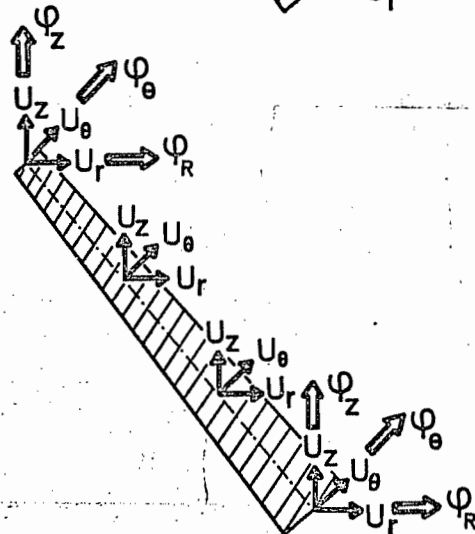


FIG. 3
DEGRE 3
18 D.D.L.

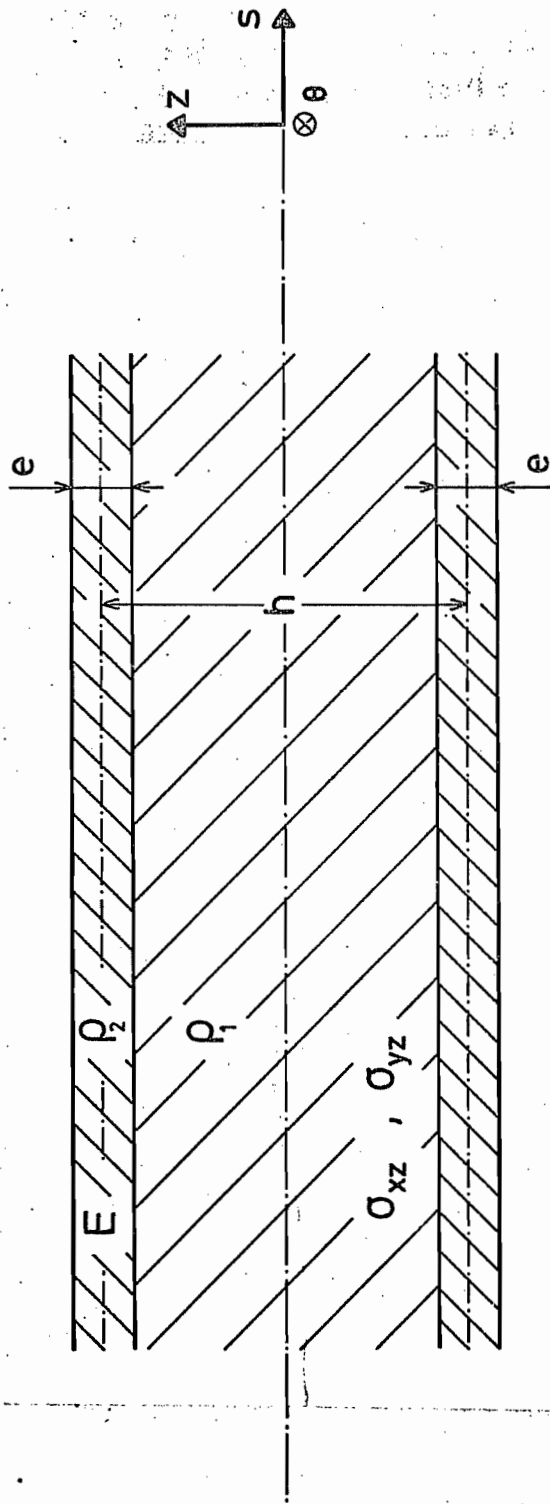


FIG. 4

CHAPITRE 2. APPLICATIONS NUMERIQUES EN STATIQUE

1. Dilatation thermique d'un disque plein

Il s'agit d'un test de fonctionnement. Soumis à un champ de température uniforme, le disque doit avoir une dilatation correspondant à un champ de déformation uniforme αT . Les contraintes doivent être nulles.

Prenant $T = 100$, $\alpha = 10^{-6}$, on a

$$\alpha T = 10^{-2}$$

On choisit un disque plein, de 300 mm de rayon.
Les paramètres élastiques sont

$$E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}^2, \nu = 0,3$$

La plaque est supposée d'épaisseur unitaire.
Dès lors, la charge thermique à la périphérie vaut

$$\begin{aligned} 2 \pi R. (1+\nu) \frac{Eh}{1-\nu} \alpha T \\ = 2 \pi R. \frac{E\alpha Th}{1-\nu} &= 5654,866 \end{aligned}$$

Ce problème a été traité avec 3 éléments de degré 3.

On a obtenu les résultats suivants :

r	u_r (exact)	u_r (ASP18)	charge ou réaction(exact)	charge ou réaction(ASP18)
0	0	0	-	-
100	10^{-2}	$0,9999990 \cdot 10^{-2}$	-	-
200	$2 \cdot 10^{-2}$	$1,999998 \cdot 10^{-2}$	-	-
300	$3 \cdot 10^{-2}$	$2,999997 \cdot 10^{-2}$	5654,866	5654,86

2. Disque creux en dilatation thermique (figure 2.1)

Il s'agit d'un disque creux, bloqué sur son contour intérieur. On le chauffe uniformément.

On peut montrer que la solution est du type

$$u = Ar + \frac{B}{r}$$

Les conditions aux limites sont

$$u(R_1) = 0$$

$$\left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right]_{R_2} = (1+\nu) \alpha T,$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} AR_1 + \frac{B}{R_1} = 0 \\ A - \frac{B}{R_2^2} + \nu A + \frac{\nu B}{R_2} = (1+\nu) \alpha T \end{array} \right.$$

ou encore

$$B = -AR_1^2$$

$$A(1+\nu) + A \frac{R_1^2}{R_2^2} (1-\nu) = (1+\nu) \alpha T$$

$$A \left[\left(1 + \frac{R_1^2}{R_2^2}\right) + \nu \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right) \right] = (1+\nu) \alpha T$$

Prenant

$$\alpha = 10^{-6} \quad ; \quad \nu = 0,3 \quad ; \quad T = 100$$

$$R_1 = 100 \quad , \quad R_2 = 300 \quad ,$$

on obtient

$$A \left[\frac{10}{9} + 0,3 \cdot \frac{8}{9} \right] = 1,3 \cdot 10^{-4}$$

et

$$A = 0,943548388 \cdot 10^{-4}$$

$$B = -0,943548388$$

Le tableau suivant compare la solution analytique à la solution par éléments finis obtenue avec deux éléments de degré 3.

r	u_r (exact)	u_r (ASP18)
100	0	0
133,3	55,04033	55,09677
166,7	100,6452	100,7055
200	141,5323	141,5265
233,3	179,7235	179,7228
266,7	216,2298	216,2296
300	251,6129	251,6079

On constate que la correspondance est remarquable.

3. Disque soumis à une température variant linéairement avec le rayon

Le flux de tension de bridage de Duhamel vaut

$$D (1 + \nu) \alpha T$$

où
$$D = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$

Le disque est régi par le principe

$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} \left\{ - D (1+\nu) \alpha T \left[\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right] + \frac{1}{2} D \left[\left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) \frac{du}{dr} + \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) \frac{u}{r} \right] \right\}$$

rdr stat.

L'équation d'Euler de ce principe est (D = cte , α = cte)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) - \frac{u}{r} = (1 + \nu) \alpha \frac{dT}{dr}$$

et les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} = (1 + \nu) \alpha T \quad \text{aux extrémités libres} \\ u = \bar{u} \quad \text{là où les déplacements sont fixés.} \end{array} \right.$$

Pour un disque plein de rayon R et d'épaisseur constante et pour une température de la forme

$$T = c + dr,$$

on obtient, tous calculs faits,

$$u = \alpha \left[c + \frac{1-\nu}{3} dR \right] r + \frac{1}{3} (1 + \nu) \alpha dr^2$$

Les flux de tensions sont donnés par

$$N_{rr} = \frac{D(1-\nu^2)}{3} \alpha d (R - r)$$

$$N_{\theta\theta} = \frac{D(1-\nu^2)}{3} \alpha d (R - 2r) .$$

Donnons-nous les valeurs suivantes :

$$\alpha = 10^{-6}$$

$$c = 100$$

$$d = 1$$

$$R = 300 \text{ mm}$$

$$h = 1 \text{ mm}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}^2$$

il vient

$$u = 1,7 \cdot 10^{-4} r + 0,433 \cdot 10^{-6} r^2$$

$$N_{rr} = 0,7 \cdot 10^{-2} (R_2 - r)$$

$$N_{\theta\theta} = 0,7 \cdot 10^{-2} (R_2 - 2r)$$

r (mm)	u (mm)	
	exact	ASP18
0	0	0
100	$2,13 \cdot 10^{-2}$	$2,13 \cdot 10^{-2}$
200	$5,13 \cdot 10^{-2}$	$5,13 \cdot 10^{-2}$
300	$9 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-2}$

A l'occasion de ce test, on a comparé deux méthodes de calcul des tensions :

a) moyenne des tensions sur le volume des éléments

$$\bar{N}_A = \int_0^1 N r d\xi / \int_0^1 r d\xi$$

b) moyenne des tensions sur l'intersection de la surface méridienne de l'élément, soit

$$\bar{N}_B = \int_0^1 N d\xi$$

A priori, il est assez naturel d'attribuer la première moyenne au centre de gravité de l'élément, soit en

$$\bar{\xi}_A = \int_0^1 \xi r d\xi / \int_0^1 r d\xi$$

tandis que la seconde sera située en

$$\bar{\xi}_B = \int_0^1 \xi \, d\xi / \int_0^1 d\xi = \frac{1}{2}$$

L'exemple suivant montre le bien fondé de ces localisations.

C'est pourquoi on a choisi le cas b, bien plus facile à interpréter.

Elément	1	2	3
r_B	50	150	250
$N_{rr}(r_B)$ {			
exact	1,751	1,051	0,3502
ASP18	1,750	1,050	0,3500
$N_{\theta\theta}(r_B)$ {			
exact	1,401	0	- 1,401
ASP18	1,400	- 0	- 1,400
r_A	66,67	155,5	253,2
$N_{rr}(r_A)$ {			
exact	1,640	1,011	0,3277
ASP18	1,633	1,011	0,3267
$N_{\theta\theta}(r_A)$ {			
exact	1,166	- 0,0770	- 1,445
ASP18	1,167	- 0,07778	- 1,447

Les valeurs précédentes sont obtenues par un passage au degré 3.

4. Disque soumis à un gradient thermique linéairement variable

Le problème est analogue au précédent.

Posant cette fois-ci

$$D = \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \quad ; \quad T_1 = \frac{\Delta T}{h} \quad ,$$

on obtient pour les tensions de bridage

$$M_{rr}(T) = -D \alpha (1+\nu) T_1$$

$$M_{\theta\theta}(T) = -D \alpha (1+\nu) T_1$$

La solution de KIRCHHOFF de ce problème est similaire à celle du problème précédent. Il suffit de remplacer

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} \quad \text{par} \quad \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$T \quad \text{par} \quad \frac{\Delta T}{h}$$

On a donc, pour $\frac{\Delta T}{h} = c + dr$

$$\phi_{\theta} = \alpha \left[c + \frac{1-\nu}{3} dR_2 \right] r + \frac{1}{3} (1+\nu) \alpha dr^2$$

$$M_{rr} = D \alpha \frac{1-\nu^2}{3} d (R_2 - r)$$

$$M_{\theta\theta} = D \alpha \frac{1-\nu^2}{3} d (R_2 - r)$$

$$Q_r = 0$$

Les déplacements normaux peuvent être évalués à partir de la relation de Kirchhoff

$$\phi_r = -\frac{dw}{dr}$$

Prenons

$$E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}^2$$

$$h = 2,29 \text{ mm}$$

$$c = 100 \quad , \quad d = 1$$

Le même problème a été passé aux degrés 2 et 3.

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant.

r	$10^2 \phi_r$			w		
	Kirchhoff	2ème degré	3ème degré	Kirchhoff	2ème degré	3ème degré
0	0	0	0	5,045	5,107	5,044
100	0,93	0,9108	0,9316	4,6105	4,652	4,609
200	2,24	2,231	2,2416	3,055	3,081	3,054
300	3,93	3,930	3,930	0	0	0

Les figures 4.1 et 4.2 donnent les déplacements de Kirchhoff et les déplacements obtenus par une analyse au degré 2.

Les moments sont donnés dans le tableau ci-après.

Élément	$10 M_{rr}$			$10 M_{\theta\theta}$		
	Kirchhoff	degré 2	degré 3	Kirchhoff	degré 2	degré 3
1	7,64	7,68	7,65	6,12	7,68	6,12
2	4,59	4,89	4,59	0	0,309	0
3	-1,53	1,84	1,53	-6,12	-5,80	-6,12

On constate une excellente correspondance au degré 3. La correspondance est un peu moins bonne au degré 2. Dans ce cas, en effet, la rotation est linéaire, tandis que le gradient thermique provoque des rotations du second degré.

5. Plaque appuyée, soumise à une charge concentrée en son centre

Il s'agit ici d'un test particulièrement sévère.

La solution de Kirchhoff de ce problème est [1]

$$w = \frac{3 P (1 - \nu^2)}{4 h^3 \pi E} \left[\frac{3 + \nu}{1 + \nu} (R^2 - r^2) - 2 r^2 \operatorname{lu} \frac{R}{r} \right] .$$

Les moments sont donnés par

$$M_{rr} = \frac{P}{4\pi} (1 + \nu) \operatorname{lu} \frac{R}{r}$$

$$M_{\theta\theta} = M_r + (1 - \nu) \frac{P}{4\pi}$$

Ce problème est traité de 4 façons :

1. avec un élément central,
2. avec un petit trou au centre : la plaque faisant 300 mm de diamètre, on y fait un trou de 2 mm,
3. avec introduction directe de la matrice de Hooke,
4. avec une épaisseur très faiblement variable : elle vaut 1,003 au centre et varie linéairement jusqu'à 1 à la périphérie.

Tous ces passages ont été effectués au degré 3.

r	w				
	Kirchhoff	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
0	23,6302	-	23,5194	23,50069	23,3988
2	-	23,4053	-	-	-
33,3	22,8295	-	22,8600	22,83283	22,7311
34,7	-	22,7455	-	-	-
66,7	21,0857	-	21,1194	21,110281	21,01320
67,3	-	21,0413	-	-	-
100	18,7329	18,7032	18,7311	18,71863	18,6419
133,3	15,9791	15,9622	15,9851	15,97293	15,90965
166,7	12,9572	12,9472	12,9644	12,95477	12,90504
200	9,76758	9,76176	9,77415	9,767033	9,730554
233,3	6,4976	6,49915	6,50713	6,502509	6,478691
266,7	3,2248	3,2247	3,22859	3,226362	3,214664
300	0	0	0	0	0

On remarquera que la correspondance est très bonne.

Le fait de ménager un trou change assez peu les choses.

La petite différence que l'on peut observer entre le cas 3 et le cas 4 provient d'une légère imprécision dans le calcul de la matrice de Hooke dans le cas 3.

Dans les deux premiers cas, les moments ont été calculés par

$$\int M_{rr} r dr / \int r dr ;$$

dans les cas 3 et 4, par

$$\int M_{rr} dr / \int dr$$

Les résultats sont reproduits à la figure 5.1.

6. Cylindre sous pression

Ce test est destiné à vérifier la construction des charges équivalentes. Il s'agit du cylindre représenté à la figure (6.1).

Aux extrémités, on bloque les déplacements verticaux.

D'autre part, la flexion n'intervenant pas, on peut fixer ϕ_θ partout.

La solution est facile à obtenir :

$$\epsilon_{rr} = 0$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{R}$$

$$N_{rr} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \cdot \nu \cdot \frac{u_r}{R}$$

$$N_{\theta\theta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{u_r}{R} \cdot$$

De plus, l'équilibre circonférentiel s'écrit

$$N_{\theta\theta} = p R \quad ,$$

ce qui entraîne

$$N_{rr} = \nu p R$$

et

$$u_r = \frac{p R^2}{Eh/(1-\nu^2)} \cdot$$

Dans notre cas, on a posé

$$p = 1 \text{ kg/mm}^2$$

$$E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kg'/mm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$h = 3 \text{ mm}$$

Il vient donc

$$N_{\theta\theta} = 100 \text{ kg'/mm}$$

$$N_{rr} = 30 \text{ kg'/mm}$$

$$u_r = 0,144444 \text{ mm}$$

Ces résultats sont obtenus exactement par le programme.

7. Sphère sous pression

Ce problème simple permet de vérifier l'introduction de la courbure et des axes locaux.

La sphère est représentée par un élément. Deux cas sont envisagés :

1. on utilise un élément à simple courbure (fig. 7.1),
2. on utilise un élément à double courbure (fig. 7.2).

Dans les deux cas, seuls les déplacements radiaux sont tolérés aux extrémités de l'élément.

La solution exacte est la suivante :

$$N_{ss} = N_{\theta\theta} = \frac{p}{2R}$$

$$u_r = \frac{N_{ss} R (1-\nu)}{E h}$$

Les données numériques sont :

$$R = 1000 \text{ mm}$$

$$p = 1 \text{ kg}'/\text{mm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$h = 0,3 \text{ mm}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kg}'/\text{mm}^2$$

On obtient

Point	déplacement radial		
	exact	simple courbure	double courbure
1	55,5556	51,56537	53,68674
2	55,5556	55,6356731	53,6918677
3	55,5556	55,6356731	53,6918677
4	55,5556	51,56537	53,68674

On constate que :

1. dans le cas de la simple courbure, les déplacements sont trop faibles au bord et trop grands au milieu.
2. dans le cas de la double courbure, les déplacements sont pratiquement uniformes. Ils sont un peu trop faibles (erreur de 3,25 %). Cet excès de raideur diminue lorsqu'on multiplie les éléments.

Pour les efforts, les résultats sont :

	exact	simple courbure	double courbure
N_{ss}	500	473,4671	487,3652
erreur rel.	-	5,3 %	2,72 %
$N_{\theta\theta}$	500	494,0432	495,6421
erreur rel.	-	1,2 %	0,88 %

L'erreur est donc beaucoup plus faible dans le cas de la double courbure, spécialement pour N_{ss} .

8. Cylindre mince en flexion

Cet exemple est destiné à vérifier le fonctionnement de l'élément pour le cas $n=1$. Le cylindre est représenté à la figure 8.1.

Ses caractéristiques sont :

longueur : 1000 mm

rayon moyen : 100 mm

épaisseur : 1 mm

module de Young : $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kg}'/\text{mm}^2$

coefficient de Poisson: $\nu = 0,3$.

Ce cylindre est chargé en poutre console. Sa charge d'extrémité est supposée répartie uniformément sur la circonférence.

Considérons (figure 8.2) cette section. Pour une force F agissant selon l'axe OX , on a une densité de force $f = \frac{F}{2\pi rh}$

Elle se décompose en

$$f_r = f \cos\theta$$

$$f_\theta = -f \sin\theta$$

Dès lors,

$$F_r = \int_0^{2\pi} f_r \cdot rh \cos\theta \, d\theta = \frac{F}{2\pi rh} \cdot rh \int_0^2 \cos^2\theta \, d\theta = \frac{F}{2}$$

$$F_\theta = \int_0^{2\pi} f_\theta \cdot rh \sin\theta \, d\theta = -\frac{F}{2\pi rh} \cdot rh \int_0^2 \sin^2\theta \, d\theta = -\frac{F}{2}$$

Les résultats peuvent être comparés à la solution donnée par la théorie des poutres avec effort tranchant. Pour une poutre console,

$$f = F \left(\frac{l^3}{EI} + \frac{l}{G \Omega^*} \right)$$

où I est le moment d'inertie, tandis que Ω^* est la section réduite de cisaillement.

On a

$$I = \int y^2 d\Omega \approx h \int_0^{2\pi} r^3 \sin\theta d\theta = \pi r^3 h$$

$$\Omega^* = \frac{\Omega}{\int \frac{S}{I} dy}$$

où $S(y)$ est le moment statique de la partie de la section comprise entre l'axe et le point considéré. Dans ce cas, on a

$$S(\theta) \approx h \int_0^\theta r \sin\alpha d\alpha = hr^2 (1 - \cos\theta),$$

soit

$$\int_0^{2\pi} S(\theta) r d\theta = 2\pi r^3 h = 2I.$$

Par conséquent, $\Omega^* = \Omega/2 = \pi r h$

Le problème a été traité à l'aide de 5 éléments de degré 3. Par ailleurs, on a idéalisé un cylindre dix fois plus épais à l'aide de 10 éléments de type 16 [11]. Le tableau suivant donne une comparaison des résultats :

	u_R	u_θ	$(u_r - u_\theta) / u_r $
Poutre	$5,443 \cdot 10^{-3}$	$- 5,443 \cdot 10^{-3}$	0
ASP18	$5,427003 \cdot 10^{-3}$	$- 5,378815 \cdot 10^{-3}$	0,90 %
ASP16	$5,426907 \cdot 10^{-3}$	$- 5,370178 \cdot 10^{-3}$	1,05 %

La concordance des résultats est excellente. Les flèches obtenues par la théorie des poutres sont un peu plus grandes, comme on pouvait s'y attendre puisque cette théorie fait des hypothèses sur la répartition des efforts. D'autres part, les solutions par éléments finis rendent compte d'une légère déformation de la section:

$$\frac{|u_r| - |u_\theta|}{|u_r|} = \begin{cases} 8,8 \cdot 10^{-3} & \text{par ASP18} \\ 10,5 \cdot 10^{-3} & \text{par ASP16} \end{cases}$$

La petitesse de cette déformation justifie a posteriori la comparaison avec une théorie de poutres.

Les flux de contrainte ont également été comparés aux résultats obtenus par la théorie des poutres. On a :

$$M = F(\ell - s) = 1 \cdot (10^3 - s)$$

$$I = \pi \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\frac{I}{v} = \pi \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

$$(\sigma_{ss})_{\max} = 3,182373 \cdot 10^{-2} \text{ kg}'/\text{mm}^2.$$

Les contraintes varient linéairement des $(\sigma_{ss})_{\max}$ à zéro.

z (mm)	100	300	500	700	900
σ_{ss} (poutre)	$2,864789 \cdot 10^{-3}$	$2,228169 \cdot 10^{-3}$	$1,591549 \cdot 10^{-3}$	$9,549297 \cdot 10^{-4}$	$3,183099 \cdot 10^{-4}$
σ_{ss} (ASP18)	$2,86441 \cdot 10^{-3}$	$2,227833 \cdot 10^{-3}$	$1,591289 \cdot 10^{-3}$	$9,547619 \cdot 10^{-4}$	$3,182373 \cdot 10^{-4}$
σ_{ss} (ASP16)	$2,85615 \cdot 10^{-3}$	-	-	-	$3,1234 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{s\theta}$ (ASP18)	$-2,81640 \cdot 10^{-3}$	$-3,138267 \cdot 10^{-3}$	$-3,175931 \cdot 10^{-3}$	$-3,204119 \cdot 10^{-3}$	$-3,1555 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{s\theta}$ (ASP16)	$-2,97927 \cdot 10^{-3}$	-	-	-	$-3,1774 \cdot 10^{-4}$

9. Cylindre creux en torsion

Ce problème permet de tester le comportement de l'élément pour $n=0$, $m=1$. Il s'agit du même cylindre qu'au paragraphe 8, si ce n'est son épaisseur qui vaut à présent 10 mm.

On applique une force circonférentielle totale

$$F_{\theta} = 1 \text{ kg'}$$

Le moment de torsion est donc, pour $R=100$ mm,

$$M_t = F_{\theta} \cdot r = 100 \text{ kg'mm}$$

On peut comparer la solution obtenue à deux théories différentes

a) la théorie de Coulomb, qui fait des hypothèses sur les déplacements.

On obtient alors pour l'angle de torsion

$$\psi(z) = \frac{M_t z}{GI_p}$$

$$\text{avec } I_p = 2\pi \int_{r-\frac{h}{2}}^{r+\frac{h}{2}} r^2 \cdot r dr = \frac{2\pi}{4} \left[4 r^3 h + 8r \left(\frac{h}{2}\right)^3 \right]$$

b) la théorie de Bredt, qui fait des hypothèses sur les tensions : on pose $\tau = \text{constante}$ sur l'épaisseur. Dès lors,

$$M_t = 2\pi \int_{r-\frac{h}{2}}^{r+\frac{h}{2}} \tau r^2 dr = \frac{2\pi\tau}{3} \left(3 r^2 h + \frac{h^3}{4} \right) = \tau A$$

avec

$$A = 2\pi \left(r^2 h + \frac{h^3}{12} \right)$$

La solution est donc régie par le principe

$$\delta \left\{ \int_0^l \frac{M_t^2}{A} \cdot \frac{1}{2G} \cdot \Omega \, dx - M_t \frac{\Omega}{A} \bar{u}_\theta \right\} = 0$$

soit

$$\bar{u}_\theta = \frac{A}{\Omega} \frac{M_t \Omega l}{GA^2} = \frac{M_t l}{GA}$$

Ce cylindre a été étudié à l'aide de 5 éléments de type 18 et de 8 éléments de type 16. On doit avoir :

$$\psi (\text{Bredt}) \geq \psi (\text{ASP18}) \geq \psi (\text{Coulomb})$$

$$\psi (\text{Bredt}) \geq \psi (\text{ASP16}) \geq \psi (\text{Coulomb})$$

car la théorie de Bredt fait des hypothèses sur la répartition des contraintes, tandis que la théorie de Coulomb fait des hypothèses plus restrictives sur les déplacements. Les résultats sont comparés dans le tableau suivant.

z	Déplacements circonférentiels			
	BREDT	ASP18	COULOMB	ASP16
0	0	0	0	0
200	3,937700.10 ⁻⁶	3,937697.10 ⁻⁶	3,931155.10 ⁻⁶	3,934420.10 ⁻⁶
400	7,875399.10 ⁻⁶	7,875394.10 ⁻⁶	7,862310.10 ⁻⁶	-
600	1,181310.10 ⁻⁵	1,181309.10 ⁻⁵	1,179346.10 ⁻⁵	1,180326.10 ⁻⁵
800	1,575080.10 ⁻⁵	1,575079.10 ⁻⁵	1,572462.10 ⁻⁵	-
1000	1,968850.10 ⁻⁵	1,968849.10 ⁻⁵	1,965577.10 ⁻⁵	1,967214.10 ⁻⁵

On notera l'excellente concordance entre la théorie de BREDT et la solution par éléments finis.

10. Membrane en cisaillement pur

Le cisaillement pur est caractérisé par un tenseur des contraintes de composantes cartésiennes

$$\sigma_{12} = \tau = \text{constante} ; \sigma_{11} = 0 ; \sigma_{22} = 0 .$$

Ce type de sollicitation permet de tester l'élément pour $n = 2$.

En effet, on a

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \tau \begin{bmatrix} \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ \cos 2\theta & -\sin 2\theta \end{bmatrix}$$

soit

$$\sigma_{rr} = \tau \sin 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\tau \sin 2\theta$$

$$\sigma_{r\theta} = \tau \cos 2\theta .$$

Les tractions de surface sont données par

$$\begin{cases} t_r = \sigma_{rr} n_r + \sigma_{r\theta} n_\theta \\ t_\theta = \sigma_{r\theta} n_r + \sigma_{\theta\theta} n_\theta \end{cases}$$

Considérons une membrane circulaire : sur la circonférence,

$$n_r = 1 \quad , \quad n_\theta = 0 \quad . \quad \text{Par conséquent,}$$

$$t_r = \sigma_{rr} = \tau \sin 2\theta = -\tau \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t_\theta = \sigma_{r\theta} = \tau \cos 2\theta = \tau \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) \quad .$$

Le calcul des déplacements se fait le plus simplement en coordonnées cartésiennes :

$$\epsilon_{11} = 0 \quad , \quad \epsilon_{22} = 0$$

$$\gamma_{12} = \frac{\tau}{G} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

La rotation $\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$ est nulle. Par conséquent,

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \frac{\tau}{G}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{1}{2} \frac{\tau}{G}$$

Il vient donc

$$u_2 = \frac{1}{2} \frac{\tau}{G} x = \frac{1}{2} \frac{\tau}{G} r \cos\theta$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \frac{\tau}{G} y = \frac{1}{2} \frac{\tau}{G} r \sin\theta \quad .$$

Transformons :

$$\begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\tau r}{G} \begin{bmatrix} \sin 2\theta \\ \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

soit

$$u_r = -\frac{1}{2} \frac{\tau}{G} r \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$u_\theta = \frac{1}{2} \frac{\tau}{G} r \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Choisissons les données suivantes :

- plaque circulaire, $R = 400$, épaisseur = 10, $E = 2,6 \cdot 10^4$, $\nu = 0,3 \rightarrow G = 10^4$
- forces $\left\{ \begin{array}{l} \text{selon } u_r = -10^4 \\ \text{selon } u_\theta = +10^4 \end{array} \right\}$ à la périphérie

Il vient

$$a) \quad N_{rr} = -\frac{10^4}{\pi \cdot 400} = -7,957747 = -N_{\theta\theta} = N_{s\theta}$$

$$b) \quad \tau = \frac{N_{rr}}{10} = 0,7957747$$

$$c) \quad (u_r)_{\max} = -\frac{1}{2} \frac{\tau r}{G} = -3,9788735 \cdot 10^{-5} r$$

$$(u_\theta)_{\max} = 3,9788735 \cdot 10^{-5} r$$

Comparaison des résultats

r	u_r (exact)	u_r (ASP18)
0	0	0
100	$-3,9788735 \cdot 10^{-3}$	$-3,978874 \cdot 10^{-3}$
200	$-7,9577470 \cdot 10^{-3}$	$-7,957747 \cdot 10^{-3}$
300	$-1,19366205 \cdot 10^{-2}$	$-1,193662 \cdot 10^{-2}$
400	$-1,5915494 \cdot 10^{-2}$	$-1,591549 \cdot 10^{-2}$

Elément	N_{rr} (exact)	N_{rr} (ASP18)
1	- 7,957747	- 7,957747
2	- 7,957747	- 7,957747
3	- 7,957747	- 7,957747
4	- 7,957747	- 7,957747

On a montré que l'on doit avoir $|N_{rr}| = |N_{\theta\theta}| = |N_{r\theta}|$.
Cette relation est vérifiée exactement.

Le même problème a également été traité par l'élément 16 d'âme de multicouche [11] .

On trouvera ci-dessous la comparaison des résultats.

	u_R max	v_θ max	σ_R	σ_θ	$\tau_{R\theta}$
analytique	$- 1.591549 \cdot 10^{-3}$	$1.591549 \cdot 10^{-2}$	$- 0.795774$	0.795774	0.795774
élément 18	$- 1.591549 \cdot 10^{-3}$	$1.591549 \cdot 10^{-2}$	$- 0.795774$	0.795774	0.795774
élément 16	$- 1.591597 \cdot 10^{-3}$	$1.591550 \cdot 10^{-2}$	$- 0.795771$	0.795751	0.795780

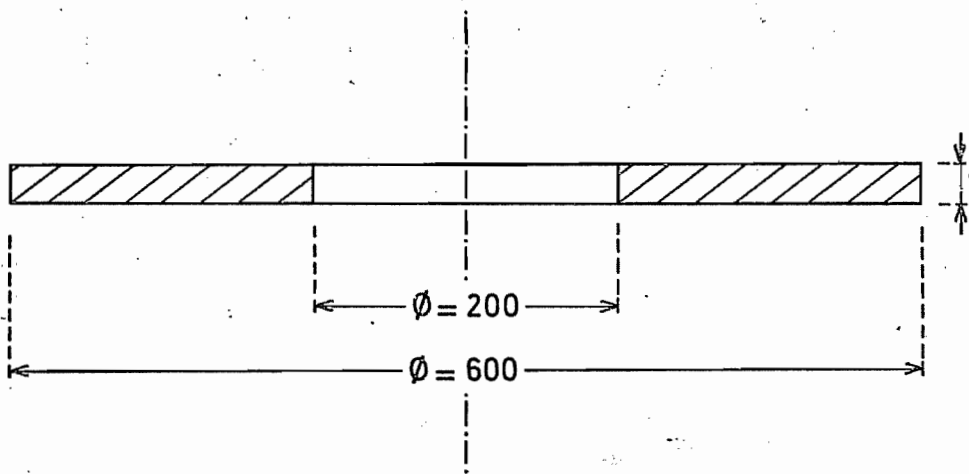


FIG. 2.1

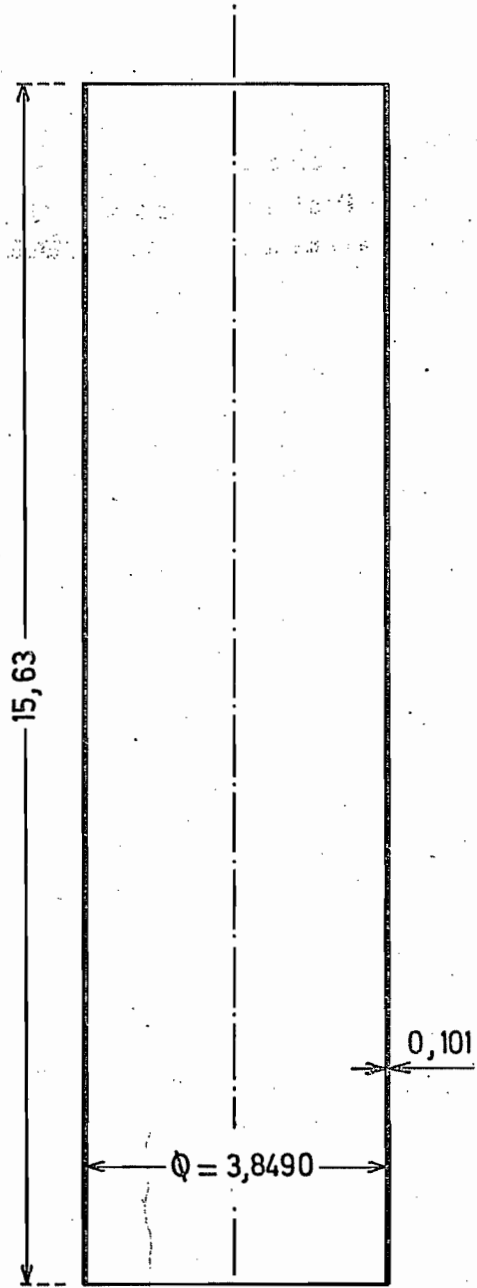


FIG. 4.1

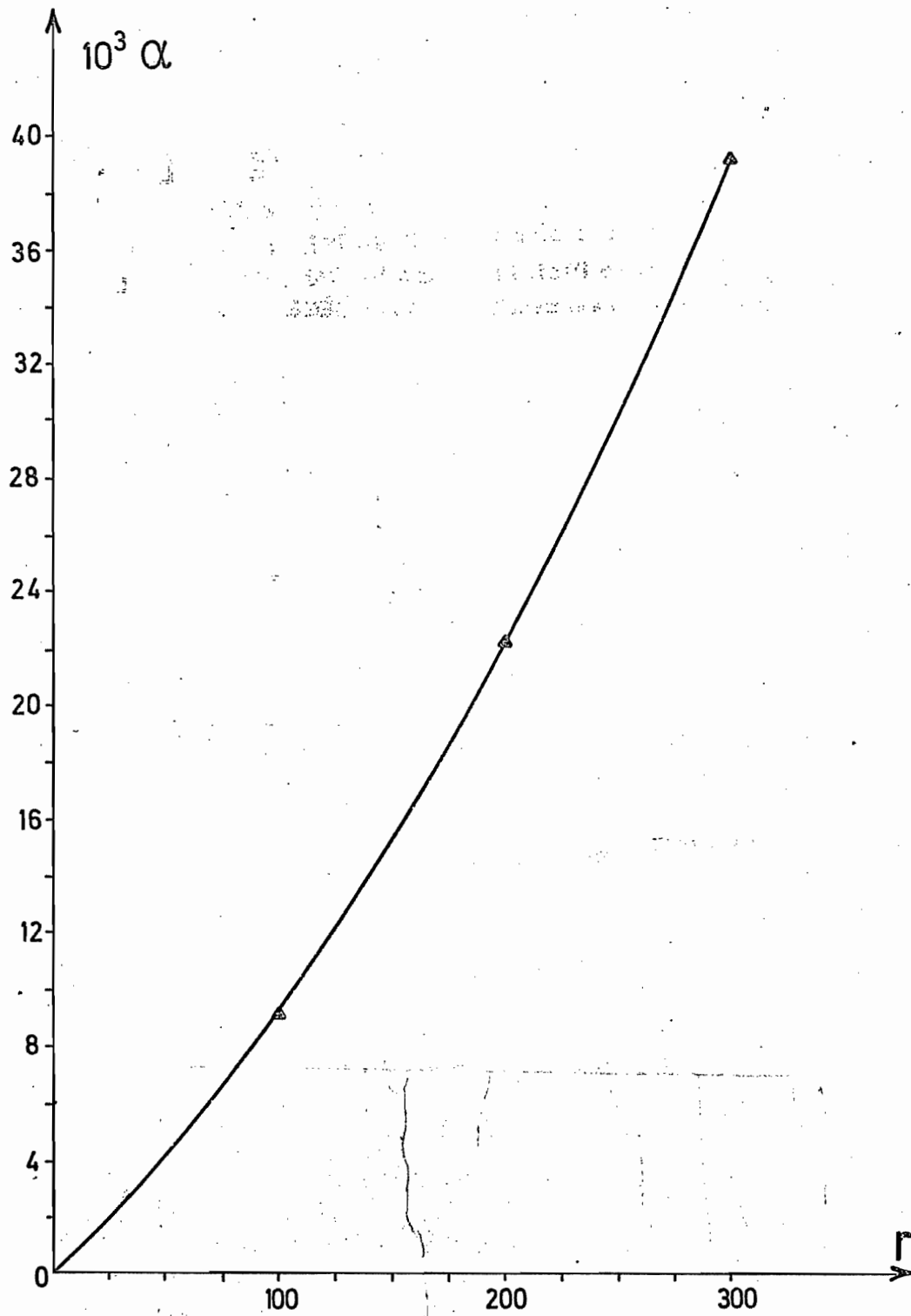


FIG. 4.2

ROTATIONS

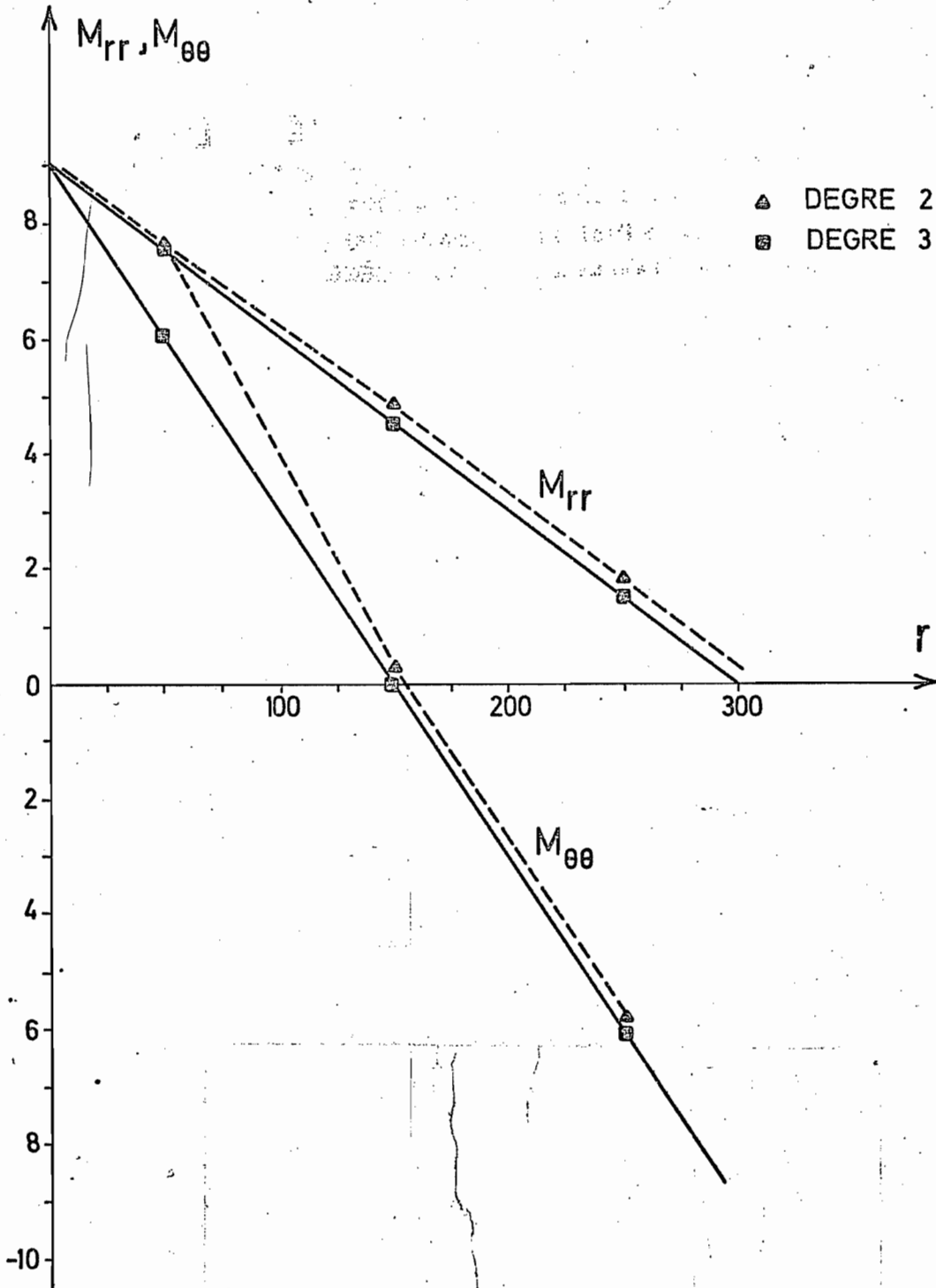


FIG. 4.3

MOMENTS

$M_{rr}, M_{\theta\theta}$

- ▲ M_{rr} par $\int M_{rr} dr / \int dr$,
placé en $(r_1 + r_2) / 2$
- $M_{\theta\theta}$ par $\int M_{\theta\theta} dr / \int dr$,
placé en $(r_1 + r_2) / 2$
- M_{rr} par $\int M_{rr} r dr / \int r dr$,
placé en $\int r^2 dr / \int r dr$
- $M_{\theta\theta}$ par $\int M_{\theta\theta} r dr / \int r dr$,
placé en $\int r^2 dr / \int r dr$
- solution de Kirchhoff

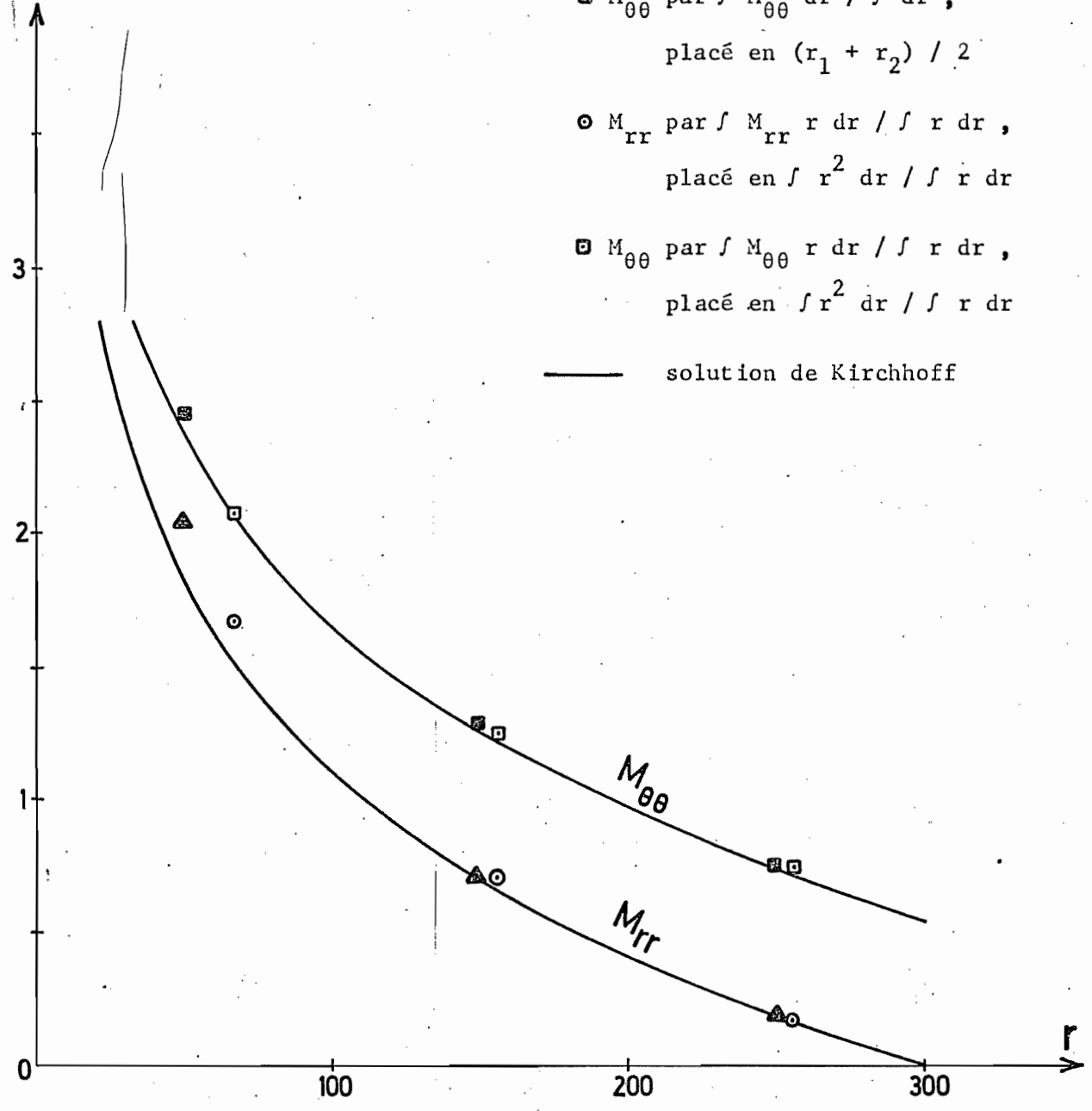


FIG. 5.1

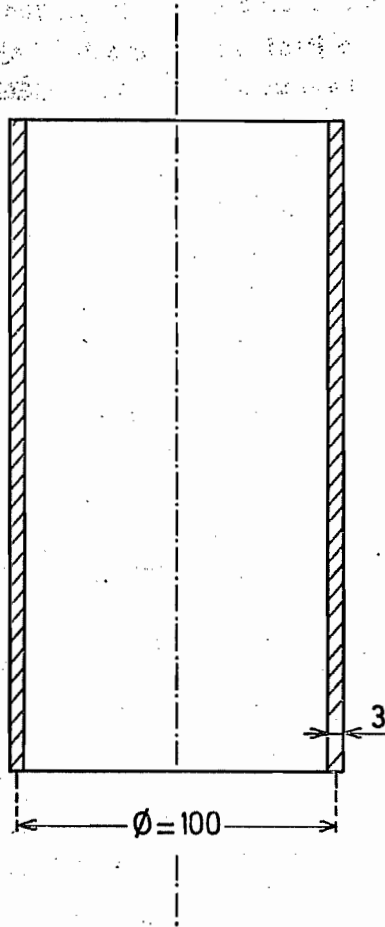


FIG. 6.1

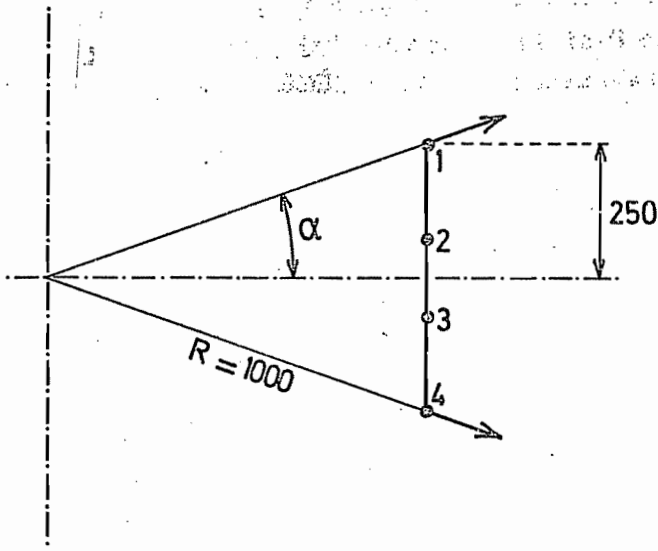


FIG. 7.1

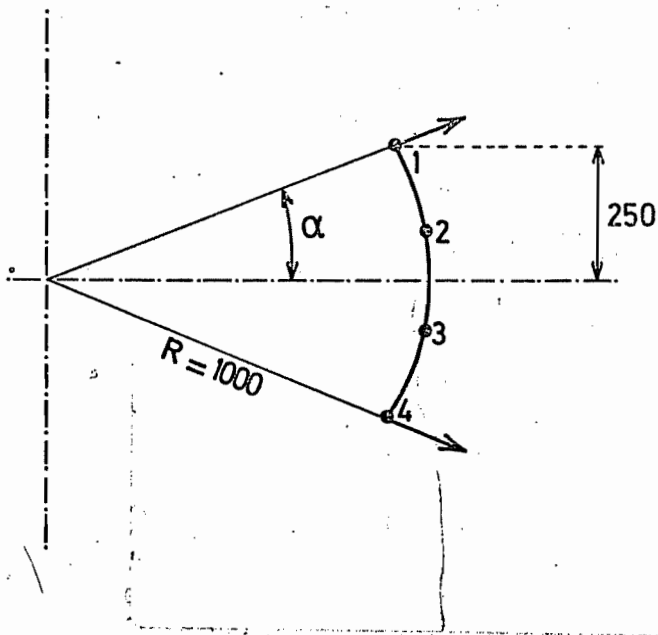


FIG. 7.2

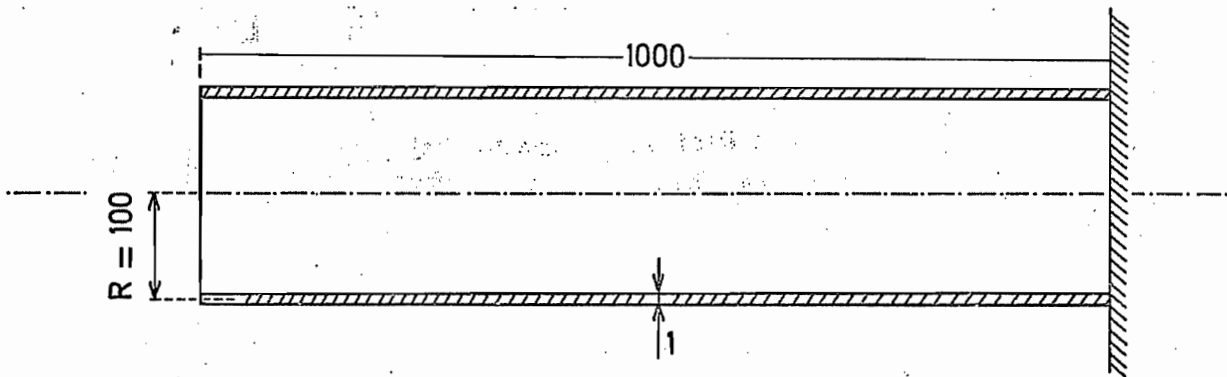


FIG. 8.1

FIG. 8.2

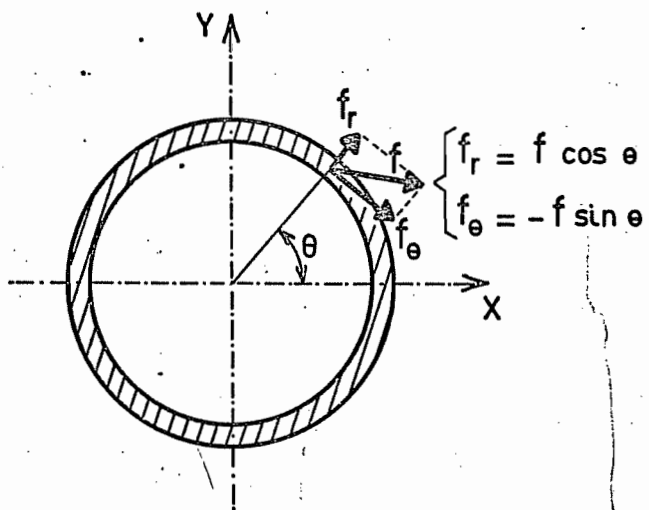
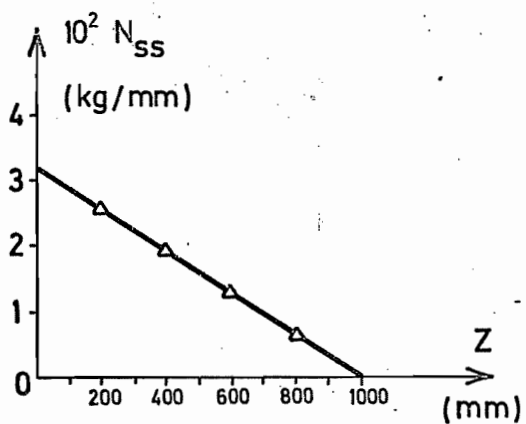


FIG. 8.3



CHAPITRE 3 . APPLICATIONS NUMERIQUES EN DYNAMIQUE

1. Plaque circulaire appuyée

Il s'agit d'une plaque circulaire d'épaisseur constante dont on étudie les vibrations pour $n = 0$. On utilise 4 éléments de degré 3. On définit la pulsation réduite

$$\Omega^2 = \frac{\rho h k^4}{D} \omega^2 = A^2 \omega^2$$

où D est la rigidité flexionnelle

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

On compare les résultats aux références [2,3,4] .

Comme données numériques, on a choisi

rayon de la plaque	: $R = 1 \text{ m}$
épaisseur	: $h = 6,532 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
module de Young	: $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
coefficient de Poisson	: $\nu = 1/3$
densité de masse	: $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

Pour les données ci-dessus, on a $A = 0,975900$.

Les déplacements u_r , u_θ et les rotations ϕ_r , ϕ_z sont bloqués partout. La rotation ϕ_θ est nulle au centre, tandis que le déplacement transversal l'est à la périphérie.

Trois modes ont été calculés et les résultats sont les suivants :

mode	1	2	3
DN18	4,983882	29,78744	74,78977
DN11 (réf. [2])	4,98379	29,78	
réf. [3]	4,98383	-	
réf. [4]	-	29,6	
théorie	4,98383	-	

On remarquera que les fréquences obtenues par le DN18 sont légèrement supérieures à celles de DN11. C'est dû à la condensation des rotations intérieures.

2. Vibrations d'une plaque circulaire d'épaisseur linéairement variable

(réf. [2 , 4])

On considère une plaque circulaire dont l'épaisseur est donnée en fonction du rayon par

$$\frac{h}{R} = h_0 (1 - \beta r)$$

où h_0 est la valeur du rapport $\frac{h}{R}$ au centre (fig. 2.1).

Comme ci-dessus, on définit la pulsation réduite

$$\Omega^2 = \frac{\rho h_0 R^2}{D} \omega^2$$

où

$$D = \frac{E h_0^3}{12(1-\nu^2)}$$

Les données numériques sont

$$E = 1,092 \cdot 10^7$$

$$\nu = 0,3$$

$$h = 10^{-1}$$

$$\rho = 1$$

$$R = 10$$

Il vient alors

$$\Omega = \omega$$

La plaque a été idéalisée par 11 éléments de degré 3.

On fixe les déplacements verticaux à la périphérie, la rotation au centre. Les déplacements u_R et u_Z , ainsi que les rotations ϕ_R et ϕ_Z sont fixés partout.

Voici la comparaison des résultats :

pulsations réduites

	1er mode	2ème mode
DN18	6,291959	37,71491
DN11 (réf. [2])	6,292	37,72
Réf. [5]	6,4	37,9

La correspondance avec DN11 est excellente.

Les fréquences obtenues dans la référence 5. sont un peu plus élevées. Cet écart est dû au fait que l'auteur a utilisé la théorie de Kirchhoff.

Les modes ont été représentés à la figure 2.2.

3. Antenne sphérique encastrée

Il s'agit d'une calotte sphérique encastrée en son pôle.

Olson et Lindberg [5] ont étudié cette structure à la fois par l'expérience et par des éléments finis de coque à double courbure.

D'autres résultats ont été obtenus par Idelsohn [6] et par Mol [2] .

L'existence de ces nombreuses références a permis une comparaison détaillée.

Comme dans [2] et [6] on a tenu compte de la présence du bloc central.

Les données sont (fig. 3.1) :

Rayon de la sphère	: 0,9144 m
Diamètre de l'antenne	: 0,6096 m
Diamètre du bloc d'ancrage	: 0,1016 m
Epaisseur	: $h = 1,956 \cdot 10^{-3}$ m
Module de Young	: $E = 6,89 \cdot 10^{10}$ N/m ²
Coefficient de Poisson	: $\nu = 0,3$
Densité de masse	: $\rho = 2,8 \cdot 10^3$ kg/m ³

La structure a été présentée par 11 éléments de degré 3, et les éléments ont été pris courbes. Les calculs ont été faits jusque $n = 7$.

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant. La variable n y désigne le nombre d'onde circonférentiel, m le nombre d'onde longitudinal.

n	m	f(DN18)	f[2]	f[6]	f[7]	f[5]	f expér.[5]
0	0	260,7	258,8	263,94	275,1-277,8	145,15	
0	1	862,6	866,4		807,8-894,3	875,20	891
0	2	950,8	951,9		923,9-970,9	934,46	1034
0	3	1186,3	1187,4			1111,4	1234
0	4	1616,1					
1	0	78,46		80,62		28,372	16
1	1	862,1		818,94		878,1	882
1	2	957,6				946,30	940
1	3	1199,3				1142,1	
1	4	1633,6					
2	0	43,39		40,16		29,311	26
2	1	895,18				893,04	870
2	2	1004,4				986,31	1034
2	3	1255,3					
2	4	1700					
3	0	72,821		74		69,269	49
3	1	901,39		805,79		910,17	918
3	2	1041,7				1044,5	1081
3	3	1326,4					
3	4	1797,3					
4	0	123,62		125,1		123,36	98
4	1	929,14				947,15	946
4	2	1130				1144	
4	3	1436,96					
4	4	1938					
5	0	187,38		187,5		190,51	162
5	1	977,18		1026,88		1000,4	1003
5	2	1215,97					
5	3	1590,4					
5	4	2125,9					

n	m	f (DN18)	f [2]	f [6]	f [7]	f [5]	f [5]
6	0	262,22		260,87		271,01	241
6	1	1043,8				1071,3	1076
6	2	1343,0					
6	3	1778,9					
6	4	2356,0					
7	0	347,21		347,1		361,72	331
7	1	1129,3				1168	1170
7	2	1490,5					
7	3	1992,96					
7	4	2618,9					

Aux figures 3.2 et 3.3, on a représenté quelques modes.

Les figures 3.4 à 3.10 comparent les fréquences pour différents m, n étant maintenu constant. On constate que

1. pour $m = 0$, les valeurs expérimentales sont considérablement plus basses que les valeurs obtenues.

La raison est à chercher au niveau de l'encastrement.

Olson et Lindberg [5] ont considéré que la coque se prolongeait jusqu'au centre. Les fréquences obtenues sont plus basses, mais toujours plus élevées que les fréquences expérimentales.

D'autre part, toutes les idéalizations tenant compte du bloc central [2,5,6,7] donnent des résultats analogues ;

2. pour $m > 0$, les diverses analyses concordent très bien.

4. Cylindre "librement appuyé"

Il s'agit d'un problème traité par Arnold et Warburton [8] .
Ces deux auteurs ont utilisé une théorie de Kirchhoff-Love pour décrire leur coque. Les fréquences propres sont obtenues par une technique de Rayleigh-Ritz. Les conditions aux limites, caractérisées par l'expression "freely supported", correspondent aux fixations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} u_r = u_\theta = 0 \\ u_z, \alpha, \beta \text{ libres} \end{array} \right\} \text{aux extrémités.}$$

Les données numériques sont (fig. 4.1) :

longueur du cylindre	: 15,63 in
module de Young	: $E = 29,6 \cdot 10^6 \text{ lb/in}^2$
coefficient de Poisson	: $\nu = 0,29$
pois spécifique	: $0,283 \text{ lb/in}^3$, soit
densité de masse	: $7,3299 \cdot 10^{-4} \text{ lb sec}^2/\text{in}^4$
rayon moyen	: 1,9245 in
épaisseur de la coque	: 0,101 in

Le cylindre a été idéalisé par dix éléments de degré 3.

Les calculs ont été faits pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.

On notera que les auteurs ont donné exactement leurs valeurs expérimentales, tandis que leurs valeurs théoriques ne sont données que par graphique.

Elles sont donc assez imprécises.

Les résultats sont :

n	m	DN18	théorie [8]	Expérience [8]
2	1	908	950	960
	2	2085	2050	2070
	3	3846	3800	3725
	4	5733	5800	5270
	5	7527	7500	6880
	6	9133	9100	8270
3	1	2039	2050	2130
	2	2340	2400	2420
	3	3078	3100	3130
	4	4178	4150	4180
	5	5467	5400	5380
	6	6818	6750	6670
4	1	3839	3900	3985
	2	3986	4050	4130
	3	4310	4350	4430
	4	4861	4900	4950
	5	5633	5650	5690
	6	6583	6650	6630

La correspondance est bonne pour $n = 3$ et 4 . Pour $n = 2$, elle l'est moins. Mais les résultats de DN18 sont très proches des résultats théoriques d'Arnold et Warburton. Ces auteurs signalent d'ailleurs que ces conditions aux limites de type "freely supported", très commodes pour la théorie, sont très difficiles à reproduire en pratique. Ils ont dû faire de nombreux essais avant de trouver un mode d'appui convenable, sans pour autant obtenir une bonne correspondance pour $n = 2$.

5. Cylindre bi-encastré

Dans un autre article [9] , les mêmes auteurs ont étudié le cas de cylindres bi-encastrés.

Dans ce cas, il suffit de poser

$$u_2 = u_\theta = u_z = \alpha = \beta = 0$$

aux deux extrémités. Ici aussi, ils ont obtenu des résultats théoriques et expérimentaux. Le cylindre traité est identique au précédent, si ce n'est les fixations. Le tableau suivant donne une comparaison des résultats. De même que ci-dessus, les résultats théoriques sont relevés sur graphique et donc peu précis.

n	m	DN18	théorie [9]	expérience [9]
2	1	1288	1180	1240
	2	2615	2470	2440
	3	4286	4350	-
	4	6049	6235	-
	5	7764	8000	8020
	6	9336	9470	9440
3	1	2102	2120	2150
	2	2558	2530	2560
	3	3414	2340	3380
	4	4550	4460	4480
	5	5835	5760	5740
	6	7180	7060	7010

On trouvera à la figure 5.1 le diagramme comparatif des fréquences.

On constate une bonne correspondance.

Les figures 5.2 à 5.4 donnent la forme du mode $n = 2$, $m = 1$.

6. Faux sandwich

Ce problème a pour but de vérifier le fonctionnement de l'option de sandwich. On considère (fig. 5.1) d'une part, une plaque circulaire homogène de rayon $R = 300$ mm et d'épaisseur $h = 11$ mm; d'autre part, un sandwich dont les semelles ont une épaisseur de 1 mm, la distance de leurs feuillets moyens étant de 10 mm.

On donne aux semelles et à l'âme la densité de masse de la plaque.

On étudie alors le premier mode de vibration de la plaque et du sandwich, pour un encastrement au centre. L'inspection des résultats montre qu'il s'agit d'un mode de membrane. Or, seules les semelles résistent à l'extension. On doit donc s'attendre à obtenir

$$f(\text{sandwich}) = f(\text{plaque}) \cdot \sqrt{\frac{2}{11}}$$

puisque seule la raideur est modifiée.

Effectivement, on obtient :

$$f_{\text{sandwich}} = 55,62125 \text{ Hz}$$

$$f_{\text{plaque}} = 130,4443 \text{ Hz}$$

et le rapport vaut bien

$$\sqrt{\frac{2}{11}}$$

REFERENCES

- 1 LANDAU et LIFCHITZ
"Théorie de l'élasticité"
Editions MIR, Moscou, 1967
- 2 A.M. MOL
"Eléments à symétrie axiale pour l'analyse dynamique des structures"
Rapport L.T.A.S. n° VF23, Liège, 1974
- 3 G.C. PARDOEN
"Static vibration and buckling analysis of axisymmetric circular plates using finite elements"
Computer and Structure, vol. 3, pp. 355-375, Pergamon Press, 1973
- 4 R.K. JAN
"Vibration of circular plates of variable thickness under an inplane force"
Jl. of Sound and Vibration, vol. 23, n° 4, 1972
- 5 OLSON and LINDBERG
"Dynamic analysis of shallow shells with a doubly-curved triangular finite element"
Journal of Sound and Vibration, vol. 19, n° 3, 1971
- 6 S. IDELSOHN
"Analyse dynamique des coques minces au moyen d'un élément fini triangulaire plan de type mixte"
Rapport L.T.A.S., n° VF-19, Liège, 1973
- 7 S. IDELSOHN
"Analyses statique et dynamique des coques par la méthode des éléments finis"
Thèse de doctorat, L.T.A.S, rapport n° SF-30, Univ. Liège, 1974

- 8 R.N. ARNOLD and G.B. WARBURTON
"Flexural vibration of the walls of thin cylindrical shells having
freely supported ends"
1948
- 9 R.N. ARNOLD and G.B. WARBURTON
"The flexural vibration of thin cylinders"
1951
- 10 A. HUCK, A. MOL, S. IDELSOHN, J.F. DEBONGNIE
"Vibrations asymétriques d'une coque de révolution autour d'un
état d'équilibre thermoélastique"
Rapport L.T.A.S., n° VF-22, 1974
- 11 C. DELCOURT-BON
"Elément de volume pour multicouches à géométrie axisymétrique"
L.T.A.S., Univ. Liège, rapport n° VF-25, 1974

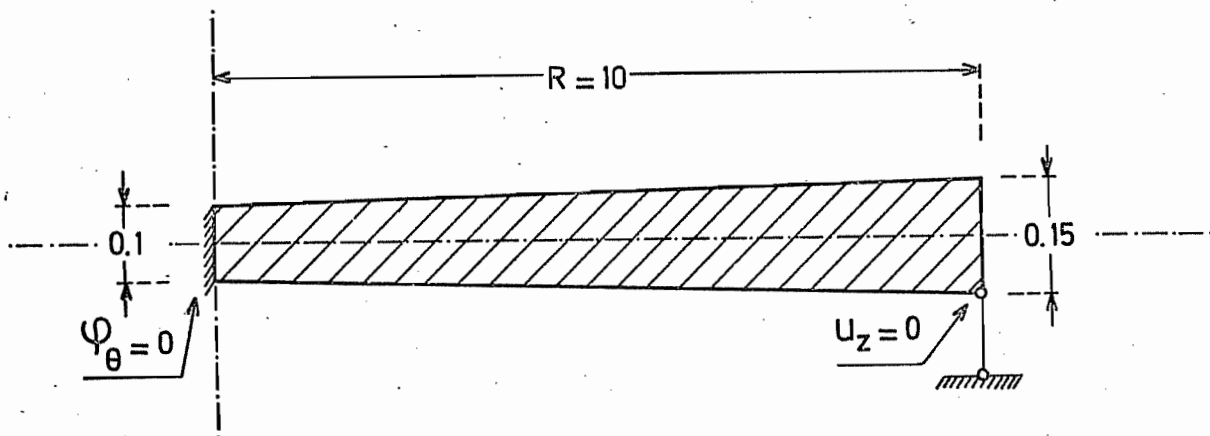
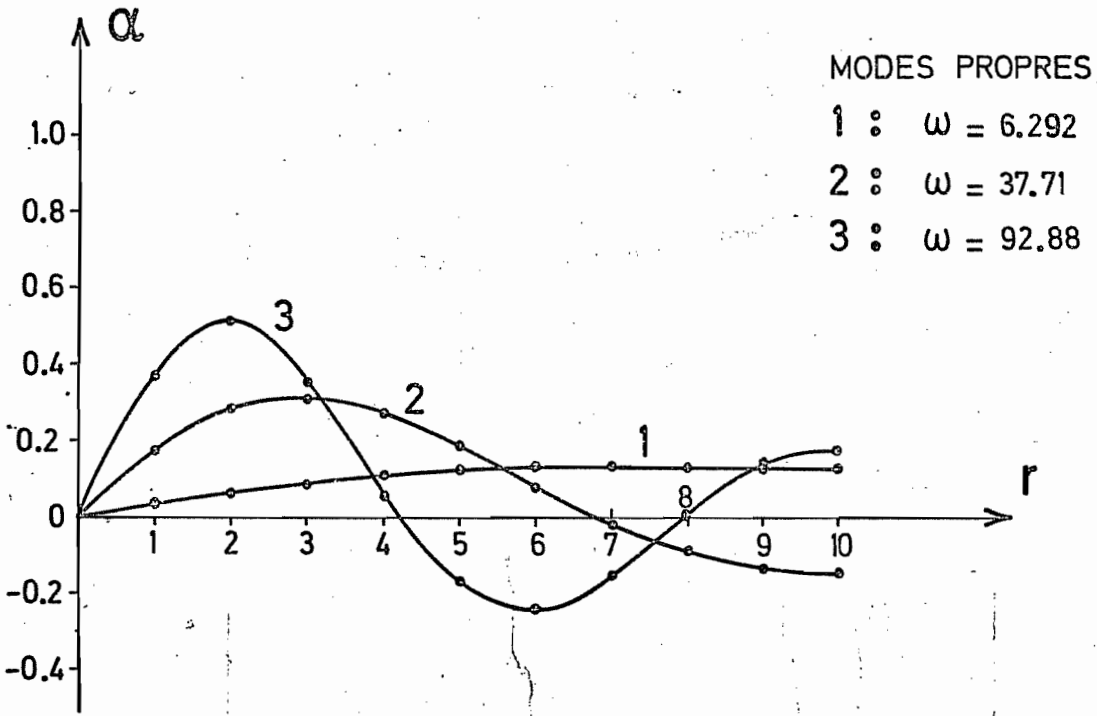
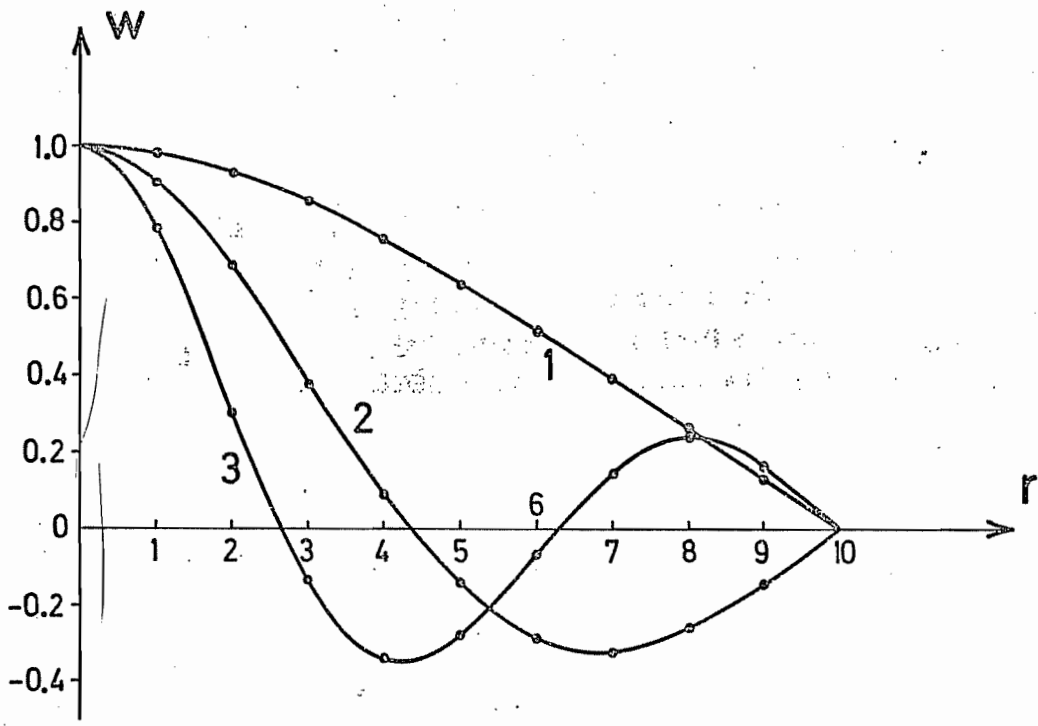


FIG. 2.1



PLAQUE CIRCULAIRE D'ÉPAISSEUR VARIABLE

FIG. 2.2

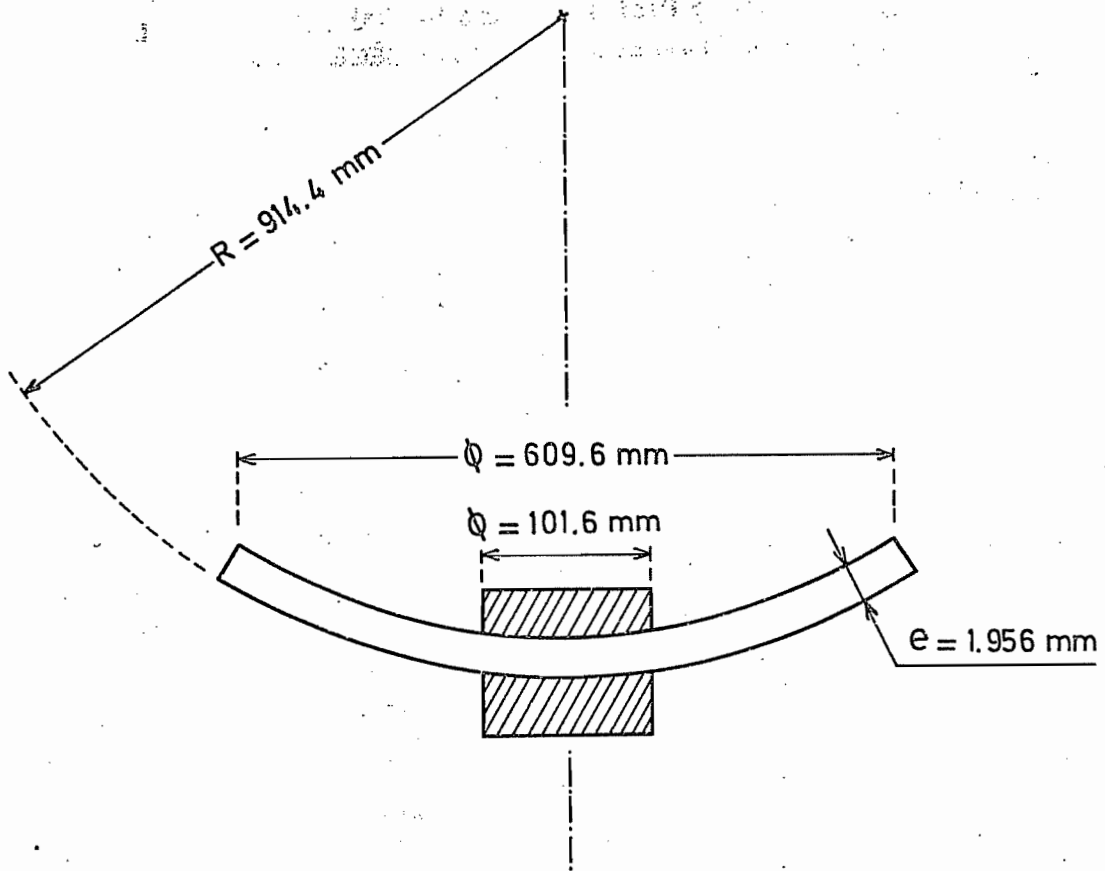
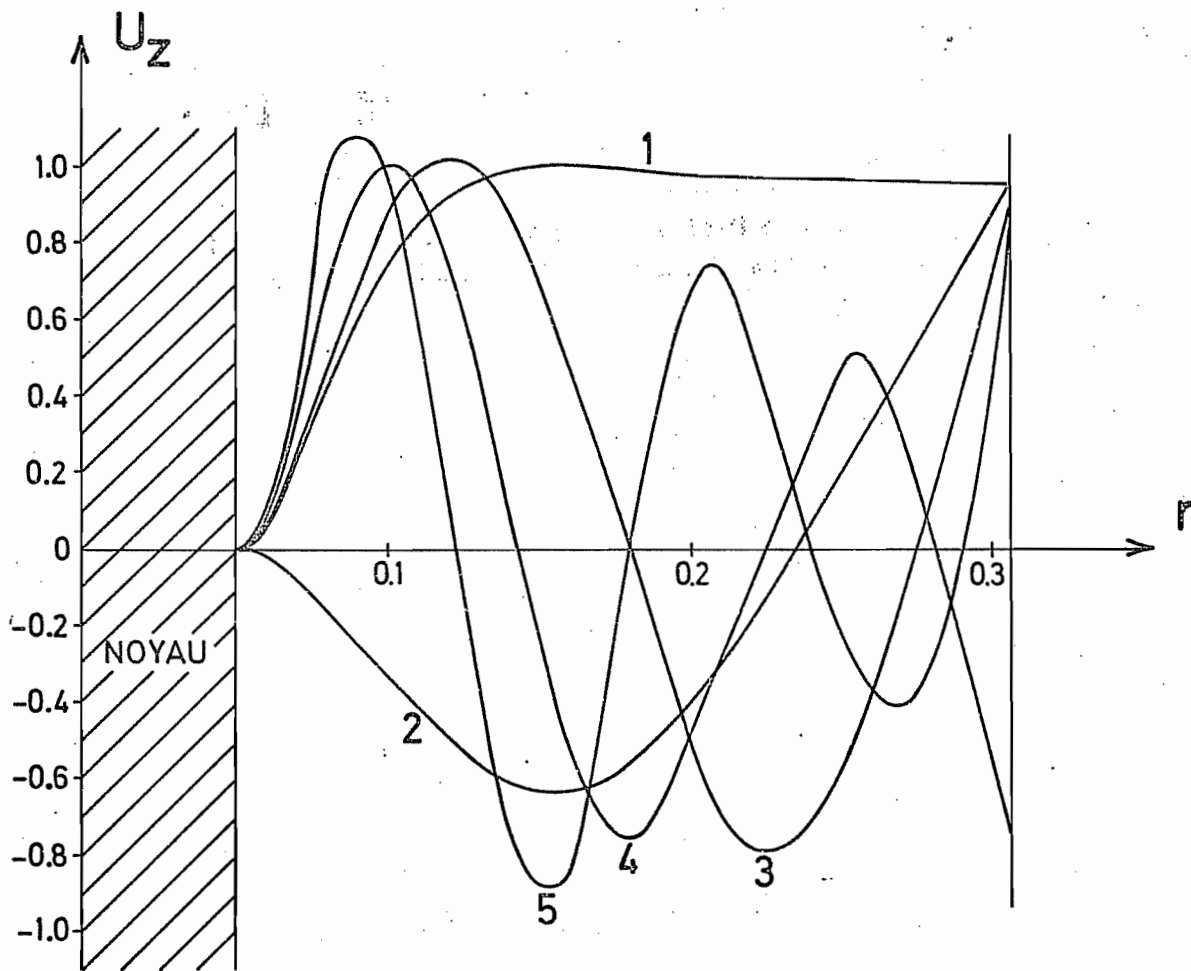


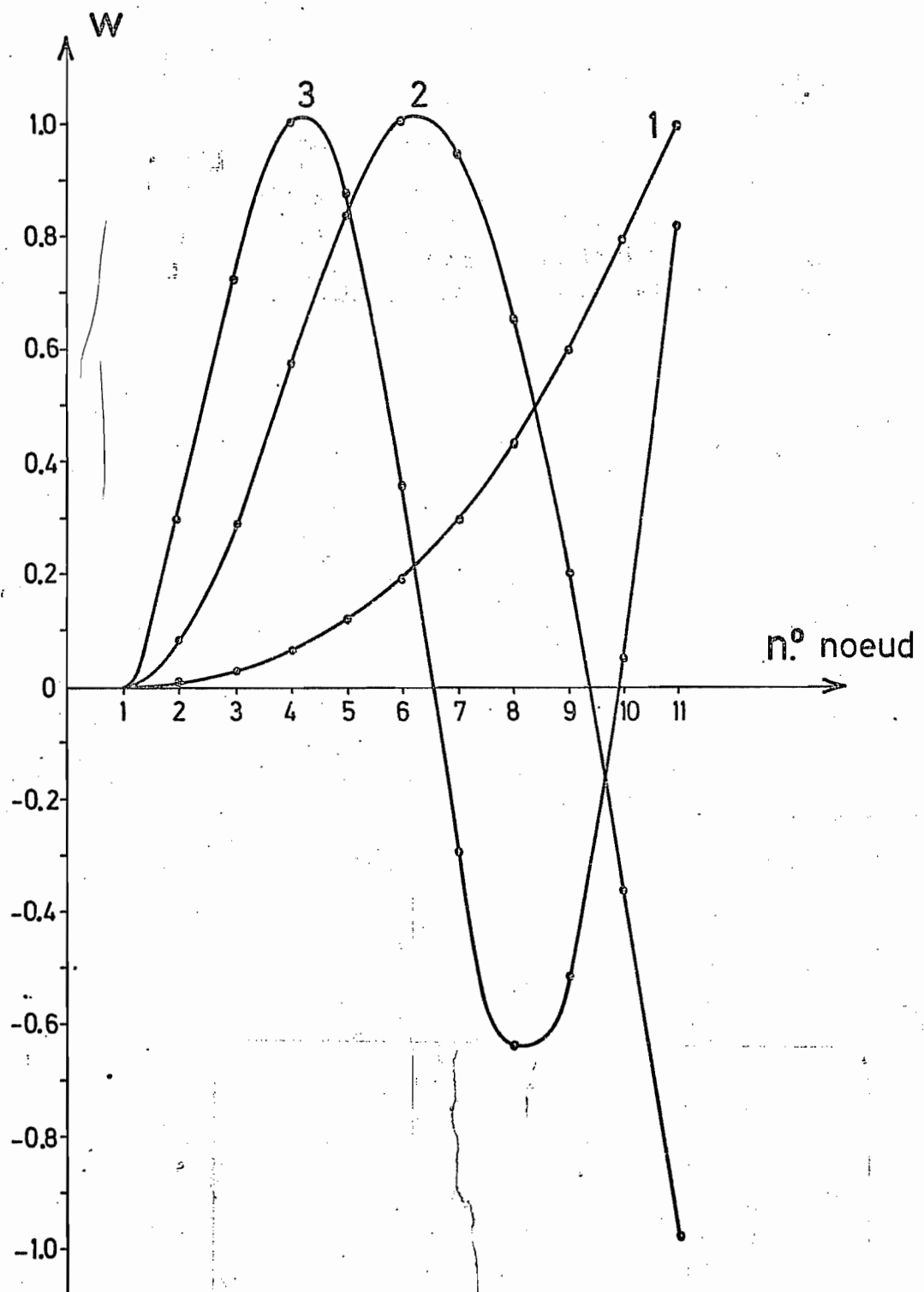
FIG. 3.1



MODE N°	FREQUENCE PROPRE (Hz)
1	258.8
2	866.4
3	951.9
4	1187.4
5	1616.5

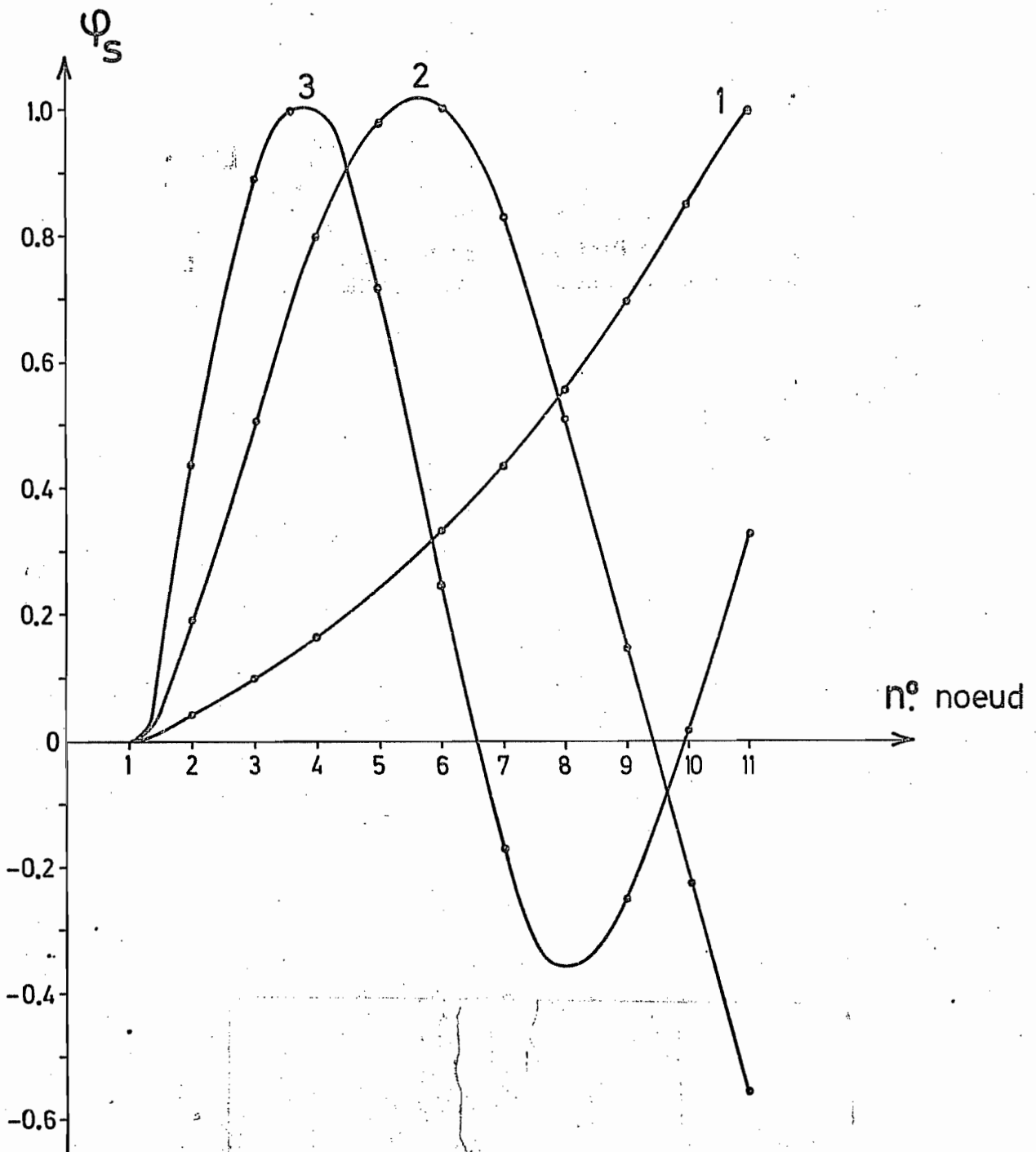
ANTENNE SPHERIQUE - MODES $n=0$

FIG. 3.2



MODES DE PERIODICITE 3 - DEPLACEMENTS NORMAUX

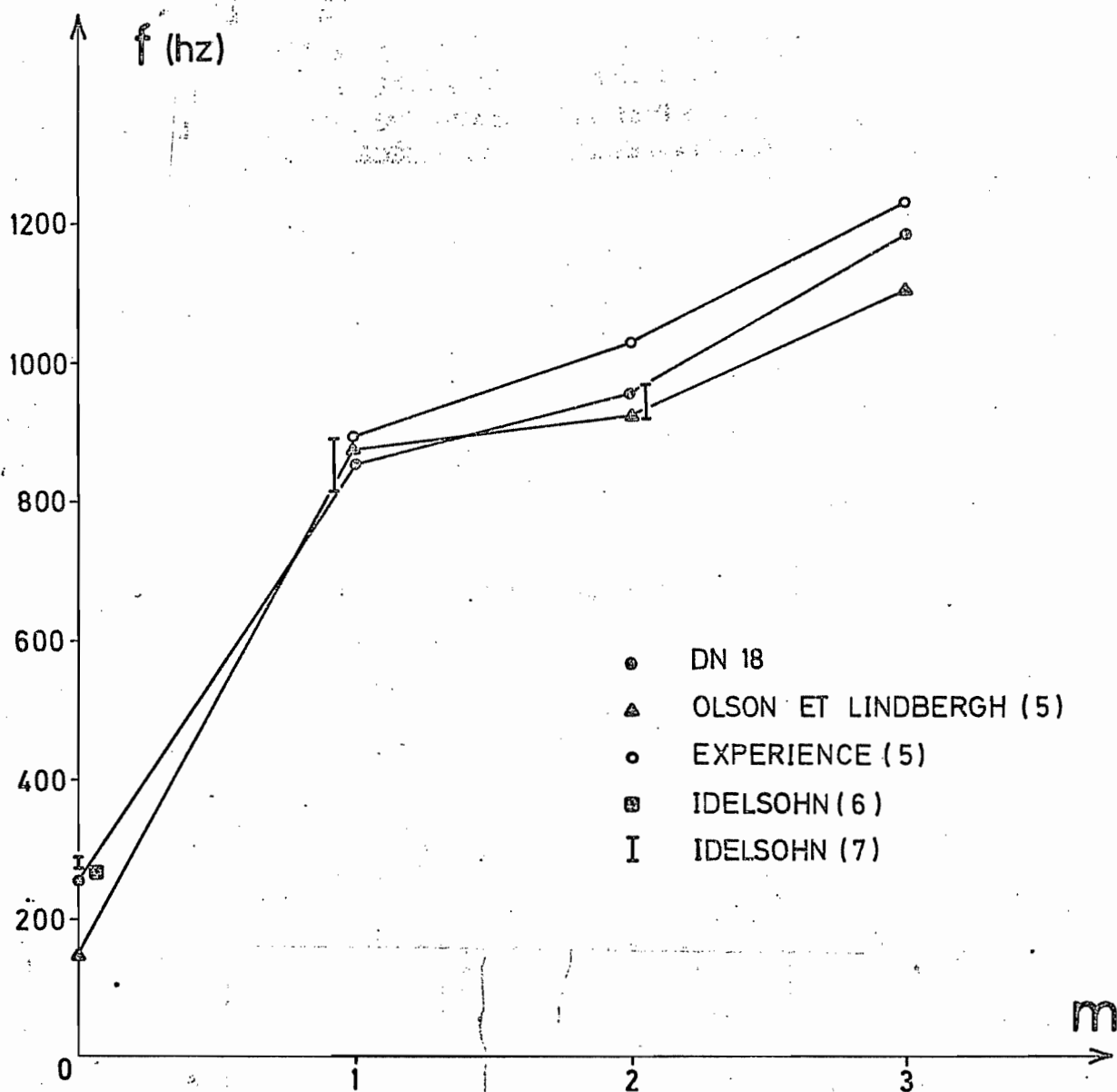
FIG. 3.3



MODES DE PERIODICITE 3

ROTATION φ SELON LA COORDONNEE COURANTE
DE LA SECTION MERIDIENNE

FIG. 3.4



COMPARAISON DES FREQUENCES POUR $N=0$

FIG. 3.5

COMPARAISON DES FREQUENCES POUR $n=1$

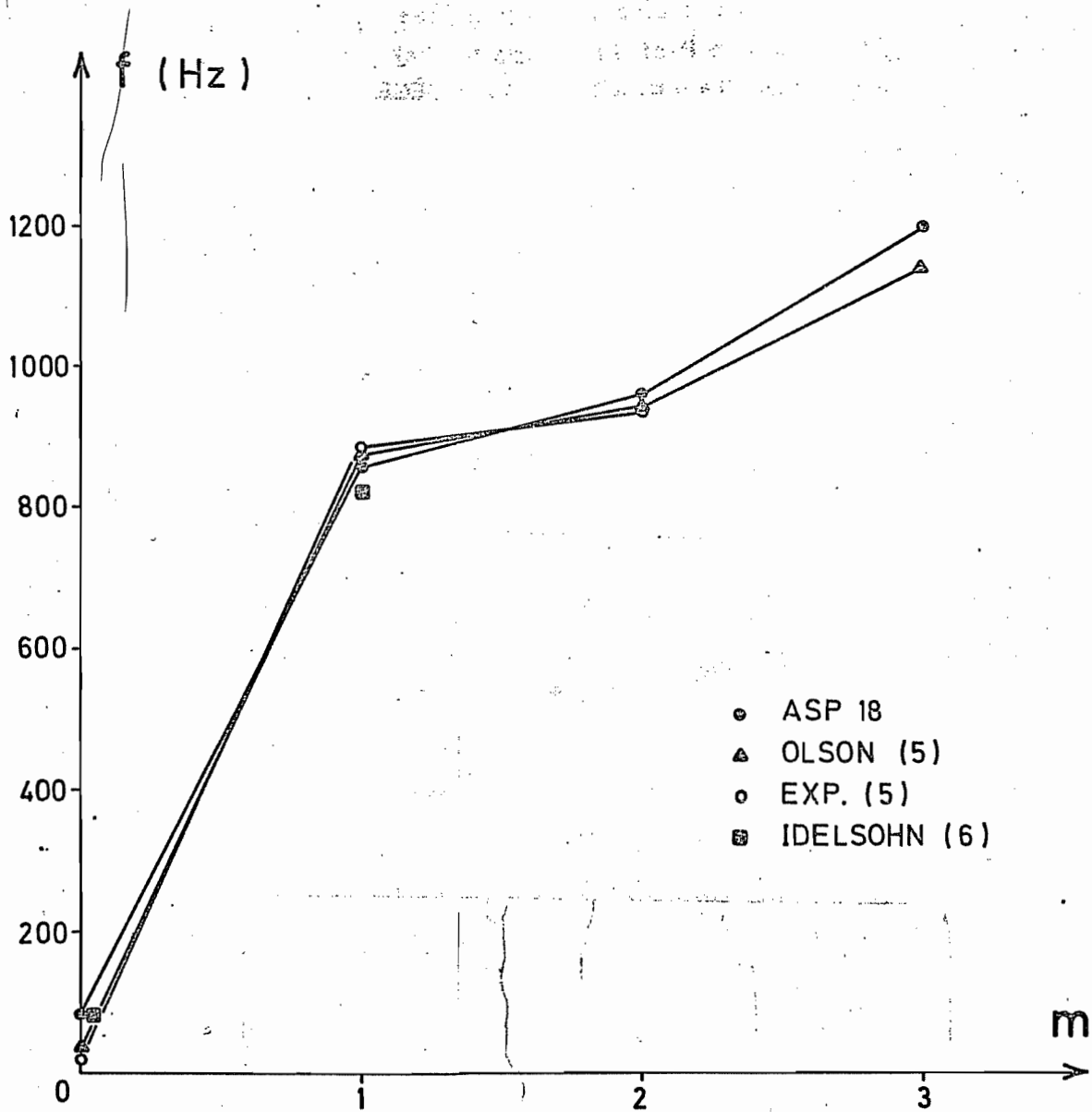
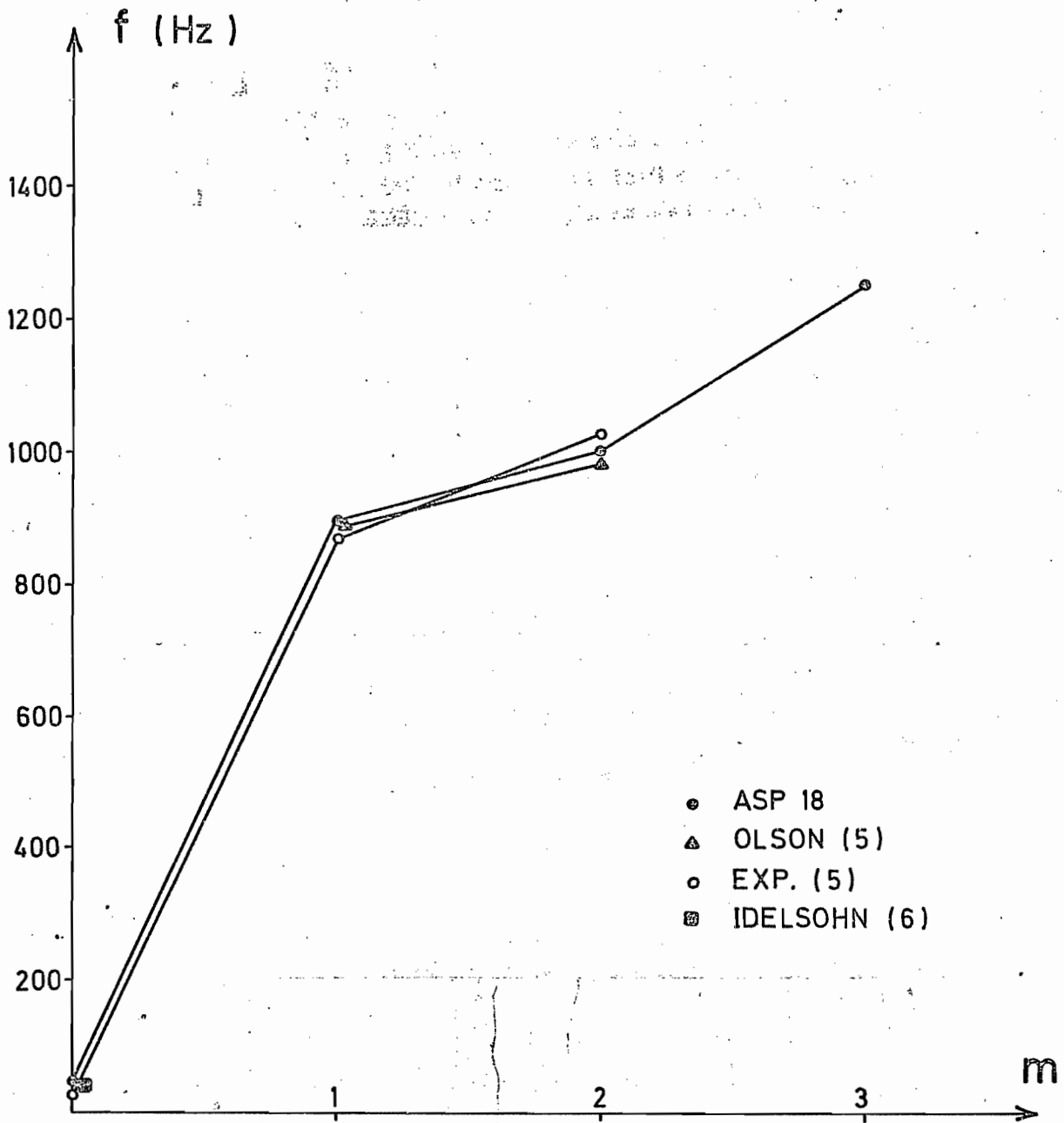


FIG. 3.6



COMPARAISON DES FREQUENCES POUR $n_2=2$

FIG. 3.7

COMPARAISON DES FREQUENCES POUR $n=3$

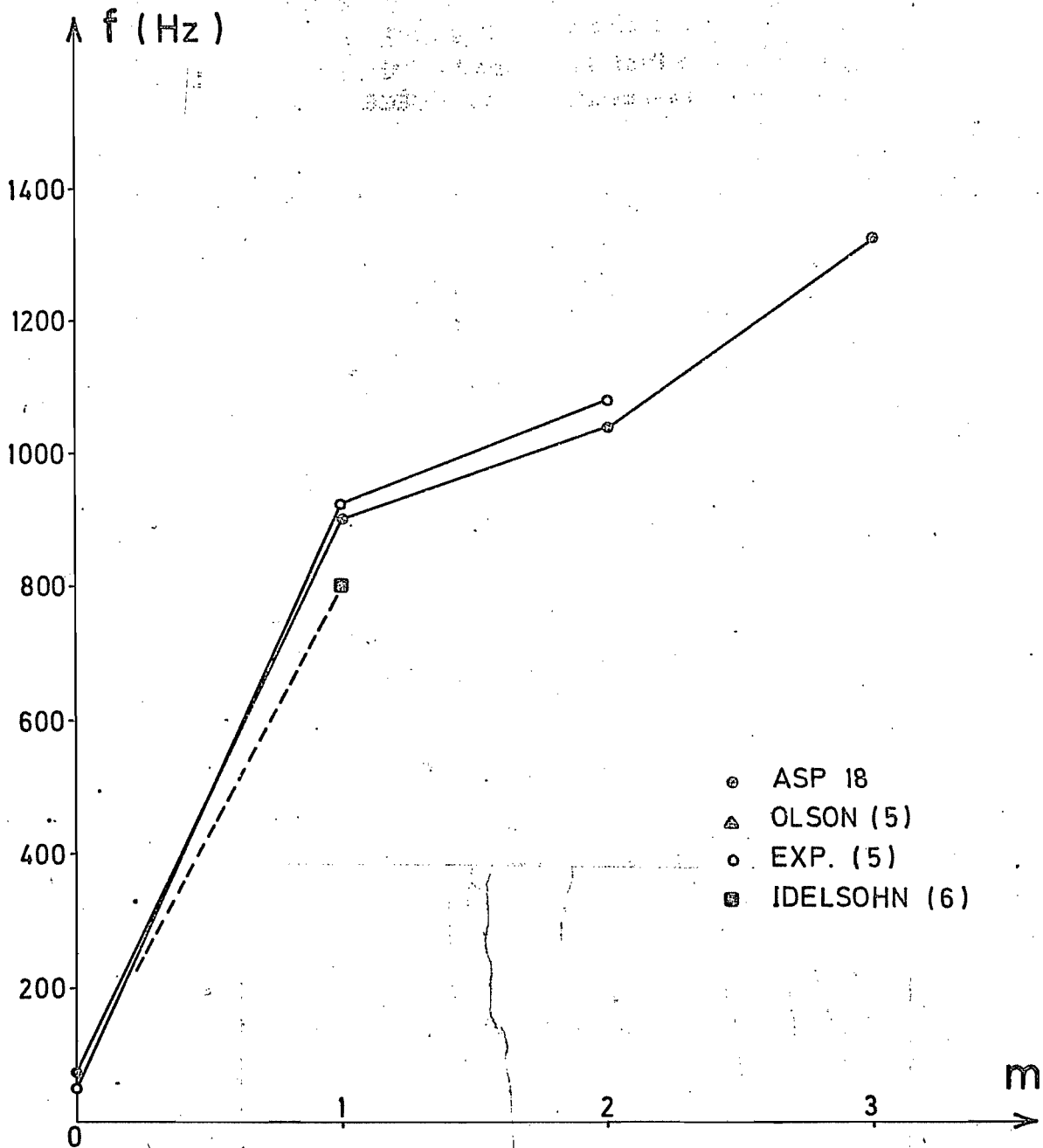
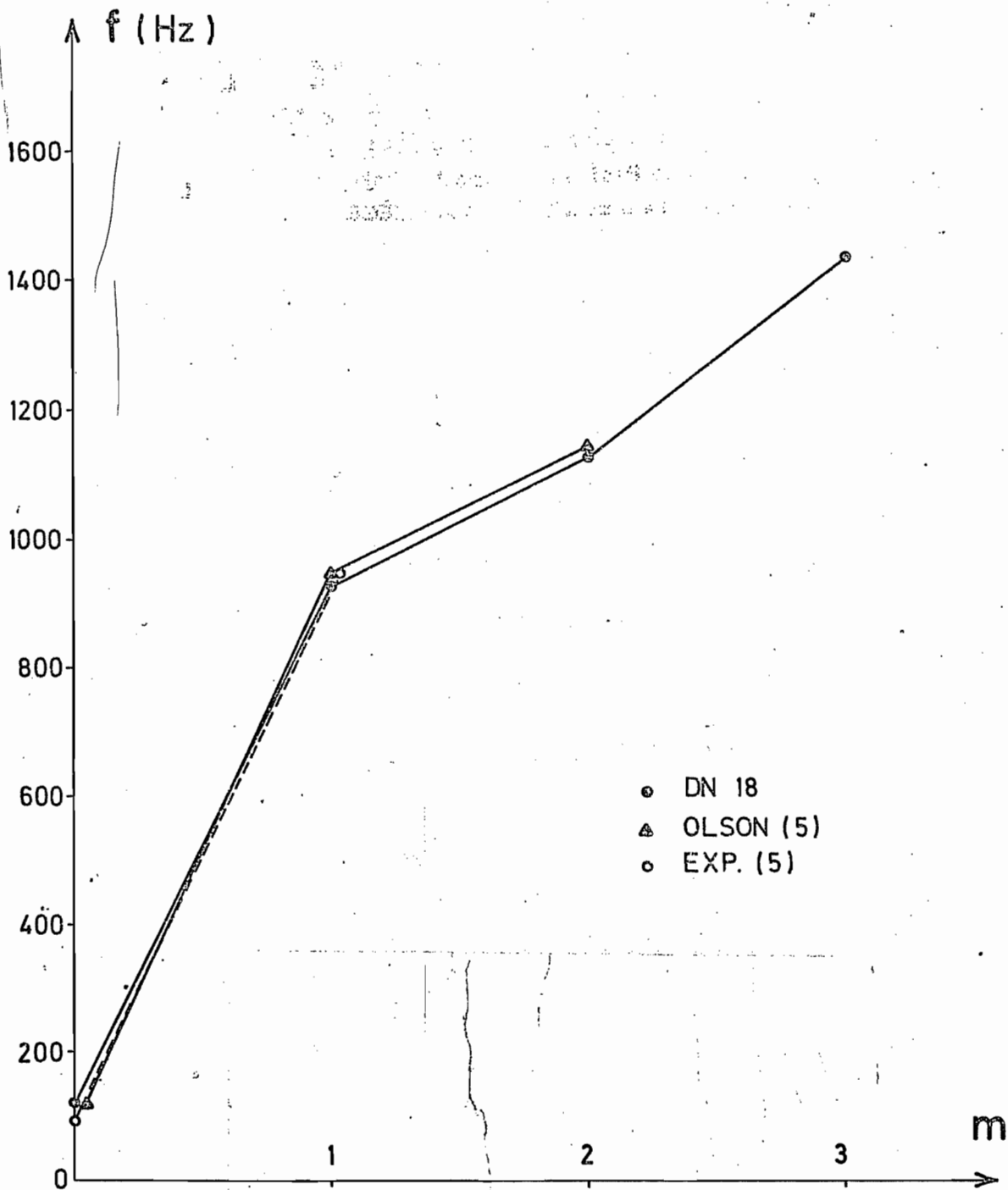
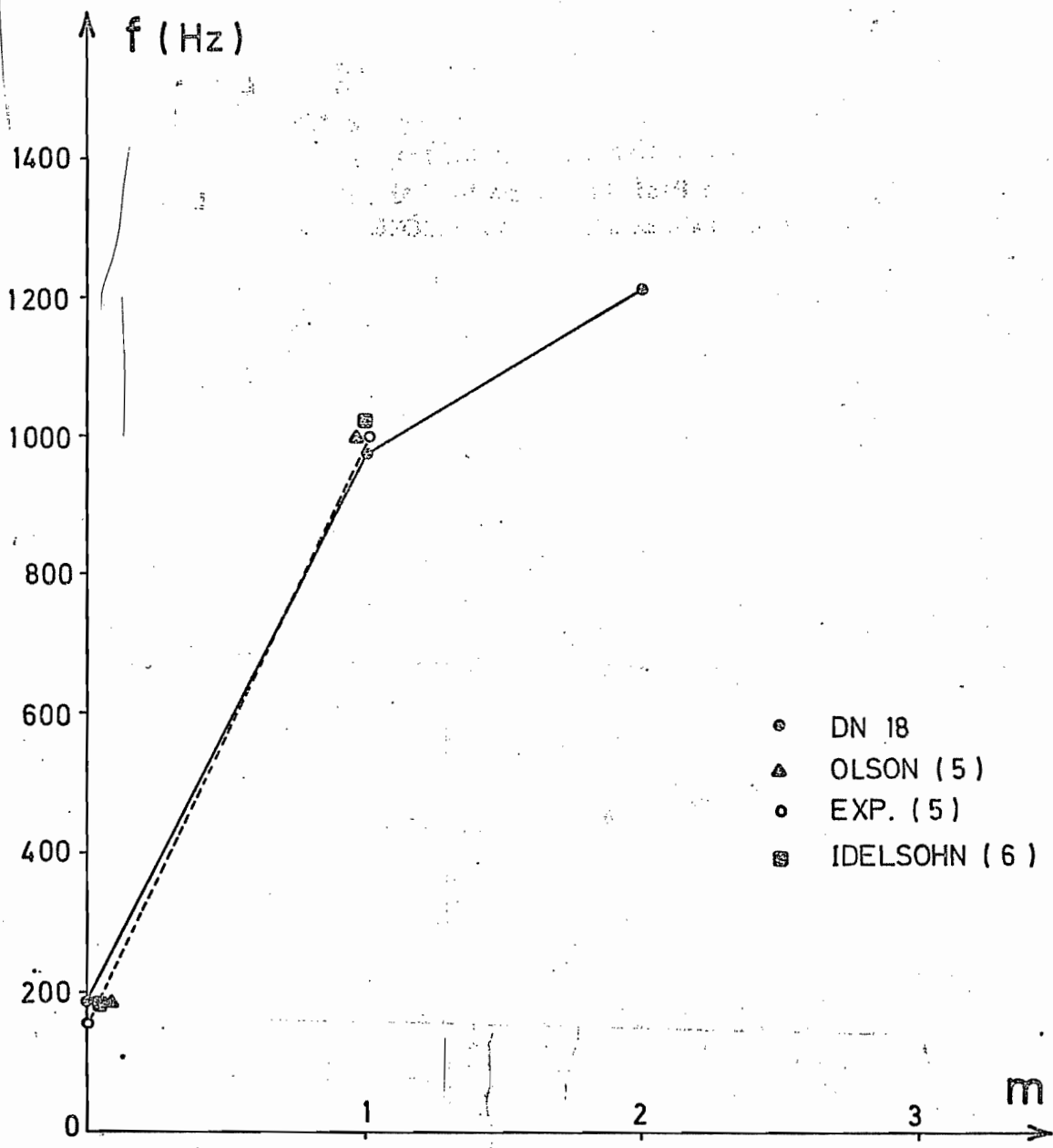


FIG. 3.8



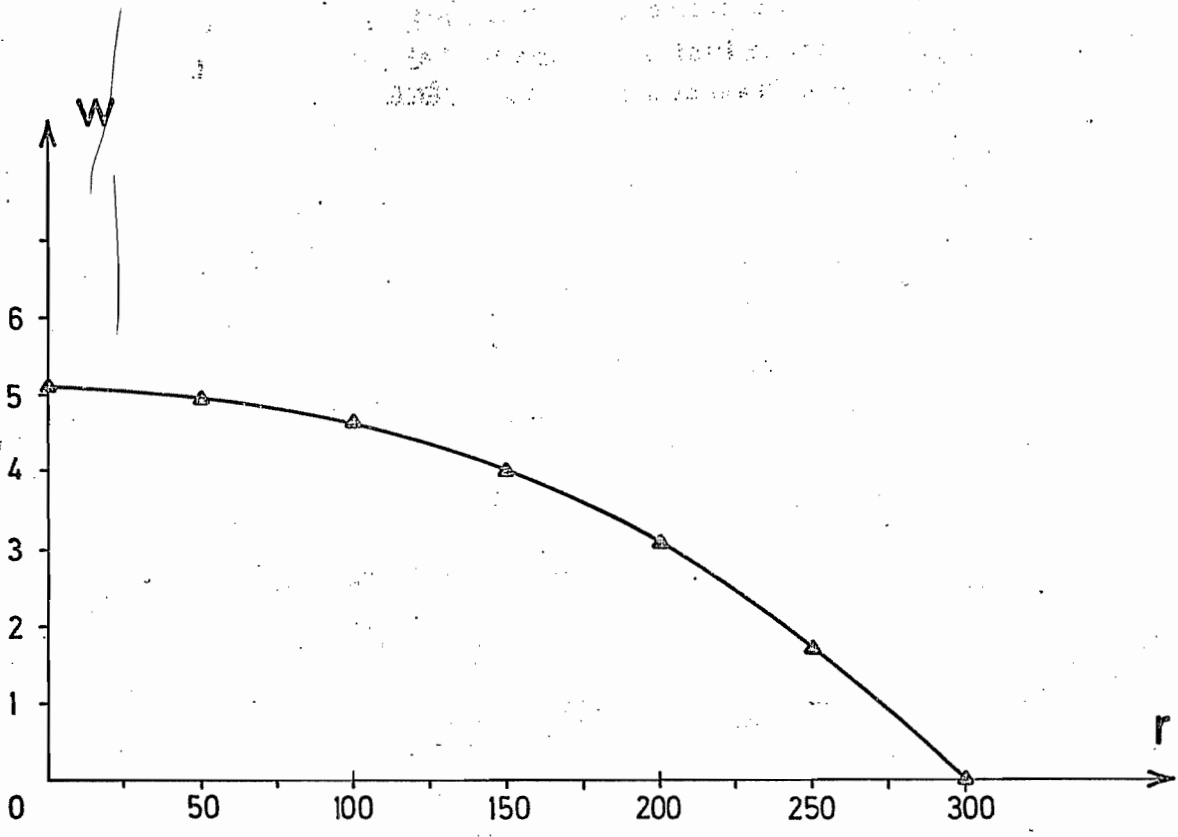
COMPARAISON DES FREQUENCES POUR $n=4$

FIG. 3.9



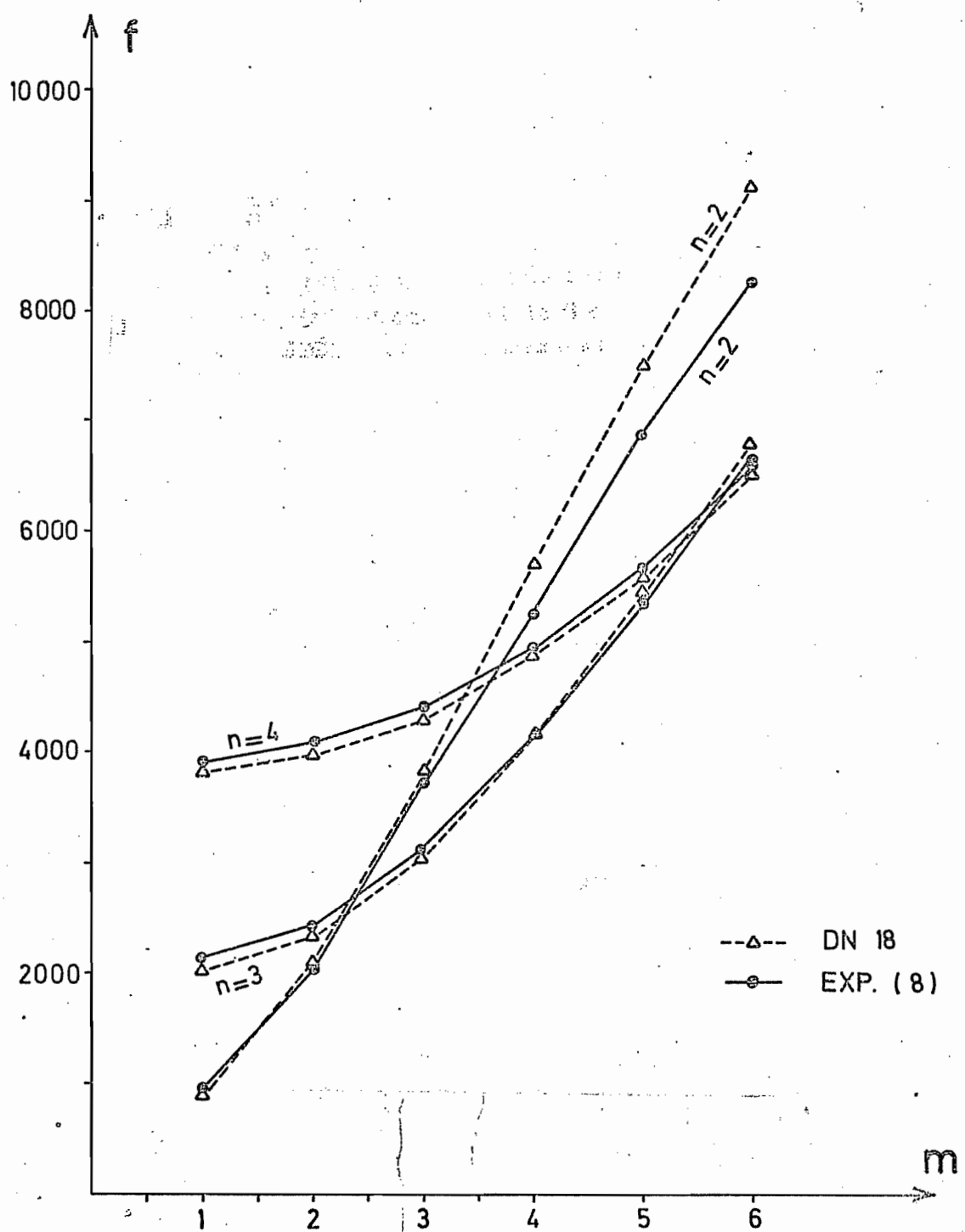
COMPARAISON DES FREQUENCES POUR $n=5$

FIG. 3.10



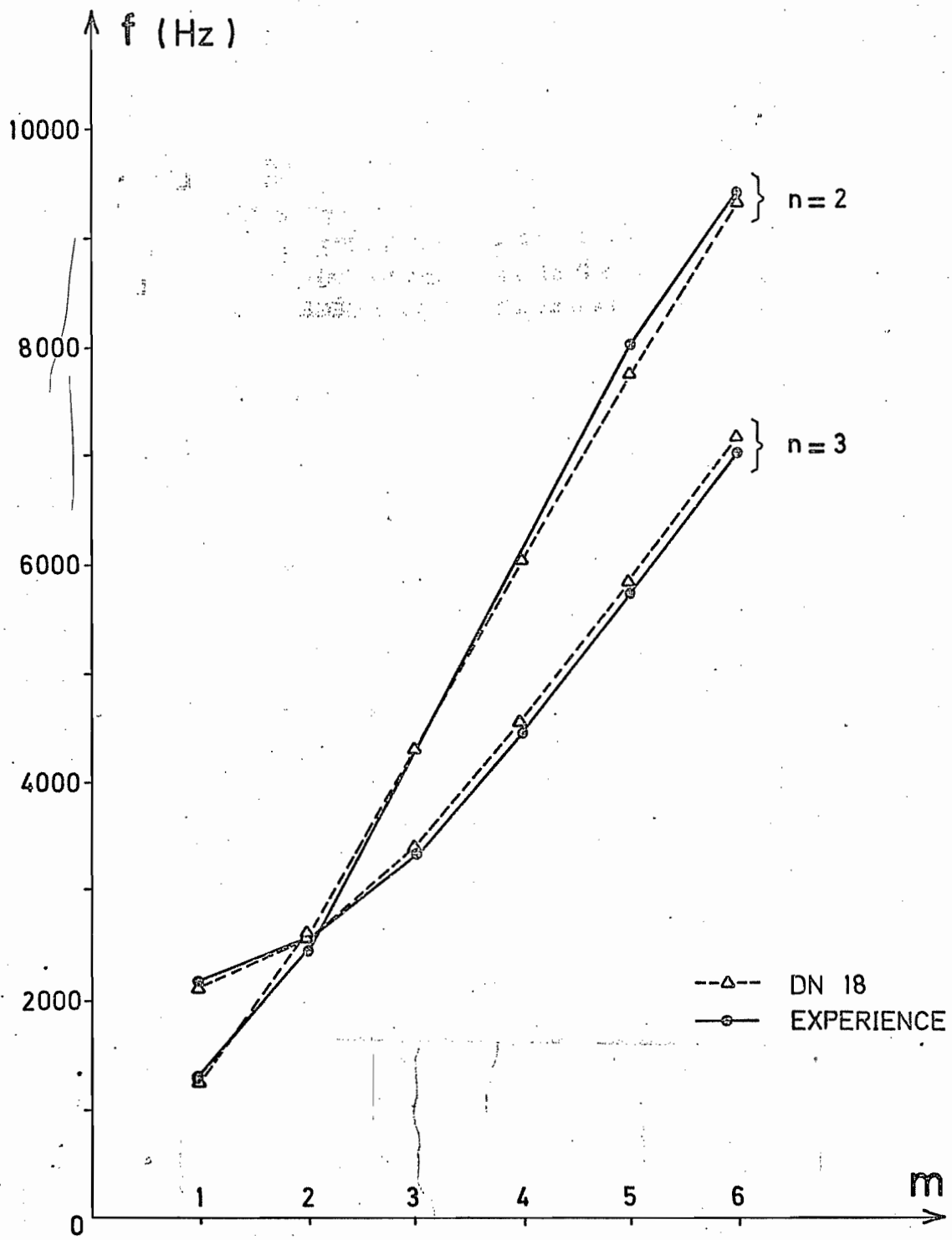
DISPLACEMENT W

FIG. 4.1



CYLINDRE LIBREMENT SUPPORTE AUX EXTREMITES

FIG. 4.2



CYLINDRE BIENCASTRE

FIG. 5.1

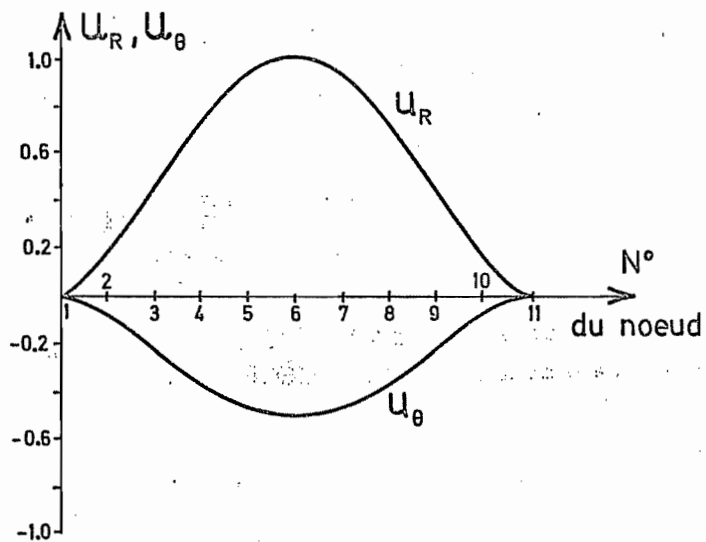


FIG. 5.2

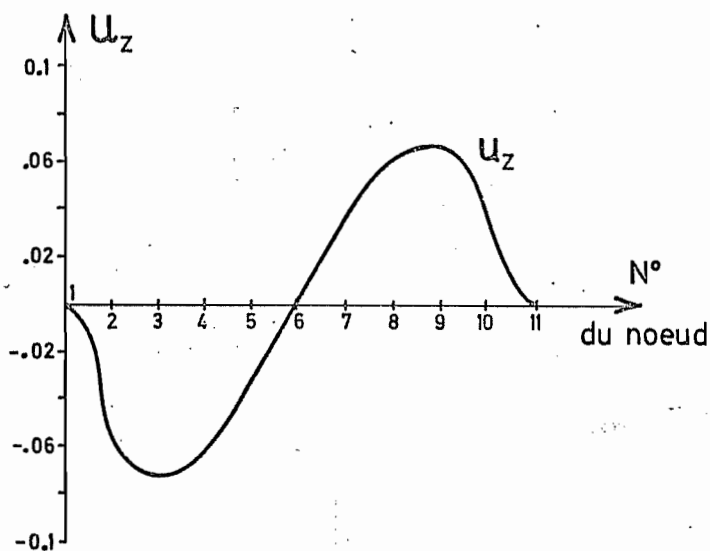


FIG. 5.3

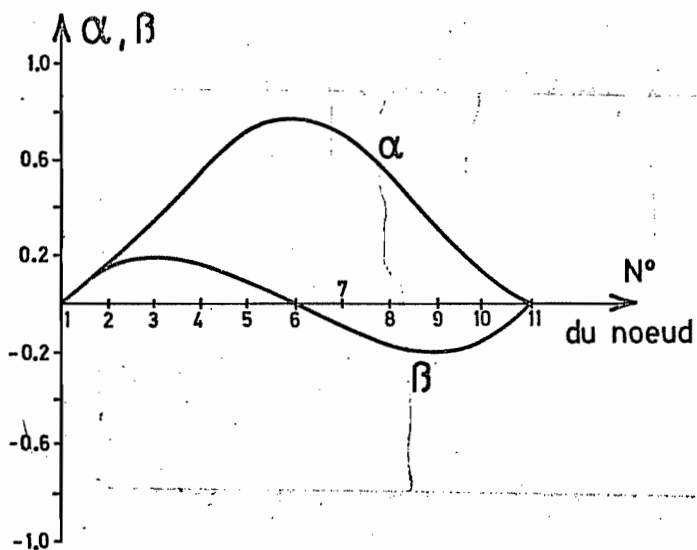
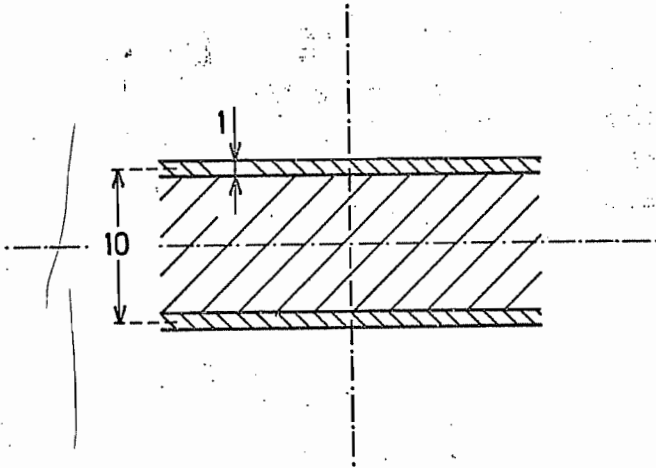
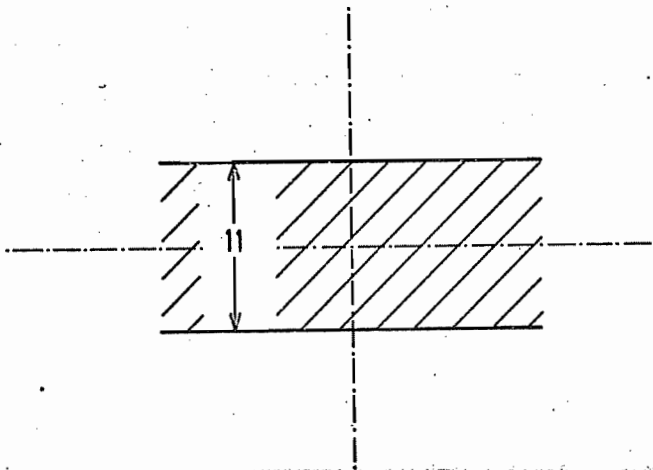


FIG. 5.4

$n=2$ MODE PROPRES n°1 (encasté)



FAUX SANDWICH



PLAQUE

FIG. 6.1