

EQUATIONS INCOMPLETES DE PLANS
ET OBSTACLES A LA NECESSITE EPISTEMIQUE

Catherine Lebeau* & Maggy Schneider**

RESUME

Comme décrit par Sackur et al. (2005), les équations de plans dont une variable est absente soulèvent des difficultés d'apprentissage résistantes. Les auteurs précités repèrent là, pour les étudiants concernés, l'absence d'une connaissance d'ordre II, la nécessité épistémique, qui s'enseigne de manière expérientielle. Nous questionnons ici cette connaissance d'ordre II et ce qui lui fait obstacle, en particulier nous mettons en évidence ses éventuels aspects contractuels. Nos résultats ont été obtenus par le biais d'un ingénierie didactique constituant par ailleurs un premier enseignement de la géométrie analytique à trois dimensions destiné à des élèves de l'enseignement secondaire. Nous la présentons ici partiellement.

ABSTRACT

As described by Sackur et al. (2005), the equations of plans whose variable is absent raise learning's difficulties which re-appear a long time after teaching. The above mentioned authors locate there, for the students concerned, the absence of a knowledge of order II, the epistemic necessity, which is taught in a ???expérentiel ??? way. We question here this knowledge of order II and what makes him obstacle, in particular we highlight its possible contractual aspects, in the first teaching of the three dimensional analytical geometry with intended for pupils of secondary education.

Mots-clés : géométrie analytique, équations de plans, nécessité épistémique, contrat didactique, ingénierie didactique.

* Ladimath, Université de Liège (Belgique), catherine_lebeau@yahoo.fr

** Ladimath, Université de Liège (Belgique), mschneider@ulg.ac.be
Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol., n° pp. 1- , 200

INTRODUCTION

Une équation du premier degré en x, y représente une droite dans un plan muni d'un repère Oxy et, dans l'espace usuel muni d'un repère $Oxyz$, un plan parallèle à l'axe Oz . Comme ont pu l'observer les membres du groupe CESAME (Sackur et al., 2005), la première interprétation joue le rôle de connaissance locale tenace, faisant écran à la seconde dans des circonstances où cette dernière est pertinente. De manière générale, les équations de plans posent problème surtout lorsque l'une ou deux variables en sont absentes. Les auteurs précités repèrent là, pour les étudiants interrogés, l'absence d'une quelconque expérience de la nécessité épistémique, qu'ils situent comme une connaissance d'ordre II, en s'inspirant des approches épistémologiques de la nécessité de Cavailles (1946) et de Wittgenstein (Bouveresse, 1987, Wittgenstein, 1995). Pour notre part, nous mettons en évidence, à propos des apprentissages concernés, des obstacles à la nécessité épistémique dont nous avons des raisons de penser qu'ils sont liés au contrat didactique. Dans la première section, nous rappelons en quoi consistent les connaissances d'ordre II et, en particulier, la nécessité épistémique. Ensuite, dans la deuxième section, nous présentons notre propre cadre théorique, à savoir une lecture des praxéologies au sens de Chevallard (1999) dont nous estimons, à l'instar de Schneider (2008), qu'elles doivent être lues à la lumière de deux processus distincts que nous nommons « modélisation » et « déduction ». Ce cadre nous permet, dans la troisième section, de décrire une ingénierie didactique et d'identifier ses principes organisateurs ainsi que quelques éléments pour une analyse a priori. Cette ingénierie constitue un premier enseignement de la géométrie analytique à trois dimensions destiné à des élèves de l'enseignement secondaire. La section suivante donne un aperçu des résultats expérimentaux que cette ingénierie a mis en évidence sur la question traitée ici. Enfin, dans la dernière section, nous analysons ces résultats et dégageons des obstacles liés au contrat didactique et susceptibles de faire écran, dans le cas présent, à la nécessité épistémique.

LES CONNAISSANCES D'ORDRE II ET LA NECESSITE EPISTEMIQUE

Aux côtés des connaissances d'ordre I qui sont des connaissances proprement mathématiques : les définitions et axiomes, les concepts et leurs propriétés, ..., Sackur et al. (ibid.) identifient des connaissances d'ordre II qui sont « les règles du jeu mathématique : elles sont ce qui

fait que les parties du discours mathématique fonctionnent comme elles sont censées fonctionner. Elles font que les définitions définissent comme elles sont censées définir, que les théorèmes établissent comme ils sont censés établir, que les écritures dénotent ce qu'elles sont censées dénoter, et la liste est longue ». Un élève possède de telles connaissances lorsque, par exemple, il sait contrôler ou retrouver par lui-même une formule algébrique parce qu'il sait que cette formule ne dépend pas de l'arbitraire du professeur mais qu'elle possède un caractère de nécessité contrôlable par une démonstration littérale. Ou bien lorsqu'il sait que les expressions algébriques dénotent et que les transformations algébriques valides se doivent de respecter cette dénotation. Ou encore - et c'est là un élément de notre propre analyse sur lequel nous reviendrons - lorsqu'il a intégré que si une variable n'apparaît pas dans l'équation algébrique d'un ensemble de points, c'est qu'elle peut prendre n'importe quelle valeur et qu'il n'y a donc pas de contrainte sur elle. A partir de là, les auteurs définissent la nécessité épistémique comme les connaissances qui nous conduisent à dire : « voilà un résultat (un théorème par exemple), voilà ce qu'il dit et il ne peut en être autrement ». Ces connaissances sont non seulement des connaissances d'ordre II mais ce sont aussi des connaissances d'ordre III que les auteurs développent moins et qui sont des connaissances sur ce qu'est ou n'est pas une activité de nature mathématique.

Les connaissances d'ordre II, le plus souvent implicites, ne s'enseignent pas directement. Aussi, les auteurs estiment-ils important de faire vivre aux étudiants la nécessité épistémique au travers d'une expérience vécue où autrui joue un rôle crucial. En l'occurrence, il s'agit de faire travailler à nouveau aux étudiants universitaires (étudiants de 1^{ère} année de la série Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales de Nice venant majoritairement des séries scientifiques) des questions telles que « On considère l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) vérifient la relation $2x - y = -1$ ou la relation $x = 3$. Décrivez et représentez ces ensembles de points le plus précisément possible ». Le but des chercheurs est de solliciter des connaissances locales des étudiants en les faisant travailler en petits groupes « sur le fait qu'une même équation à deux variables [ou moins] dans le plan ou dans l'espace ne représente pas un ensemble de points de même nature ». Les auteurs relatent dans les grandes lignes les réactions des étudiants et leurs évolutions sur lesquelles nous reviendrons localement au fur et à mesure de cet article et concluent :

« La connaissance sur les équations de plans dans l'espace a été modifiée dans le sens souhaité. De plus, son caractère de nécessité est

apparu à un nombre suffisant d'étudiants pour que, plus tard dans l'année, si un étudiant faisait l'erreur, d'autres soient en mesure de lui dire : souviens-toi, nous nous étions mis d'accord sur le fait que cette équation ne peut pas être l'équation d'une droite. Nous avons pu aussi aborder, à travers cette expérience, des questions relatives aux règles sémiotiques dont on a pu constater à cette occasion combien elles étaient loin d'être bien maîtrisées ».

UN PREMIER ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS QUI S'INSCRIT DANS UNE PRAXEOLOGIE DE TYPE « MODELISATION » ET QUI ROMPT AVEC LA TRANSPOSITION HABITUELLE

Passons à présent à notre propre expérience. Indépendamment de la démarche du groupe CESAME, Schneider avait remarqué, dès le début des années 80, que les équations de plans particuliers soulevaient des difficultés d'apprentissage chez des élèves de l'enseignement secondaire en se prêtant à une double interprétation et, pour cette raison, avait conçu un enseignement dans lequel l'étude de ces plans constituait une entrée en matière dans l'algébrisation des objets géométriques de l'espace usuel. Travaillant ensuite en collaboration avec Krysinska, ce chercheur a étoffé son premier projet en un cours d'introduction à l'algèbre linéaire dont les ressorts ont été étudiés dans le cadre d'un travail de fin d'études universitaires (Pisvin, 1998) et dont Krysinska (2000) décrit les idées maîtresses comme idées « pour enseigner », parmi d'autres, ainsi que quelques réactions d'élèves sans toutefois les analyser. Ce travail fait l'objet, à l'heure actuelle, d'une thèse de doctorat (Lebeau, 2009) dans laquelle il est reformulé comme décrit ci-dessous.

1. Deux niveaux praxéologiques a priori

L'enjeu diffère ici sensiblement des visées du groupe CESAME, en ce sens qu'il s'agit d'un premier enseignement sur la modélisation algébrique des objets géométriques que sont les points, droites et plans, cette modélisation étant d'abord de nature cartésienne ou paramétrique avant d'être englobée dans un formalisme vectoriel. Ce projet relève de ce que nous appellerons une praxéologie « modélisation ». En effet, à l'instar de Schneider (2007, 2008), nous pensons utile de distinguer ici deux types de praxéologies¹, l'ayant

¹ Nous ne reviendrons pas sur le concept de praxéologie emprunté à la TAD de Chevallard (1999) si ce n'est pour rappeler brièvement que les

justifié en substance dans Lebeau et Schneider (à paraître). Dans les propos qui vont suivre, il faut prendre le mot « praxéologie » à la fois en tant que processus pour qui construit des organisations mathématiques et comme résultat de ce processus : il s'agit, d'une part, de traduire deux facettes de l'activité mathématique et, d'autre part, de décrire les différents types d'organisations mathématiques auxquels conduisent respectivement ces deux facettes, lesquelles peuvent être situées dans des institutions différentes : le premier type de praxéologie étant plus propre aux institutions d'enseignement, le second typique de l'activité mathématique professionnelle telle qu'elle se donne à voir dans des articles de recherche. Le premier type de praxéologies, les praxéologies « modélisation », concerne la modélisation mathématique de systèmes constitués d'objets que l'on peut considérer comme des objets préconstruits au sens de Chevallard (1991), c'est-à-dire précisés par le truchement d'une désignation d'exemples ou de contre-exemples. Précisons à quoi pourrait ressembler une telle praxéologie en ce qui concerne la géométrie analytique à 3 dimensions. Les objets de base sont des points, des droites, des plans qui sont, à un certain stade du cursus, des objets tantôt préconstruits, tantôt définis par des axiomes au sein de la géométrie synthétique (c'est-à-dire ni analytique, ni vectorielle) déjà constituée comme théorie déductive. Les tâches globales (au sens de la TAD) consistent à modéliser ces objets géométriques au moyen d'ostensifs algébriques qui donnent prise à un traitement symbolisé des problèmes à résoudre. Les techniques sont les modes de détermination ou de modélisation « standard » de tels objets : les caractérisations paramétriques, cartésiennes et vectorielles des droites et des plans. Comme ces caractérisations n'émergent que comme outils (au sens de Douady, 1986) pour répondre au projet de modélisation et pas encore comme objets d'une théorie au sens où l'entendraient des mathématiciens, il nous semble important qu'un niveau de discours que Chevallard appelle discours technologique - et

praxéologies se composent de deux entités : le bloc « praxis » qui rend compte des pratiques mathématiques en termes de techniques permettant de réaliser des tâches données par la manipulation réglée d'outils sémiotiques que sont les ostensifs mathématiques : symboles, représentations graphiques, ... Et ensuite, le bloc « logos » qui constitue un discours sur la pratique, censé, d'une part, légitimer et rendre intelligibles les techniques en regard des tâches visées et, d'autre part, favoriser la production de nouvelles techniques. Chevallard (ibid.) qualifie un tel discours de « technologique ». Il considère de plus un niveau supérieur de justification – explication – production, celui de la théorie qui « reprend, par rapport à la technologie, le rôle que cette dernière tient par rapport à la technique ».

qui n'est pas forcément le discours théorique standard - valide les techniques mises en jeu. Il s'agira de « justifier » telle ou telle caractéristique algébrique de la droite ou du plan dans l'espace à partir de caractéristiques proprement géométriques, par exemple, le fait qu'un plan est déterminé par deux droites sécantes, et/ou de savoirs propres à la géométrie analytique du plan. Au terme de telles praxéologies, les préconstruits se constituent en concepts mathématiques par le truchement d'une définition pour se prêter à une théorie déductive : les plans sont définis, par exemple, comme lieu de points dont les coordonnées vérifient une équation cartésienne linéaire ou un système particulier d'équations paramétriques. Les praxéologies de type « déduction » relèvent, elles, d'un projet d'organisation déductive dont les tâches diffèrent considérablement de celles des praxéologies de type « modélisation ». Il s'agit de reformuler certains concepts pour qu'ils donnent prise au raisonnement déductif, de déduire tel résultat théorique d'axiomes et/ou de théorèmes antérieurement démontrés, d'établir un système d'axiomes « simple » et non redondant, de conjecturer un ordre d'agencement des théorèmes, etc. Les techniques sont, par exemple, des règles d'inférence du calcul propositionnel. La théorie est une sorte de « théorie des théories » gérant la validation et la cohérence des raisonnements mathématiques tenus et qui soulève des questions épistémologiques concernant la nature des concepts scientifiques, la falsifiabilité des théories, ... Une praxéologie de type « déduction » peut ainsi conduire à une théorie mathématique standardisée, plus ou moins globale. En ce qui concerne l'enseignement étudié ici, ce type de praxéologie peut reposer sur la subordination de la géométrie analytique à l'algèbre linéaire. Les droites et plans y sont alors définis d'emblée comme variétés linéaires ou affines. Les vecteurs sont des éléments d'un espace vectoriel et des vecteurs colinéaires sont définis à partir de la notion de partie liée. Dans cette théorie mathématique, un théorème important va gérer le passage entre les écritures vectorielles, d'une part, et leur traduction en termes de coordonnées, d'autre part : « Tout espace vectoriel E de dimension finie n sur un corps commutatif K est isomorphe à l'espace K^n des coordonnées (par rapport à une base donnée de E , n est un naturel) ». Nous y reviendrons.

2. Notre choix de niveau praxéologique

L'enseignement visé ici diffère considérablement de la transposition didactique fortement naturalisée dans l'enseignement secondaire belge. Bien que la géométrie analytique y soit subordonnée à l'algèbre

linéaire, cette transposition ne se situe pas vraiment dans une praxéologie de type « déduction ». Ainsi, le théorème mentionné supra n'y est pas présent ce qui a pour effet de rabaisser au statut de « recette » le passage d'une écriture vectorielle de deux vecteurs colinéaires aux égalités correspondantes sur les composantes : « on barre les flèches et on déploie les égalités sur les composantes » comme le présente un élève. Il manque donc un maillon important de l'édifice théorique, celui-là même qui permet de traduire des propriétés de vecteurs en termes de techniques propres à la géométrie analytique. La transposition didactique habituelle au niveau secondaire en Belgique est donc une praxéologie « à trous » au sens où l'entend Rouy (2007) : cette transposition imite le discours théorique dont elle emprunte des éléments emblématiques, en l'occurrence des définitions du plan et de la droite en termes vectoriels, mais n'en prend que les aspects jugés accessibles pour les élèves concernés en gommant tous les autres. Par ailleurs, cette même praxéologie ne s'inscrit pas non plus dans une praxéologie de type « modélisation ». Un fait divers relaté par Pisvin (1998) nous permettra de l'expliquer. Il s'agit de deux élèves, « forts » au demeurant, qui mettent en cause la définition vectorielle d'un plan en arguant que la somme de deux vecteurs de l'espace ne donne pas forcément un vecteur « coplanaire » (sic !) avec les précédents parce que, dans l'espace, « le parallélogramme peut être gauche ». Qu'aurait pu répondre le professeur qui avait préalablement défini la somme de deux vecteurs par le biais des composantes ? Montrer que cette somme permet d'exprimer la coplanarité en s'appuyant sur une caractérisation synthétique du plan ? Et, s'il avait défini la somme vectorielle de deux vecteurs de « l'espace » par le biais de la règle du parallélogramme, les élèves auraient été obligés de s'incliner mais auraient peut-être demandé des comptes sur le passage d'une somme vectorielle à celles relatives aux composantes. Car, ces élèves posent là une question dont la portée épistémologique est consistante en interrogeant la pertinence du modèle vectoriel pour rendre compte d'un objet, le plan, sur lequel ils briguent avoir quelque connaissance. Cette question se pose déjà pour la droite. Trois points alignés ont des différences de coordonnées proportionnelles. Dans la transposition habituelle, cette propriété n'a pas de nécessité liée au fait que des points alignés forment vraiment une droite au sens physique du terme, mais découle des définitions vectorielles. En se plaçant dans la perspective des deux élèves dont on vient de parler, on peut retourner la chose en disant : pour avoir le droit de définir la droite vectoriellement avec les conséquences que cela entraîne, il faudrait être certain que des points formant une ligne droite ont, dans un repère

donné, des coordonnées dont les différences sont proportionnelles à moins que l'on ne se préoccupe pas de l'objet géométrique au sens physique du terme, ce qui serait alors caractéristique d'une praxéologie de type « déduction ».

Mais pourquoi concevoir une telle praxéologie « modélisation » dans le cas présent ? De manière générale, nous pensons qu'une entrée directe dans une praxéologie de type « déduction » peut être préjudiciable en termes d'apprentissage, la réforme dite des mathématiques modernes en France et en Belgique l'ayant suffisamment illustré. En l'occurrence, nous avons tout lieu de questionner l'approche par l'algèbre linéaire, pour avoir testé les compétences acquises par des étudiants de première année universitaire se destinant à devenir bio - ingénieurs et ayant reçu un tel enseignement à deux reprises : d'abord au cycle secondaire, ensuite en première année d'université. Leurs réactions révèlent leurs difficultés multiples soit à résoudre certains exercices, soit à expliquer la théorie. En voici un bref échantillon. Tout d'abord, beaucoup de ces étudiants semblaient avoir acquis du concept de vecteur une conception pour le moins caduque entachée de difficultés majeures d'apprentissage décrites par plusieurs chercheurs (e.a. Le Thi, 2001). En particulier, l'assimilation du vecteur à un segment orienté localisé précisément dans le plan conduit à l'usage d'expressions sujettes à caution telles que « Je considère le point milieu de tel vecteur ». Ensuite, le registre paramétrique semble mal maîtrisé surtout quant à la quantification existentielle liée au(x) paramètre(s). C'est elle en effet qui permet des écritures multiples des droites et des plans puisqu'on peut changer dans les équations paramétriques associées et le point de référence appartenant à la droite ou au plan et le(s) vecteur(s) directeur(s) pourvu qu'on respecte la dépendance linéaire (notons que celle-ci se repère facilement à vue pour la droite et beaucoup moins pour le plan). Mais les étudiants ont du mal à gérer cette diversité d'écriture, étant plus attachés à l'apparence ostensive des équations qu'à la quantification associée au(x) paramètre(s). Quant aux équations cartésiennes, leur interprétation révèle des surprises lorsqu'elles sont susceptibles de représenter des objets géométriques différents dans un plan ou dans l'espace. Ainsi en est-il des équations du type $y = ax + b$ longtemps décodées comme équations de droites dans un plan muni d'un système d'axes et continuant à l'être ainsi dans le contexte de la géométrie analytique à trois dimensions. Cela rejoint les observations de Sackur et al. (2005). Enfin, les étudiants que nous avons observés éprouvent une grande difficulté à changer de cadre lorsque cela s'avère utile pour résoudre un problème. Ainsi pour déterminer les équations paramétriques d'une

droite perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné extérieur à cette dernière, il peut être éclairant d'établir un plan de calcul en raisonnant dans le cadre de la géométrie synthétique : déterminer le plan perpendiculaire à la droite donnée d et passant par le point donné P , le point de percée A de d dans ce plan, la droite (AP) étant la droite cherchée. Ou considérer le plan formé de toutes les droites passant par P et coupant d et, dans ce plan, exprimer la condition de perpendicularité de d et de la droite cherchée. Mais, loin de changer de cadre, la plupart des étudiants aux prises avec cette question se cantonnent aux aspects proprement calculatoires en traduisant indûment la propriété de perpendicularité par l'annulation d'un produit scalaire sans se rendre compte qu'en fixant arbitrairement un des paramètres, ils risquent bien de tomber sur une droite orthogonale à la droite donnée sans lui être perpendiculaire (au sens où les droites sont non coplanaires et que leurs vecteurs directeurs respectifs ont un produit scalaire nul). Bref ce bilan plutôt négatif nous amène à plaider pour une approche permettant de travailler, pour elles-mêmes, les caractérisations cartésiennes et paramétriques sans les déduire d'emblée d'une caractérisation vectorielle. Comme Sackur et al. (2005), nous pensons en effet que des erreurs tenaces - telles que celle qui consiste à interpréter l'équation $y = ax+b$ comme étant celle d'une droite plutôt que celle d'un plan alors qu'on est passé d'un travail dans le plan à un travail dans l'espace - résistent à tout discours théorique et requièrent une sorte de retour aux sources : « La difficulté rencontrée ici est tenace ; pour la combattre on ne peut se contenter de donner, une fois de plus, les explications connues que les étudiants ont déjà entendues dans l'enseignement secondaire et revues en entrant à l'université dans l'enseignement de tronc commun. Les discours à eux seuls ne suffisent pas : il faut quelque chose de plus, à savoir que les étudiants reviennent à leur propre connaissance de l'espace pour rencontrer l'évidence que l'ensemble étudié ne peut être une droite, que c'est nécessairement un plan ». Dans notre cas, il ne s'agit pas vraiment d'un retour aux sources mais d'un premier enseignement qui met en jeu d'autres leviers décrits par ailleurs et sur lesquels nous reviendrons (Sierpiska et al. 1997, Rouy, 2007).

L'ingénierie décrite dans cet article se situe donc en amont d'un premier enseignement de l'algèbre linéaire. Cependant, si l'on en juge par les résultats d'autres recherches, elle en constitue un préalable important. En effet, Dorier et al. (1997) s'expriment en faveur de l'utilisation de la géométrie analytique pour préparer l'algèbre linéaire car la première lui semble plus naturelle pour aborder des concepts tels que le caractère générateur, d'intersection de sous-espaces, ...

Gueudet (2000), elle, met en évidence l'apport de l'intuition géométrique dans l'apprentissage de l'algèbre linéaire. Quant à Alves-Dias (1998), elle observe des difficultés d'étudiants en algèbre linéaire liées à un manque d'articulation entre point de vue cartésien et point de vue paramétrique particulièrement dans la caractérisation et la représentation de sous-espaces vectoriels. Et, de manière générale, Dorier et al. (1997) parlent des difficultés banales à manipuler des écritures symboliques formelles comme autant d'obstacles à l'apprentissage de l'algèbre linéaire.

L'INGENIERIE DIDACTIQUE ET SES PRINCIPES ORGANISATEURS, ELEMENTS POUR UNE ANALYSE A PRIORI

Rappelons que le projet fondamental est de mettre au point et de justifier des caractérisations algébriques du système « points, droites et plans dans l'espace usuel à 3 dimensions » pour faire passer les objets de ce système du statut d'objets préconstruits ou d'objets travaillés dans le cadre de la géométrie synthétique à celui de concepts de la géométrie analytique. Nous faisons ici une présentation panoramique de ce projet assortie d'une brève analyse a priori.

1. Phase 1 de l'ingénierie

Une première phase de l'ingénierie vise à faire travailler certaines équations comme des contraintes sur les coordonnées de points d'un ensemble, permettant ainsi aux élèves de dépasser une conception « étiquette », au sens de Schneider (1988), que nous leur prêtons a priori. Selon cette conception, les équations ne peuvent avoir ni valence sémiotique, ni valence instrumentale, étant de simples dénominations des objets géométriques, ce qui fait que les élèves non seulement n'en comprennent pas le sens mais, en plus, ne peuvent s'en servir comme outils. Après une initiation aux repères dans l'espace, il s'agit précisément de faire interpréter géométriquement des ensembles de points à partir de contraintes données :

Donnez le lieu des points de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) vérifient les équations suivantes ?

1. $y = -3/2x + 3$

2. $y = x^2$

3. $z = y^2$

4. $z = x^2 + y^2$

Donnez quelques points vérifiant l'équation. Justifiez vos réponses.

Les exemples choisis sont de nature à faire rencontrer aux élèves la difficulté décrite supra concernant la réinterprétation dans l'espace à trois dimensions d'équations cartésiennes connues dans l'espace à deux dimensions. En particulier, la première d'entre elles est écrite sous la forme la plus usitée des équations de droites. En outre, ces exercices doivent favoriser chez les élèves l'acquisition d'une certaine mobilité dans la gestion des coordonnées (x, y, z) dont aucune n'a de statut particulier alors que leur scolarité antérieure les a amenés à rencontrer uniquement des équations en x et en y et à discriminer ces dernières variables respectivement comme variable indépendante et variable dépendante. Remarquons aussi que les exemples sont choisis afin de contraster des équations du premier degré avec d'autres.

Sur les quatre équations, trois sont incomplètes. Elles peuvent s'interpréter comme droites ou courbes dans un plan ou comme plans et surfaces dans l'espace. Le passage d'une interprétation à l'autre peut s'appuyer indifféremment sur ce que nous appelons la « technique de la coupe plane » ou celle « de la projection ». Nous décrivons la première en quelques phases :

- interpréter les variables de l'équation comme les coordonnées de points de l'espace (x : abscisse, y : ordonnée, z : cote),
- interpréter l'équation à deux variables comme l'équation d'une courbe particulière dans le plan de coordonnées concerné par ces deux variables (Oxy ou Oxz ou Oyz),
- considérer l'équation comme une contrainte sur deux des trois coordonnées situant un point dans un repère orthonormé de l'espace,
- interpréter l'absence d'une des coordonnées dans l'équation comme le fait que la variable concernée n'est pas contrainte par l'équation et qu'elle peut donc prendre n'importe quelle valeur,
- interpréter graphiquement ce fait par un « déplacement » de tous les points de la courbe du plan de coordonnées pour qu'ils prennent tous une certaine valeur de la variable absente.
- interpréter globalement l'ensemble de ces points.

La stratégie de la projection comporte les mêmes étapes mais le sens donné à l'avant-dernière d'entre elles est tout à fait différente : il s'agit cette fois d'interpréter géométriquement l'absence d'une des coordonnées dans l'équation en considérant que tous les points dont une projection appartient à la courbe du plan de coordonnées identifiée au départ vérifient bien l'équation donnée. Ces deux stratégies peuvent convenir pour répondre aux questions mobilisant des équations à deux variables, comme les questions 1, 2 et 3 qui correspondent à des surfaces réglées engendrées par le « mouvement »

d'une droite parallèle à un des axes du repère et s'appuyant soit sur une droite, soit sur une parabole. Par contre, la première stratégie ne peut convenir pour répondre à la question 4 qui ne correspond pas à une telle surface, ce qui permet de montrer aux élèves que toute stratégie a une portée a priori limitée et que toutes les surfaces ne sont pas réglées.

Au travers des exemples traités, un enjeu majeur de cette première phase est la constitution d'un discours technologique, appuyé sur la technique de la coupe plane et/ou sur celle de la projection, qui justifie l'interprétation d'équations du type $ax + by = 0$ ou $ax + bz = 0$ ou $ay + bz = 0$ comme celles caractéristiques d'un plan parallèle à un des axes du repère. Ces équations vont en effet servir d'assise au discours technologique sous-tendant l'ensemble de l'ingénierie.

Cette première approche d'interprétation géométrique d'équations algébriques données ex abrupto est complétée d'activités où c'est la tâche inverse qui est demandée, comme la suivante :

Donnez, dans l'espace, une équation algébrique caractérisant le plan Oxy .

Elle débouche sur l'institutionnalisation des équations de plans parallèles strictement ou non à un des plans fondamentaux formés par deux axes du repère.

2. Phases 2 et 3 de l'ingénierie

La seconde phase de l'ingénierie concerne l'alignement de points et la troisième vise l'expression de la coplanarité. Il s'agit de donner trois points dans le premier cas et quatre dans le second. Les coordonnées des points sont précisées et il s'agit de s'assurer soit de leur alignement, soit de leur coplanarité. On espère pouvoir miser sur ce milieu numérique en ce sens que les techniques de vérification imaginées par les élèves deviennent, une fois généralisées, les caractérisations algébriques visées. Nous complétons systématiquement cette tâche par une autre demande : trouver le plus possible de points appartenant à telle droite déterminée par deux points ou à tel plan déterminé par trois points, puis trouver une écriture générale de tous les points de cette droite ou de ce plan. Le but est de relier les caractérisations cartésiennes aux caractéristiques paramétriques en montrant que le nombre de contraintes de type cartésien détermine le nombre de paramètres nécessaires pour décrire un ensemble de points : augmenter le nombre de contraintes revient à diminuer le nombre de paramètres.

Limitons-nous ici aux problèmes d'alignement. Voici un extrait des questions qui ont été proposées :

1. Les points $O(0, 0, 0)$, $A(-4, 2, 5)$, $B(-9, 2; 4, 6; 11, 9)$ sont-ils alignés ? Justifiez vos réponses.
2. Les points $O(0, 0, 0)$, $A(3, 2, 5)$, $B(5, 34; 3, 56; 8, 9)$ sont-ils alignés ? Justifiez vos réponses.
3. Considérons $O(0, 0, 0)$ et $A(1, -2, 3)$. Trouvez un point aligné avec O et A .
4. Trouvez un deuxième point aligné avec O et A , puis un troisième.
5. Trouvez tous les points alignés avec O et A . Justifiez vos réponses.
6. Les points $A(1, -2, 1)$, $B(-5, 10, -5)$, $C(2, 9; -5, 8; 2, 9)$ sont-ils alignés ?
7. Justifiez vos réponses.
8. Les points $A(1, 2, 1)$, $B(3, 4, 7)$, $C(5, 6, 13)$ sont-ils alignés ?
9. Justifiez vos réponses.
10. Considérons $A(1, 2, 7)$ et $B(-2, -4, -14)$. Trouvez un point aligné avec A et B , ensuite un deuxième point aligné avec A et B . Trouvez tous les points alignés avec A et B .

Ces questions dont on aura remarqué la complémentarité : vérifier que des points sont alignés et trouver tous les points alignés avec d'autres devraient déboucher sur les caractérisations analytiques d'une droite comprise comme un lieu de points avec ce que cela suppose en termes de statut ensembliste. Un des enjeux de ces questions est d'extrapoler à l'espace des techniques qui permettent de reconnaître si des points sont alignés dans un plan : leurs coordonnées sont proportionnelles dans le cas où ces points forment une droite passant par l'origine du repère et, sinon, il faut contrôler la proportionnalité des différences de leurs coordonnées. On peut réinvestir ici l'idée de projeter les points sur les plans de coordonnées et contrôler algébriquement l'alignement des projections, soit en calculant des équations, soit en vérifiant la proportionnalité des coordonnées de ces projections ou de leurs différences. Mais, si le passage de l'espace au plan préserve l'alignement, le passage des plans à l'espace se doit d'être justifié : des points non alignés peuvent être projetés selon des points alignés sur deux plans de coordonnées. C'est là qu'intervient un autre enjeu de cette phase de l'ingénierie : montrer que les points initiaux sont alignés parce qu'ils sont à l'intersection de deux plans parallèles à un des axes du repère et non parallèles entre eux. En effet, si des points se projettent sur deux plans de coordonnées en des points alignés, ils appartiennent aux plans dont les traces dans ces plans de coordonnées sont formées par les projections, ils sont donc alignés pourvu que ces plans soient sécants. Là peut intervenir l'institutionnalisation faite au terme de la première phase de l'ingénierie qui a

permis d'interpréter l'équation de ces traces comme celles de plans particuliers. Ces questions débouchent donc sur une caractérisation double des droites : au moyen d'équations paramétriques et par le biais d'un système d'équations de plans parallèles à un axe. C'est une première occasion de relier nombre de contraintes et nombre de paramètres : deux équations impliquant trois inconnues permettent d'octroyer un degré de liberté à l'une d'elles, ce qui se traduit par la présence d'un paramètre dans l'écriture générale des points de la droite. Des écritures utilisant la notation bipoint, telles que $P - A = k(B - A)$, constituent, à ce stade, une réduction ostensive des équations paramétriques.

Notons que, dans certaines des questions ci-dessus, les points sont alignés avec l'origine et, dans d'autres cas, ils ne le sont pas. Dans la phase exploratoire, le premier cas de figure peut servir de marchepied pour l'autre, l'idée étant de ramener le second cas au premier en translatant les points de manière à ce que l'un d'entre eux coïncide avec l'origine. C'est un premier pas vers la caractérisation différentielle des plans en sous-espaces vectoriels et sous-espaces affines.

Dans cette deuxième phase de l'ingénierie joue une argumentation hybride mobilisant tantôt des théorèmes de la géométrie synthétique dans l'espace, tantôt des résultats de géométrie analytique plane. Il ne peut donc s'agir d'un discours théorique standardisé puisqu'il se situe dans deux cadres distincts à la fois, mais c'est bien un discours technologique au sens où il justifie et rend intelligible les techniques utilisées pour réaliser la tâche qui consiste à caractériser algébriquement une droite.

Enfin, lors de la troisième phase, une caractérisation des points d'un plan sous la forme $P - A = k(B - A) + k'(C - A)$ pour des réels k et k' appropriés et des points A , B et C non alignés peut émerger de plusieurs manières : ou P est un point d'une droite quelconque parallèle à (AC) et passant par un point variable de (AB) (ou un point d'une droite quelconque parallèle à (AB) et passant par un point variable de (AC) , ou P est le sommet d'un parallélogramme construit sur A , un point quelconque de (AB) et un autre de (AC) . Cela permet de rapprocher la conception d'un plan comme surface réglée de la caractérisation analytique du parallélogramme en termes de somme de bipoints. Un formalisme vectoriel remplace in fine cette notation bipoint, permettant d'uniformiser l'écriture des droites ou celle des plans que celles-ci ou ceux-ci passent ou non par l'origine du repère.

UN APERÇU DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

Notre ingénierie a fait l'objet de trois expérimentations, comprenant chacune environ 15 heures de cours. La première s'est déroulée en dernière année de l'enseignement secondaire, dans une classe d'élèves réputés faibles dans leur ensemble ; la deuxième dans une classe de dernière année du secondaire jugée « hétérogène » par le professeur et la troisième dans un groupe d'étudiants en première année d'un cursus de formation initiale de futurs professeurs de collège (encore dispensée en Belgique par des Ecoles supérieures non universitaires). De ces trois publics, seul le troisième avait reçu un enseignement sur le sujet, au cours de son passage dans l'enseignement secondaire, dans la transposition didactique habituelle telle que décrite à la section 2. Nous assimilerons cependant leurs réactions à celles des autres élèves dans la mesure où, la plupart du temps et ce fait est significatif, ils ne s'appuient nullement sur ce premier enseignement. Les élèves ou étudiants ont été invités à travailler en autonomie par petits groupes de quatre. Dans les classes de l'enseignement secondaire, ont été filmés un même groupe pendant toutes les séances et les phases d'institutionnalisation et, dans l'enseignement supérieur, les étudiants devaient, pour chaque question, remettre un écrit rendant compte de leur réflexion.

Dans cet article, nous nous limiterons aux réactions d'élèves aux prises avec deux tâches seulement : d'une part, l'interprétation géométrique, dans l'espace, d'une équation du type $y = ax + b$ et, d'autre part, la recherche d'une équation caractérisant les points du plan Oxy . A l'instar de Sackur et al. (2005), nous ferons de ces expérimentations un compte-rendu panoramique, propre à faire apparaître rapidement une interprétation des faits au prix de certaines libertés quant à la chronologie et nous renvoyons à la thèse de Lebeau (2009) pour un relevé précis des verbatims obtenus, pour chaque classe, dans le groupe filmé de quatre élèves et pour une analyse plus circonstanciée que ne contredit pas notre interprétation. Quelques échanges seulement sont repris ici, sans distinguer leur origine. Nous les avons numérotés pour y renvoyer aisément lors de l'analyse. Les élèves y sont notés Ei pour pouvoir les distinguer au sein d'un même échange et les propos du professeur sont précédés par le diminutif « Prof ».

1. Réactions à la première tâche de la première phase

Rappelons la question :

Donnez le lieu des points de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) vérifient l'équation $y = -3/2x + 3$. Donnez quelques points vérifiant

l'équation. Justifiez vos réponses.

Une première interprétation en termes de droite, couplée d'un embarras relatif à la cote z

Comme nous l'avions prévu, la plupart des élèves interrogés interprètent dans un premier temps l'équation donnée comme étant celle d'une droite, ce qui rejoint les observations faites par le groupe CESAME. Cependant ils se doutent, sans doute par référence au contrat lié au contexte de travail, qu'il faut faire intervenir la variable z , ne fût-ce que, comme dit l'un d'entre eux, pour satisfaire à la demande du professeur qui parle du lieu de points de l'espace dont les coordonnées sont (x, y, z) . Ce qui fait douter plusieurs élèves de leur première réponse, et peut éventuellement leur laisser entrevoir une variété de positions possibles pour cette droite :

(1) « Ici, comme on a fait le dessin de l'équation donnée, c'est par rapport à z égal à zéro, on a fait la base comme si c'était le plan à deux dimensions mais comme on est à trois dimensions, c'est d'office comme z égal à 0, à la base. On peut montrer que l'on peut monter ou descendre cette droite autant que l'on veut et que cela va donner une espèce de plaque plane dans l'espace ».

Au début du travail, le rôle à faire jouer à z varie considérablement d'un élève à l'autre. Certains élèves l'ignorent tout simplement, remplissant un tableau de valeurs possibles où seules les coordonnées x et y apparaissent tout en représentant un repère à trois axes. D'autres lui donnent la valeur nulle :

(2) « C'est simple en fait, pour le z , si on ne nous le donne pas, il sera nul ».

Ou encore ils utilisent le symbole désignant l'infini pour signifier que z peut prendre des valeurs réelles quelconques. Certains élèves pensent pouvoir trouver z comme solution d'une équation et expriment leur impuissance à résoudre cette dernière par rapport à la variable considérée :

(3) « Mais tout le monde se casse la tête pour trouver le z , mais il n'y a pas de z dans l'équation, on ne saurait pas le trouver ! ».

Quelques-uns prennent l'absence de z comme l'indice qu'il faut travailler dans le plan alors que d'autres interprètent la consigne par l'obligation de considérer un solide tel un cube ou une « boîte ».

Les divergences suscitent des débats entre élèves et l'on peut observer une évolution semblable à celle décrite par Sackur et al. (2005) où l'on voit le groupe aller collectivement d'une valeur nulle de z à une valeur quelconque en passant par l'absence de valeur en tant que solution d'équation. Mais il nous semble important de

rapprocher cette progression de celle relative à l'interprétation géométrique de l'équation proposée tant elle nous paraît liée à celle-ci. Ainsi, un élève fait varier z entre plus et moins l'infini tout en l'interprétant par le caractère non fini du lieu :

(4) « Pour le z , c'est plus ou moins l'infini et la surface entre les deux est aussi infinie donc ».

Et un autre donne une interprétation correcte et complète du lieu en s'appuyant précisément sur l'absence du z :

(5) « S'il n'y a que deux inconnues, les solutions sont dans un plan. Comme c'est l'inconnue z qui manque, le plan est vertical ».

Nous allons décrire comment les élèves progressent d'une première interprétation de l'équation en termes de droite à une vision correcte en terme de plan.

Une première interprétation incorrecte qui sert toutefois de marchepied

Toujours conformément à nos prévisions, les élèves se servent de leur première interprétation de l'équation $y = -3/2x + 3$ comme d'un objet qui engendre un autre soit par mouvement, soit par empilement, soit par considération de projections.

Dans l'extrait suivant, l'absence de la variable z dans l'équation fournie conduit à *l'idée de mouvement*. Celle-ci est induite ou suggérée par le choix arbitraire de la valeur donnée à la variable z : la droite de base est déplacée à la « hauteur » donnée par cette cote.

(6) E1 : « Comme on n'a pas de z , cela peut être n'importe où, cela peut être là, là ou là [l'élève effectue un geste montrant un déplacement en hauteur], cela n'a pas d'importance. Il y a juste une importance pour x et y et puis z , après, si tu dis qu'il est à un, tu le mets là [l'élève indique avec sa main une hauteur], c'est une droite. Elle va bouger non pas comme cela [l'élève montre son doigt en pointant le plafond de manière oblique] ou comme cela [l'élève dirige son doigt vers le sol] mais elle va bouger normalement (l'élève place son doigt parallèlement au sol et le fait monter en maintenant cette position parallèle), tu comprends ? »

Prof : « Et dans l'espace, cela représente quoi pour toi ? »

E1 : « Une droite qui monte comme ça » [L'élève effectue un geste de la main en la montant verticalement vers le haut].

E2 : « S'il n'y avait que x et y , ça serait que la droite telle qu'elle, mais comme c'est en trois dimensions, on voit la droite comme cela et comme on peut la bouger partout, cela fait une espèce de plaque ».

Les gestes de l'élève indiquent bien que ce sont des translations qu'il a en tête même s'il les pense en termes de mouvements : tous les

points de la droite ou de la parabole de base subissent le déplacement et, dans ce déplacement, la direction de la droite est conservée.

La génération du plan dans l'espace s'obtient chez d'autres élèves par **empilement de droites** sans référence explicite au mouvement. Par exemple, ils dessinent l'ensemble des droites situées à diverses positions possibles indiquées par la valeur du z :

(7) Prof : « Que dessines-tu ? »

E1 : « c'est une droite du plan »

Prof : « de quel plan ? »

E1 : « du plan recherché »

Prof : « Et du plan $O\dots$ »

E1 : « du plan Oxy »

Prof : « Au fait « recherché », tu sais déjà que c'est un plan que tu cherches ? »

E1 : « Oui, parce que z a plusieurs valeurs, cela va faire un plan »

Prof : « Et bien dessine des points qui n'ont pas un z nul pour m'expliquer »

[l'élève complète son dessin par plusieurs droites parallèles à la première et obtient un empilement de droites parallèles].

Enfin, certains élèves procèdent par **projection** : ils dessinent des droites perpendiculaires au plan Oxy et s'appuyant sur la droite de base pour projeter sur le plan Oxy , soit des points de même cote, soit des points de cotes différentes. Il s'agit pour eux de considérer tous les points ayant les mêmes abscisses et ordonnées que les points de la droite du plan Oxy mais ayant une cote arbitraire ou encore tous les points de l'espace dont les projections, parallèlement à l'axe Oz sur le plan Oxy , se situent sur la droite d'appui.

(8) E1 : « Tous les points sur ce plan là vérifient l'équation »

Prof : « Et le plan est formé par quoi ? »

E1 : « Toutes les droites verticales »

Prof : « Et comment dessines-tu les verticales ? »

E1 : « Sur cette droite là »

[l'élève indique la droite dessinée dans le plan Oxy].

Nous avons également observé des figures où deux des méthodes sont visibles : celle de l'empilement de droites parallèles dessinées à différentes cotes et celles de projections le long de droites parallèles à Oz s'appuyant sur la droite de base dans le plan Oxy . Il est à noter

aussi que l'idée de mouvement reste fort prégnante chez plusieurs élèves, même après que le professeur ait institutionnalisé la technique de la « coupe plane » et celle de « projection » telles que décrites plus haut.

Ce qui est susceptible d'enrichir le milieu

Le milieu comporte pour nous les échanges entre élèves et les débats que suscitent leurs points de vue contradictoires. Mais, on peut imaginer que font également partie du milieu des interventions du professeur ne dénaturant pas le travail entrepris. Ainsi en est-il de l'intervention suivante qui consiste à demander aux élèves si tel ou tel point appartient au lieu cherché, ses deux premières coordonnées satisfaisant l'équation tandis que sa cote n'est pas nulle, par exemple (4, -3, 10) ou (0, 3, 4) :

(9) Prof : « Par exemple, si je vous donne les coordonnées (0, 3, 4), vérifient-elles l'équation ? »

E1 : « C'est pour tous les z ! »

Prof : « vérifient-elles l'équation ? »

E1 : « Oui »

(...)

E2 : « z peut prendre n'importe quelle valeur, il vérifiera l'équation si x et y répondent à l'équation ».

Dans d'autres groupes, de telles interventions débouchent sur un débat qui oppose les élèves continuant à affirmer qu'un point ne peut appartenir au lieu si sa cote n'est pas nulle à ceux prenant conscience que cette cote peut être quelconque vu qu'elle n'est pas reprise dans l'équation.

Quant à la consigne : *Donnez quelques points vérifiant l'équation* elle est susceptible a priori d'enrichir le milieu, pouvant inciter les élèves à structurer les points fournis en sous-ensembles qui les mettent sur la voie d'une technique ou d'une autre : ainsi des points de mêmes abscisse et ordonnée respectives et de cote quelconque qui induisent l'idée de projection ou des points de cote fixe qui forment une droite parallèle à la droite d'intersection du plan d'équation $y = -\frac{3}{2}x + 3$ avec le plan Oxy et qui mènent à la technique de la coupe plane ou à son équivalent en termes de déplacement. Nous avons pu observer de telles circonstances surtout à l'occasion de la question 2 qui demande aux élèves le lieu des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $y = x^2$ et à propos de laquelle le professeur a ajouté une exigence supplémentaire : celle de donner une écriture pour tous les points de la surface. Par exemple, un élève réinvestit l'idée de

projection pour avoir donné des points de cette surface tous d'abscisse et d'ordonnée égales à 1 :

(10) Prof : « Pouvez-vous trouver une écriture pour tous les points de la surface ? »

E1 : « On donne des points pour x et y et pour z on dit que c'est l'infini, cela peut être n'importe quel point de l'infini »

E1 : « Je noterai $(1, 1, z_{\pm\infty})$. Le point sur la droite à n'importe quel z , comme -10000 ou 3 ou 4 »

E2 : « $(1, 1, z)$, c'est un point qui se balade ».

Remarquons que c'est la perception de la surface comme une surface réglée, constituée par les droites de projection des points sur la parabole de base du plan Oxy ou les droites le long desquelles la parabole va glisser, qui sont souvent à la base des premières écritures génériques pour les coordonnées des points de la surface et qui préfigurent l'écriture paramétrée, telles que (x, x^2, z) . Ainsi, les raisonnements prennent appui non seulement sur les aspects algébriques de la question - l'équation - mais aussi sur les représentations qui ont servi à décrire le type de surface à découvrir.

Notons aussi que cette structuration ou une autre est plus difficile à imaginer lorsque l'équation contient les trois coordonnées, comme dans la question 4 qui mentionne l'équation $z = x^2 + y^2$, car il n'existe pas alors d'objet géométrique contenu dans un plan fondamental, modélisé par la même équation, et qui peut être déplacé ou servir de projection.

Des élèves continuent malgré tout à interpréter l'équation $y = -3/2 x + 3$ comme celle d'une droite

Evoquer une droite qui bouge à propos de l'équation $y = -3/2 x + 3$, ou l'idée d'empilement ou encore recourir à celle de projection ne signifie pas forcément, pour beaucoup d'élèves, que le plan engendré à partir de cette droite de base puissent être modélisé par la même équation. Plusieurs en effet considèrent ce plan comme la zone de parcours de la droite en continuant à interpréter l'équation comme celle de ce premier objet géométrique qui bouge ou que l'on empile :

(11) Prof : « Et dans l'espace, cela [l'équation $y = -3/2 x + 3$] représente quoi pour toi ? »

E1 : « Une droite qui monte comme ça » [L'élève effectue un geste de la main en la montant verticalement vers le haut].

Ce qui manque donc ici aux élèves, c'est de pouvoir imaginer tous les points du plan engendré par le déplacement de la droite ou l'empilement de droites parallèles comme l'ensemble des solutions de

l'équation, c'est-à-dire de respecter la dernière étape des techniques explicitées à la section 3 de cet article. Comme le montre l'extrait suivant, cette difficulté est liée à la manière d'interpréter l'absence de z dans l'équation :

(12) E1 : « Je vais faire le dessin de l'équation $y = -3/2x + 3$ pour montrer que l'on peut monter cette droite sur l'axe des z »

[...]

E1 : « Ici, comme on a fait le dessin de l'équation donnée, c'est par rapport à z égal à zéro, on a fait la base comme si c'était le plan à deux dimensions, mais comme on est à trois dimensions, c'est d'office comme z égal à 0, à la base. On peut montrer que l'on peut monter ou descendre cette droite autant que l'on veut et que cela va donner une espèce de plaque plane dans l'espace ».

[...]

Prof : « Finalement, votre réponse à l'ensemble des points vérifiant l'équation, cet ensemble de points forme quoi ? »

Prof : « Cette équation, dans l'espace, cela forme une droite ? »

E1 : « Tout dépend du z car cela pourrait donner... »

E2 : « Mais non ! Cela sera toujours une droite ! »

E3 : « Il n'y a pas de z ! »

E1 : « Oui, donc moi, je dirai une droite »

E3 : « Et on ne sait pas où elle se situe »

Prof : « Et la surface plane ? »

E1 : « C'est l'ensemble des points où la droite peut se trouver ».

Cette difficulté pousse l'un ou l'autre élève à adapter l'équation de la droite à sa position. Ainsi, dans l'extrait suivant, l'élève a modifié l'ostensif algébrique donné au départ de la question pour y faire apparaître la variable z fixée à différentes valeurs ; la valeur choisie est reprise ici en coefficient pour la lettre z , ce qui algébriquement ne convient évidemment pas. Cependant, le dessin de l'élève montre bien qu'il s'agit pour elle de considérer les différentes positions de la droite de base à des cotes fixées arbitrairement :

(13) « Dans le plan Oxy , z vaut zéro et l'équation est $y = -3/2x + 3 + 0.z$.

Si je mets la droite à la valeur 1 pour le z , j'obtiens une droite à une hauteur 1, $y = -3/2x + 3 + 1.z$. Pour z valant 2, j'ai une droite à la hauteur 2 et $y = -3/2x + 3 + 2z$, et ainsi de suite, pour z valant 3, $y = -3/2x + 3 + 3z, \dots$ ».

2. Réactions à la deuxième tâche (fin de la première phase)

Dans l'ingénierie proposée, la tâche d'interprétation d'équations est suivie d'une étape où l'on demande aux élèves de donner des équations caractérisant des plans fondamentaux ou des plans parallèles à l'un d'eux. Attardons-nous ici à la question suivante : « Donnez, dans l'espace, une équation algébrique caractérisant le plan Oxy . » qui donne lieu à des réactions dont nous épinglerons celles décrites ci-dessous.

Plusieurs élèves ne comprennent pas la question

Certains élèves estiment qu'il est impossible d'associer une équation au plan de coordonnées Oxy se référant à leur expérience antérieure lorsqu'ils travaillaient à deux dimensions et faute de se représenter ce plan dans un repère à trois dimensions :

(14) E1 : « Je ne comprends pas la question ».

Prof : « Tout à l'heure, on avait parlé d'une équation pour Oxy , c'est la même chose ici, mais on va aller « plus loin » par la suite et on ne va pas se limiter à ce qu'on a déjà fait ».

Prof : « La fois passée, on vous donnait l'équation et on vous demandait ce que c'était (géométriquement), cette fois, on vous dit ce que c'est et on vous demande l'équation ».

E1 : « Mais qui correspond ici à quelle équation ? »

Prof : « Mais non, on vous demande l'équation, on vous dit l'objet : le plan Oxy et on vous demande l'équation »

E1 : « On n'a pas de dessin... comment faire ? »

Prof : « Vous pouvez faire un dessin vous-même »

E1 : « Quel dessin ? »

Prof : « Oxy , tu sais le dessiner si tu mets des axes »

E2 : « Mais, il n'y a pas d'équation pour cela !! ».

Et cet autre élève :

(15) E3 : « Il y a plusieurs équations, je ne comprends pas, comment peut-on donner une équation à un plan ? »

Caractériser les points du plan ou exprimer toutes les relations possibles entre eux ? La relation $z = 0$ ne suffirait pas ...

Ce n'est pas que la relation $z = 0$ ne vient pas du tout à l'esprit des élèves. Bien au contraire. Cependant, ceux-ci se sentent obligés d'ajouter une relation ou une autre représentative de toutes celles qui

pourraient relier les coordonnées x et y dans le plan Oxy , du genre $y = x^2$ ou $y = x$ qui sont connues :

(16) Prof : « Tous les points qui sont dans Oxy ne vérifient-ils pas tous la même chose ? »

E1 : « $y = x^2$ si $z = 0$ »

E2 : « Oui, c'est ça ! »

Prof : « Cette équation est-elle vérifiée par tous les points de Oxy ? »

E2 : « Oui, il faut que $z = 0$ et puis il y a x et y qui sont dans un rapport, si, si, je vois, ... »

Prof : « Notez toujours ce que vous avez dit, vous avez parlé de $y = x^2$, c'est vérifié par tous les points de Oxy , par tous ? »

E2 : « Sauf zéro »

Prof : « Et si je prends le point (4,5,0) il est vérifié $y = x^2$? »

E2 : « Non »

Prof : « Il est dans Oxy ? »

E2 : « Oui »

Prof : « Il ne vérifie pas $y = x^2$ mais il est dans Oxy »

E2 : « Eh bien, $x = y$ alors »

ou en utilisant une relation moins connue entre x et y qu'on pourrait presque supposer prise au hasard :

(17) E3 : « $0 = x^3 + y^3$ ».

Certains évoquent toutefois la difficulté de trouver une relation qui permet de prendre en compte tous les points du plan :

(18) E1 : « En fait, ce n'est pas l'équation du plan le problème, c'est l'équation de tous les points du plan »

E1 : « On veut une équation qui calculera tous les points qu'il y a dans le plan, c'est ça qu'on cherche ? »

Prof : « Mais tous les points qu'il y a dans le plan et le plan, ce n'est pas la même chose ? »

E1 : « Ben oui, d'accord, mais... »

E2 : « C'est pas possible pour tous les points qu'il y a dans le plan... »

Prof : « Vous pouvez faire tout ce que vous voulez pour la trouver, il y a plusieurs manières de raisonner. Vous avez bien compris la question ? »

E3 : « On veut trouver une équation que vérifient tous les points du

plan »

Prof : « Tous les points du plan ont des coordonnées (x, y, z) qui vérifient l'équation »

Prof : « Qu'est-ce qui vous bloque ? »

E1 : « C'est que je dois trouver une équation qui vérifiera tous les points de n'importe quelles coordonnées $(0, 1, 2)$ et $(0, 20, \dots)$ par exemple... je connais celle pour la parabole, mais ici, ... ».

D'autres choisissent de résoudre cette difficulté en paramétrant la relation proposée pour lier x et y :

(19) E1 : « $y = x + R$ avec $z = 0$, le $+R$ pour obtenir l'ensemble des droites et $z = 0$ pour rester dans le plan Oxy »

ou

(20) E2 : « , où a, b et d sont des réels. Ce sont deux

équations liées, la première disant que x et y peuvent prendre n'importe quelles valeurs et la deuxième disant que z vaut zéro. Les coordonnées x et y sont libres car ils peuvent prendre n'importe quelles valeurs dans cette équation et les paramètres a, b et d varieront pour ajuster cette équation, dépendront de x et y ».

Notons que ces élèves reviennent au sens premier donné à une équation du premier degré en x, y qui modélise une droite dans le plan, ce qui peut leur paraître normal dans la mesure où la condition $z = 0$ assure, à leurs yeux, qu'on travaille bien dans un plan.

De toute évidence, pour ces élèves, la relation $z = 0$ ne semble pas suffire à modéliser algébriquement le plan Oxy . Cela se traduit, comme on l'a vu, par l'ajout d'une équation supplémentaire qui viendrait suppléer une sorte d'information « absente » de $z = 0$, voire celui d'un propos discursif expliquant le caractère libre de x et y , ou, comme ci-dessous, donnant une précision sur la position du plan :

(21) E1 : « $y = mx + n$, z est inexistant, sinon plan vertical »

ou

(22) E2 : « $y = kx$ avec $z = 0$, on impose la valeur $z = 0$ pour ne pas avoir un plan parallèle à Oxy ».

Sans doute n'y est pas étranger ce que pensent les élèves de la forme d'une équation, $z = 0$ ayant plus l'allure d'une solution d'équation que celle d'une équation :

(23) E1 : « $z = 0$ »

Prof : « Et ce n'est pas une équation cela ? »

E2 : « Non, ... enfin, je ne sais pas, je ne crois pas ».

DES OBSTACLES AUX CONNAISSANCES D'ORDRE II,
INTERPRETES EN TERMES DE CONTRAT DIDACTIQUE

Nos observations rejoignent, à plus d'un égard, celles faites par Sackur et al. (2005) : en particulier, les élèves que nous avons interrogés éprouvent une difficulté manifeste à regarder, quand il y a lieu, des équations du type $y = ax + b$ et $x = k$ comme des équations de plans. Mais nos données s'écartent aussi de celles de ces chercheurs. Ainsi, nous n'avons vu aucun élève faire intervenir des aspects plus structurels liés par exemple aux dimensions des objets géométriques, tel cet étudiant, observé par le groupe CESAME, qui interprète $x = 3$ comme un point sur une droite, une droite dans un plan et un plan dans l'espace, instruit qu'il est du concept d'hyperplan. C'est que les élèves concernés par notre recherche sont néophytes par rapport à quelque contenu que ce soit de la géométrie analytique à trois dimensions ou de l'algèbre linéaire alors qu'on peut supposer que, chez des étudiants qui ne le sont pas, cohabitent des connaissances « locales tenaces » inopportunes et des connaissances idoines contribuant à rectifier les premières, que ce soit d'ailleurs parce que ces étudiants ont expérimenté la nécessité épistémique ou parce qu'ils sont sensibles à un quelconque argument d'autorité. N'avons-nous pas rencontré, en effet, des étudiants entamant des études universitaires en mathématique interpréter d'abord l'équation $ax + by + cz + d = 0$ comme la généralisation à l'espace de l'équation d'une droite dans un plan et se laisser convaincre ensuite qu'il s'agit de l'équation d'un plan par d'autres étudiants affirmant que leur professeur du secondaire « le leur avait dit » ? Reste à enquêter davantage sur le caractère robuste de ces réactions.

En outre nos expérimentations apportent des informations supplémentaires qui éclairent la question de didactique traitée ici et qui concernent les tâches proposées aux élèves ou les interventions du professeur susceptibles d'enrichir le milieu dans lequel nous confirmons l'importance d'autrui (échanges 9 et 10). Nous montrons aussi la part d'adidacticité des situations proposées, fût-elle très locale, et les techniques qu'elles induisent, des connaissances premières devenues inadéquates y étant falsifiées et y servant de marchepied vers des connaissances nouvelles en suscitant un débat sur le sens des équations. Et c'est sur ce dernier point que nous focaliserons notre analyse dans cet article en examinant de plus près la difficulté des élèves à concevoir les équations comme des égalités contraignant certaines variables tout en laissant les autres varier librement. Un retour sur le concept de dénotation nous y aidera.

1. Une dénotation devenue inhabituelle

Nous partirons de ce concept de « dénotation » pour montrer qu'il prend ici un sens que ne peuvent assumer les élèves eu égard à ce qu'ils pensent qu'on attend d'eux dans la perspective du contrat vécu jusqu'alors vis-à-vis des objets algébriques en général. Ce concept est emprunté à Frege par Sackur et al. (1997) qui l'adaptent dans le contexte des expressions algébriques de la façon suivante :

« Nous soutenons qu'un élève doit savoir :

- qu'une expression comme $y(2x+y)$ a une valeur numérique,
- que cette valeur dépend des valeurs de x et y ,
- que cette valeur n'est pas modifiée par les transformations conformes aux règles algébriques que cette expression peut subir, par exemple celle qui transforme $y(2x+y)$ en $2xy+y^2$.

C'est cela que nous appellerons 'dire qu'un élève doit savoir que les expressions dénotent' même s'il ne peut pas le verbaliser sous cette forme. [...]. La notion de dénotation est une 'clé de voûte' : c'est elle qui fait la différence entre le 'pur calcul symbolique' des ordinateurs et l'algèbre effectivement pratiquée » et de conclure que « les 'calculateurs aveugles' ignorent que les expressions dénotent. A plus forte raison, ils ne peuvent pas savoir que cette dénotation est conservée par les transformations ».

L'absence de conscience, chez plusieurs élèves, que les expressions algébriques dénotent est épinglée par plusieurs chercheurs dans des contextes différents. Ainsi Schneider (1988) note l'incapacité des élèves à remplacer la valeur de x dans l'expression analytique connue d'une fonction donnée pour obtenir l'ordonnée correspondante, ceux-ci s'attachant plus à une fonction de désignation des expressions analytiques (telle ou telle expression étant « l'étiquette » de telle ou telle forme graphique) qu'à l'idée que les graphiques sont les lieux de points dont les coordonnées sont reliées par l'expression en question. Quant à Chevallard (1990), il relate un fait similaire à propos de la transformation d'une expression polynomiale qu'on demande de factoriser. Or, la dénotation est un moyen de discriminer une première conception des équations comme système descripteur d'un objet graphique ou géométrique de sa vraie conception comme contrainte portant sur des coordonnées et sa méconnaissance est un obstacle majeur de l'apprentissage de l'algèbre élémentaire, ainsi que développé par Drouhard (1995). Cependant, cette dénotation se présente de manière inhabituelle dans le cas d'équations incomplètes comme nous allons le voir.

Les élèves que nous avons interrogés ont de fait quelque idée de ce qu'est la dénotation : en réponse aux consignes qui les engagent à considérer cet aspect des équations, ils calculent assez facilement des points dont les coordonnées x et y vérifient l'équation $y = -3/2x + 3$. Cependant, comme nous l'avons décrit, ils ont quelque peine à faire intervenir z dans ce jeu, du moins dans un premier temps, le négligeant purement et simplement ou le considérant comme étant nul (échanges 2). Et c'est ce qui les incite à considérer qu'on a affaire à l'équation d'une droite. Or, c'est bien en considérant des points dont les deux premières coordonnées vérifient l'équation mais dont la cote z varie arbitrairement qu'ils seront amenés ensuite à concevoir des points sur une droite qui bouge ou sur des droites strictement parallèles à la première ou encore des points dont la projection sur Oxy appartient à celle-ci (échanges 6 à 8). La difficulté majeure réside dans le fait que seules les lettres x et y sont visibles dans l'ostensif algébrique et que la lettre z en est absente : on peut donc opérer la dénotation sur x et sur y mais en aucune manière sur z sauf à penser d'emblée que l'équation s'écrit sous la forme équivalente $y = ax + b + 0z$. Or, cette dernière variable est plus « variable » que les deux autres n'étant pas liée à l'une d'elles. Mais cette variation ne peut être exprimée au moyen de l'équation : n'importe quelle valeur de z peut convenir alors même qu'il semble impossible, à première vue, de le traduire en se servant de l'équation elle-même. Donc la dénotation par rapport à z ne peut être pensée de manière habituelle.

La situation s'aggrave avec les équations des plans fondamentaux ou celles de plans parallèles à ceux-ci. Ainsi, les points du plan $z = 0$ possèdent trois coordonnées dont les deux premières peuvent varier sans contrainte. Cette double liberté autorise une double pluralité de points mais, à nouveau, il semble difficile a priori d'exprimer cela au moyen d'une égalité qui ne parlerait que de z .

Pourtant, les élèves concernés ont déjà rencontré des situations analogues puisqu'ils ont étudié deux ans auparavant les équations de droites dans un plan et, en particulier, les équations de droites parallèles à un axe du repère. Mais ce n'est sans doute pas pour rien que les équations du type $x = k$ ou $y = m$ sont souvent mal interprétées par les élèves en cours d'apprentissage ou après. Souvent, ils prennent la première forme comme caractéristique des droites parallèles à Ox et la seconde comme représentant les droites parallèles à Oy . Et l'on peut observer une même interprétation erronée chez des élèves-professeurs, assez rarement il est vrai. C'est que, à nouveau, seule une dénotation impliquant des points dont l'abscisse vaut k et dont l'ordonnée varie arbitrairement (ou dont l'ordonnée vaut m et dont l'abscisse est quelconque) peut conduire à une conception correcte. Or, l'absence de

y (ou celle de x) dans l'équation empêche une telle dénotation inhabituelle en regard de celle que l'on peut pratiquer pour une équation du type $y = ax + b$. Faute de pouvoir l'imaginer, les élèves ne peuvent alors que recourir à une conception de l'équation comme système descripteur d'un objet géométrique et non à sa signification comme contrainte portant sur des coordonnées. Dans leur perspective, la mention de x (respectivement celle de y) dans l'équation serait indicative qu'il faut privilégier l'axe Ox et non pas l'axe Oy (respectivement l'axe Oy et non pas l'axe Ox) pour spécifier la position des droites représentées par les équations concernées.

2. Des « catastrophes » dans la gestion des ostensifs supposée adéquate par les élèves

Or, le fait que la dénotation a un tel caractère inhabituel peut paraître « catastrophique » aux yeux des élèves, en un sens que nous allons préciser. Notre référence est la Théorie Anthropologique du Didactique au sein de laquelle Chevallard (1992) interprète des erreurs classiques liées au problème du zéro telles que $0.4 = 4$. Loin de se contenter d'explications habituelles sur la prétendue difficulté du « concept » de 0 qui sont, à ses yeux, des « délires culturels », Chevallard adopte le point de vue de Brousseau selon lequel tout comportement a une signification « en relation avec les conditions concrètes de l'activité de l'élève » et, in fine, liée au contrat didactique. En l'occurrence, un élève croit devoir gérer convenablement toute expression algébrique qui lui est confiée en en préservant la complexité ostensive et en respectant des différences ostensives. Ainsi, en ce qui concerne ce dernier aspect, les équations $3x = 12$, $4x = 12$, $2x = 12$ diffèrent par le coefficient multiplicateur de x : il est donc normal que l'élève trouve des solutions différentes à ces équations respectives car ce sera la preuve de sa bonne gestion. Il n'en va pas de même des équations $3x = 0$, $4x = 0$, $2x = 0$, la réponse unique $x = 0$ ne contenant plus d'information sur les différences ostensives initiales liées au fait que les coefficients de x sont différents. D'où, l'idée de la conserver - avec l'intention de bien gérer ces différences - en donnant une réponse qui garde le souvenir de ce coefficient de x , par exemple, $x = 2$ ou $x = -2$ ou encore $x = 1/2$ pour la 3^{ème} équation. La présence du 0 dans le 2^{ème} membre apparaît ainsi comme une « catastrophe » pour l'élève car elle l'empêche de bien gérer l'information donnée par le professeur et de répondre à ses attentes supposées.

Dans le cadre de nos expérimentations, gérer un ostensif algébrique revient, pour l'élève, à l'interpréter géométriquement de manière correcte ou à modéliser pertinemment un objet géométrique.

On peut s'attendre dès lors à ce que la préservation de la complexité ostensive et le respect des différences ostensives prennent, dans ce cas, une tournure particulière. Tout d'abord, préserver la complexité ostensive d'une équation telle que $y = -\frac{3}{2}x + 1$ suppose de faire intervenir les variables qui y sont mentionnées et elles seules. Et c'est ce qui explique que plusieurs élèves négligent la variable z lorsqu'ils donnent des points dont les coordonnées vérifient l'équation ou encore que d'autres interprètent l'absence de z comme la consigne explicite de travailler dans le plan. On peut aussi comprendre pourquoi d'autres élèves encore seraient pris dans une contradiction : ne pas faire jouer la variable z absente de l'équation et la faire intervenir quand même pour respecter la consigne de travailler dans l'espace et pourquoi ils la gèreraient en octroyant une valeur nulle à z , manière facile sans doute de concilier le respect de la complexité ostensive et la tâche demandée (échanges 2). Par contre, penser l'équation sous la forme $y = -\frac{3}{2}x + 1 + 0z$ revient bien à complexifier l'information ostensive donnée. On peut expliquer par là le caractère tenace d'une interprétation de cette équation en termes de droites auquel participe, en outre, le respect des différences ostensives. En effet, dans leur expérience scolaire antérieure, les élèves n'ont jamais rencontré d'équation dont l'interprétation est plurielle. Vraisemblablement par référence au contrat habituel, ils s'en tiendraient à l'idée qu'un ostensif algébrique s'interprète géométriquement de manière unique. Tout ceci explique pourquoi l'équation $y = -\frac{3}{2}x + 1$ reste longtemps attachée à l'image d'une droite.

Elle le demeure même lorsque s'ajoute l'intuition que cette droite bouge et ce fait peut s'interpréter également par le biais des différences ostensives. En effet, certains élèves semblent conserver à cette droite une identité inchangée, un peu comme les élèves qui pensent à l'image d'un point A par une isométrie comme si c'était le même point A qui s'était déplacé. Dans ce cas, ils se doivent de lui garder la même équation pour respecter les différences ostensives (échanges 11 et 12). D'autres élèves, au contraire, rendent compte de manière algébrique du fait que la droite en devient une autre en changeant de position puisqu'ils adaptent l'équation de la droite initiale en lui ajoutant un terme censé préciser cette position (échanges 13). C'est là une autre forme du respect des différences ostensives : à des objets géométriques distincts se doivent de correspondre des ostensifs algébriques différents. Perspective dans laquelle, à nouveau, un plan se doit d'être modélisé par une équation dont la forme diffère de celle d'une droite.

Quant à la difficulté éprouvée par les élèves à trouver une équation pour le plan Oxy , elle s'explique d'une manière équivalente. Comme

on l'a vu, cette tâche n'a pas de sens a priori pour plusieurs élèves habitués à travailler dans un plan qui constitue l'espace entier alors qu'elle suppose de considérer le plan en question dans un espace plus grand (échanges 14 et 15). Qui plus est, il s'agit ici non d'un plan fondamental quelconque mais du plan muni d'un repère dont les axes sont précisément notés Ox et Oy et, dans un tel repère, les élèves sont habitués à modéliser des droites et des courbes sous la forme d'une relation algébrique liant x et y . Dans ce cadre, la réponse attendue, qui est $z = 0$, peut apparaître comme une « catastrophe » qui empêche une bonne gestion de la complexité ostensive laquelle consiste ici à exprimer une multiplicité de relations possibles entre x et y . De fait, plusieurs élèves sont bien conscients qu'il s'agit de travailler dans l'espace et que, par référence à celui-ci, les points du plan Oxy ont une cote nulle. Mais ils ne peuvent accepter que cette seule condition les caractérise et cherchent à exprimer, d'une manière ou d'une autre, la liberté dont jouissent les variables x et y qui sont, malgré tout, les variables privilégiées lorsqu'on travaille dans le plan Oxy . Après tout, cette liberté pourrait sembler tout aussi importante que le fait d'avoir une cote nulle et ils essaient d'en rendre compte, soit en choisissant arbitrairement une relation entre x et y pour compléter l'information contenue dans $z = 0$, quitte à changer de relation (échanges 16 à 18), soit en prenant des familles paramétrées de droites censées recouvrir le plan (échanges 19 à 22). C'est leur manière de proposer une modélisation algébrique dont la complexité ostensive rend compte d'une réalité plurielle en proposant un jeu de relations qui exprime aussi bien la liberté de certaines variables que la contrainte qui porte sur une autre. Ce dernier point de l'analyse met le doigt sur un aspect des équations cartésiennes qui semble étranger aux élèves et sur lequel nous revenons dans la section suivante : seules les contraintes sont prises en compte dans la modélisation algébrique.

3. La liberté des variables ne s'exprime pas : des notions paramathématiques dont l'usage relève du contrat

Si, dans les circonstances analysées aux sections 5.1 et 5.2, la dénotation est inhabituelle, c'est parce qu'elle implique des variables qui ne figurent pas dans l'équation et qui peuvent donc prendre des valeurs arbitraires n'étant pas liées à d'autres. Or, dans une caractérisation cartésienne, cette liberté ne renvoie à aucune réalité ostensive, seules les contraintes étant exprimées comme dit plus haut. C'est bien là, semble-t-il, une difficulté majeure pour les élèves et l'on peut supposer qu'on a affaire ici à une connaissance d'ordre II qui leur fait défaut, des connaissances de ce type étant « très souvent implicites », comme le disent Sackur et al. (2005). Par ailleurs, il n'est

pas inutile de rappeler qu'on a affaire ici à ce que Chevallard (1991) appelle les notions paramathématiques, dont la notion d'équation fait précisément partie : « Les notions paramathématiques ne sont pas 'normalement' des objets d'étude, mais des 'notions-outils de l'activité mathématique'. Elles ne font pas l'objet d'une construction, mais sont 'préconstruites par monstration' (on se contente d'en donner des exemples). Ainsi, les notions d'équation, de variable, de paramètre ». Or, des notions paramathématiques peuvent être liées à des connaissances dites de contrat : elles sont connues des élèves par leurs usages dans une institution donnée, n'étant pas vraiment des objets de savoir ou des objets d'évaluation au même titre que les autres. Et on connaît les embûches liées à de telles connaissances dès que change le rapport institutionnel au savoir, ce qui est le cas ici pour la notion d'équation et la dénotation dont elle peut faire l'objet. Par conséquent, on peut se demander si cette méconnaissance du fait que la liberté des coordonnées ne s'exprime pas ne ferait pas obstacle à la nécessité épistémique pour les savoirs étudiés ici.

Les élèves que nous avons interrogés ont déjà été confrontés à des équations qui expriment une contrainte sur une variable tout en taisant la liberté dont une autre variable jouit. C'est bien sûr à propos des équations de droites qui, dans un plan, sont parallèles à un des deux axes du repère. Mais, précisément, comme nous l'avons dit plus haut, ces équations soulèvent des difficultés qui peuvent perdurer. Il faut dire aussi qu'il manque souvent dans l'enseignement une explicitation de ce comportement mathématique, qui peut paraître bizarre aux élèves, et que ce fait peut entraver sa remobilisation dans les questions traitées ici. L'élève ne pourrait alors comprendre ce qui est pratiquement de l'ordre de la nouveauté pour lui et, ne parvenant pas à adapter la dénotation aux circonstances nouvelles, se replierait sur une appréhension primaire des équations comme système descripteur d'objets. Et ce, même si, préalablement et en d'autres circonstances, certains avaient éprouvé le sens des équations comme contraintes sur les points d'un lieu. C'est en ces derniers termes que nous exprimerions à présent l'hypothèse principale que notre analyse a tâché de rendre crédible.

EN GUISE DE CONCLUSION

Cette hypothèse s'inscrit, comme nous l'avons dit plus haut, dans une recherche plus globale (Lebeau, 2009) qui montre la nécessité de faire travailler les registres cartésien et paramétrique pour eux-mêmes sans les faire découler d'emblée du registre vectoriel. Cette recherche met aussi en évidence en quoi la maîtrise de ces registres suppose une

dialectique entre les trois modes de pensée définis par Sierpiska et al. (1997) : le mode synthétique dans lequel « la pensée essaie de décrire l'objet dont elle a l'intuition », le mode analytique qui définit les objets géométriques par l'entremise d'équations ou de systèmes d'équations et le mode structurel qui dégage du registre analytique des invariants communs qui trouvent à s'exprimer dans l'algèbre linéaire. Mais il s'agit là bien sûr d'un aspect de notre investigation que nous n'avons pu qu'ébaucher ici et dont le développement requiert un autre article.

Les situations que nous avons proposées aux élèves ne sont pas, dans leur globalité, des situations adidactiques car elles requièrent des interventions multiples du professeur pour réduire ou étendre le milieu, au sens où l'entendent Assude et al., (2007). Mais les expériences relatées ici font entrevoir les possibilités d'une activité sémiotique que ces situations offrent. Au niveau du langage bien sûr : - pensons au mot « équation » dont la polysémie requiert un supplément de sens quasiment spécifique à chaque situation rencontrée - ; et aussi au niveau des gestes que nous considérons comme partie prenante d'une telle activité, en nous basant sur les travaux de Azraello et al. (2009) ou ceux de Radford (2009). Nous avons perçu le rôle joué par ces gestes, en particulier lorsque les élèves conçoivent un plan comme un empilement de droites ou comme engendré par le mouvement de l'une d'elles. Une analyse approfondie des gestes faits en de telles occasions, en lien avec les propos discursifs des élèves, pourrait également faire l'objet d'un autre article.

Les questions posées aux élèves et analysées ici font partie, comme décrit plus haut, d'une ingénierie didactique plus complète. C'est une ingénierie qui a fonctionné comme méthodologie de recherche non seulement au sens d'Artigue (1990), parce qu'elle respecte certaines contraintes méthodologiques, mais aussi parce qu'elle a servi à mettre en évidence des observables que l'on peut interpréter en termes d'obstacles d'apprentissage. Mais nous pensons que les mêmes questions et, plus généralement l'ingénierie dont elles sont issues, peuvent alimenter un enseignement qui, au rebours de la transposition didactique habituelle, ne subordonne plus la géométrie analytique à l'algèbre linéaire mais permet plutôt de faire émerger la seconde de la première. Dans cette ingénierie, l'étude de plans parallèles à au moins un axe du repère trouve une place de choix. Outre le fait qu'elle joue un rôle essentiel dans le discours technologique qui justifie une modélisation algébrique des droites et plans de l'espace (voir section 3 supra), elle pourrait permettre aux élèves de faire l'expérience de la nécessité épistémique comme ont pu

le faire les étudiants observés par le groupe CESAME : notre analyse montre en tout cas que toutes les conditions sont réunies pour les faire travailler les équations comme caractéristiques d'un lieu de points.

REFERENCES

- ALVES-DIAS M. (1998) *Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Thèse de doctorat, Paris : Université de Paris 7
- ARTIGUE M. (1990) Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(3) 283-307.
- ARZARELLO F., PAOLA D., ROBUTTI O., SABENA A. (2009) Gestures as semiotic resource in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics* 70 (2) 97-109.
- ASSUDE M., MERCIER A., SENSEVY G. (2007) L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 27(2) 221-252.
- BOUVERESSE J. (1987) *La force de la règle, Wittgenstein et l'invention de la nécessité*. Paris : Minuit.
- CAVAILLES J. (1946, 1997) *Sur la logique et la théorie de la science*. Paris : J. J. Vrin.
- CHEVALLARD Y. (1990) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège – Troisième partie, Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x* 23 5-38.
- CHEVALLARD Y. (1991) *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(1) 73-112.
- CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19(2) 221-265.
- DORIER J.-L., ROBERT A., ROBINET J., ROGALSKI M. (1997) L'algèbre linéaire : l'obstacle du formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. In Dorier J.-L. (ed), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* (pp. 105-147). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectiques outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2) 5-31.
- DROUHARD J.-PH. (1995) Algèbre, calcul symbolique et didactique. In NOIRFALISE R., PERRIN-GLORIAN M.-J. (Dir.), *Actes de la VIIIème école d'Été de didactique des mathématiques*. IREM de Clermont-Ferrand.
- GUEUDET G. (2000) *Rôle de géométrie dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire*. Thèse de doctorat. Grenoble : Université Joseph Fourier – Grenoble 1.
- KRYSINSKA M. (2000) Complémentarité de l'enseignement de la géométrie analytique et du calcul linéaire. *Repères-IREM* 41 85-104.

- LEBEAU C. (2009) *Etude d'une genèse d'un modèle algébrique du système formé par les points, droites et plans de l'espace usuel*. Thèse doctorale, Liège : Université de Liège.
- LEBEAU C., SCHNEIDER M. (à paraître) Étude de la genèse d'un modèle algébrique du système 'points, droites, plans', objets de la géométrie synthétique. Problématisation d'une question didactique in *Actes de la XIVe Ecole d'été de Didactique des mathématiques*. Ste Livrade, Août 2007.
- LE THI H. C. (2001) Difficultés d'apprentissage de la notion de vecteur pour des élèves de première année de lycée en France et au Vietnam. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 21(1/2) 157-188.
- PISVIN C. (1998) *L'algèbre linéaire au cycle secondaire, repères et propositions*, Mémoire de fin d'études. Namur : Facultés universitaires Notre-Dame de la Paix.
- RADFORD L. (2009) Why do gestures ? Senseous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics* 70(2) 111-126.
- ROUY E. (2007) *Formation initiale des professeurs du secondaire supérieur et changements de rationalité mathématique entre l'institution secondaire et l'institution universitaire, le cas éclairant du thème des dérivées*. Thèse doctorale, Liège : Université de Liège.
- SACKUR C., DROUHARD J.PH., MAUREL M., PECAL M. (1997) Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ? *Repères-IREM* 28 37-68.
- SACKUR C., ASSUDE T., MAUREL M., DROUHARD J.PH., PAQUELIER Y. (2005) L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 25(1) 57-90.
- SCHNEIDER M. (1988) *Des objets mentaux 'aire' et 'volume' au calcul des primitives*. Thèse doctorale, Louvain-la-neuve : Université catholique de Louvain.
- SCHNEIDER M. (2007) *Entre recherche et développement, quel choix de valeurs pour l'ingénierie curriculaire ?* Conférence aux "journées d'étude mathématiques", INRP 13-14 juin 2007. Lyon : publication électronique INRP.
- SCHNEIDER M. (2008) *Traité de didactique des mathématiques*. Liège : Éditions de l'Université de Liège.
- SIERPINSKA A., DEFENCE A., KHATCHERIAN T., SALDANHA L. (1997) A propos de trois modes de raisonnement en algèbre linéaire. In DORIER J.-L. (ed.), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* (pp. 249-268). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- WITTEGENSTEIN L. (1995) *De la certitude*. Paris : Gallimard.