UNE SITUATION FONDAMENTALE POUR LE CONCEPT DE LIMITE ? QUESTION DE LANGAGE, DE CULTURE ? COMMENT LA TAD PERMET-ELLE DE PROBLÉMATISER CETTE QUESTION ?

Pierre JOB, Facultés universitaires St Louis, Bruxelles, Belgique, job@fusl.ac.be

Maggy SCHNEIDER, Université de Liège, Belgique, mschneider@ulg.ac.be

Caractériser une situation fondamentale du concept de limite : telle est la question brute à laquelle nous nous intéressons (P. Job, thèse en cours). Lors de la présente intervention, nous montrerons en quoi la Théorie Anthropologique du Didactique nous a permis de problématiser cette question et de faire évoluer une première formulation naïve de celle-ci. Cet exemple nous permettra aussi d'illustrer l'intérêt de considérer deux niveaux praxéologiques essentiels grâce auxquels nous entendons articuler deux traits saillants de la TAD : d'une part, la modélisation de l'activité mathématique en termes de praxéologies et, d'autre part, l'importance accordée au processus de modélisation mathématique au sein de cette activité.

1 Situation fondamentale et postulat d'existence : le cas du concept de limite

Le concept de situation fondamentale est un des piliers de la Théorie des Situations Didactiques de G. Brousseau (1998) qui l'introduit en ces termes : « Chaque connaissance peut se caractériser par une (ou des) situation adidactique qui en préserve le sens et que nous appelerons situation fondamentale ». D'entrée de jeu, une situation fondamentale semble donc renvoyer d'office à des potentialités de dévolution d'une question à des élèves, c'est-à-dire à l'existence d'un milieu par rapport auquel ces derniers pourront mettre leurs stratégies à l'épreuve sans devoir se référer aux attentes supposées du professeur. Nous préférons distinguer, quant à nous, le caractère fondamental d'une situation par rapport à un savoir visé de la possibilité de la décliner en une ou des situation(s) adidactique(s) d'introduction à ce savoir, propriétés dont l'amalgame est cause de malentendus entre chercheurs et source de difficultés d'articulation de divers cadres théoriques ainsi que l'a souligné M.-J. Perrin (1999). Nous rejoignons ainsi le point de vue adopté par M. Bosch et Y. Chevallard (1999), selon lequel les situations fondamentales sont avant tout des modèles des savoirs mathématiques : « […] on est parfois tenté de considérer que, dans la théorie des situations, la notion de situation fondamentale sert, avant tout, à décrire et à fabriquer des situations d'enseignement

[…]. On oublie alors que cette notion constitue - aussi et surtout - l'instrument-clé que propose cette théorie pour caractériser les connaissances mathématiques ».

La définition que G. Bousseau donne du concept de situation fondamentale, reprise plus haut, a la forme d'un postulat d'existence d'une telle situation pour chaque savoir mathématique. Postulat jugé sujet à caution par plusieurs chercheurs dont M. Legrand (1997), surtout en ce qui concerne des concepts unificateurs tels que ceux de l'algèbre linéaire ou encore le concept de limite à propos duquel M. Artigue (1998) affirme que « […] ce qui est en jeu, épistémologiquement, à travers la définition et la formalisation, c'est la réponse à des besoins d'unification, de généralisation, de structuration du savoir dont la dévolution est beaucoup plus délicate ». Quant à I. Bloch (1999), elle avance une raison de douter de ce postulat à propos du concept de limite qui est la « non-nécessité du système de validation de l'analyse classique : historiquement, les mathématiciens ont longtemps hésité, comme on sait, entre des validations de type « classique » (inégalités, majorations) et des validations par les indivisibles, avant de se fixer sur une théorie ». Il est utile de rappeler ici la distinction que nous faisons entre caractère fondamental et caractère adidactique d'une situation. La construction de situations adidactiques permettant de dévoluer la construction d'un savoir est fort tributaire, nous semble-t-il de la créativité du didacticien qui s'attelle à cette tâche : l'inexistence de telles situations pour un savoir donné ne remet donc pas en cause le postulat en question, mais il n'en demeure pas moins que la formulation initiale de ce dernier est exigeante et donc fort hasardeuse. Nous préférons donc envisager ce postulat en y considérant seulement le caractère fondamental à l'exclusion du caractère adidactique. Cela étant, nous faisons nôtre ce postulat, estimant, comme le postule la socio-épistémologie, que tout savoir est une construction sociale proposé par une communauté humaine pour réaliser un projet partagé par ses membres (G. Fourez, 1988).

Dans ces perspectives, il existe bien, à nos yeux, une ou plusieurs situations fondamentales du concept de limite, ce dernier étant forcément le fruit d'un questionnement initial, d'un projet humain, voire de plusieurs, dont nous rendrons compte ci-dessous.

2 Caractère fondamental d'une situation : sens strict, sens large et relativité institutionnelle

D'une manière stricte, on peut caractériser le caractère fondamental d'une situation par le fait que le savoir visé apporte une réponse optimale à une question préalablement posée ou une tâche donnée. Cela peut être le cas d'une manière « absolue ». Ainsi, les rationnels sont des opérateurs linéaires qui permettent d'agrandir des puzzles, toute autre procédure telle la procédure additive étant invalidée dans l'action même. Mais, souvent, il s'agit d'une réponse jugée optimale dans une institution donnée, les raisons d'être d'un objet mathématique étant relatives à l'institution dans laquelle il est étudié. G. Brousseau l'avait déjà suggéré, insistant sur le fait que le sens du savoir peut être « correct par rapport à l'histoire de ce concept, par rapport au contexte social, par rapport à la communauté scientifique » (1998).

Cette relativité institutionnelle est un des présupposés de la TAD et, à l'instar d'autres chercheurs, nous en ferons ici un point d'appui essentiel de notre réflexion. Elle s'exprime entre autres par l'existence de multiples rapports institutionnels aux mêmes objets mathématiques qui transparaissent à travers des pratiques diverses dont certaines sont permises, voire souhaitées en certaines institutions alors qu'elles sont, dans le même temps, proscrites dans d'autres. C'est ce qui pousse les didacticiens travaillant dans le cadre de la TAD à étudier les apprentissages non pas en termes « d'acquisition de concepts » mais en termes de « travail mathématique » s'appuyant sur une manipulation contrôlée d'ostensifs s'avérant instrumentale pour un type de tâche donné. Nous renvoyons ici aux travaux de M. Bosch (1994 a) sur la proportionnalité.

Ce point de vue nous amène à parler du sens large d'une situation fondamentale, selon une des acceptions octroyées par M. Schneider (2007) laquelle se réfère à un exemple de situation labellisée fondamentale par G. Brousseau (2006) et dans laquelle l'enjeu n'est pas principalement un savoir déterminé mais plutôt un changement de rapport à des objets mathématiques. Cette situation nous servira d'exemple paradigmatique pour notre travail. Elle est analysée par l'auteur lui-même comme une situation fondamentale d'entrée dans la géométrie déductive : des élèves ayant dessiné un triangle dont les médiatrices ne concourent pas en un seul point et forment un petit triangle « doivent finalement émettre l'hypothèse que ces trois points pourraient n'en représenter qu'un seul et en apporter la preuve contre « l'évidence » de la figure et non pas avec ». Dans le cadre de la TAD, cette situation s'interprète en termes de rapport institutionnel et de rapport personnel aux objets mathématiques : de l'institution « école primaire » à l'institution « collège », le rapport institutionnel change par rapport à de mêmes objets qui, de simples dessins, deviennent figures géométriques : il ne s'agira plus de constater des propriétés par mesures mais de les déduire d'autres propriétés inhérentes aux figures géométriques, que ces propriétés fassent l'objet de définitions, d'axiomes ou de théorèmes établis antérieurement. L'enjeu didactique devient alors de rendre le rapport personnel des élèves à ces mêmes objets conforme à ce nouveau rapport institutionnel : c'est là la portée majeure de la situation des médiatrices.

Ce sens large du caractère fondamental d'une situation prend ici appui sur une réflexion épistémologique de la géométrie synthétique comme organisation déductive de faits relatifs aux expérimentations faites sur un certain modèle implicite de « l'espace sensible ». A l'instar de M. Schneider (2007), c'est par rapport à ce sens que nous définirons les tâches d'une praxéologie donnée afin que celles-ci rendent compte de la spécificité épistémologique du domaine mathématique dans lequel elles s'insèrent. Nous rejoignons ainsi, d'une part, le point de vue évoqué par A. Mercier (2002) selon lequel G. Brousseau « cherche des conditions didactiques qui rendent possible l'apprentissage d'un savoir décrit a priori par ses caractéristiques épistémologiques » et, d'autre part, le programme épistémologique ainsi nommé par M. Bosch *et al.* pour caractériser l'approche du groupe espagnol qui analyse des praxéologies mathématiques ou didactiques à la lumière de questions fondamentales du type : « Qu'est-ce que l'algèbre ? ».

3 Diverses OM à l'aune desquelles on peut penser une situation fondamentale du concept de limite

Nonobstant des références incontournables à l'histoire, la description d'une situation fondamentale du concept de limite reste une question de choix. Nous partirons de la position de M. Schneider (2001) qui cherche à mettre à distance ses propres travaux sur l'enseignement de l'analyse et ceux du groupe AHA (1999) dont elle a fait partie et nous reformulerons cette position comme suit de manière schématique. Le lecteur trouvera, dans la référence ci-dessus, des illustrations de notre propos. Un premier projet « fondamental », celui qui a donné lieu à l'avènement du calcul infinitésimal, renommé ultérieurement calcul différentiel et intégral, est la détermination de grandeurs ou d'objets géométriques : aires et volumes curvilignes, vitesses variables, tangentes émargeant à des domaines mathématiques ou extra mathématiques, en l'occurrence la géométrie et la cinématique principalement. Ce sont là, à nos yeux des tâches « fondamentales » auxquelles il faut ajouter des questions issues d'un certain « quotidien » telles que la recherche des proportions « optimales » d'un baril de vin. Dans ce projet, les grandeurs ne sont pas vraiment définies, elles constituent une sorte de « préconstruit » pour reprendre la terminologie de la théorie de la transposition didactique. Et le calcul de limites s'y trouve dans un état embryonnaire comme techniques consistant à supprimer des éléments d'un calcul, sans jeu de compensations comme en algèbre, une fois faites certaines simplifications algébriques standard. Il se trouve d'ailleurs assez vite supplanté par des techniques plus performantes : celles relevant du calcul proprement dit des fonctions dérivées ou des fonctions primitives. Dans ce premier projet, le discours technologique prend une tournure particulière : il ne s'agit pas de « prouver » tel ou tel calcul de limites au sein d'une algèbre dont les propriétés sont soit admises ou démontrées, il s'agit de justifier qu'un tel calcul fournit la valeur « exacte » d'une aire curviligne ou d'une vitesse instantanée, ce qui suppose bien souvent de recourir à des arguments qui demeurent géométriques ou cinématiques et/ou à un mode de validation pragmatique consistant à mettre à l'épreuve les nouvelles techniques de calcul à propos de questions que l'on a déjà résolues par un autre biais. Ce premier projet, nous l'appellerons la praxéologie des « grandeurs ».

Un second projet correspond à la constitution de l'analyse proprement dite, comme discipline autonome, indépendante donc de la géométrie ou de la cinématique selon le souhait métaphysique de Bolzano, ce qui suppose un mode de validation dont tout argument de type géométrique ou physique est absent. C'est la praxéologie que nous appellerons momentanément « analyse formalisée » en référence à la coutume. Les grandeurs n'en sont pas absentes mais sont définies, d'entrée de jeu, par le biais du concept de limite. On assiste donc là à une sorte de renversement que nous considérons comme un des aspects majeurs de la dialectique « outil/objet » de R. Douady (1984) : des techniques permettant de déterminer des objets « préconstruits » deviennent, par le biais du concept formalisé de limite, des procédés de définition de ces mêmes objets qui n'existent plus que par le truchement des définitions ainsi produites. Ce processus s'intègre dans une perspective lakatosienne sur laquelle nous reviendrons. Ces deux premières praxéologies s'entrecroisent avec une troisième que nous nommerons la praxéologie « modélisation fonctionnelle » dans laquelle une tâche majeure consiste à catégoriser des phénomènes divers, mathématiques ou non, à l'aide de modèles fonctionnels paramétrés, ce qui suppose bien sûr de savoir relier allures graphiques de fonctions et comportements asymptotiques précisés par des calculs de limites. De la même façon que M. Bosch et J. Gascon (2002) perçoivent l'algèbre élémentaire comme une organisation mathématique (OM) qui n'est pas au même niveau que les autres OM étudiées à l'école mais comme un instrument de modélisation de celles-ci, nous pensons que cette troisième praxéologie constitue un outil d'algébrisation d'autres praxéologies (M. Krysinska et M. Schneider, à paraître).

Cette façon de structurer l'enseignement de l'analyse en ces trois praxéologies diffère du modèle de référence de M. Bosch et al. (2003) qui cherchent à intégrer, avec d'autres, au moins deux OM locales, émergeant d'une analyse empirique des pratiques enseignantes lesquelles souffrent d'une bicéphalie entre les deux pôles que ces OM constituent : une première OM organisée autour de l'algèbre des limites et dont les tâches sont des calculs de limites, tous cas confondus, basés sur une technologie minimale qui est l'axiomatique de cette algèbre et une deuxième OM axée sur la topologie des limites et dont les tâches consiste à démontrer les propriétés de cette algèbre, ainsi que l'existence de limites particulières. Dans une certaine mesure, la première de ces deux OM unifie en quelque sorte nos deux praxéologies « grandeurs » et « modélisation fonctionnelle », le calcul de limites constituant le point de vue unificateur tel qu'il est présenté dans le projet AHA (1999).

Nous argumenterions notre structuration de l'analyse selon les trois praxéologies décrites plus haut par des raisons d'ordres divers :

Les tâches de ces diverses praxéologies sont caractérisées par les « raisons d'être » des savoirs visés telles qu'elles apparaissent dans l'histoire des mathématiques, avec l'évolution décrite plus haut du calcul infinitésimal vers l'analyse ou dans les pratiques scientifiques actuelles où la modélisation fonctionnelle a une place de choix. En ce sens épistémologique, nous dirons que ces tâches sont « fondamentales ».

Ces praxéologies permettent de caractériser les institutions didactiques dans lesquelles l'analyse mathématique est un objet d'étude, dans un sens ou dans un autre, même s'il n'existe pas de correspondance parfaitement biunivoque entre ces praxéologies et les institutions identifiées : cours de mathématiques « générales » pour utilisateurs de mathématiques, cours pour futurs mathématiciens ou cours dispensés dans l'enseignement secondaire. De l'une à l'autre, il s'agira tantôt de « manipuler » les limites comme outils, en particulier pour déterminer des grandeurs par le biais de limites particulières, « hiérarchisées » cette fois : celles de taux d'accroissement et de sommes de « produits élémentaires » ou bien d'étudier le lien entre allures graphiques et comportements asymptotiques, tantôt d'asseoir les rudiments du calcul des dérivées, des primitives et de leurs applications intra ou extra-mathématiques par un discours technologique qui s'appuie sur une certaine formulation du concept de limite, tantôt encore de se mouvoir dans le jeu hypothético-déductif de l'analyse sous sa forme « achevée ».

Chacune de ces praxéologies apporte une dimension spécifique de l'étude de l'analyse, non réductible aux autres. Ainsi, la praxéologie « grandeurs » coûte un prix didactique certain puisqu'on y « justifie » les calculs des limites comme techniques de détermination de grandeurs, alors que ceux-ci sont laborieux et appelés à être supplantés par le calcul des fonctions dérivées et/ou primitives. Mais, ce prix en vaut la peine, nous semble-t-il, en regard des obstacles épistémologiques qui entravent ce premier apprentissage, M. Schneider (1988) ayant montré qu'un tel travail peut constituer, pour les élèves, une première césure entre une appréhension exclusivement empirique des grandeurs et une prise de conscience que des concepts sont des constructions intellectuelles, à la fois en rupture par rapport à cette empirie et permettant de la transcender.

Pour toutes ces raisons, il nous semble devoir plaider pour un enseignement de l'analyse « tricéphale » de fait et assumé comme tel, du moins à certains moments de l'apprentissage en amont d'une unification ultime. Et ce, même si certains pôles nous paraissent a priori fragiles d'un point de vue écologique. Nous pensons même que l'acceptation de cette tricéphalie assure la viabilité de chacune des trois praxéologies distinguées et la visibilité de leur spécificité, toute confusion ou tout amalgame entre l'une ou l'autre conduisant à un no man's land, langagier en particulier, dont nous reparlerons plus loin.

La perspective développée plus haut nous amène à regarder de manière plurielle la question d'une situation fondamentale du concept de limite. Dans quelle praxéologie parmi les trois identifiées se situe-t-on ? On voit bien la relativité praxéologique du « concept » de limite, à supposer, pour faire bref, que l'on continue à parler en termes de concept, concept se situant au niveau des techniques dans certains cas, voire au niveau des tâches dans l'OM « algèbre des limites » décrite par M. Bosch et al. (2003), ou encore au niveau de la technologie comme concept qui a donné prise à un certain mode de validation. Et c'est cette relativité qui oblige de penser le projet de caractérisation d'une situation fondamentale de manière « située ». Ainsi, dans le cadre de la praxéologie « grandeurs », il n'est pas difficile d'imaginer des situations fondamentales qui nécessitent strictement le recours à des calculs de limites « en acte » lesquelles consistent à supprimer (négliger) des éléments d'un calcul littéral : M. Schneider (1988, 2001) montre même que certains contextes de vitesses variables ou d'aires curvilignes constituent des milieux adidactiques porteurs de tels apprentissages. Mais de telles situations ne sont pas fondamentales vis-à-vis des autres praxéologies identifiées.

En l'occurrence, c'est surtout l'entrée dans l'analyse dite « formalisée » qui est l'objet de la thèse de P. Job. Nous avons affaire là à une rupture d'un type particulier que nous décrirons en nous servant de la situation des médiatrices comme métaphore, ce qui nous rapprochera du parallèle fait par G. Gueudet (2005) entre l'entrée dans la géométrie déductive et celle dans l'analyse formalisée.

4 La notion de limite dans l'institution didactique

On imagine aisément, si l'on demande à des mathématiciens d'interpréter l'écriture $\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ tq $\forall\ x \in \mathrm{dom}(f) : x > \delta \Rightarrow | f(x) - b | < \varepsilon$, qu'ils s'entendent pour y voir une définition de « $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers l'infini ». Ceci témoigne d'un rapport à cette écriture qui fait consensus au sein de leur institution. On attend des étudiants qu'ils se conforment à ce rapport, ce qui est loin d'aller de soi, car le seul fait d'écrire cette ligne sous le nez d'un néophyte ne suffira vraisemblablement pas à lui faire comprendre le non-ostensif de limite associé. C'est ce constat que fait l'institution didactique qui tente de conformer l'un à l'autre en faisant appel à toute une panoplie d'ostensifs dont, entre autres, des graphiques accompagnés de gestes et un discours fait de phrases comme « $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de b pour autant que a soit suffisamment grand ». Ce discours didactique est porteur de certaines ambiguïtés relevées par nombre de chercheurs, dont récemment F. Conne (2007), et que nous traitons à notre tour ailleurs (à paraître). Notons, par exemple, que les termes *tend* et *infini* évoquent certaines idées, ont certains sens en dehors des mathématiques, qu'ils ne sont pas définis au sein d'un cours d'analyse élémentaire mais sont pourtant mis à contribution dans la définition relevée ci-dessus. Nous souhaitons ici nous focaliser sur cette définition, en tant qu'élément central de l'analyse dite « formalisée », afin d'en caractériser une situation fondamentale. Pour tenter de répondre à cette question, nous tenterons de mieux cerner quelle est cette centralité au travers de l'étude du terme « formalisée », qui vient qualifier l'analyse, envisagé dans diverses institutions dont la formaliste et la lakatosienne.

5 La notion de limite dans l'institution des formalistes

Pour le didacticien, « formalisée » peut être employé pour marquer une distinction entre l'analyse telle qu'elle se pratique dans le secondaire (l'analyse non « formalisée ») et celle pratiquée à l'université (l'analyse « formalisée ») comme pointant l'endroit clef des difficultés à effectuer la transition de l'une à l'autre. De manière un peu similaire, l'historien (sur)qualifie l'analyse de « formalisée » pour marquer le tournant que constitue la refonte du *calculus* de Leibniz et Newton dans un moule déductif. Mais il renvoie également à une certaine frange de mathématiciens qui forment l'institution des formalistes qu'on peut qualifier comme suit. Puisant dans l'œuvre de David Hilbert, les formalistes, typifiés par le groupe Nicolas Bourbaki, envisagent les mathématiques comme « la science de la démonstration rigoureuse »[1]. « Faire des mathématiques » c'est démontrer rigoureusement des théorèmes c'est-à-dire employer un ensemble de symboles qui obéissent aux lois de la logique. Cette institution est porteuse de certaines approches didactiques parmi lesquelles celle envisagée par F. Chellougui lorsqu'elle avance que « l'enrégimentement des énoncés dans le calcul des prédicats est la pierre de touche de la clarté conceptuelle ». Ce postulat se reflète dans la grille de lecture qu'elle adopte pour analyser les raisonnements produits par ses étudiants. Elle distingue deux axes. Premier axe : présence explicite ou non d'un seul ou des deux quantificateurs, présence ou non d'un argument mathématique, présence ou non d'une articulation entre logique et argument mathématique ? Deuxième axe : le langage employé est-il « formalisé[2] », vernaculaire[3] ou mixte ? Selon F. Chellougui, un raisonnement correct est donc caractérisé par l'emploi d'un langage formalisé syntaxiquement correct où apparaissent explicitement les quantificateurs universel et existentiel dans le respect de l'application d'inférences valides. Revenons à la notion de limite et regardons ce que cette grille nous permettrait de dire du raisonnement suivant, produit par un étudiant virtuel, qui veut montrer (pour faire court) que « la limite d'une somme est la somme des limites » :

---

[1] Davis et Hersh (), p 329.

[2] Par « formalisé » elle entend un langage qui fait appel à la syntaxe de la logique des prédicats. Elle distingue d'ailleurs les emplois corrects et incorrects de cette syntaxe.

[3] Aucun symbole à l'exception des symboles mathématiques.

« On prend $\varepsilon>0$. On sait que $lim_a(f_1)=b_1$ et $lim_a(f_2)=b_2$. Donc on peut prendre $\delta_1>0$ et $\delta_2>0$ tels que $|f_1(x)-b_1| < \varepsilon/2$ dès que $0 < |x-a| < \delta_1$ et $|f_2(x)-b_2| < \varepsilon/2$ dès que $0 < |x-a| < \delta_2$. En prenant $\delta = min\ \{\delta_1,\delta_2\} > 0$, on est assuré que $|(f_1+f_2)(x) - (b_1+b_2)| \leq |f_1(x)-b_1| + |f_2(x)-b_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ dès que $0 < |x-a| < \delta$. »

À l'aune des critères établis par F. Chellougui, ce raisonnement serait classé au plus bas de l'échelle. En effet, le langage employé est vernaculaire, la quantification n'est pas explicite et les seuls symboles relevés sont mathématiques. Pourtant, il nous semble que l'absence de symboles comme $\forall$, $\exists$, ... et de toute référence explicite à la logique des prédicats (« Là j'ai appliqué tel raisonnement valide » ou « Là j'ai appliqué la règle ... de Copi » ou ...) ne marque pas pour autant l'incompréhension de l'étudiant qui l'aurait produit. Au contraire ne manifeste-t-il pas une compréhension de l'idée de définition comme « point de référence ultime » sur lequel se baser dans une mathématique déductive ? N'est-il pas pleinement maître de cette « référence ultime » dans les instanciations qu'il en propose, marquées par l'emploi de δ_1 et δ_2 ? N'y a-t-il pas autre chose que la logique et la symbolisation qui permettent de caractériser l'analyse « formalisée » ou dit autrement, le qualificatif « formalisé » n'est-il pas entendu en un sens trop étroit ? C'est ce qu'il nous semble lire également dans la pluralité de variations qui existent de la définition de limite. L'écriture en elle-même n'est que d'une importance relative. Ainsi on peut, dans la définition ci-dessus, éliminer le « tq » ou encore modifier certaines inégalités strictes en inégalités[4], ... La question est alors à nouveau posée. Qu'est ce qui caractérise cette analyse dite « formalisée » ?

6 L'épistémologie de Lakatos

C'est ce que nous allons tenter de dégager en adoptant l'épistémologie de Lakatos comme grille de lecture l'adaptant d'ailleurs quelque peu pour la fondre dans la TAD. En bref, telle que nous l'entendons, cette épistémologie fournit des outils qui explicitent le cycle de vie (naissance, mort, survie) de ces ostensifs que sont les définitions. D'un point de vue praxéologique, elle postule qu'une définition d'une notion est construite par un mathématicien pour mener à bien des preuves d'assertions où elle intervient. Il s'agit donc d'une composante dont la finalité est de résider dans le bloc technologico-théorique. Cette construction se fait selon une dialectique de (tentatives de) preuves et de réfutations. Une preuve d'une assertion

[4] Pour une analyse des variations autour de cette définition nous renvoyons le lecteur à un article à paraître.

est avancée sur base d'une définition. Un contre-exemple peut être proposé dont l'origine peut tenir à la définition envisagée qui doit alors être adaptée pour parer au contre-exemple. C'est ainsi que naissent et meurent les définitions. Certaines survivent qui résistent aux assauts des contre-exemples.

7 La notion de limite selon Cauchy vue par l'institution lakatosienne

De manière quasi unanime, historiens, mathématiciens et épistémologues attribuent la paternité de l'analyse « formalisée » à A.-L. Cauchy. Regardons de plus près dans quelle mesure l'épistémologie de Lakatos s'y applique, si elle nous permet de la caractériser. Nous prendrons comme références les travaux de J. Grabiner[5] car c'est la seule historienne à notre connaissance qui se consacre spécifiquement aux travaux de Cauchy et plus particulièrement à l'émergence des concepts de bases de l'analyse dont celui de limite. Commençons par situer le contexte dans lequel s'insèrent les travaux de Cauchy. Son analyse s'inscrit dans la perspective ouverte par Lagrange de fonder le calcul différentiel et intégral indépendamment de la géométrie et de la physique. C'est à présent le *calculus* (qui devient ainsi analyse) qui doit servir à fonder ces deux disciplines. La fondation proposée ne peut être quelconque. Elle doit égaler les standards de rigueur des anciens géomètres toujours considérés comme un modèle du genre. Autrement dit, il s'agit de couler le *calculus* dans un moule déductif : tous les résultats de l'analyse doivent pouvoir se démontrer à partir des définitions données de quelques notions de base. Au contraire de Lagrange qui souhaite fonder l'analyse sur base du développement de Taylor mais coupé des notions de limites et d'infinitésimaux, Cauchy prend comme notion centrale de cette refonte, la notion de limite. Il définit toutes les autres à partir d'elle (notion de dérivée, d'intégrale, de série convergente). Au-delà de ce caractère macroscopique (bien connu), ce qui caractérise l'originalité de Cauchy se donne à voir dans des couches plus profondes. Si l'on en reste à un regard de surface, la définition qu'il propose de la notion de limite semble aux antipodes de celle de Weierstrass[6] (dont la coïncidence avec l'actuelle ne fait aucun doute), plus proche de celles proposées par ses prédécesseurs dont Sylvestre Lacroix[7] ; elle est exprimée en langue vernaculaire, n'est pas symbolisée et toute

---

[5] Voir Grabiner (2005).

[6] $lim_{x\to a} f(x) = L$ provided that, given $\varepsilon>0$, there exists a number $\delta>0$ such that $|f(x)-L|<\varepsilon$ if $0<|x-a|<\delta$. (Edwards (1982) p333).

[7] « [Lacroix] defined *a* to be the limit of the function *ax/(x+a)* as *x* increases indefinitely, since the difference between *a* and the value of that function « becomes smaller as x becomes larger, and *can be made less than any given quantity, however small, so that the proposed fraction can approach a as closely as desired.* » » (Grabiner (2005) pp80-81 (en italique dans l'original)).

empreinte de connotations cinématiques et géométriques, celles-là mêmes qu'il prétend expurger de l'édifice théorique à construire :

> *« Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peut que l'on voudra, cette dernière est appellée la limite de toute les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface d'un cercle est la limite vers laquelle converge les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croit de plus en plus [...] »*

Pourtant lorsqu'on regarde de plus près les démonstrations où elle intervient, Cauchy nous montre l'entendement qu'il en a et fait apparaître les ε et δ que l'on considère pourtant si souvent comme caractéristiques du style weierstrassien. Par exemple, Cauchy montre que si $\lim_{x\to\infty} (f(x+1)/f(x)) = k$ alors $\lim_{x\to\infty} f(x)/x = k$ de la manière suivante.

> *« [...] désignons par ε un nombre aussi petit que l'on voudra. Puisque des valeurs croissantes de x font converger le rapport f(x+1)/f(x) vers la limite k, on pourra donner au nombre h une valeur assez considérable pour que, x étant égal ou supérieur à h, le rapport dont il s'agit soit constamment compris entre les limites k - ε, k + ε. Cela posé, si l'on désigne par n un nombre quelconque, chacune des quantités f(h+1)-f(h), f(h+2)-f(h+1),...,f(h+n)-f(h+n-1), et par suite leur moyenne arithmétique, savoir, f(h+n)-f(h)/n, se trouvera comprise entre les limites k - ε, k + ε. Soit maintenant h+n = x. L'équation précédente deviendra f(x)-f(h)/x-h = k+α, et l'on en conclura, f(x) = f(h) + (x-h)(k+α),*
>
> *(2) f(x)/x = f(h)/x + (1-h/x)(k+α).*
>
> *De plus, pour faire croitre indéfiniment la valeur de x, il suffira de faire croître indéfiniment le nombre entier n, san changer la valeur de h. Supposons, en conséquence, que dans l'équation (2) l'on considère h comme une quantité constante, et x comme une quantité variable qui converge vers la limite ∞. Les quantités f(h)/x, h/x, renfermées dans le second membre, convergeront vers la limite zéro, et le second membre lui-même vers une limite de la forme k+α, α étant toujours compris entre -ε et +ε. Par suite, le rapport f(x)/x aura pour limite une quantité comprise entre k - ε et k + ε. Cette conclusion devant subsister, quelle que soit la petitesse du nombre ε, il en résulte que la limite en question sera précisément la quantité k. [...]»*

Cauchy, au contraire de Lacroix, ne se contente donc pas d'une définition « intuitive » à destination des « commençants ». Il s'agit véritablement d'une définition construite pour pouvoir mener à bien des preuves. C'est à ce titre que l'on peut qualifier la définition de limite proposée par Cauchy de lakatosienne. C'est ce point de vue qu'exprime Grabiner[8] :

> *«The words Lacroix used to define and describe limits do not sound very different from those used by Cauchy. But Cauchy's understanding of the limit concept was quite different; on several occasions when a proof required a limit, Cauchy translated his definition into the language of algebraic inequalities. And he proved harder propositions than those about the limit of a product. When the limit of a complicated expression was to be discussed, Cauchy occasionally – often enough to show us his clear understanding – actually worked out the delta or n corresponding to a given epsilon; the superiority of Cauchy's limit concept over that of his predecessors does not lie in the explicit definition, but in the use he made of the concept in proofs. »*[9]

Ce qui caractérise l'acte de naissance de l'analyse « formalisée » c'est donc le choix d'une notion (la notion de limite en l'occurrence) définie selon une dialectique lakatosienne afin de donner au *calculus* une architecture déductive. L'appel à la logique des prédicats est donc secondaire dans cette naissance comme en témoigne le style essentiellement discursif de Cauchy, plus proche de l'étudiant virtuel dont nous avons discuté ci-dessus que la grille de lecture proposée par Chellougui.

8 Caractérisation d'une situation fondamentale de la notion de limite au sein de l'analyse « formalisée »

Tablant sur l'analyse de la section précédente, nous postulons qu'une situation fondamentale de la notion de limite telle qu'elle se présente dans l'analyse « formalisée », vise à conformer le rapport personnel qu'entretiennent les étudiants à la définition de limite au rapport lakatosien entretenu par l'institution des mathématiciens à cette même notion. C'est à ce titre que la situation des médiatrices de Brousseau peut se voir comme une métaphore de notre situation fondamentale. Elle souligne que ce qui est en jeu dans des notions comme celle de limite ou de figure géométrique c'est la modification d'un certain rapport (personnel) au profit d'un autre (institutionnel). Nous renvoyons le lecteur à une publication ultérieure sur la délicate question de la déclinaison adidactique de pareille situation fondamentale.

---

[8] Grabiner (2005) p88.

[9] C'est nous qui soulignons.

9 Conclusion

La TAD, c'est avant tout, à nos yeux, une manière de questionner les choses qui permet de « briser l'illusion de naturalité des choix didactiques » pour reprendre une expression d'Y. Chevallard. C'est ce que nous avons cherché à faire à partir du concept d'institution dont la souplesse nous est apparue comme une chance plutôt qu'un inconvénient. En effet, pour Y. Chevallard (1992) qui en donne des exemples variés, « une institution peut être à peu près n'importe quoi ». Disons, de manière sommaire, que des personnes assujetties à une même institution entretiennent un rapport personnel qui change sous la contrainte du contrat institutionnel, par rapport à des objets existant pour cette institution. On pense bien sûr à des institutions couramment « labellisées » comme telles, telles les institutions universitaires susceptibles, jusqu'à un certain point, de constituer, au singulier cette fois, l'institution universitaire. Mais le regard de la TAD permet de débusquer des institutions non visibles *a priori* et dont la mise en évidence éclaire un certain rapport à certains objets. L'objet ici est le concept de limite et ce qui l'accompagne : calcul de limites, mode de validation, théorèmes, … Un premier feuilletage nous fait voir deux institutions que M. Schneider (2007) caractérise par deux niveaux praxéologiques grâce auxquels elle reformule la dialectique outil/objet de R. Douady. Ces niveaux sont illustrés ici par la praxéologie « grandeurs », d'une part et la praxéologie « analyse formalisée », d'autre part. La première est, typiquement, une praxéologie s'inscrivant dans une dialectique système/modèle, le mot modèle étant pris en un sens large proche de celui du physicien qui parle de modèle mathématique : il s'agit de modéliser, par un langage symbolisé, le système formé de préconstruits : tangentes, aires curvilignes, vitesses variables, … ». Au terme d'une telle étude praxéologique, le calcul construit permet de donner à ces objets préconstruits le statut de concepts mathématiques. Le modèle se met alors à vivre sa vie de manière autonome, c'est-à-dire sans référence au système qu'il modélise et c'est alors que commence l'étude d'une praxéologie d'une autre nature dont les tâches relèvent de l'organisation déductive dont la géométrie euclidienne, revue par D. Hilbert, constitue un modèle : démontrer un théorème, choisir un lot d'axiomes, reformuler un concept pour en faire un outil de preuve. Les techniques, sous-tendues par une « théorie des théories », sont alors celles qui permettent de démontrer, de conjecturer ou de réfuter : recourir au *modus ponens*, rechercher le « lemme coupable » au sens d'I. Lakatos, … Cette distinction entre deux types de praxéologies - dont le premier est analysé par E. Rouy (2007) comme un niveau de rationalité rarement identifié - nous a permis de montrer que la question d'une situation fondamentale du « concept » de limite pouvait s'envisager d'une manière plurielle, d'autant qu'intervient une troisième praxéologie appelée « modélisation fonctionnelle » comme praxéologie « de service » au même titre que l'algèbre.

Ayant alors choisi de considérer cette question au sein de la praxéologie « analyse formalisée », un deuxième regard nous a permis de distinguer, sans prétendre à l'exhaustivité, trois institutions qui entretiennent à l'objet étudié des rapports fort contrastés : l'institution didactique, l'institution formaliste, et l'institution lakatosienne. Et, il nous semble avoir montré, références historiques à l'appui, où se situe l'intérêt d'octroyer du crédit à la troisième.

10 Références

ARTIGUE M. (1998), L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 18 (2) 231-261.

BLOCH I. (1999), L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19(2) 135-194.

BOSCH M. (1994a), Les instruments du travail mathématique : le cas de la proportionnalité, *in* M. Artigue *et al.* (eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BOSCH M., GASCON J. (2002), Organiser l'étude. 2. Théories & empiries, in *Actes de la XIème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*. 2002.

BOSCH M., ESPINOZA L., GASCON J. (2003), El profesor como director de procesos de estudio : analisis de organizaciones didacticas espontaneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 23(1) 79-135.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (2000), Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire, in *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques de l'Université de Crète*. Rethymon.

CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12(1) 73-111.

CONNE F. (2007), Une vue sur l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire. *Petit x.* 73 37-70.

DAVIS P., HERSCH R. (1981), The Mathematical experience, Boston : Birkhäuser.

DOUADY R. (1984), *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.* Paris: Université de Paris 7.

EDWARDS C. H. (1982), *The Historical Development of the Calculus*, New York : Springer-Verlag.

FOUREZ G. (1988), *La construction des sciences : introduction à la philosophie et à l'éthique des Sciences*. Bruxelles : De Boeck Wesmael.

GRABINER JUDITH (2005), *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, New York : Dover.

GEUDET G. (2005) La transition secondaire-supérieur : résultats de recherches didactiques et perspectives, in *Actes de la XIIIème École d'été de Didactique des Mathématiques*. 2005.

GROUPE AHA (1999), *Vers l'infini pas à pas : une approche heuristique de l'analyse*. Bruxelles : De Boeck Wesmael.

LAKATOS I. (1984), *Preuves et réfutations : Essai sur la logique de la découverte mathématique*, Paris : Hermann.

LEGRAND M. (1997), La problématique des situations fondamentales. *Repères-IREM*. 27 81-125.

PERRIN-GLORIAN M.-J., Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu. Recherches en didactique des mathématiques. 19(3) 279-321.

ROUY E. (2007), Formation initiale des professeurs (du secondaire supérieur) et changements de posture vis à vis de la rationalité mathématique, Thèse de doctorat, Université de Liège, 2007.

SCHNEIDER M. (1988), *Des objets mentaux 'aire' et 'volume' au calcul des primitives.* Louvain-la-Neuve : Université catholique de Louvain .

SCHNEIDER M. (2001), Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. A propos d'un enseignement des limites au secondaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 21 (1/2) 7-56.

SCHNEIDER M. (2007), *Entre recherche et développement : quel choix de valeurs pour l'ingénierie curriculaire ?*, conférence INRP Lyon, 13 juin 2007, publication électronique.