

UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION

PREVISION ANALYTIQUE DES DEFAUTS D'USINAGE EN CHARIOTAGE

J.F. DEBONGNIE

Rapport LMF/D37, novembre 1994

1. INTROUCTION

Le présent rapport présente une approche analytique permettant de prévoir le défaut de cylindricité dû aux efforts d'usinage apparaissant lors du chariotage d'un barreau, pour les trois montages classiques, à savoir, le montage en l'air, le montage entre pointes et le montage mixte.

Le principe de la méthode consiste à déterminer le déplacement radial de la pièce au droit de l'outil en cours d'usinage. Ce déplacement se retrouvera, changé de signe, comme défaut d'usinage.

Pour obtenir une solution analytique, il a fallu idéaliser quelque peu le problème. Nos hypothèses sont:

a) Le barreau est assimilé à une poutre et les déformations dues à l'effort tranchant sont négligées.

b) Tout effet de trilobe dû au mandrin éventuel est négligé.

c) Est également négligé, tout moment de flexion parasite lié à l'entraînement par toc dans le cas du montage entre pointes.

Contrairement à la tradition [1], nous envisageons non seulement l'effet de la force passive, mais également celui de la force d'avance, qui crée un moment proportionnel au diamètre de la pièce.

Les calculs font librement appel aux résultats classiques de la résistance des matériaux, pour lesquels nous nous permettons de renvoyer le lecteur à la littérature [2].

Les résultats sont systématisés par une mise hors dimensions et l'adoption d'une *force équivalente*. Enfin, l'effet de l'approximation dite *usinage léger*, consistant à négliger le supplément de souplesse lié au fait que de la matière a été enlevée, est discuté à la fin du rapport.

2. MONTAGE EN L'AIR

2.1 - Dans le cas d'un montage en l'air, et pour un usinage se faisant dans le sens normal, c'est à dire en partant de l'extrémité du barreau, la partie usinée ne joue aucun rôle sur la flèche (fig. 1). En d'autres termes, si le diamètre initial est d_1 et le diamètre final, d_2 , le rapport

$$\beta = d_2/d_1$$

est sans effet sur le défaut.

Lorsque l'outil se trouve à une distance x du mandrin, la

force passive F_p induit une flèche

$$w_p = \frac{F_p x^3}{3EI} \quad (1)$$

où I est l'inertie calculée à partir du diamètre d_1 .

La force d'avance F_f induit, quant à elle, un moment

$$M_f = F_f \frac{d}{2} \quad (2)$$

où d est le diamètre d'application de cette force (généralement, $d_2 < d < d_1$). A ce moment correspond une flèche

$$w_f = F_f \frac{d}{2} \frac{x^2}{2EI} \quad (3)$$

Le déplacement total vaut donc, en notant $\xi = x/l$,

$$w_t = \frac{l^3}{3EI} \left[F_p \xi^3 - \frac{3}{4} F_f \frac{d}{l} \xi^2 \right] \quad (4)$$

Introduisons le rapport

$$A = \frac{3}{4} \frac{F_f d}{F_p l} \quad (5)$$

exprimant la direction de la charge. Il vient

$$w_t = \frac{F_p l^3}{3EI} (\xi^3 - A \xi^2) \quad (6)$$

Le défaut de cylindricité de mesure par

$$\text{Défaut} = \max_{\xi \in [0,1]} w_t(\xi) - \min_{\xi \in [0,1]} w_t(\xi) \quad (7)$$

Tout revient donc à étudier la variation de la fonction

$$\delta(x) = \xi^3 - A \xi^2 \quad (8)$$

Observons d'abord que cette fonction admet un minimum pour

$$\xi = \xi_{\min} = \frac{2}{3} A$$

pour autant que le dernier membre soit inférieur à l'unité, ce qui a lieu pour $A < 3/2$. Dans ces conditions,

$$\delta_{\min} = -\frac{4}{27} A^3$$

Par ailleurs, la valeur de δ à l'extrémité de la barre est

$$\delta(1) = 1 - A$$

Trois cas peuvent se présenter:

a) $\delta(1) > 0$, ce qui a lieu pour $A < 1$.

Alors,

$$\delta_{\max} = \delta(1) = 1 - A$$

$$\delta_{\min} = -\frac{4}{27} A^3$$

et

$$\text{Défaut} = \frac{F_p \ell^3}{3EI} \left(1 - A + \frac{4}{27} A^3 \right) \quad (9)$$

b) $\delta(1) < 0$ mais $\xi_{\min} < 1$, soit $1 < A < 1,5$

Dans ce cas,

$$\delta_{\max} = \delta(0) = 0$$

$$\delta_{\min} = -\frac{4}{27} A^3$$

et

$$\text{Défaut} = \frac{F_p \ell^3}{3EI} \cdot \frac{4}{27} A^3 \quad (10)$$

c) $\xi_{\min} > 1$, soit $A > 1,5$

Alors,

$$\delta_{\max} = \delta(0) = 0$$

$$\delta_{\min} = \delta(1) = 1 - A$$

et

$$\text{Défaut} = \frac{F_p \ell^3}{3EI} (A - 1) \quad (11)$$

2.2 - Notion de charge équivalente

Nous appellerons *charge équivalente* $F_{\text{éq}}$ la charge radiale fictive qui donne le même défaut que la charge réellement

appliquée. Il est facile de vérifier qu'une charge radiale $F_{\text{éq}}$ conduit au défaut

$$\text{Défaut} = \frac{F_{\text{éq}} \ell^3}{3EI}$$

Il en résulte que

$$F_{\text{éq}} = \frac{3EI}{\ell^3} \cdot \text{Défaut} \quad (12)$$

En remplaçant dans cette relation la valeur du défaut calculée par (9), (10) ou (11), on obtient les expressions suivantes de la charge équivalente:

$$a) A < 1 \dots\dots\dots F_{\text{éq}} = F_p \left(1 - A + \frac{4}{27} A^3 \right) \quad (13)$$

$$b) 1 \leq A \leq 1,5 \dots\dots\dots F_{\text{éq}} = F_p \cdot \frac{4}{27} A^3 \quad (14)$$

$$c) A > 1,5 \dots\dots\dots F_{\text{éq}} = F_p (A - 1) \quad (15)$$

On trouvera en figure 2 un diagramme de $F_{\text{éq}}/F_p$ en fonction du paramètre de direction de la charge A.

3. MONTAGE ENTRE POINTES

3.1 - Etude approchée dans le cas où $d_2 \cong d_1$

Nous présenterons d'abord une étude approchée par une méthode de Rayleigh-Ritz, dans le cas idéal où le coefficient d'enlèvement de matière

$$\beta = d_2/d_1 \quad (16)$$

est égal à l'unité. L'intérêt de cette étude préliminaire, au demeurant très simple, est de donner une indication sur la notion de charge équivalente.

L'approximation considérée se fonde sur l'hypothèse que la déformée peut toujours être convenablement approchée par une sinusoïde:

$$w(x) = A \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (17)$$

A étant un paramètre d'amplitude à déterminer. L'énergie de déformation vaut alors

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI w''^2 dx = \frac{1}{2} \frac{4EI}{\ell^4} \cdot A^2 \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} \frac{4EI}{2\ell^3} A^2 \quad (18)$$

Lorsque l'outil se trouve à l'abscisse x_0 , il impose à la barre une force passive F_p dont l'énergie potentielle est

$$P_p = - F_p w(x_0) = - F_p A \sin \frac{\pi x_0}{\ell}$$

et une force d'avance F_f dont l'énergie potentielle vaut

$$P_f = F_f \frac{d}{2} w'(x_0) = F_f \frac{d}{2} \frac{\pi}{\ell} A \cos \frac{\pi x_0}{\ell}$$

Au total, l'énergie potentielle des charges vaut donc

$$P = P_p + P_f = - A \left(F_p \sin \frac{\pi x_0}{\ell} - \frac{\pi}{2} F_f \frac{d}{\ell} \cos \frac{\pi x_0}{\ell} \right) \quad (19)$$

On détermine la valeur de A en minimisant l'énergie potentielle totale:

$$\frac{d}{dA} (U + P) = 0$$

ce qui mène au résultat suivant:

$$A = \frac{2 \ell^3}{\pi^4 EI} \left(F_p \sin \frac{\pi x_0}{\ell} - \frac{\pi}{2} F_f \frac{d}{\ell} \cos \frac{\pi x_0}{\ell} \right) \quad (20)$$

Au droit de l'outil, la flèche vaut donc

$$w(x_0) = A \sin \frac{\pi x_0}{\ell} = \frac{2 \ell^3}{\pi^4 EI} \left(F_p \sin^2 \frac{\pi x_0}{\ell} - \frac{\pi}{2} F_f \frac{d}{\ell} \sin \frac{\pi x_0}{\ell} \cos \frac{\pi x_0}{\ell} \right)$$

En faisant usage des formules trigonométriques

$$\sin^2 \lambda = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\lambda)$$

$$\sin \lambda \cos \lambda = \frac{1}{2} \sin 2\lambda$$

on peut transformer le résultat précédent en

$$\begin{aligned} w(x_0) &= \frac{\ell^3}{\pi^4 EI} \left(F_p - F_p \cos \frac{2\pi x_0}{\ell} - \frac{\pi}{2} F_f \frac{d}{\ell} \sin \frac{2\pi x_0}{\ell} \right) \\ &= \frac{\ell^3}{\pi^4 EI} \left[F_p - \sqrt{F_p^2 + \left(\frac{\pi}{2} F_f \frac{d}{\ell} \right)^2} \sin \left(\frac{2\pi x_0}{\ell} - \psi \right) \right] \quad (21) \end{aligned}$$

où ψ est une phase qui ne nous intéresse pas directement. Il est clair que le défaut est donné par

$$\text{Défaut} = \max_{x_0} w(x_0) - \min_{x_0} x(x_0) = \frac{2\ell^3}{\pi^4 EI} \sqrt{F_p^2 + \left(\frac{\pi}{2} F_f \frac{d}{\ell}\right)^2} \quad (22)$$

Dans le cas où $F_f = 0$, on obtient

$$\text{Défaut} = \frac{2 F_p \ell^3}{\pi^4 EI} = \frac{F_p \ell^3}{48,7 EI}$$

ce qui constitue une bonne approximation (48,7 au lieu de 48 au dénominateur). Dans le cas général, on se ramène à

$$\text{Défaut} = \frac{F_{\text{éq}} \ell^3}{48,7 EI} \quad (23)$$

en posant

$$F_{\text{éq}} = [F_p^2 + \left(\frac{\pi}{2} F_f \frac{d}{\ell}\right)^2]^{1/2} \quad (24)$$

On constate donc l'existence d'une charge équivalente approchée très simple. Ce résultat nous servira de guide dans l'étude exacte qui suit.

3.2 - Effet de la force passive

Revenant au problème exact, avec $\beta \neq 1$, la situation est schématisée en figure 3. Si ℓ est la longueur entre pointes, les réactions valent

$$R_1 = F_p \frac{\ell_1}{\ell} \quad , \quad R_2 = F_p \frac{\ell_2}{\ell}$$

La manière la plus simple de résoudre le problème consiste à calculer d'abord les déplacements en A et B sous l'effet des réactions, en supposant provisoirement la pièce encastree au droit de l'outil; puis à soustraire le déplacement rigide qui interpole ces déplacements. On a

$$a) \text{ Encastree en C : } w_1^* = \frac{R_1 \ell_1^3}{3EI_1} \quad w_2^* = \frac{R_2 \ell_2^3}{3EI_2}$$

$$b) \text{ Déplacement rigide : } w^{**} = w_1^* \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + w_2^* \frac{x}{\ell}$$

$$c) \text{ Déplacement résultant: } w = w^* + w^{**}$$

$$w_C = w_C^* - w_C^{**} = -w_1^* \frac{\ell_2}{\ell} - w_2^* \frac{\ell_1}{\ell}$$

car $w_C^* = 0$. On a donc

$$w_C = -\frac{R_1 \ell_1^3 \ell_2}{3EI_1 \ell} - \frac{R_2 \ell_2^3 \ell_1}{3EI_2 \ell} = F_p \left(\frac{\ell_1^3 \ell_2^2}{3EI_1 \ell^2} + \frac{\ell_2^3 \ell_1^2}{3EI_2 \ell^2} \right)$$

Nous poserons, pour nous ramener aux paramètres fondamentaux,

$$I_1 = I \quad ; \quad I_2 = \beta^4 I \quad (\beta = d_2/d_1) \quad (25)$$

$$\ell_1 = \xi \ell \quad ; \quad \ell_2 = (1 - \xi) \ell \quad (26)$$

Dès lors, en notant w_p le déplacement sous l'outil dû à la force passive, on obtient

$$w_p(\xi) = \frac{F_p \ell^3}{3EI} \cdot \xi^2 (1-\xi)^2 \cdot \left[\xi + \frac{1-\xi}{\beta^4} \right] \quad (27)$$

On vérifie aisément que pour $\beta = 1$, ce déplacement a un maximum en $\xi = 1/2$; la valeur de ce maximum est

$$w_{Pmax} |_{\beta=1} = \frac{F_p \ell^3}{48EI} \quad (28)$$

3.3 - Effet de la force d'avance

La force d'avance F_f induit (fig. 4) un moment concentré

$$M_f = F_f d/2 \quad (29)$$

où d représente le diamètre auquel s'applique ladite force. Les réactions correspondantes sont

$$R_1 = M_f/\ell \quad ; \quad R_2 = M_f/\ell$$

Par la même méthode que pour la force passive, on obtient

$$w_C = -\frac{R_1 \ell_1^3 \ell_2}{3EI_1 \ell} - \frac{R_2 \ell_2^3 \ell_1}{3EI_2 \ell} = \frac{M_f \ell_1^3 \ell_2}{3EI_1 \ell^2} - \frac{M_f \ell_1 \ell_2^3}{3EI_2 \ell^2}$$

En tenant compte des définitions (10) et (11),

$$w_C = \frac{M_f \ell^2}{3EI} \xi (1-\xi) \left[\xi^2 - \frac{(1-\xi)^2}{\beta^4} \right] \quad (30)$$

Pour $\beta = 0$, ce déplacement a un minimum et un maximum situés aux points

$$\xi = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$$

La valeur absolue commune de ces extrema est

$$w_{f\max} = -w_{f\min} = \frac{F_f d l^2}{62,35}$$

ce qui signifie que pour $\beta = 0$ et une force passive nulle, le défaut est donné par

$$w_{f\max} - w_{f\min} = F_f \frac{d}{l} \frac{l^3}{31,18EI} = 1,5396 F_f \frac{d}{l} \cdot \frac{l^3}{48EI} \quad (31)$$

3.4 - Charge équivalente

Nous définirons une charge de référence $F_{\text{éq}}$ de la forme

$$F_{\text{éq}} = \sqrt{(AF_p)^2 + (BF_f \frac{d}{l})^2}$$

choisie de telle sorte que dans le cas $\beta = 1$, on ait, aussi bien pour $F_p = 0$ que pour $F_f = 0$,

$$\text{Défaut} = w_{\max} - w_{\min} = \frac{F_{\text{éq}} l^3}{48EI}$$

En vertu des résultats précédents, cette double condition implique

$$A = 1 \quad ; \quad B = 1,5396$$

Notre charge équivalente sera donc

$$F_{\text{éq}} = \sqrt{F_p^2 + (1,5396 F_f \frac{d}{l})^2} \quad (32)$$

On constate qu'elle diffère peu de l'expression (24), puisque

$$\pi/2 = 1,571\dots$$

Dans le cas général, le défaut est donné par

$$\text{Défaut} = (w_p + w_f)_{\max} - (w_p + w_f)_{\min} \quad (33)$$

Nous le rapporterons à la grandeur de référence

$$\frac{F_{\text{éq}} l^3}{48EI}$$

ce qui conduit à la notion de *défaut normalisé*

$$\Delta = \frac{48EI \cdot \text{Défaut}}{F_{\text{éq}} \ell^3} \quad (34)$$

Cette grandeur peut dépendre du coefficient d'enlèvement de matière β et du *coefficient de direction de la charge*

$$\gamma = \frac{1,5396 F_f \frac{d}{\ell}}{F_{\text{éq}}} \quad (35)$$

Pratiquement, on calcule le défaut en écrivant

$$\Delta = \max \delta - \min \delta \quad (36)$$

avec

$$\delta = \delta_p + \delta_f \quad (37)$$

et

$$\delta_p = 16 \sqrt{1 - \gamma^2} \xi^2 (1 - \xi)^2 \left[\xi + \frac{1 - \xi}{\beta^4} \right] \quad (38)$$

$$\delta_f = \frac{8\gamma}{1,5396} \xi (1 - \xi) \left[\xi^2 - \frac{(1 - \xi)^2}{\beta^4} \right] \quad (39)$$

Ces calculs ont été effectués numériquement pour γ variant de 0 à 1 et pour quelques valeurs de β . Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau 1 et représentés en figure 5. On constate que pour $\beta = 1$, le défaut ne dépend pratiquement pas de γ , à charge équivalente donnée. Cette propriété se détériore lorsque β diminue. Néanmoins, on a toujours

$$\Delta(\beta, \gamma) \leq \Delta(\beta, 0) \quad (40)$$

et on peut écrire sans grande erreur (2% pour $\beta \geq 0,8$)

$$\Delta(\beta, 0) \cong \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\beta^4} \right) \quad (41)$$

formule que l'on obtient aisément en supposant que la forme du déplacement ne varie pas. Une approximation un peu meilleure, toujours pour le même intervalle, est

$$\Delta(\beta, 0) \cong 0,4704 + \frac{0,5258}{\beta^4} \quad (41 \text{ bis})$$

On peut donc, pour se faire une première idée, utiliser la *formule-enveloppe*

$$\Delta \leq \left(0,4704 + \frac{0,5258}{\beta^4} \right) \frac{F_{\text{éq}} \ell^3}{48EI} \quad (42)$$

qui dispense de tout calcul supplémentaire si le second membre est inférieur au défaut admissible.

4. MONTAGE MIXTE

Le montage mixte, hyperstatique, est un peu plus lourd à traiter que les précédents. Le choix le plus simple de l'inconnue hyperstatique semble être celui de la réaction à la contre-pointe. La structure isostatique de référence est donc une poutre console.

4.1 - Effet de la force passive

Dans la structure isostatique de référence, on peut faire le bilan suivant, en appelant w le déplacement sous la charge, ϕ la rotation au même point, et u le déplacement à l'extrémité (voir figure 6):

$$\text{Effet de } F_p \dots \dots w_p = \frac{F_p l_1^3}{3EI_1}$$

$$\phi_p = \frac{F_p l_1^2}{2EI_1}$$

$$u_p = w_p + \phi_p l_2 = \frac{F_p}{EI_1} \left(\frac{l_1^3}{3} + \frac{l_1^2 l_2}{2} \right)$$

Nous adopterons immédiatement les notations définies en (25) et (26), ce qui donne

$$w_p = \frac{F_p l^3}{3EI} \xi^3$$

$$\phi_p = \frac{F_p l^3}{3EI} \xi^2$$

$$u_p = \frac{F_p l^3}{3EI} \xi^2 \left[\xi + \frac{3}{2} (1-\xi) \right]$$

Effet de la réaction d'extrémité R

Le tronçon non encore usiné est soumis à l'effort tranchant R et un moment de flexion Rl_2 (voir figure 7). On a donc

$$w_R = \frac{Rl_1^3}{3EI_1} + \frac{Rl_2^3}{2EI_1} = \frac{Rl^3}{3EI} \left[\frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2(1-\xi)}{2} \right]$$

$$\phi_R = \frac{Rl_1^2}{2EI_1} + \frac{Rl_2l_1}{EI_1} = \frac{Rl^2}{EI} \left[\frac{\xi^2}{2} + \xi(1-\xi) \right]$$

$$\begin{aligned} u_R &= w_R + \phi_R l_2 + \frac{Rl_2^3}{3EI_2} \\ &= \frac{Rl^3}{EI} \left[\frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2(1-\xi)}{2} + \frac{\xi^2(1-\xi)}{2} + \xi(1-\xi)^2 + \frac{(1-\xi)^3}{3\beta^4} \right] \\ &= \frac{Rl^3}{3EI} \left[\xi^3 + 3\xi^2(1-\xi) + 3\xi(1-\xi)^2 + (1-\xi)^3 - (1-\xi)^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^4}\right) \right] \\ &= \frac{Rl^3}{3EI} \left[1 - (1-\xi)^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^4}\right) \right] \end{aligned}$$

Condition de nullité du déplacement d'extrémité

$$0 = u = u_p + u_R = \frac{F_p l^3}{3EI} \xi^2 \left[\xi + \frac{3}{2}(1-\xi) \right] + \frac{Rl^3}{3EI} \left[1 - (1-\xi)^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^4}\right) \right]$$

ce qui donne

$$R = -F_p \frac{\xi^2 \left[\xi + \frac{3}{2}(1-\xi) \right]}{1 - (1-\xi)^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^4}\right)} \quad (43)$$

Valeur du déplacement au droit de l'outil

$$\begin{aligned} w &= w_p + w_R = \frac{F_p l^3}{3EI} \xi^3 + \frac{Rl^3}{3EI} \left[\frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2(1-\xi)}{2} \right] \\ &= \frac{F_p l^3}{3EI} \xi^3 + \frac{Rl^3}{3EI} \xi^2 \left[\xi + \frac{3}{2}(1-\xi) \right] \end{aligned}$$

soit, en tenant compte de la valeur (43) de la réaction,

$$\begin{aligned} w &= \frac{F_p l^3}{3EI} \left\{ \xi^3 - \frac{\xi^4 \left[\xi + \frac{3}{2}(1-\xi) \right]^2}{1 - (1-\xi)^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^4}\right)} \right\} \\ &= \frac{F_p l^3}{3EI} \xi^3 \left\{ 1 - \frac{\xi \left[\xi + \frac{3}{2}(1-\xi) \right]^2}{1 - (1-\xi)^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^4}\right)} \right\} \quad (44) \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $\beta = 1$, on peut écrire

$$\frac{3EIw}{F_P l^3} = \xi^3 \left[1 - \xi \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\xi \right)^2 \right] = \xi^3 - \frac{9}{4} \xi^4 + \frac{3}{2} \xi^5 - \frac{1}{4} \xi^6$$

La dérivée de cette expression est donnée par

$$\text{Dérivée} = 3\xi^2 - 9\xi^3 + \frac{15}{2} \xi^4 - \frac{3}{2} \xi^5 = \xi^2 \left(3 - 9\xi + \frac{15}{2} \xi^2 - \frac{3}{2} \xi^3 \right)$$

Elle s'annule en $\xi = 0$ ainsi qu'au seul zéro de la parenthèse contenu entre 0 et 1, que l'on peut obtenir numériquement. On trouve

$$\xi_0 = 0,5857864$$

En ce point, on obtient

$$\frac{3EIw(\xi_0)}{F_P l^3} = 0,0943725$$

soit

$$w(\xi_0) = \frac{F_P l^3}{101,9116EI} \quad (45)$$

4.2 - Effet de la force d'avance

Nous suivrons une démarche identique. La figure 8 montre la mise en charge, avec $M = F_f d/2$.

$$\text{Effet de } M \dots w_M = -\frac{Ml_1^2}{2EI_1} = -\frac{Ml^2}{2EI} \xi^2$$

$$\phi_M = -\frac{Ml_1}{EI_1} = -\frac{Ml}{EI} \xi$$

$$u_M = w_M + \phi_M l_2 = -\frac{Ml^2}{EI} [\xi^2 + \xi(1-\xi)] = -\frac{Ml^2}{EI} \xi \left(1 - \frac{\xi}{2} \right)$$

Effet de R : comme ci-dessus,

$$w_R = \frac{Rl^3}{EI} \left[\frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2(1-\xi)}{2} \right] = \frac{Rl^3}{EI} \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{6} \right) = \frac{Rl^3}{2EI} \xi^2 \left(1 - \frac{\xi}{3} \right)$$

$$u_R = \frac{Rl^3}{3EI} \left[1 - (1-\xi)^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^4} \right) \right]$$

Condition de nullité du déplacement d'extrémité

$$0 = u = u_M + u_R = -\frac{Ml^2}{EI} \xi \left(1 - \frac{\xi}{2} \right) + \frac{Rl^3}{3EI} \left[1 - (1-\xi)^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^4} \right) \right]$$

ce qui donne

$$R = \frac{M}{\ell} \frac{3\xi(1 - \frac{\xi}{2})}{1 - (1-\xi)^3(1 - \frac{1}{\beta^4})} \quad (46)$$

Valeur du déplacement au droit de l'outil

$$\begin{aligned} w = w_M + w_R &= -\frac{M\ell^2}{2EI} \xi^2 + \frac{R\ell^3}{2EI} \xi^2(1 - \frac{\xi}{3}) \\ &= \frac{M\ell^2}{2EI} \xi^2 \left[-1 + \frac{3\xi(1 - \frac{\xi}{2})(1 - \frac{\xi}{3})}{1 - (1-\xi)^3(1 - \frac{1}{\beta^4})} \right] \end{aligned} \quad (47)$$

En explicitant la valeur de M, on obtient

$$w = \frac{F_f d \ell^2}{4EI} \xi^2 \left[-1 + \frac{3\xi(1 - \frac{\xi}{2})(1 - \frac{\xi}{3})}{1 - (1-\xi)^3(1 - \frac{1}{\beta^4})} \right] \quad (48)$$

Dans le cas particulier où $\beta = 1$, on peut vérifier sans peine que ce déplacement a une variation

$$w_{\max} - w_{\min} = 1,676 F_f \frac{d}{\ell} \cdot \frac{\ell^3}{101,9116EI} \quad (49)$$

4.3 - Force équivalente

Nous *définirons* la force équivalente de la même façon que dans le cas du montage entre pointes, ce qui conduit à l'expression

$$F_{\text{éq}} = \sqrt{F_p^2 + (1,676 F_f \frac{d}{\ell})^2} \quad (50)$$

Le *paramètre de direction de la charge* sera ici

$$\gamma = \frac{1,676 F_f \frac{d}{\ell}}{F_{\text{éq}}} \quad (51)$$

Ces définitions impliquent, par (45) et (49) que pour $\beta = 1$, la variation du déplacement vaut

$$w_{\max} - w_{\min} = \frac{F_{\text{éq}} \ell^3}{101,9116EI} \quad \text{pour } \gamma = 0 \text{ et } \gamma = 1.$$

Dans le cas général, nous définirons le *déplacement normalisé*

$$\delta = \frac{101,9116EI}{F_{\text{éq}} l^3} w = \delta_p + \delta_f \quad (52)$$

avec

$$\delta_p = 33,97 \sqrt{1 - \gamma^2} \xi^3 \left\{ 1 - \frac{\xi[\xi + \frac{3}{2}(1-\xi)]^2}{1 - (1-\xi)^3(1 - \frac{1}{\beta^4})} \right\} \quad (53)$$

$$\delta_f = \frac{\gamma}{1,676} \cdot 25,48 \xi^2 \left\{ -1 + \frac{3\xi(1 - \frac{\xi}{2})(1 - \frac{\xi}{3})}{1 - (1-\xi^3)(1 - \frac{1}{\beta^4})} \right\} \quad (54)$$

Le défaut normalisé, défini par

$$\Delta = \delta_{\text{max}} - \delta_{\text{min}} = \frac{101,9116EI}{F_{\text{éq}} l^3} \cdot \text{Défaut} \quad (55)$$

a été calculé numériquement pour un certain nombre de valeurs de γ et β . Les résultats sont consignés dans le tableau 2 et représentés en figure 9.

On constate que pour $\beta = 1$, la charge équivalente représente assez bien le défaut, avec un léger excès. Pour de plus petites valeurs de β , le défaut normalisé est toujours minimal pour $\gamma \cong 0,8$. C'est d'ailleurs pour cette valeur que l'influence de β est la plus faible. Pour $\beta \geq 0,8$, Δ est maximum lorsque $\gamma = 0$. Les valeurs correspondantes répondent assez bien à l'expression

$$\Delta|_{\gamma=0} \cong 0,6301 + \frac{0,3764}{\beta^4} \quad (56)$$

A nouveau, on peut se faire une première idée du défaut à l'aide de la *formule enveloppe*

$$\Delta \leq \left(0,6301 + \frac{0,3764}{\beta^4} \right) \frac{F_{\text{éq}} l^3}{101,9116EI} \quad (57)$$

5. USINAGE LOURD ET USINAGE LÉGER

Dans les applications pratiques de calcul d'un défaut d'usinage, on peut se demander s'il est nécessaire de tenir compte de l'enlèvement de matière lors du calcul des raideurs. Pour le cas qui nous concerne, il s'agit de savoir dans quelle mesure on peut se contenter de l'approximation $\beta = 1$. Si la réponse à cette question est affirmative, nous parlerons d'*usinage léger*; Dans le cas contraire, nous dirons qu'il est *lourd*.

Tout dépend évidemment de la précision que l'on exige du calcul du défaut. Partant de l'idée qu'en métrologie courante, on exige des calibres divers qu'ils aient une précision dix fois

meilleure que le défaut à mesurer, il nous semble légitime de poser que l'usinage sera réputé léger chaque fois que le défaut calculé pour $\beta = 1$ différera du défaut effectif de moins de 10% .

a) Rappelons d'abord que dans le cas du tournage en l'air, l'enlèvement de matière ne joue aucun rôle.

b) Pour les deux autres montages, un examen rapide des figures 5 et 9 montre que la condition la plus sévère sera obtenue pour $\gamma = 0$. Dans ce cas, pour $\beta = 1$, le défaut normalisé vaut l'unité; pour les valeurs plus faibles de β , il est correctement représenté par les formules-enveloppes

$$\Delta = 0,4704 + 0,5258/\beta^4 \dots\dots\dots \text{entre pointes}$$

$$\Delta = 0,6301 + 0,3764/\beta^4 \dots\dots\dots \text{montage mixte}$$

En faisant le calcul avec le diamètre *initial* ($\beta = 1$), on a exactement $\Delta = 1$. La valeur effective excède la précédente de 10% lorsque $\Delta = 1,1$, soit pour

$$\beta = 0,9560 \dots\dots\dots \text{entre pointes}$$

$$\beta = 0,9460 \dots\dots\dots \text{montage mixte}$$

On peut donc affirmer que l'usinage sera *certainement léger* si β excède 0,95 environ, ce qui revient à dire que l'engagement a (profondeur de passe) vérifie

$$a = \frac{d_1 - d_2}{2} \leq \frac{1 - 0,95}{2} d_1 = 0,025 d_1 \quad (58)$$

Une autre manière de faire consiste à faire le calcul comme si la pièce avait uniformément le diamètre d_2 . Dans ce cas, pour $\gamma = 0$, on obtient $\Delta = 1/\beta^4$, valeur toujours approchée *par excès*. Elle excède la valeur effective de 10% lorsque

$$\beta = 0,9501 \dots\dots\dots \text{entre pointes}$$

$$\beta = 0,9589 \dots\dots\dots \text{montage mixte,}$$

soit à nouveau pour un engagement de l'ordre de 2,5% du diamètre.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. CAMPA, J. ROLLET - *Technologie professionnelle pour les mécaniciens* - Tome III, Foucher, Paris, 1971
- [2] Ch. MASSONNET, S. CESCOTTO - *Mécanique des matériaux* Sciences et Lettres, Liège, 1980

Défaut de cylindricité - montage entre pointes

Force équivalente: $F_{\text{éq}} = \text{SQRT} [F_p^{**2} + (1,5396 \cdot F_f \cdot d/l)^{**2}]$

Paramètre de direction des forces: $\text{GAMMA} = (1,5396 \cdot F_f \cdot d/l) / F_{\text{éq}}$

Paramètre d'enlèvement de matière: $\text{BETA} = d(\text{nouveau}) / d(\text{ancien})$

VALEURS DE DELTA = $48 \cdot E \cdot I \cdot (w_{\text{max}} - w_{\text{min}}) / F_{\text{éq}} / l^{**3}$

	BETA				
	8.000E-01	8.500E-01	9.000E-01	9.500E-01	1.000E+00
GAMMA					
0.000E+00	1.757E+00	1.475E+00	1.269E+00	1.115E+00	1.000E+00
1.000E-01	1.692E+00	1.435E+00	1.246E+00	1.106E+00	1.001E+00
2.000E-01	1.635E+00	1.399E+00	1.226E+00	1.099E+00	1.004E+00
3.000E-01	1.583E+00	1.367E+00	1.210E+00	1.093E+00	1.006E+00
4.000E-01	1.537E+00	1.339E+00	1.195E+00	1.089E+00	1.009E+00
5.000E-01	1.497E+00	1.315E+00	1.183E+00	1.084E+00	1.011E+00
6.000E-01	1.465E+00	1.296E+00	1.173E+00	1.081E+00	1.011E+00
7.000E-01	1.445E+00	1.285E+00	1.167E+00	1.078E+00	1.011E+00
8.000E-01	1.448E+00	1.287E+00	1.168E+00	1.077E+00	1.009E+00
9.000E-01	1.495E+00	1.315E+00	1.182E+00	1.082E+00	1.005E+00
1.000E+00	1.738E+00	1.466E+00	1.265E+00	1.115E+00	1.000E+00

TABLEAU 1

Défaut de cylindricité - montage mixte

Force équivalente: $F_{\text{éq}} = \text{SQRT} [F_p^{**2} + (1,676 * F_f * d / l)^{**2}]$

Paramètre de direction de la force: $\text{GAMMA} = (1,676 * F_f * d / l) / F_{\text{éq}}$

Paramètre d'enlèvement de matière: $\text{BETA} = d(\text{nouveau}) / d(\text{ancien})$

VALEURS DE DELTA = $101,9116 * E * I * (w_{\text{max}} - w_{\text{min}}) / F_{\text{éq}} / l^{**3}$

GAMMA	BETA				
	8.000E-01	8.500E-01	9.000E-01	9.500E-01	1.000E+00
0.000E+00	1.543E+00	1.357E+00	1.210E+00	1.093E+00	1.000E+00
1.000E-01	1.486E+00	1.318E+00	1.185E+00	1.081E+00	9.977E-01
2.000E-01	1.421E+00	1.273E+00	1.156E+00	1.064E+00	9.921E-01
3.000E-01	1.352E+00	1.224E+00	1.124E+00	1.046E+00	9.848E-01
4.000E-01	1.280E+00	1.174E+00	1.091E+00	1.027E+00	9.766E-01
5.000E-01	1.210E+00	1.126E+00	1.061E+00	1.009E+00	9.686E-01
6.000E-01	1.147E+00	1.084E+00	1.034E+00	9.939E-01	9.616E-01
7.000E-01	1.101E+00	1.054E+00	1.015E+00	9.834E-01	9.567E-01
8.000E-01	1.085E+00	1.045E+00	1.011E+00	9.812E-01	9.557E-01
9.000E-01	1.126E+00	1.075E+00	1.032E+00	9.941E-01	9.619E-01
1.000E+00	1.396E+00	1.266E+00	1.160E+00	1.072E+00	1.000E+00

TABLEAU 2

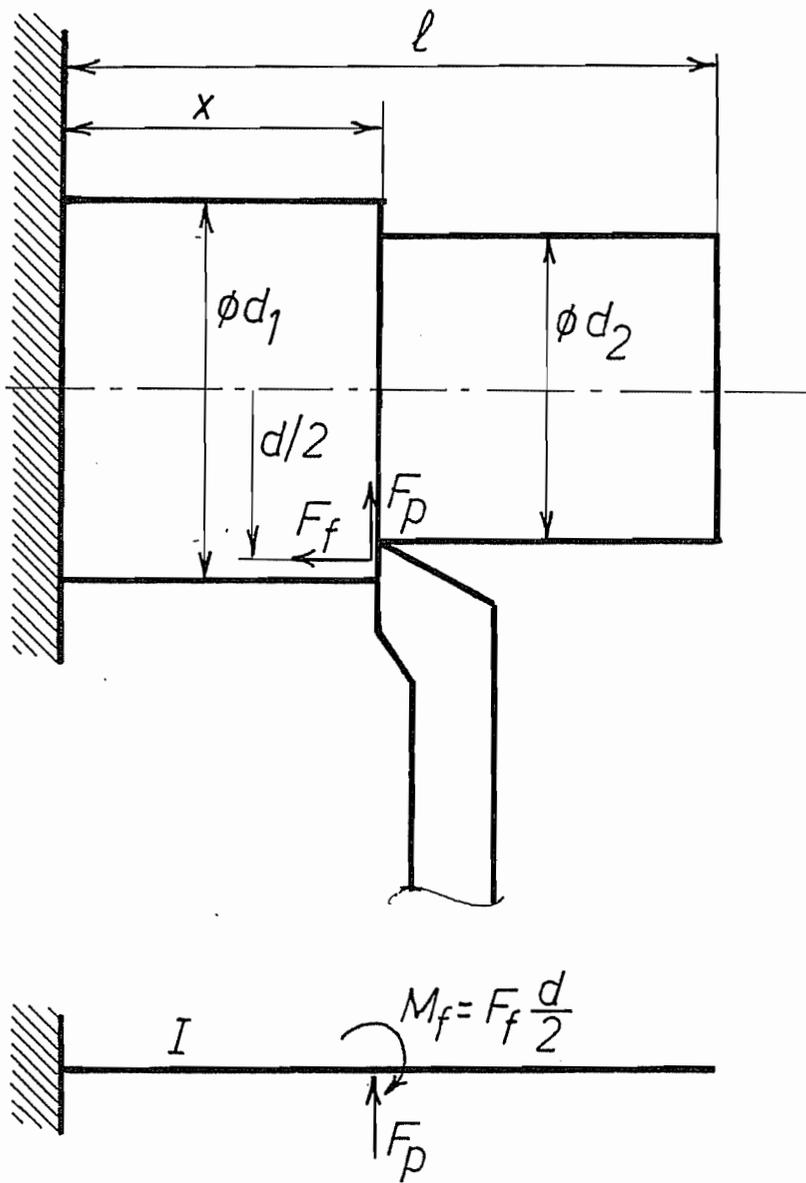
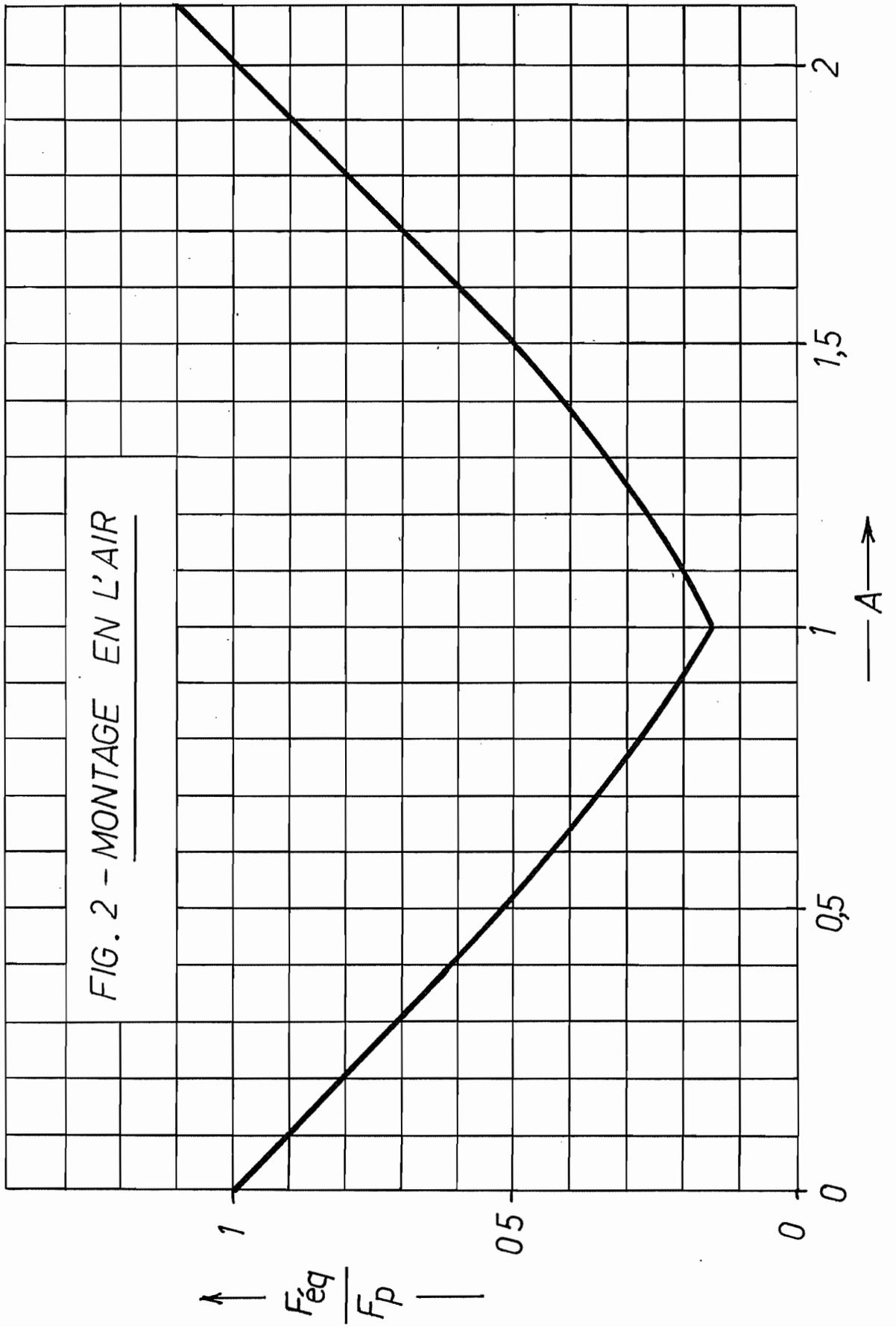


FIG. 1

FIG. 2 - MONTAGE EN L' AIR



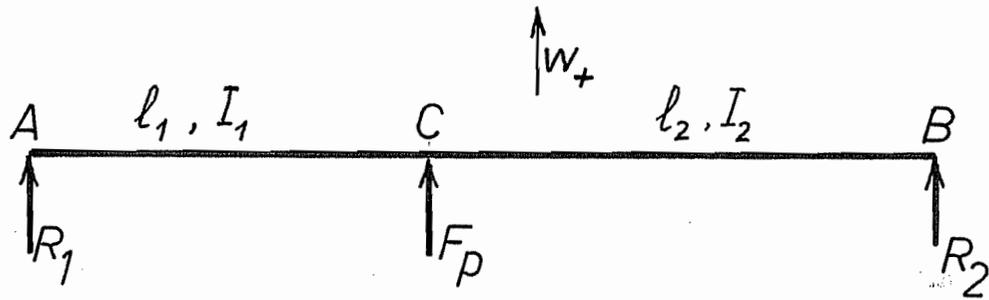


FIG. 3

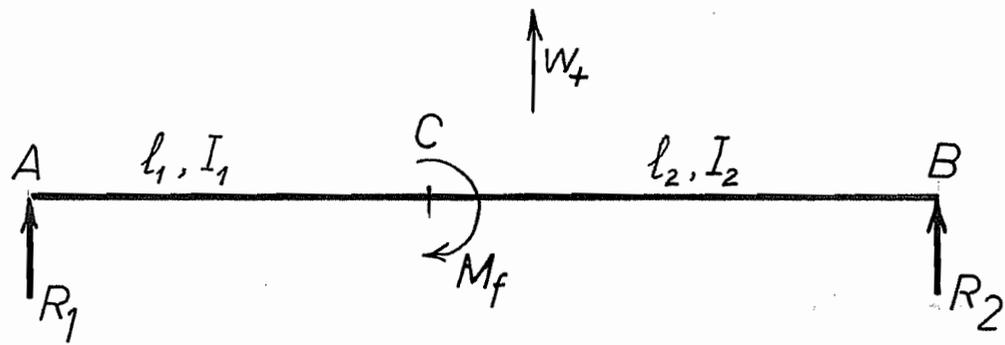


FIG. 4

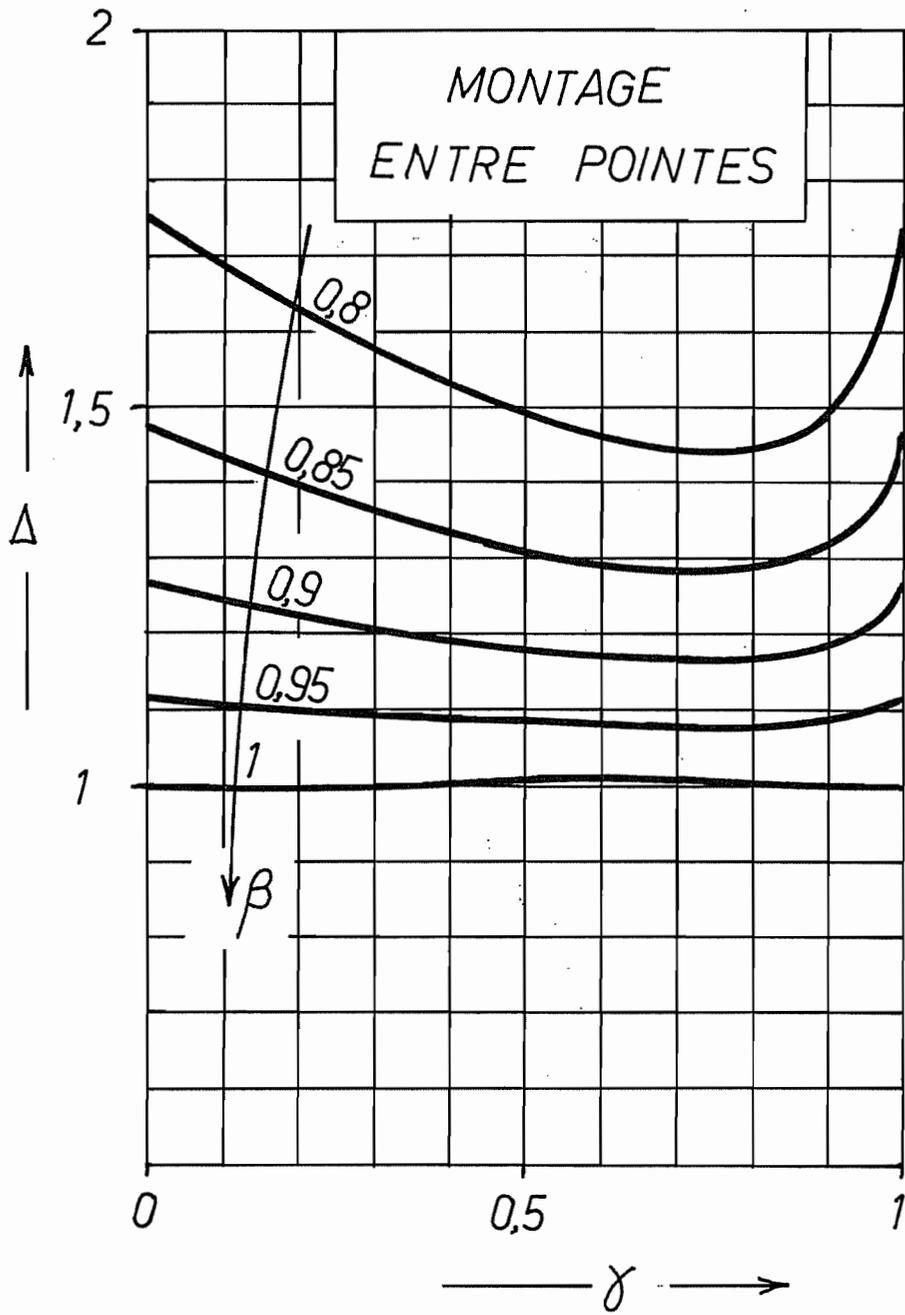


FIG. 5

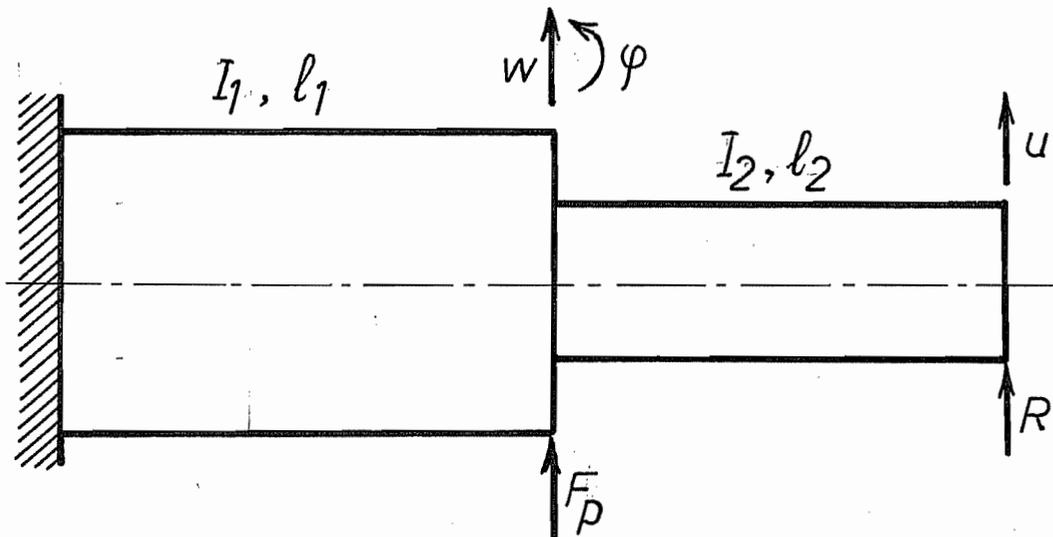


FIG. 6



FIG. 7

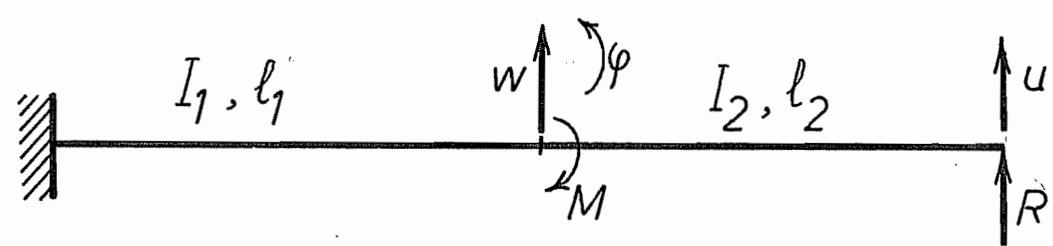


FIG. 8

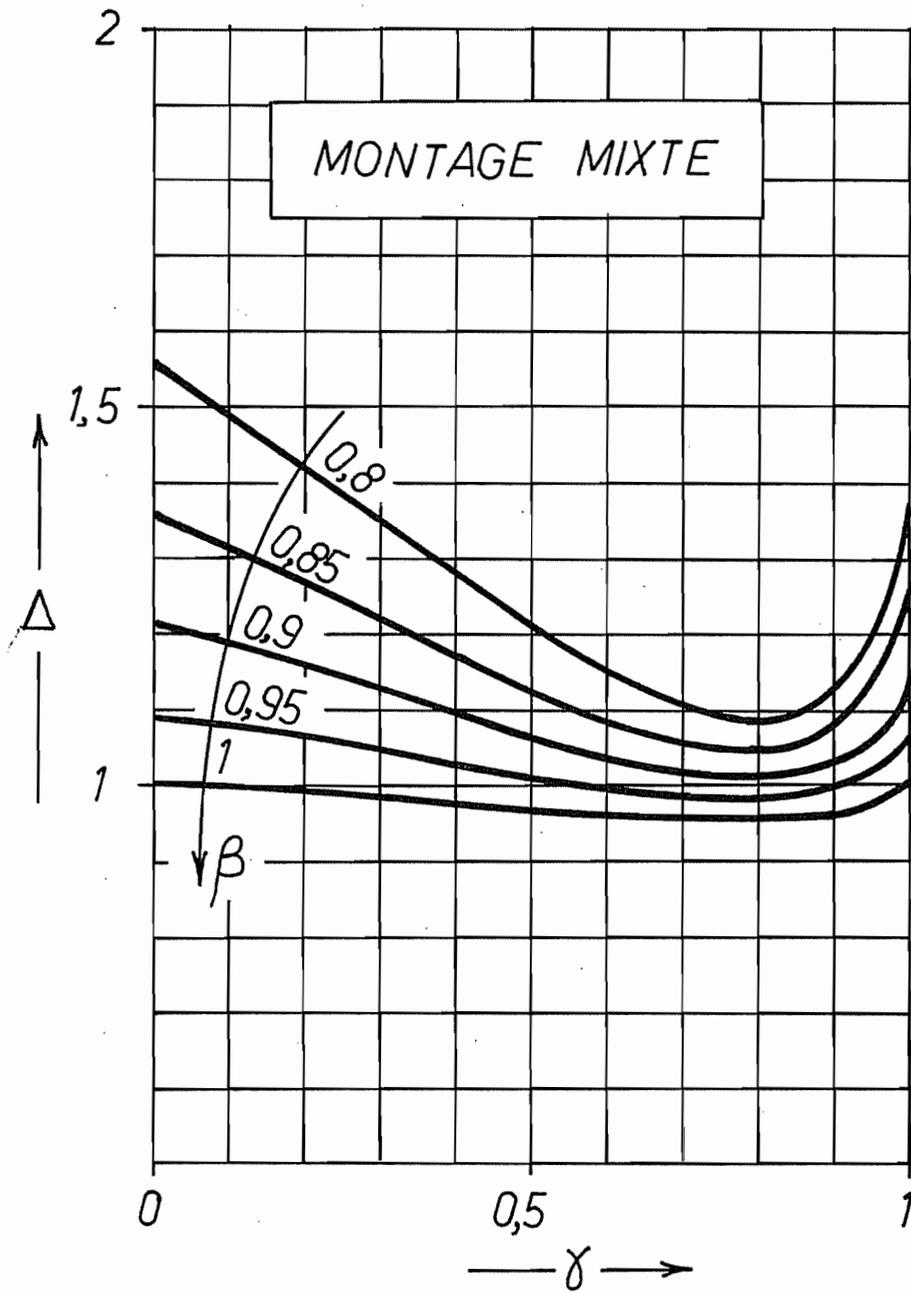


FIG. 9