Trois compétences transversales contextualisées au sein de l'enseignement des mathématiques ou Viser le " transversal " à travers du " bon disciplinaire "[1]

Maggy Schneider
Facultés universitaires de Namur, Sedess de Liège, collèges s.j.

Le concept de compétence transversale fait aujourd'hui florès en maints lieux où l'on débat des finalités de l'enseignement. Mon but premier n'est pas de discuter ni de l'historique de ce concept, ni même de sa pertinence, encore moins des controverses liées à sa définition, renvoyant le lecteur à des ouvrages dans lesquels il est amplement développé (J. Tardif, 1992 et 1999, B. Rey, 1996, A. Maingain et B. Dufour, 2002). Je me bornerai ici à illustrer, par des exemples mathématiques, comment on peut viser quelque chose qui relève du transversal à travers du " bon " disciplinaire - en un sens qui sera précisé - en me polarisant sur trois compétences " labellisées " transversales, à savoir : *faire preuve d'esprit critique*, *formuler et vérifier des hypothèses* et *communiquer*.

Comme le développe B. Rey (1996), une des raisons du succès du concept de compétence transversale tient au fait que ce dernier cristallise la finalité première de l'école à laquelle chaque professeur espère contribuer à travers sa discipline : installer chez les élèves des compétences qu'ils pourront transférer ailleurs. D'où la recherche actuelle, je pense, d'un discours sur les compétences, commun à plusieurs disciplines, qui accrédite l'idée que l'exercice d'une compétence dans l'une d'elles a des retombées positives sur son transfert aux autres, mais qui, je trouve, écrase les spécificités disciplinaires et soulève de ce fait des questions liées à la contextualisation de cette compétence dans les différents cours. Si j'opte ici pour un cheminement différent, complémentaire sans doute, qui consiste à spécifier au sein d'une discipline, les mathématiques en l'occurrence, l'exercice de telles compétences " candidates à la transversalité ", c'est que je fais mien *a priori* ce propos de B. Rey (1996) : " La transversalité, ce n'est pas seulement ce qu'il peut y avoir de commun entre les disciplines, c'est aussi et, à notre sens, surtout la prise en compte réflexive de ce qui les distingue ". L'analyse présente, basée sur un traitement d'exemples et donc plus aisément falsifiable, me conduit à situer le niveau de transversalité à celui de postures vis-à-vis du savoir et de son étude, postures proches de ce que l'auteur

[1] Article accepté pour publication dans la revue Repères-Irem et dans la revue " Mathématiques et pédagogie "

précité appelle *intentions transversales*. J'illustre également que de telles postures ne peuvent s'acquérir qu'au prix d'une plongée dans l'épistémologie des disciplines, c'est-à-dire d'un travail éminemment disciplinaire, même si je ne nie pas l'intérêt d'un " croisement " avec une approche interdisciplinaire ou avec d'autres manières de casser le cloisonnement des disciplines.

Après avoir évoqué l'imbrication des trois compétences *faire preuve d'esprit critique, formuler et vérifier des hypothèses* et *communiquer* dans la construction d'un savoir mathématique, je tente de contextualiser chacune d'elles au sein des mathématiques. Je termine enfin par la question du transfert.

1. Des compétences imbriquées au sein de la construction des savoirs mathématiques

Dans le modèle des situations adidactiques de G. Brousseau (1986), la construction des savoirs mathématiques suppose une articulation subtile de trois dialectiques : une *dialectique d'action* composée d'interactions entre un " milieu " et des hypothèses d'action faites par l'élève sur celui-ci, fût-ce implicitement ; une *dialectique de formulation* qui consiste à construire un " langage ou code en langue ordinaire ou en langage formalisé [qui] rend possible l'explicitation des actions et des modèles d'action " et une *dialectique de validation* dans laquelle " l'élève doit établir la validité d'une assertion [en s'adressant] en tant que sujet à un autre sujet susceptible d'accepter ou de refuser ses assertions, de lui demander d'administrer des preuves de ce qu'il avance, de lui opposer d'autres assertions. ". A partir de ce modèle, je pourrais donc illustrer comment s'imbriquent, dans la construction de tel ou tel savoir mathématique, les trois compétences : faire des hypothèses, communiquer et faire preuve d'esprit critique mobilisées de toute évidence dans les trois dialectiques décrites ci-dessus. Mais je m'écarterais alors de l'exercice visé ici. Je renvoie donc le lecteur, pour de telles illustrations, à G. Brousseau (1986) ou, à défaut, à M. Schneider (2002) [2] qui donne de cette théorie didactique un aperçu sommaire mais plus accessible. Et, comme annoncé plus haut, je choisis ici de décrire comment je vois l'exercice de chacune de ces compétences transversales, une à une, dans le contexte de l'enseignement des mathématiques, tout en essayant de montrer, par un chassé-croisé d'exemples, qu'elles relèvent toutes de postures intellectuelles qui les transcendent.

[2] Quelques concepts propres à la didactique des mathématiques sont utilisés dans ce texte. Pour tout complément d'information, je renvoie le lecteur aux deux sources citées dans cette phrase.

2. Faire preuve d'esprit critique

Qu'entend-on, communément, par une personne qui ne fait pas preuve d'esprit critique ? Souvent, on pense à quelqu'un qui n'essaie pas de distinguer, autant que faire se peut, ce qui peut être de l'ordre de la cause ou de celui de la conséquence dans des faits concomitants ; à quelqu'un qui généralise de manière abusive quelques phénomènes concordants mais particuliers ; à quelqu'un qui n'est pas conscient que tout discours argumentatif repose sur des présupposés et qui corollairement admet sans analyse des arguments d'autorité ou encore à quelqu'un qui ne se méfie pas de ses propres intuitions, de sa perception personnelle des phénomènes et de ses habitudes mentales, les prenant comme argent comptant sans penser même à les remettre en cause. Il me serait facile et agréable d'opposer à ces attitudes la prudence des règles du déductivisme mathématique inspiré du paradigme cartésien : " ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, que je ne la connusse évidemment être telle ". Certains verraient dans cette démarche une forme de corporatisme et sans doute auraient-ils raison. Il n'empêche que je ne m'en priverai pas, assumant cette critique sans état d'âme, mais bien consciente que mon discours fait momentanément l'impasse sur les difficultés de transfert des mathématiques à d'autres disciplines, difficultés sur lesquelles je reviendrai plus loin.

Pensée heuristique, pensée déductive et pensée aléatoire

La résolution d'un problème mathématique, de l'analyse à la synthèse, combine pensée heuristique et pensée déductive. La première autorise des raisonnements tels que *l'abduction* qui consiste à conclure que la proposition A est plus plausible dès que l'on sait que A implique B et que B est " vrai " (Je reviens plus loin sur les raisons qui ont poussé les mathématiciens, dans l'histoire, à remplacer *vrai* par *démontrable*). Par exemple, la présence de droites parallèles dans une configuration géométrique nous pousse à supputer l'existence de segments proportionnels sans que l'on sache forcément a priori lequel des deux phénomènes est déductible de l'autre. Mais la pensée déductive nous oblige à déterminer, au départ d'hypothèses ou de propriétés déjà établies, quelles propriétés pourraient jouer les rôles respectifs de A et de B dans l'application d'une règle logique telle que le *modus ponens* : Si A implique B et que A est " vrai ", alors B est " vrai ". Un élève invité à gérer alternativement la pensée heuristique et la pensée déductive est forcément amené à se poser la question du statut des propriétés qu'il brasse en fonction d'éléments déjà acquis et peut donc difficilement faire l'impasse sur ce qu'est, par exemple, une relation de causalité.

Du plausible au probable, il n'y a qu'un pas, pour le néophyte du moins car, contrairement au plausible, le probable est quantifié en mathématiques dans la théorie des probabilités. Cette quantification par des modèles probabilistes suit des règles qui heurtent parfois l'intuition commune. Ainsi, il y a 27 405 tirages possibles et équiprobables de quatre boules parmi trente numérotées de 1 à 30 mais peu d'élèves acceptent de reconnaître que le tirage {1, 2, 3, 4} a la même probabilité d'être réalisé que le tirage {29, 4, 17, 9} par exemple : c'est un biais mental bien connu des didacticiens appelé *biais de représentativité* (M.P. Lecoutre et al., 1998).

Un mode de généralisation drastique

Passons aux généralisations abusives. G. Fourez et al. (1997) dénoncent les " preuves par induction ", fréquentes dans les cours de sciences, qui consistent à " prétendre, généralement de façon abusive, qu'un modèle découle d'une série d'observations " alors que sa seule fonction est de " rendre compte de ces expériences " jusqu'à ce que ce modèle soit remplacé par un autre plus " performant ", par exemple susceptible d'interpréter des observations plus diversifiées. En mathématiques, il existe bien des preuves par induction, les *démonstrations par récurrence*, mais la généralisation porte, dans ce cas, sur le processus et non sur les énoncés. Supposons, par exemple, que l'on ait conjecturé, à partir de plusieurs cas particuliers, la formule suivante

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = [n (n + 1) (2n + 1)] / 6$$

Quand bien même cette formule aurait été vérifiée numériquement pour de nombreuses valeurs de n, aucun mathématicien ne l'admettra prouvée en toute généralité sans avoir établi, au moyen d'une identité algébrique, que, si la formule est vraie pour n, elle est vraie pour n + 1 et ce, quel que soit n. Alors seulement, il pourra mentalement remonter toute la chaîne : étant vraie pour n = 1, cette formule est vraie pour n = 2 ; étant vraie pour n = 2, cette formule est vraie pour n = 3 et ainsi de suite indéfiniment. Les conditions d'une généralisation de cas particuliers sont donc draconiennes en mathématique.

Des concepts sources de remises en cause

Enfin, pour revenir à la dernière caractéristique d'un individu qui ne ferait pas preuve d'esprit critique, les mathématiques constituent, à un moment donné, un pas de côté délibéré par rapport à une " réalité sensible " ou prétendue telle. Ce n'est bien sûr pas leur monopole, mais, plus que dans d'autres cours peut-être, les élèves auraient des occasions d'y percevoir la rupture des concepts nés d'une construction mentale avec les expériences antérieures, les observations sensorielles ou les intuitions " premières ", celles véhiculées soit par une certaine culture ambiante teintée d'idéologie empirique ou positiviste, soit par le système d'enseignement lui-même (M. Schneider, à paraître). Voici quelques exemples de telles occasions.

- Le concept de dérivée, tel que défini en mathématique, permet de résoudre avec " exactitude " des questions qui relèvent de l'instantané, là où les observations et les mesures n'autorisent que des valeurs approchées, par exemple dans le contexte des débits ou vitesses variables.
- Contrairement à l'image première qu'on en a, la Fig. 1 est susceptible de représenter un cube en mathématique, tout simplement parce qu'on y décide que toute projection parallèle (ou ombre solaire idéalisée) d'un solide sur un plan peut-être considérée comme une représentation plane de ce dernier au prix d'une certaine perte d'information puisque, dans de telles représentations, des droites gauches (droites qui, dans l'espace, n'ont aucun point commun sans être parallèles) y sont représentées par des droites qui se rencontrent.
- On peut, à un moment donné, redéfinir autrement des concepts déjà rencontrés ou en inventer de nouveaux qui, replacés dans un contexte antérieur, " font scandale " au sens où ils y infirment des expériences antérieures. Ainsi, dans un projet d'approximation numérique locale, on admettra que la droite de la Fig. 2 est tangente à la courbe au point A, alors qu'une étude de positions relatives de droites et de coniques nous aura fait définir antérieurement une tangente à une courbe comme une droite qui ne rencontre cette courbe qu'en un seul point. Et que dire de ces fameuses " bêtes " mathématiques, que l'on baptise " nombres " - complexes ou imaginaires ajoute-t-on il est vrai – et dont le carré peut être négatif au mépris de toute expérience relative à ce que l'on a appelé " nombres " jusque là.

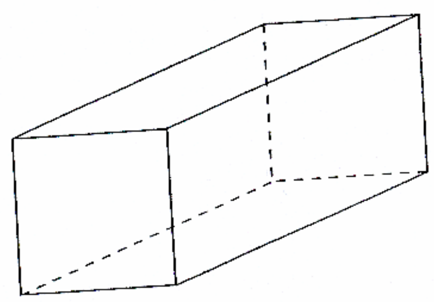

Fig. 1

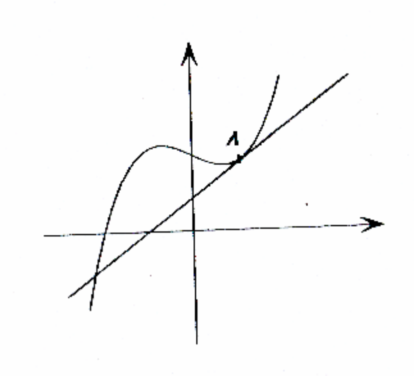

Fig. 2

Du vrai au démontrable : l'aventure des géométries non euclidiennes

Cette rupture des mathématiques avec l'expérience sensible s'affirme, dans l'histoire, entre autres avec l'expérience des géométries non euclidiennes dans lesquelles on peut nier soit des postulats, soit des théorèmes d'une géométrie plus " physique ". On y supposera ainsi que par, un point extérieur à une droite, on peut mener plusieurs parallèles à cette droite (et non pas une seule comme le stipule le 5$^{\text{ème}}$ postulat d'Euclide) et que, conséquemment, il y existe des triangles dont la somme des angles ne vaut plus 180°. L'aventure de ces géométries a débouché sur une double ouverture de la géométrie. D'un côté, une ouverture épistémologique qui fait admettre que, pour valider une théorie, un critère de " non-contradiction " puisse remplacer un critère de " vérité ", c'est-à-dire d'adéquation à une expérience sensible : Hilbert ne reformule-t-il pas la géométrie d'Euclide en insistant sur le fait que, dans son exposé, les mots " point, droite et plan " peuvent être remplacés par " chaise, table et verre de bière " ? Une autre " ouverture " consiste en un élargissement du champ d'opérationnalité de la géométrie puisque, sur certaines surfaces courbes, il existe bien des triangles dont la somme des angles ne vaut pas 180°, compte tenu que les côtés du triangle ne sont plus des segments de droites mais des géodésiques (courbes qui constituent, sur ces surfaces, les chemins les plus courts).

La rupture dont il est question ci-dessus a des conséquences épistémologiques importantes. Désormais, en mathématiques, le *vrai* est remplacé par le *déductible* et, dans le calcul propositionnel, le modus ponens se formule désormais : si A et A implique B sont des énoncés démontrables, alors B est un énoncé démontrable.

Sans aller jusque là et, surtout sans revenir à un cours de géométrie qui se veut " déductif " d'un bout à l'autre sans l'être vraiment – comme l'étaient les cours de géométrie d'avant les mathématiques modernes - la construction par les élèves d'îlots déductifs, au sens de J. Dieudonné (1964), leur donne l'occasion de prendre conscience qu'on ne peut démontrer que sur base de choses acceptées d'entrée de jeu et que, plus généralement, toute argumentation, si objective en soit l'apparence, repose sur des présupposés.

Les mathématiques comme initiation au raisonnement ?

Le cours de mathématique offre donc aux élèves de multiples occasions de distinguer le plausible, le certain, le probable, le vrai et le démontrable. Peut-on espérer qu'ils apprennent ainsi à faire un certain tri dans les multiples raisonnements dont sont émaillés les discours argumentatifs ? Peut-on imaginer que, dans cet apprentissage au raisonnement, les mathématiques jouent le rôle de *discipline matricielle* au sens où l'entendent A. Maingain et al. (2002). Pourquoi pas ? Encore faut-il, je pense, que les règles du déductivisme mathématique y soient, non pas imposées autoritairement, mais perçues par les élèves tant comme garde-fous contre les intuitions erronées que comme principes constitutifs de cette construction rationnelle et organisée - que sont les mathématiques - des propriétés des nombres, des fonctions, des figures géométriques et des modèles probabilistes. Or, comme l'a montré I. Lakatos (1976), un authentique travail mathématique procède par conjectures et preuves et relève donc de multiples allers et retours entre pensée heuristique et pensée déductive. Sans doute est-ce à travers l'articulation de ces deux types de pensée que l'élève peut acquérir, au cours de mathématique, l'attitude critique attendue de lui, les conjectures fausses ne pouvant être souvent distinguées des autres sans le recours à des procédés standardisés de preuves qui s'éloignent sensiblement du débat d'opinion en dépersonnalisant le vrai et le faux.

Cela dit, un authentique travail d'initiation au raisonnement en mathématique ne garantit aucunement le transfert à d'autres disciplines de la compétence *faire preuve d'esprit critique*. J'y reviens dans la conclusion.

3. Formuler et vérifier des hypothèses

De l'usage du mot hypothèse

Commençons par nuancer une opposition classique entre des différences d'usage du mot hypothèse des mathématiques aux autres disciplines. G. Fourez et al. (1997) soulignent l'ambiguïté du terme " hypothèse ", particulièrement entre les mathématiques et les sciences. En mathématique, l'hypothèse " se réfère à des éléments que l'on est d'accord de ne pas mettre en question et que l'on accepte dans un développement mathématique donné ". Dans le cas d'une représentation théorique en sciences " l'hypothèse désignera un modèle (théorie ou représentation) estimé pertinent dans un contexte donné et que l'on pourra éventuellement tester. " Pour leur part, A. Bouvier et al. (1979) notent deux emplois du mot hypothèse en mathématique : d'un côté, les définitions, axiomes et théorèmes déjà établis dans une théorie sont les hypothèses de la démonstration d'un théorème de cette théorie, de l'autre, le mot hypothèse signifie conjecture.

La distinction entre ces diverses acceptions du mot hypothèse est peut-être plus ténue qu'il n'y paraît *a priori*, surtout si l'on fait varier l'échelle du regard porté. En fait, au sein d'une pensée heuristique, les hypothèses en mathématique ne sont pas premières. Leur formulation résulte bien souvent, après coup, d'une étude des conditions de validité d'une technique ou d'une propriété particulière. Pensons à l'algorithme de détermination des racines d'une fonction par dichotomie qui s'appuie sur le théorème des valeurs intermédiaires : une fonction qui change de signe d'une valeur de son domaine à une autre s'annule entre ces deux valeurs. Encore faut-il que la fonction soit continue, conjecture qui, dans un premier temps, renvoie à l'idée de graphique d'un seul tenant, et, dans un deuxième temps, fait apparaître la nécessité de définir le concept de fonction continue en un point en termes de limite, indissociable du concept d'ensemble de nombres (les réels en l'occurrence) dans lequel évolue la variable indépendante de cette fonction. Sans ces concepts qui jouent le rôle d'hypothèses au sens mathématique du terme, on ne peut démontrer la validité de l'algorithme en question. Au delà, l'hypothèse de continuité et plus généralement la définition des nombres réels n'ont pas pour seule fonction de pouvoir donner prise à un développement déductif. Elles permettent à la théorie des fonctions à variables réelles d'être un modèle théorique utile pour représenter des phénomènes impliquant des grandeurs variables issues de la géométrie ou de la physique, particulièrement parce qu'elle prend en compte cette " idée de continu ". Cet exemple montre comment des hypothèses peuvent d'abord avoir le statut de conjectures pour devenir ensuite à la fois les matériaux de base d'un développement déductif – c'est-à-dire des hypothèses au sens mathématique qu'on accepte de ne pas remettre en question – et les éléments d'une théorie en tant que modèle jugé pertinent pour rendre compte d'un contexte donné, c'est à dire d'une hypothèse au sens des scientifiques.

Dans l'histoire des mathématiques, l'aventure des géométries non euclidiennes est également exemplaire à ce point de vue. D'abord modélisation du monde " physique ", la géométrie euclidienne s'organise en système déductif à partir d'hypothèses censées rendre compte précisément de ce monde. Parmi ces hypothèses, figure le 5$^{\text{ème}}$ postulat dit " des parallèles " dont il a été question plus haut. Cette géométrie, avec ses hypothèses, au sens mathématique du terme, constitue donc, globalement, une hypothèse au sens des scientifiques car modèle théorique du monde physique. Jusqu'au moment où ce modèle est remplacé par les géométries non euclidiennes, non contradictoires elles aussi, mais dont on se rend compte *a posteriori* qu'elles modélisent d'autres phénomènes de l'espace physique.

Dans bien des situations élémentaires en amont de ces exemples, on change le regard des élèves sur le concept d'hypothèse lorsqu'on leur fait pratiquer un tant soit peu la pensée heuristique, par exemple en leur faisant explorer les limites de validité de la relation $a^2 = b^2 + c^2$ dont on aura constaté le caractère d'évidence entre les trois côtés a, b et c d'un triangle rectangle isocèle particulier, plutôt que de leur formuler d'emblée l'énoncé du théorème de Pythagore.

De la nécessité de préciser le cadrage didactique

Toute action repose sur des hypothèses fussent-elles implicites : on fait une hypothèse sur la durée du trajet lorsqu'on décide de partir de tel endroit à telle heure pour arriver à tel autre endroit à une heure donnée. Dans certains cas, lors de la pratique d'un sport par exemple à l'occasion de laquelle on doit évaluer des grandeurs, il y a pratiquement simultanéité entre, d'une part, la " perception " de l'hypothèse et, d'autre part, l'action même laquelle valide ou invalide *de facto* l'hypothèse faite. Autre chose est de finaliser une action en vue de valider des hypothèses que l'on aura préalablement explicitées. On fait là un " arrêt " sur image, prenant le temps de penser à un protocole expérimental qui respecte, par exemple, le raisonnement " toutes choses égales par ailleurs ". C'est le cas lorsqu'on examine des critères de flottaison des corps dans l'eau ou les paramètres qui peuvent influencer la flexibilité d'une tige à laquelle on suspend un poids. Ces quelques exemples montrent la nécessité de cadrer les circonstances dans lesquelles s'exerce la compétence " formuler et valider des hypothèses ".

En particulier, un cadrage didactique permet de situer cette compétence dans un contexte scolaire. En effet, en mathématiques comme dans les autres disciplines, il est difficile de la contextualiser sans se référer aux caractéristiques de la situation didactique :

- Un élève formule et vérifie des hypothèses dès qu'il doit reconnaître, entre plusieurs théorèmes du cours, celui (ou ceux) qui lui permettra(ont) de résoudre un problème donné.

- Il exerce également cette compétence, avec ses pairs souvent, dans une situation adidactique (au sens de G. Brousseau, 1986) qui mobilise la construction d'un savoir nouveau.
- Ou, lorsqu'il participe, dans un jeu de questions-réponses classique lors d'un cours " frontal ", à l'examen des conditions d'applicabilité d'un modèle mathématique.
- Le jeu d'hypothèses est aussi présent dès que l'élève propose un modèle mathématique pour rendre compte d'un phénomène observé dans une autre discipline en se donnant suffisamment de liberté, par la considération de paramètres, pour ne pas trop particulariser le phénomène d'entrée de jeu.
- Et, ce n'est pas la situation la moins fréquente, il formule des hypothèses lorsqu'il essaie de deviner le mot précis que le professeur veut lui faire dire à un moment donné.

Ces diverses situations peuvent être contrastées en termes de contrat didactique et de milieu sur lequel l'élève peut s'appuyer pour valider ses hypothèses sans devoir recourir à l'assentiment ou à la désapprobation du professeur (cf. G. Brousseau, 1986). En termes de gestion affective également. Mais aussi en termes de modes de validation. Ne pouvant m'attarder à tout en l'espace de ces quelques lignes, je choisis d''illustrer la diversité *a priori* des modes de validation des hypothèses en mathématiques – au sens de conjectures - parce que ce point est souvent perçu de manière réductrice.

Divers modes de validation des hypothèses en mathématiques

Lorsqu'on évoque la validation au cours de mathématiques, on pense bien sûr à une validation syntaxique du jeu hypothético-déductif dans lequel joue exclusivement la référence à un lot d'axiomes et au principe de non-contradiction. Mais ce n'est pas là le seul mode de validation possible au cours de mathématique. Une validation plus empirique est à l'œuvre lorsqu'on éprouve la validité de modèles probabilistes d'événements aléatoires par un relevé de fréquences relatives, suite à des expérimentations telles que des lancers de dé ou des simulations aléatoires sur ordinateur, bien que, dans ce dernier cas, les dés soient pipés si j'ose dire, puisque ces simulations sont " programmées " en fonction des théories probabilistes. Dans le même ordre d'idées, on peut " contrôler ", aux imprécisions de mesure près, des conjectures relatives aux invariants des projections parallèles sur des ombres au soleil de figures géométriques, ce qui, soit dit en passant, peut être vu comme une manière de tester la validité du modèle des ombres solaires que constituent les projections parallèles. On peut également " s'offrir " des validations sémantiques par le biais d'expériences mentales qui font référence aux " objets " que les concepts mathématiques sont censés modéliser. Ainsi, on peut se convaincre qu'une fonction est croissante sur un intervalle dès que sa dérivée y est strictement positive en pensant que, si la vitesse d'un mobile est constamment positive, celui-ci avance tout le temps dans la direction des x positifs, ce qui rend croissante la fonction x (t) donnant sa position à l'instant t (groupe AHA, 1999). Et je passe rapidement, sans toutefois le juger négligeable, sur un mode de validation social qui se joue dès que les élèves sont amenés à débattre à propos d'un objet de savoir. J'y reviendrai. Ces quelques réflexions n'ont aucun caractère exhaustif. Je n'exclus pas, par exemple, que la " consultation d'experts " puisse être un mode de validation pratiquable au cours de mathématiques, ne fût-ce qu'en renvoyant les élèves à une recherche d'informations sur un concept parmi les ressources de la bibliothèque de l'école. Je crains cependant que, vu l'absence de discours heuristique dans la plupart des écrits mathématiques et le rapport que beaucoup d'élèves entretiennent aux mathématiques, les propos lus soient implicitement reçus par eux comme arguments d'autorité et n'occultent ainsi l'intérêt d'une validation plus intrinsèque liée au problème posé, à supposer qu'il y en ait un.

Bien sûr, les mathématiques proposent une hiérarchisation de ces divers modes de validation jusqu'à, à un certain moment, ne plus admettre qu'une validation syntaxique purement formelle qui fait abstraction de la " nature " des objets en jeu au profit des relations qui les lient. Mais, à nouveau, cette hiérarchisation doit être perçue comme nécessaire et ne peut l'être sans un travail préalable de nature heuristique. Par ailleurs, il y a sans doute lieu de trouver un juste équilibre entre une validation syntaxique et une autre plus empirique ou sémantique, suivant le niveau des élèves et en fonction du contenu mathématique, ce qui suppose souvent de distinguer plusieurs niveaux de conceptualisation : les isométries peuvent d'abord être explorées à titre de " mouvements " avant de devenir des bijections du plan et une validation syntaxique en analyse, par une manipulation d'inégalités et de quantificateurs, n'est peut-être pas indispensable pour des élèves du secondaire qui n'auront à manipuler que des fonctions bien " gentilles ".

Toute modélisation mathématique suppose un jeu d'hypothèses

Je voudrais enfin illustrer qu'une modélisation mathématique relève de la formulation d'hypothèses. Supposons une population (de bactéries, de cellules, …) qui double toutes les heures. La modéliser, à partir de ce seul renseignement, par une fonction exponentielle, suppose en fait l'existence d'hypothèses supplémentaires.

- D'abord liées au choix du modèle et donc à ses limites de validité : une croissance exponentielle s'accorde mal à une saturation du phénomène de croissance d'une population, due aux problèmes de place ou de nourriture.
- Ensuite, aux conditions caractéristiques du modèle lui-même. Chacun des trois graphiques suivants (Fig. 3 à 5) est susceptible de modéliser une population d'individus dont le nombre double chaque heure, quelle que soit le début de l'heure durant laquelle on observe le phénomène. En fait, le modèle exponentiel se caractérise par des conditions plus fortes : le fait que la population augmente dans un même rapport sur des intervalles de temps de même durée, quelle que soit cette durée.
- Enfin, des hypothèses liées aux conditions de l'expérimentation, puisque des biochimistes, pour des raisons que nous ne pouvons décrire ici, s'arrangent parfois pour que les cellules d'une culture se reproduisent de manière synchrone, ce qui rend le modèle de la Fig. 4 seul pertinent.
- Qui plus est, le choix d'une fonction-modèle parmi la classe des fonctions d'un même type relève d'autres hypothèses liées aux conditions initiales. Par exemple, le choix de la fonction 2^t pour modéliser la population qui double d'heure en heure suppose qu'il y ait une seule bactérie au temps t = 0, ce qui peut paraître surprenant. Il vaut donc mieux a priori proposer un modèle paramétré, ici $N_0 2^t$, où N_0 désigne le nombre de bactéries à l'instant " initial ". Ce ou ces paramètres permettent de prendre en compte, par la suite, d'autres hypothèses ou contraintes du contexte.

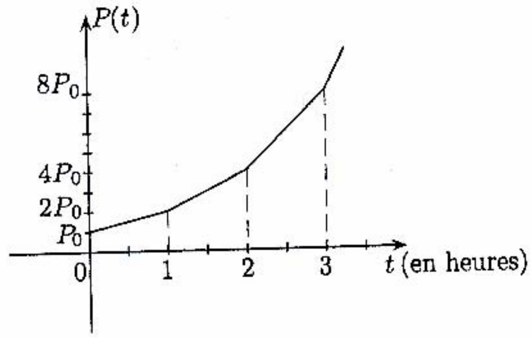

Fig. 3

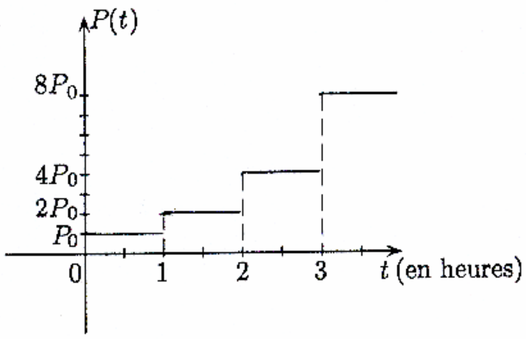

Fig. 4

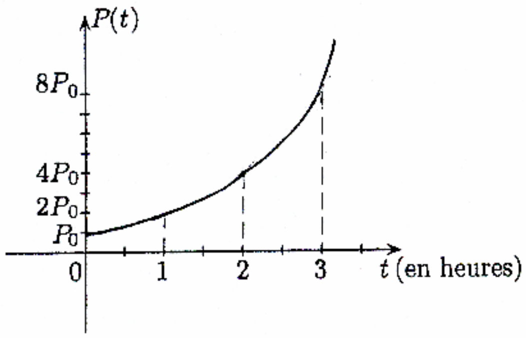

Fig. 5

Cet exemple nous montre également un changement d'attitude d'un cours à l'autre face aux modèles mathématiques. Au cours de mathématiques, on étudiera plus volontiers les conditions déterminantes d'un modèle : par exemple, la propriété citée plus haut pour les fonctions exponentielles ou encore le fait qu'elles soient proportionnelles à leur fonction dérivée ; au cours de sciences, on s'emparera d'un modèle " prêt à l'emploi", en le reconnaissant à l'une de ces conditions. Au cours de sciences, on parlera du domaine de validité du modèle dans une situation donnée, qui se distingue très souvent de son domaine de définition tel que défini au cours de mathématiques.

Je terminerai cette section sur les modèles en soulignant le caractère unificateur de certains d'entre eux qui illustre la nature intrinsèquement transversale des mathématiques et qui y rend extrême le travail de décontextualisation : un calcul d'aire sous une courbe est une modélisation standard de l'intégrale d'une fonction d'une variable et, à ce titre, représente aussi bien une aire qu'un volume, un espace parcouru par un mobile ou le travail d'une force … Quant aux fonctions du second degré, elles constituent un modèle unificateur de phénomènes aussi divers que : la chute libre d'un corps, la distance de freinage d'une voiture, la variation des aires de rectangles de même périmètre ou le coût marginal d'un produit d'une entreprise lorsque le coût total varie en fonction du nombre d'unités produites selon un modèle du troisième degré. Soit dit en passant, c'est ce caractère unificateur des mathématiques qui rend difficile leur apprentissage dans des projets interdisciplinaires, ainsi que semble le suggérer A. Mercier (2002) : je pense effectivement qu'un concept mathématique émerge essentiellement de la confrontation de plusieurs contextes, ce que les travaux interdisciplinaires ne favorisent généralement pas.

Les exemples développés dans cette section montrent que la formulation et la vérification d'hypothèses en mathématiques renvoie, d'un côté, à une dialectique entre la pensée heuristique et la pensée déductive et, de l'autre, au processus de modélisation qui prend, dans cette discipline, une tournure particulière sur laquelle je reviens dans la section suivante. Cette compétence suppose ainsi un rapport aux concepts mathématiques particulier qui consiste à les percevoir comme une lecture particulière du " réel ", finalisée tant par la volonté d'y " voir de l'ordre " que par celle de pouvoir agir sur lui.

4. Communiquer

De la place octroyée à cette compétence au cadrage didactique

La communication est une compétence qui s'affiche résolument transversale, au point de prendre une place très importante dans les familles de situations formulées dans chaque discipline. Cela me paraît légitime en ce qui concerne les cours de langues, mais il me paraît exagéré d'orienter à ce point les " situations-problèmes " ou familles de situations au sens de X. Roegiers (2000), en sciences par exemple, vers la communication sociale : faire une affiche ou un exposé sur tel sujet à l'adresse de tel public. Ce n'est pas là, à mes yeux, des situations fondamentales au sens de G. Brousseau (1986), ni des sciences ni des mathématiques, dans le sens où elles ne sont pas spécifiques de leur épistémologie propre. Ce qui n'empêche pas bien sûr qu'un élève puisse apprendre des sciences ou des mathématiques en préparant une affiche ou en faisant un exposé.

Ce point me renvoie au cadrage didactique de la communication. Celle-ci peut avoir une fonction essentiellement didactique. Dans l'évaluation par exemple : un élève sera invité à expliquer tel concept au professeur dans le but de lui prouver qu'il l'a bien compris. Mais aussi dans la construction de savoirs. Je renvoie ici aux *situations de communication* de G. Brousseau (Ib.) dans lesquelles un jeu d'échanges entre des émetteurs ou des récepteurs débouche sur la construction collective d'un concept : ce pourrait être, par exemple, des messages verbaux à propos du graphique d'une fonction qui fassent apparaître les caractéristiques déterminantes des graphiques cartésiens pour prendre un exemple moins significatif que ceux imaginés par l'auteur, mais plus facile à décrire en quelques mots. On touche là à une forme de communication inhérente à la construction des savoirs entre pairs, incontournable dans la mesure où cette construction a un caractère social, que les pairs soient les mathématiciens eux-mêmes faisant valider leurs travaux par le biais de publications ou les élèves d'une même classe invités à constituer une " communauté scientifique " (au sens de M. Legrand, 1997). Les situations de communication ont envahi depuis lors d'autres cours, mais l'objet de savoir spécifique à la discipline a tendance à disparaître pour être remplacé par un autre objet : l'acte de communication lui-même, en un sens large, et tout ce qu'il suppose telle que la prise en compte de la spécificité du public-cible, etc. Cela me semble a priori dommageable dans certaines disciplines pour lesquelles la communication n'est pas centrale. Mais là n'est pas l'essentiel de ce que je voudrais soulever ici. J'y arrive.

Les messages mathématiques utilisent des modélisations du référent particulièrement fécondes

Tout message suppose une modélisation du référent. Ce n'est pas toujours évident pour l'élève surtout si le référent est un objet courant ou un " fait " quotidien à propos duquel il peut avoir une illusion de transparence. Tel n'est pas le cas en mathématique où la modélisation – et partant la communication – mobilisent souvent plusieurs registres au sens de R. Duval (1995) : numérique, graphique, géométrique, algébrique qui contribuent à casser ce sentiment de naturalité chez l'élève. D'autres disciplines utilisent également ces registres, dans la mesure où – dit-on – elles se sont " mathématisées ". Cela leur permet de créer des nouveaux savoirs qui leur sont propres. J'estime cependant que les enseignements que supposent le sens et la maîtrise de ces différents registres incombent prioritairement au professeur de mathématiques tant il est vrai que tout travail mathématique suppose l'articulation de l'un ou l'autre d'entre eux et que c'est précisément cette articulation qui est porteuse d'apprentissage pour chacun d'eux (cf. e.a. les travaux de R. Douady, 1984, ainsi que M. Bosch et Y. Chevallard, 1999).

Par ailleurs, ces registres ont leur fonctionnement et leur vie propres : au-delà du seul message, ils se prêtent à un traitement de l'information spécifique pour qui les maîtrisent. Et c'est ce que je voudrais illustrer ici.

Les **graphiques** jouent bien évidemment un rôle dans la communication proprement dite : en particulier, par leur caractère synthétique, ils permettent d'appréhender globalement un phénomène donnant directement des informations de croissance, par exemple, que ne livrent pas au premier regard ni les tableaux numériques, ni les formules. Mais là ne se limite pas leur utilité en mathématiques. E. Lacasta (1995) répertorie plusieurs fonctionnements des graphiques au cours de mathématique dont j'en retiendrai deux assez contrastés. Les graphiques peuvent servir *d'idéogrammes* pour représenter l'idée clé d'un théorème et, à ce titre, peuvent être relativement " impressionnistes " puisqu'ils ne font que suggérer une idée, d'autant qu'ils seront souvent assortis d'un commentaire oral. Par contre, d'autres graphiques jouent le rôle *d'abaques* en permettant d'estimer, à propos d'un phénomène donné, une valeur non fournie par l'expérience. Ce qui n'est pas sans risque. Ainsi, sur la Fig. 6, les quelques valeurs expérimentales donnent lieu à un ajustement linéaire selon lequel le tonnage en SO_2 dans la campagne anglaise en 1984 s'écarte sensiblement de la valeur constatée. On en revient aux limites de validité d'un modèle graphique déjà évoquée à propos d'une population de bactéries. Le fait que les graphiques sont des modèles dont il convient de se " distancier " devient patent lorsqu'on réalise qu'une même fonction peut être représentée par une courbe

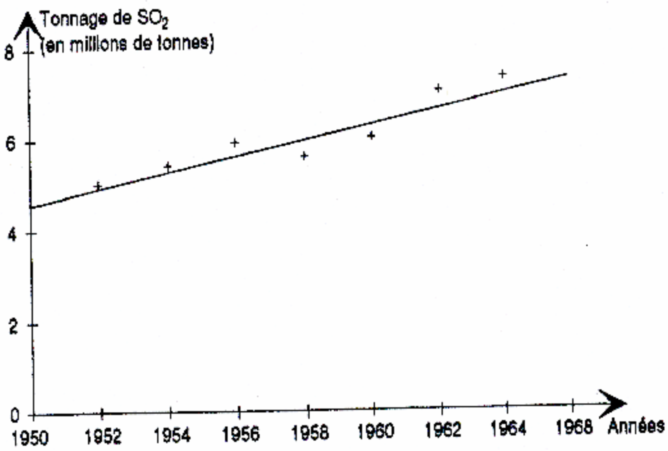

Fig. 6

dans un certain choix d'échelle et par une droite dans un autre : ainsi, les fonctions exponentielles suivant que l'on utilise ou non une échelle logarithmique. C'est d'ailleurs en jouant sur le choix de l'échelle que l'on cherche souvent à provoquer un biais dans l'interprétation d'un phénomène.

Le **registre géométrique** a ses difficultés propres et suppose un apprentissage qui ne va pas de soi : distinguer *dessin* et *figure géométrique*. Un dessin est un ensemble de traits sur une feuille de papier ou sur un écran d'ordinateur. Mais il peut être interprété différemment suivant le contexte ou la culture dont on dispose : ainsi, la Fig. 7 sera, suivant les cas, un

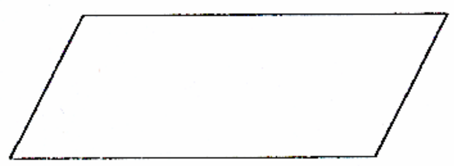

Fig. 7

parallélogramme ou un plan représenté en perspective. Une *description discursive caractérisant l'objet géométrique* est nécessaire pour lever les ambiguïtés inhérentes au dessin (R. Duval, 1995) : ici on dira tout simplement " soit un parallélogramme ", ce qui indique que la figure est bien une figure plane, que ses côtés opposés sont parallèles (si l'on a défini ainsi le parallélogramme), même si l'on constate que c'est pas tout à fait le cas sur le dessin et aussi que toute autre particularité du dessin (par exemple, la perpendicularité d'une diagonale et de deux côtés) ne peut être que le fruit du hasard. A partir de là seulement, l'on peut enclencher les règles du raisonnement hypothético-déductif qui, en retour, fourniront la preuve d'une autre propriété du parallélogramme, par exemple l'égalité des longueurs des côtés opposés, qui n'est pas forcément réalisée avec précision par le dessin. Là encore, l'information mathématique suppose une distanciation par rapport au signe. Et cette distance sera d'autant mieux perçue par les élèves qu'on les aura fait travailler le plus tôt possible sur des propriétés non évidentes (ce qui n'est pas le cas de l'exemple précédent), en particulier des situations spatiales.

Quant au **langage algébrique**, c'est un symbolisme écrit qui permet, moyennant le respect de certaines règles, un traitement automatique de l'information duquel on peut tirer de l'information supplémentaire. Illustrons cette spécificité du langage algébrique au moyen d'un exemple amusant par lequel G. Polya (1967) illustre le projet qu'a caressé Descartes de ramener tout problème à la résolution d'équations. Supposons que l'on vous dise : *Un fermier possède des poules et des lapins. Ces animaux ont ensemble cinquante têtes et cent quarante pattes.* Cette information ne vous donne pas le nombre de poules et le nombre de lapins que possède ce fermier. Qu'à cela ne tienne. En désignant par x le nombre de poules et par y le nombre de lapins et en tenant compte bien sûr de la morphologie respective de ces animaux, vous pouvez traduire l'information reçue par les écritures $x + y = 50$ (1 tête par poule, 1 par lapin et un total de 50 têtes) et $2x + 4y = 140$ (2 pattes par poule, 4 par lapin et un total de 140 pattes). A partir de là et, pourvu que vous vous souveniez de certaines règles d'algèbre, vous pouvez écrire la deuxième équation sous la forme $x + 2y = 70$, lui soustraire la première équation et obtenir le nombre de lapins $y = 20$; enfin, sachant que $x + y = 50$, vous déduisez le nombre de poules $x = 30$. G. Polya montre deux autres façons de résoudre le problème : le tâtonnement qui deviendrait bien périlleux si les nombres étaient moins " ronds " et la trouvaille d'une idée lumineuse, qui n'est pas à la portée du premier venu, telle que : " Un jour le fermier surprit un spectacle vraiment extraordinaire : chaque poule se tenait sur une patte et chaque lapin sur ses pattes de derrière. Dans cette situation remarquable la moitié des pattes était utilisée, c'est-à-dire soixante-dix. Dans ce nombre soixante-dix, chaque poule est comptée juste une fois par tête, mais chaque lapin est compté deux fois par tête. Retranchons alors du nombre soixante-dix, le nombre total de têtes, qui est égal à 50 ; il reste le nombre de têtes de lapins – c'est-à-dire 70 – 50 = 20 lapins ! Et bien sûr, trente poules. ". La morale que l'on peut tirer de cet exemple est qu'un maniement quasiment irréfléchi de symboles mathématiques, toutefois régi par des règles strictes, supplée le tâtonnement laborieux ou l'absence d'idée géniale. D'où une économie de pensée pour des crétins paresseux que savent être les mathématiciens quand c'est utile. D'où aussi le projet caressé par Descartes de tout traduire en langage algébrique jusque y compris le traitement des figures géométriques.

Là ne s'arrête pas la puissance des écritures algébriques. Elles permettent aussi de valider une généralisation au moyen d'un raisonnement par récurrence comme celui décrit plus haut. Et en introduisant des lettres auxquelles on donne le statut de paramètres – comme dans le problème des bactéries supra - elles permettent de faire des hypothèses-modèles, sans trop se coincer d'entrée de jeu, histoire de pouvoir prendre en compte ultérieurement d'autres contraintes.

Comme pour les registres précédents, l'économie de pensée qu'offre le langage algébrique ne se réalise cependant qu'au prix d'un apprentissage dont l'enjeu est la différenciation entre *représentant* et *représenté* (R. Duval, 1995). Sinon, c'est la perte du sens, d'autant plus risquée que le formalisme algébrique s'épure au fur et à mesure de la progression, de manière à pouvoir intégrer des phénomènes mathématiques sans cesse plus nombreux et plus généraux. Pensons au saut qu'un élève doit faire entre l'écriture $y = x^2$ qui désigne une dépendance particulière entre deux grandeurs x et y à l'écriture $D (f \circ g) = (Df \circ g) Dg$ (glurp !) qui exprime comment l'opérateur de dérivation agit sur la composée de deux fonctions quelconques: on sent là toute la densité des écritures mathématiques et leur caractère abscons pour qui n'a pas ou n'a plus le projet d'y chercher une signification.

C'est ce projet que le professeur de mathématique cherche à faire partager par ses élèves, avec les alea que l'on sait. Pour me payer une tranche de lyrisme, je dirais qu'en maculant ses vêtements de poussière de craie – car il écrit beaucoup au tableau comme chacun sait – il participe, de manière forte et particulière, à installer chez ses élèves une certaine culture de l'écrit, cherchant à leur faire sentir l'étroite connexion entre le développement de la pensée et la création de symbolismes. Pour autant, j'ajouterais, qu'il octroie dans son cours une réelle part au processus de modélisation.

5. Compétences transversales ou intentions transversales ?

Comme dit dans l'introduction, le concept même de compétence transversale soulève la délicate question du transfert, objet d'étude, en particulier, de la psychologie cognitive. Les exemples de transfert les plus souvent évoqués sont de nature instrumentale : il s'agit, par exemple, de reconnaître une fonction du second degré dans l'étude du mouvement uniformément accéléré, ce qui suppose un transfert du cours de mathématique au cours de physique. Sans nier l'importance de tels transferts, ni leurs difficultés propres, je voudrais conclure de mon analyse d'exemples la nécessité de voir le problème du transfert aussi à un autre niveau que je vais préciser.

Certains auteurs tels que A. Maingain et al. (2002) distinguent plusieurs niveaux de transfert : les *transferts intradisciplinaires* faits, par exemple, par l'élève qui reconnaît de lui-même l'opportunité d'exploiter, dans un problème mathématique nouveau, tel outil ou tel concept enseigné auparavant dans ce même cours et les *transferts transdisciplinaires* que les auteurs illustrent, entre autres, par les concepts nomades comme le concept de système qui, comme l'a développé I. Stengers, " voyagent d'une discipline à l'autre " au prix d'une spécification au sein de chacune d'elles. Cette distinction m'apparaît judicieuse car il me semble que l'analyse didactique de la question du transfert varie considérablement d'un de ces types de transfert à l'autre.

En m'appuyant à la fois sur les travaux de psychologie cognitive et les avancées de la didactique des mathématiques, j'ai développé ailleurs (M. Schneider, 2002) une approche didactique susceptible de favoriser des transferts en matière de résolution de problèmes mathématiques. Tout en ne négligeant pas le développement de stratégies générales comme le changement de registre, elle consiste, par un métalangage approprié, à apprendre aux élèves, d'abord à discerner tant la structure commune propre à des problèmes d'une même classe que leur " variabilité " contingente, ensuite à brasser des classes de problèmes de plus en plus nombreuses, fédérées ou non autour de mêmes tâches (dénombrer par exemple). Il me semble qu'on met rarement les élèves dans une telle perspective. On attend souvent d'eux qu'ils transfèrent leurs compétences d'un problème mathématique à un autre " nouveau " sans jamais les mettre en situation de devoir choisir " tout simplement " entre quelques " méthodes " pour résoudre des problèmes proches : par exemple, choisir entre des procédures " Thalès ou triangles semblables ", " Pythagore " ou " trigonométrie " pour déterminer des longueurs de segments ou des amplitudes d'angles dans une configuration géométrique (exemple à propos de contenus enseignés au sein d'une même année scolaire) ou encore devoir choisir entre un calcul de dérivée ou d'intégrale pour déterminer une grandeur géométrique, physique ou autre (exemple concernant des matières enseignées au cours d'années scolaires différentes). Bien sûr, la difficulté consiste à dévoluer aux élèves une part de responsabilité dans ce travail, sans souscrire à leur demande – prévisible pour qui est sensible aux " effets de contrat didactique " – d'algorithmisation de leur comportement, panneau dans lequel s'enlisent de nombreuses fiches méthodologiques. (R. Noirfalise, 1994)

Mais l'analyse présente me pousse plutôt à m'interroger sur les transferts transdisciplinaires et à faire une hypothèse sur un " lieu " privilégié de tels transferts. Un exemple me permettra de me faire comprendre. F. X. Druet (2003) a montré à quel point un exercice de version latine ou grecque repose sur la formulation d'hypothèses. C'est déjà beaucoup qu'un élève prenne conscience qu'il doit faire des hypothèses dans des disciplines aussi différentes que les sciences, les langues ou les mathématiques : comme le souligne G. Fourez (2002) en s'inspirant des travaux de D. Perkins et G. Salomon (1989), il est important de savoir que le transfert est " praticable ". Cependant je ne pense pas que d'avoir formulé des hypothèses au cours de mathématiques aide beaucoup l'élève à le faire au cours de latin et vice-versa tant ces hypothèses mobilisent des savoirs différents d'une discipline à l'autre : se poser des questions sur la présence de telle ou telle transformation géométrique dans un problème de construction de figures ou faire des hypothèses de type grammatical ou lexical dans le cadre d'une version latine ne revient vraiment pas au même. Peut-être le lieu du transfert se situe-t-il à un autre niveau entre les problèmes de mathématiques et les versions latines ? Dans Cojerem (1995), je m'étais risquée à faire le lien suivant. Il arrive souvent, en mathématique que l'on doive déterminer un objet mathématique (une figure géométrique, une fonction, …) qui répond à plusieurs contraintes. L'écueil consiste à choisir d'emblée une solution qui satisfait une de ces contraintes ou plusieurs, mais pas toutes. Faute de s'être offert, d'entrée de jeu, des " degrés de liberté – par un jeu de paramètres dans le cas de la recherche d'un modèle fonctionnel – en cherchant, pour chaque contrainte, non pas un objet mais une classe d'objets suffisamment vaste pour pouvoir ensuite combiner toutes les contraintes à la fois. Une telle attitude intellectuelle est utile également pour chercher la signification d'un mot d'une langue étrangère. Le dictionnaire propose généralement, non pas une signification, mais bien plusieurs. Pour cerner la signification la plus plausible, il convient de procéder à des recoupements en faisant intervenir d'autres considérations (ou contraintes) : la phrase dans laquelle ce mot est inséré, le texte qui contient la phrase et même l'œuvre dont le texte est extrait. Encore faut-il avoir, pour faire cela, " conservé " suffisamment ouvert l'espace des significations possibles a priori. Là se situe, pour moi, le lieu du transfert : dans une posture qui consiste à analyser la situation, méthodiquement, quitte à en différer l'éclaircissement, plutôt que de se ruer sur la première réponse venue. Notons que cette posture suppose des " choses " fort éloignées : elle ne peut être efficace sans, d'un côté, la maîtrise de savoirs spécifiques et, de l'autre, une capacité à gérer momentanément l'incertitude qui est, elle, plutôt de nature affective.

Je peux même aller plus loin à partir de cet exemple en faisant référence au rapport de l'élève non seulement au savoir, mais à l'étude de celui-ci. La maîtrise des versions latines, celle des problèmes de géométrie ou encore celle d'un instrument de musique suppose un étude longue, ingrate dans un premier temps et souvent tâcheronne. Le plaisir qu'on en retire – qui est celui de cette maîtrise précisément – est différé et s'acquiert au prix d'un investissement certain. Et, c'est peut-être l'expérience d'un tel investissement et de ses fruits, dans une discipline donnée, qui a un caractère transversal dans le sens où elle aura fait sentir à l'élève le prix à payer pour certains apprentissages.

Cette analyse me rapproche de la position de B. Rey (1998) qui préfère au concept de compétence transversale celui d'intention transversale, voulant souligner par là que le transfert d'une compétence par un individu donné à une situation donnée relève surtout du sens que cet individu attribue à cette situation. Les exemples donnés par l 'auteur : *l'intention scripturale* et *l'intention rationnelle* ne se résument pas facilement en l'espace de quelques lignes. Je me contenterai, au risque de réduire le développement très riche de l'auteur, de rapprocher les exemples travaillés dans ce texte de quelques-uns de ses propos. La prudence que l'on peut attendre d'un élève tant en matière de raisonnement hypothético-déductif que dans la discrimination qu'il peut faire entre ses perceptions initiales ou celles d'autrui et les modèles mathématiques construits à des fins précises participe à l'intention rationnelle qui n'est pas sans rappeler la dialectique de validation de G. Brousseau et que B. Rey (Ib.) exprime ainsi : " Il faut qu'il [l'élève] cesse de voir la vérité comme dépendante d'une forme de rapport à autrui. Il faut que, dans sa relation au savoir, il passe de l'obéissance à une règle saisie comme arbitraire à la compréhension de la nécessité. Ce n'est donc plus un problème de compétence, mais d'intention". Quant à la posture espérée chez un élève de considérer les divers symbolismes mathématiques comme des modèles d'économie de pensée, elle relève de l'intention scripturale par la prise de conscience d'une fonction de l'écriture comme " instrument intellectuel […] : une écriture qui ne " raconte " pas, qui n'est même pas d'abord un message adressé à l'autre, mais qui est plutôt un instrument pour dresser un état des choses, inventorier, ramener le divers du monde à des regroupements dominables. … " (Ib.). Il me semble avoir montré, avec les exemples mathématiques travaillés ici, que les compétences : *faire preuve d'esprit critique, formuler et vérifier des hypothèses* et *communiquer* sont transcendées conjointement par de telles intentions : la modélisation mathématique relève d'une volonté de " voir autrement " des phénomènes a priori disparates pour avoir prise sur eux ; elle suppose des modes de validation d'hypothèses de plus en plus standardisés qui dépersonnalisent les débats et elle débouche sur une forme de communication qui se prête à un traitement spécifique de l'information pour qui cherche à en maîtriser le sens et accepte d'appréhender le monde à travers une lecture symbolique.

Au terme " intention ", je préfère cependant celui de " posture ". Effectivement, l'actualisation d'une attitude dans un domaine donné dépend du bon vouloir de l'individu, ce qui fait d'ailleurs que la question de la transversalité demeure : on peut imaginer facilement un mathématicien appliquer scrupuleusement les règles du déductivisme cartésien et ne pas faire preuve d'esprit critique dans le traitement de sujets plus " passionnalisés " ou " médiatisés " que ne le sont les sujets mathématiques ou tout simplement dans celui de sujets propres aux sciences humaines. Néanmoins, je pense que l'expérience antérieure d'une posture cognitive telle que celles relevées plus haut et de ses retombées positives peut inciter quelqu'un à adopter la même posture dans un autre contexte, pourvu qu'il le décide et c'est là que se situe, à mes yeux le lieu de la transversalité. Ce qui m'amène à la question : comment favoriser chez les élèves les intentions " transversales " dont parle B. Rey (1996) ? Ce dernier souligne l'importance d'une forme de mimétisme cognitif qui ne peut se réaliser que si les enseignants eux-mêmes mettent en œuvre ces intentions cognitives. J'abonderais dans ce sens. Pour les professeurs de mathématique, il s'agit surtout de mettre à distance les concepts et théories mathématiques pour les faire apparaître non comme éléments d'un discours de vérité, mais comme modèles imaginés par l'esprit humain en fonction d'un projet déterminé. On verra qu'on aura fait progresser les élèves le jour où ils demanderont des comptes sur les définitions : pourquoi, par exemple, les nombres trigonométriques définis, dans un premier temps, comme rapports de longueurs se mettent-ils subitement à devenir négatifs ?; pourquoi a^{-2} égale-t-il $1/a^2$ et non $-a^2$, ce qui ferait sans nul doute " gagner des points " à l'ensemble des élèves ? Le jour aussi où ils seront sensibles à la dimension sociétale des mathématiques que permettent d'illustrer plusieurs des exemples développés ici : qui fait ou utilise des mathématiques et comment ? C'est au prix de cette épaisseur épistémologique du cours de mathématique que l'élève peut entretenir avec son professeur une " forme de relation inter-individuelle, d'abord très étrange et inhabituelle pour lui, en laquelle la validité d'une parole n'apparaît plus comme dépendante du statut de celui qui la profère. Tant que l'élève croit le maître parce qu'il est le maître, l'intention rationnelle n'est pas établie. " (B. Rey, 1996). Et je gage qu'il en va de même pour les autres disciplines. En mathématiques, cette entreprise est vaste, supposant une hiérarchisation des savoirs des programmes, une place plus grande accordée au processus de modélisation et à la pensée heuristique et une adaptation du niveau de conceptualisation aux situations rencontrées, Mais elle est surtout périlleuse, il ne faut pas s'en cacher, car faite de ruptures du contrat didactique classique inhérent aux institutions scolaires. Comme je l'ai développé ailleurs (M. Schneider, 2003), elle ne peut se réaliser sans une " reresponsabilisation " rapide des différents partenaires de ces institutions mais je n'épiloguerai pas plus là-dessus dans ce texte …

Je remercie Alain Maingain de conversations stimulantes qui m'ont aidée à clarifier mon propos et de suggestions qui ont amélioré ce texte. Je sais gré également à Barbara Dufour et à Gérard Fourez de leur lecture critique et de leurs remarques.

BIBLIOGRAPHIE

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19-1, pp. 77-123

BOUVIER A., GEORGE M. (1979), *Dictionnaire des mathématiques*, PUF, Paris

BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7-2, pp. 33-115

COJEREM (1995), *Des situations pour enseigner la géométrie, Guide méthodologique*, Bruxelles, De Boeck et Larcier

DIEUDONNE J. (1964), *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris

DRUET F.-X. (2003), *Formuler et vérifier des hypothèses aux cours de grec et de latin*, Rapport interne.

DOUADY R. (1984), *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*, Thèse de l'université de Paris VII

DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Bern

FOUREZ G., ENGLEBERT-LECOMTE V., MATHY P. (1997), *Nos savoirs sur nos savoirs*, De Boeck Université, Bruxelles

FOUREZ G. (2002), De quelques questions qui hantent les salles de profs …, *Exposant neuf*, n°10, pp. 7-9

Groupe AHA (1999), *Vers l'infini pas à pas, manuel pour l'élève*, De Boeck Wesmael, Bruxelles

Groupe AHA (1999), *Vers l'infini pas à pas, guide méthodologique*, De Boeck Wesmael, Bruxelles

LACASTA E. (1995), *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement des mathématiques : illusions et contrôles*, thèse de l'université de Bordeaux I

LAKATOS I. (1976), *Proofs and refutations, the logic of mathematical discovery*, Cambridge Univ. Press

LECOUTRE M.-P. et FISCHBEIN E. (1998), Evolution avec l'âge de " misconceptions " dans les intuitions probabilistes en France et en Israël, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18-3, pp. 311-332

LEGRAND M. (1997), La problématique des situations fondamentales, *Repères IREM*, 27, 81-125

MAINGAIN A., DUFOUR B. (2002), *Approches didactiques de l'interdisciplinarité,* De Boeck Université, Bruxelles

MERCIER A. (2002), *Sur les itinéraires de découverte et l'intervention possible des mathématiques*, XXXX

NOIRFALISE R. (1994), Fiche " Méthode " : une alerte, *Repères–Irem* n° 16, pp. 5-10

PERKINS D., SALOMON G. (1989), Are Cognitive Skills Context-Bound ?, *Educational Researcher* n°17, pp. 16-25
POLYA G. (1967), *La découverte des mathématiques*, Dunod, Paris
REY B. (1996), *Les compétences transversales en question*, ESF, Paris
ROEGIERS X. (2000), *Une pédagogie de l'intégration. Compétences et intégration des acquis dans l'enseignement*, De Boeck Université, Bruxelles
SCHNEIDER M. (2002), Problèmes et situations-problèmes : un regard pluraliste, *Mathématique et Pédagogie*, n° 137, pp. 13-48
SCHNEIDER M. (2003), Echecs électifs en mathématiques : un regard inspiré de la didactique, *Mathématique et Pédagogie*, n° 140, pp. 71-90
SCHNEIDER M. (à paraître), *N'y aurait-il qu'un seul obstacle épistémologique en mathématiques ?*
TARDIF J. (1992), *Pour un enseignement stratégique*, Les Editions Logiques, Montréal
TARDIF J. (1999), *Le transfert des apprentissages*, Les Editions Logiques, Montréal