

**UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION**

RECOMMANDATIONS RELATIVES AUX MAILLAGES

**P. BECKERS
J.F. DEBONGNIE
B. DELTOUR
L. MASSET**

Rapport LMF/R6 - 1995

Rapport 6

Recommandations relatives aux maillages

Université de Liège - Avril 1997

Etude de faisabilité de la simulation numérique de l'usinage

Rapport n°6 : Recommandations relatives aux maillages (suite)

Groupe de travail : Pierre Beckers
Jean-François Debongnie
Luc Masset

Recommandations relatives aux maillages pour la prise en compte des conditions aux limites

Dans la méthode des éléments finis, il est habituel d'introduire les fixations et les charges sous forme ponctuelle. La justification de cette démarche est basée sur le fait que le modèle discret assure par lui-même indirectement une répartition de cette charge ou de ces appuis. Cette répartition s'effectue différemment selon qu'il s'agisse de modèles statiquement ou cinématiquement admissibles. Dans les premiers, ce sont les appuis qui sont automatiquement répartis tandis que dans les seconds ce sont les charges.

Si l'on restreint l'étude aux modèles purs cinématiquement admissibles, on constate qu'il peut y avoir un problème de convergence lorsqu'on raffine le modèle autour de la charge concentrée. En effet, celle-ci introduit une singularité artificielle. Cette difficulté peut être surmontée en répartissant la mise en charge sur une petite zone, dont l'importance doit être déterminée en fonction de la situation physique réelle. En analyse linéaire, une indication raisonnable serait de limiter les tractions de surface induites par cette charge à une valeur ne dépassant pas la limite élastique. D'autres considérations physiques peuvent aussi intervenir pour la détermination de cette zone.

Pour autant que toutes les charges dites ponctuelles soient remplacées par des charges réparties et que le modèle ne comporte pas d'autres singularités, on peut s'attendre à ce que la convergence de la solution soit de l'ordre de h^p où p est le degré des éléments finis et h la taille caractéristique des éléments du maillage.

1. Essais en dimension 2

Un exemple simple de poutre encastree a été spécialement conçu pour étudier l'effet des charges concentrées sur le comportement de la solution (Figure 1).

Les données de matériau ont été choisies de manière à ce que la tension de cisaillement moyenne sur une section verticale soit égale à 1 et que la flèche calculée par la formule de la résistance des matériaux soit aussi égale à 1 sous la charge.

$$\frac{Px^3}{3EI} = 1 \quad x = 8 \tag{1}$$
$$\frac{P}{ht} = 1 = (\tau_{xy})_{moyen} \quad , \quad t = \frac{1}{2}$$

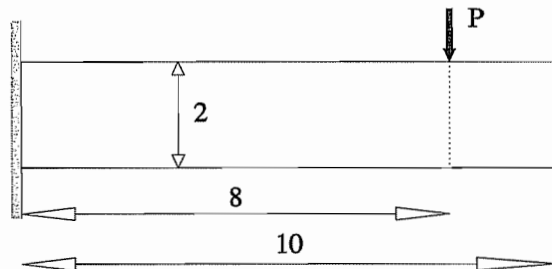


Figure 1 : Modèle géométrique

Le remplacement de la charge concentrée par une charge répartie s'effectue en définissant une pression uniforme sur une petite zone de largeur 0.5 centrée en $x=8$. Il en résulte que la pression à cet endroit est égale à 4. Selon la théorie de la résistance des matériaux, la tension σ_x à l'encastrement est égale à 24 et l'énergie potentielle à 1.

Trois séries d'essais ont été réalisées, les deux premières portent sur l'étude de la charge concentrée en utilisant des éléments de degrés 1 et 2; la troisième porte sur la charge répartie avec des éléments de degré deux. Ces résultats sont reportés dans les tableaux ci-dessous.

Maillage	D.D.L.	Eléments	Energie	$\bar{\eta}$ %
1	756	336	1.040833	10.00
2	2988	1440	1.052407	6.11
3	7240	3589	1.058563	5.11
4	29844	15131	1.067768	4.55

Charge concentrée, degré 1

Maillage	D.D.L.	Eléments	Energie	$\bar{\eta}$ %
1	50	5	1.022483	75.91
2	912	142	1.048308	5.37
3	2790	457	1.053135	4.34
4	5134	849	1.057767	4.20
5	5346	885	1.060398	4.44
6	5648	940	1.063493	4.38

Charge concentrée, degré 2

Maillage	D.D.L.	Eléments	Energie	$\bar{\eta}$ %
1	192	24	1.041740	7.07
2	29362	4987	1.046983	0.82

Charge répartie, degré 2

Les calculs avec charge concentrée produisent toujours un raffinement important à l'endroit où la charge est appliquée (Figure 2).

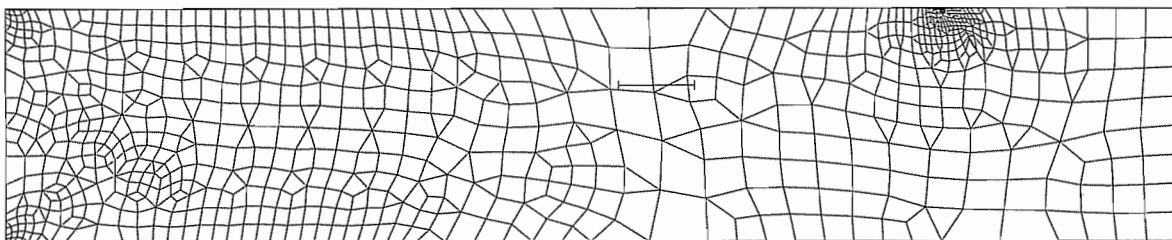


Figure 2 Maillage final de degré 2

Le diagramme des contraintes de von Mises (Figure 3) présente l'aspect attendu. On observe qu'à une très petite distance de l'encastrement la tension est égale à 24, ce qui reflète bien la présence d'une singularité. Par contre, sous la charge, on voit apparaître une concentration de contraintes très importante.

Contraintes equivalentes de von Mises

Energ. poten. 1.0678

Tension de von Mises max = 7907

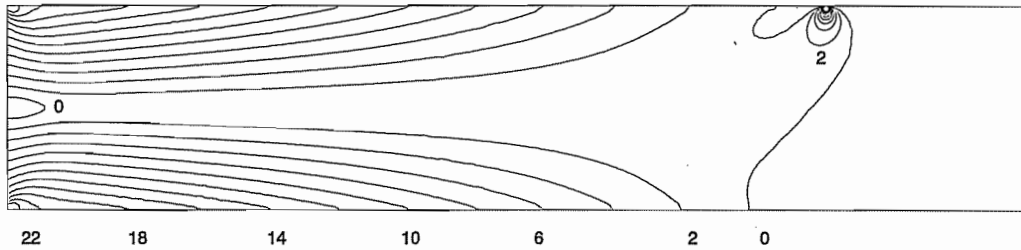


Figure 3 Maillage final de degré 1

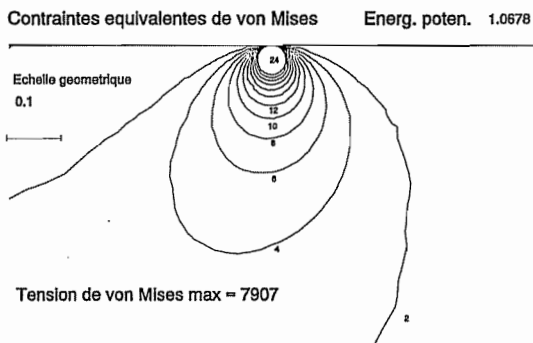


Figure 4 Maillage final de degré 1

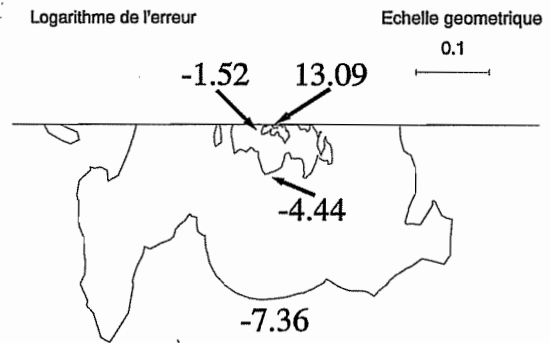


Figure 5 Maillage final de degré 1

Lorsqu'on agrandit la figure dans cette zone (Figure 4), on s'aperçoit que la contrainte atteint une valeur de 7907 pour le dernier maillage, ce qui est 300 fois plus grand que la contrainte maximum calculée par la résistance des matériaux.

La visualisation adéquate de l'erreur est en pratique une tâche difficile car sa distribution est souvent très irrégulière. La visualisation en valeurs absolues des erreurs élémentaires est souvent utilisée, mais elle présente les inconvénients suivants :

1. il est difficile de comparer la distribution des erreurs pour des maillages de niveaux de raffinement différents, car les erreurs élémentaires diminuent sensiblement quand les maillages se raffinent;
2. il est difficile de voir clairement la différence des erreurs élémentaires dans un même maillage, car souvent une petite proportion d'éléments présentent des erreurs très supérieures aux autres;
3. les éléments à forts gradients de contraintes, souvent plus critiques et par conséquent plus intéressants, ne sont pas identifiés, car les erreurs élémentaires en valeur absolue ne représentent pas des caractéristiques locales de la solution exacte.

L'inconvénient (3) met en évidence l'intérêt de visualiser une grandeur liée à la densité de l'erreur, tandis que les inconvénients (1) et (2) montrent qu'il est plus avantageux de visualiser une grandeur normée, adimensionnelle, et de préférence en échelle logarithmique.

En tenant compte des remarques ci-dessus, la grandeur suivante, appelée le logarithme de la densité normalisée de l'erreur estimée est proposée pour la visualisation :

$$D_i = \log \left(\frac{\epsilon_i^2 \Omega}{\Omega_i (\|u_h\|_E^2 + \epsilon^2)} \right), \quad i = 1, n_e \quad (2)$$

ou ϵ_i est l'erreur estimée en norme énergétique de l'élément i , Ω_i le volume de l'élément i , Ω le volume de la structure, et n_e le nombre d'éléments.

Si le maillage est uniforme et si l'énergie de l'erreur ϵ_i^2 est distribuée uniformément, la densité d'erreur est partout égale à :

$$D \approx \log \frac{\epsilon^2}{\|u\|_E^2} \quad (3)$$

La représentation de la grandeur D_i fournit donc les écarts par rapport à cette situation idéale.

Dans un maillage optimisé, toutes les erreurs élémentaires ϵ_i^2 doivent être égales; dans ce cas, la grandeur D_i est, à une constante près, égale à

$$D_i \Rightarrow \log \left(\frac{\Omega}{\Omega_i} \right) \quad (4)$$

Elle fournit par conséquent une image des tailles des éléments nécessaires pour obtenir un maillage optimisé.

Dans des situations générales, l'erreur élémentaire diminue lorsque le maillage se raffine, mais il n'en est pas toujours de même pour la densité de l'erreur. En effet, dans une zone restreinte du maillage, on peut écrire

$$\epsilon_i^2 = C \cdot h_i^{2\beta} \quad (5)$$

et comme,

$$\Omega_i = h_i^d \quad (6)$$

où d est la dimension spatiale du problème, on a

$$\epsilon_i^2 = C \Omega_i^{\frac{2\beta}{d}} \quad (7)$$

La densité de l'erreur est égale à

$$\frac{\epsilon_i^2}{\Omega_i} = C \Omega_i^{\frac{2\beta}{d} - 1} = C h_i^{2\beta - d} \quad (8)$$

A deux dimensions, en admettant que pour un maillage adapté, β soit égal au degré de l'élément, l'exposant de l'expression (8) est égal à $2p - 2$. Pour des éléments du premier degré, il est donc égal à zéro et devient négatif si le coefficient β est inférieur à 1.

On observe effectivement qu'au voisinage des points singuliers, le terme D_i de l'expression (2) diverge. Ce type de représentation présente l'avantage de faire ressortir toutes les zones qui sont le siège d'une singularité ou d'une concentration de contraintes. Cette propriété s'explique par le fait qu'à la convergence, la densité de l'erreur est indépendante de h (3) et (4).

Si l'on effectue également dans cette zone un agrandissement du diagramme du logarithme de la densité normalisée de l'erreur (Figure 5), on constate la divergence de la solution au point singulier, conformément aux relations (2) et (8).

Le champ des déplacements est beaucoup plus lisse que celui des contraintes; à première vue, il est impossible d'y détecter une quelconque anomalie. Cela est confirmé par le fait que selon les résultats des tableaux précédents, l'énergie potentielle, qui est dans ce cas particulier, numériquement égale au déplacement sous la charge, diverge peu. Cependant, si on effectue un agrandissement du point de chargement (Figure 6), on observe dans une zone très petite la divergence de la déformée.

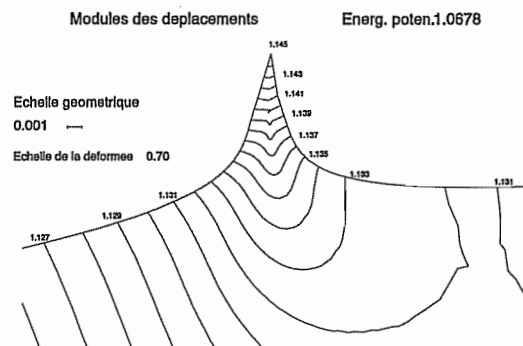


Figure 6 Maillage final de degré 1

Les résultats du troisième essai portant sur la charge répartie ne révèlent aucune particularité notable, ils sont entièrement conformes à la théorie de la résistance des matériaux. Comme prévu, il apparaît une petite zone à l'encastrement, où la présence de singularités est visible. Notons également que la précision de 99% est atteinte en une itération.

De ces essais, on peut tirer deux conclusions. La première est qu'il faut essayer d'éviter les mises en charge singulières car elles affectent fortement le processus d'adaptation de maillage et pénalisent le calcul. La seconde est que la méthode des éléments finis est extrêmement robuste par rapport aux défauts de chargement et qu'il faut pousser les calculs très loin pour les faire apparaître. Ces conclusions sont conformes au principe de Saint-Venant.

2. Présentation d'un problème 3D

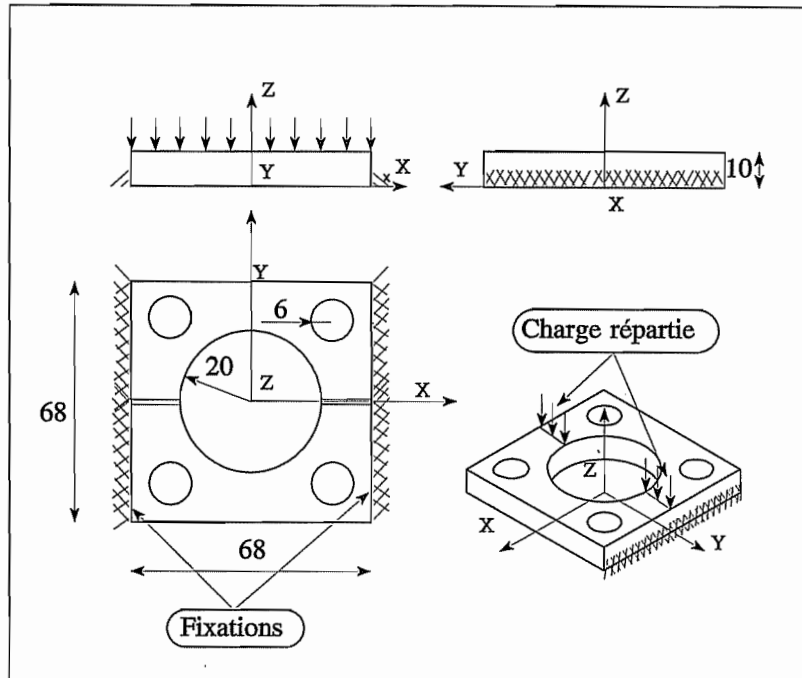


Figure 7 Géométrie et conditions aux limites

Afin de vérifier l'influence de la mise en charge, un test a été conçu en dimension trois pour essayer de montrer que toutes autres choses étant égales, le fait de répartir une charge linéique sur une petite surface augmente significativement le taux de convergence.

Le problème consiste à analyser une plaque épaisse percée de cinq trous et fixée sur la moitié de deux des quatre surfaces latérales, ceci afin d'éviter toute singularité de fixation (Figure 7). Pour mettre en évidence le phénomène décrit ci-dessus, la plaque a tout d'abord été soumise à une charge linéique constante sur une de ses médianes.

Pour mener à bien cette étude, il est nécessaire de faire appel aux techniques de maillages adaptatifs en trois dimensions. Comme la forme de la pièce est relativement complexe, la seule technique disponible aujourd'hui est l'utilisation des générateurs de maillages libres de type Delaunay-Voronoi [George, 1991].

La procédure d'adaptation de maillage se déroule donc selon les étapes suivantes.

1. Création d'un maillage initial uniforme de taille h_0 (Figure 8). La zone de chargement est identifiée par une mince bande située au centre de la pièce.

2. Calcul de la solution, évaluation de l'erreur et calcul en tout point du maillage de la taille h_{optimal} qu'il faudrait donner aux éléments finis. A l'issue de cette étape, on dispose d'une carte de tailles susceptible de fournir les données d'entrée à un programme de génération de maillage idéal. Ce type de programme existe, voir par exemple les développements effectués à l'INRIA, mais faute d'en disposer, le problème a été résolu selon les étapes suivantes.

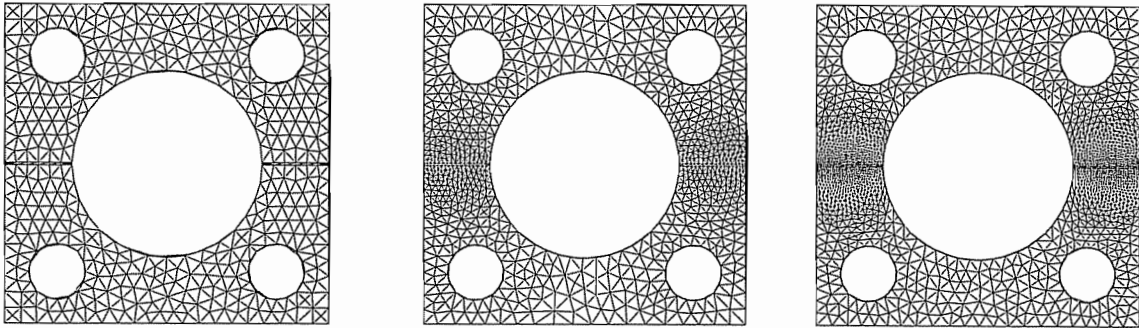


Figure 8 Maillages

3. Extraction des cartes de tailles sur les arêtes vives du modèle.

4. Génération des maillages de peau, à partir des tailles d'arêtes, en utilisant le pré-processeur Bacon de Samcef. Il faut noter à ce stade que le résultat obtenu n'est pas idéal car dans Bacon, le contrôle des tailles n'est pas parfait et que par conséquent le programme génère trop de noeuds et d'éléments à l'intérieur du domaine (Figure 8).

5. Création des mailles volumiques; une fois le maillage de peau créé, il est fait appel au programme GHS3D développé par l'Inria et commercialisé par la société Simulog, pour créer les tétraèdres à l'intérieur du volume.

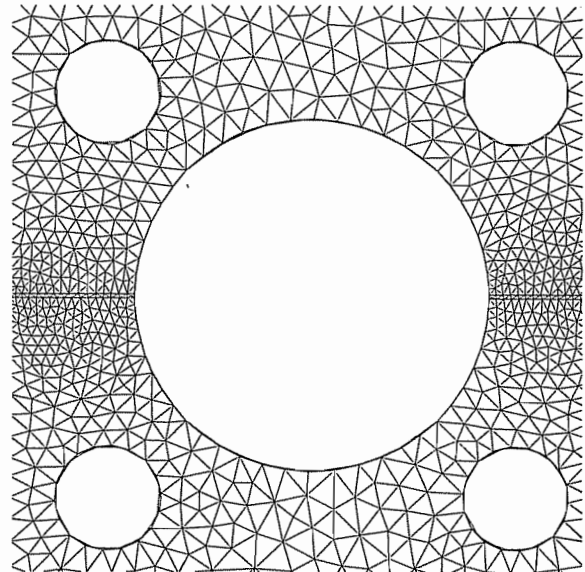


Figure 9 Détail du maillage

Il faut noter que la qualité du maillage volumique dépend fortement du maillage de peau. Par ailleurs, certains tests préliminaires ont été effectués pour comparer les méthodes de Delaunay aux méthodes frontales. Ces premiers tests semblent montrer que dans les méthodes frontales le nombre d'éléments ou de noeuds intérieurs soit plus faible que dans les méthodes de Delaunay. En principe, ceci constitue un avantage en faveur des méthodes frontales. Cependant toutes ces conclusions sont provisoires car la démarche rationnelle consiste à vérifier la carte de taille dans tout le domaine, c'est le seul moyen d'optimiser réellement le maillage.

Il est intéressant de noter que les contraintes de variations de tailles imposées au générateur de maillage sont très sévères (Figure 9).

Une fois cette étape achevée, il faut reprendre le processus au point 2 et ce jusqu'à ce que la précision désirée soit atteinte.

3. Essais

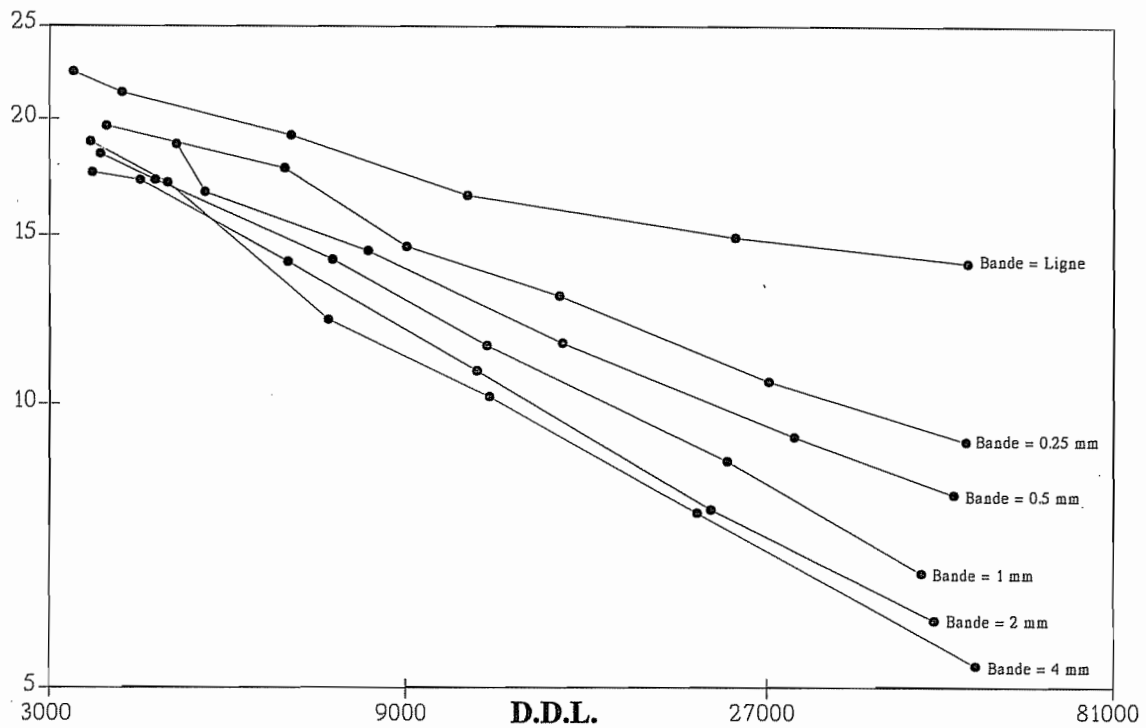


Figure 10 Courbes de convergence

Différents essais ont été effectués, en faisant varier l'épaisseur de la zone chargée de la pièce, de zéro (charge concentrée) à 4 mm. Les valeurs obtenues sont reprises dans le tableau ci-après.

L'analyse des résultats (Figure 10) permet de dire que l'introduction d'une zone de chargement non nulle améliore fortement la convergence et évite à l'estimateur de provoquer un raffinement de maillage dans la région qui est située près de la charge. Cependant, les courbes de convergence présentent des irrégularités qui ont pu être expliquées lors d'un examen attentif de la manière d'imposer les fixations.

Sur chaque face fixée du modèle, le maillage est irrégulier. Seuls les noeuds situés dans la moitié inférieure de la face sont fixés, ce qui définit une frontière en zigzag entre la partie libre et la partie encastrée.

Epaisseur de la zone	Nombre de noeuds	Nombre de mailles	Nombre de D.D.L.	Energie	Energie extrapolée	Erreur énergie	Erreur relative
4 mm	1199	4812	3402	13.00	16.02	3.02	18.8
	1530	6360	4316	13.92	16.78	2.86	17.1
	2526	11244	7098	13.42	15.29	1.87	12.2
	4131	19492	11717	13.77	15.33	1.56	10.2
	7791	38747	22291	13.79	14.93	1.14	7.7
	18279	96326	52850	13.90	14.67	0.77	5.3
2 mm	1220	4915	3423	12.30	14.91	2.61	17.5
	1408	5776	3968	13.93	16.82	2.89	17.2
	2216	9817	6258	14.61	17.01	2.40	14.1
	3965	18715	11270	14.80	16.60	1.80	10.8
	8112	40911	23278	14.98	16.27	1.29	7.9
	16030	84093	42452	15.29	16.25	0.96	5.9
1 mm	1245	5024	3510	12.52	15.32	2.80	18.3
	1467	6115	4155	14.72	17.77	3.05	17.2
	2518	11387	7193	15.14	17.64	2.50	14.2
	4057	19391	11622	15.75	17.80	2.05	11.5
	8498	42972	24479	16.35	17.91	1.56	8.7
	15323	81001	44693	16.41	17.57	1.16	6.6
.5 mm	1554	6538	4437	12.43	15.29	2.86	18.7
	1692	7287	4846	14.51	17.41	2.90	16.7
	2799	12927	8024	15.61	18.25	2.64	14.5
	5073	25017	14688	16.44	18.59	2.15	11.6
	10268	53522	30128	17.36	19.12	1.76	9.2
	16783	89454	49358	17.38	18.89	1.51	8.0
.25 mm	1267	5093	3576	12.58	15.64	3.06	19.6
	2134	9511	6195	15.02	18.24	3.22	17.7
	3129	14706	9051	16.32	19.11	2.79	14.6
	4998	24616	14548	17.23	19.80	2.57	13.0
	9485	49095	27825	17.67	19.75	2.08	10.5
	17373	92726	51300	18.13	19.95	1.82	9.1

Epaisseur de la zone	Nombre de noeuds	Nombre de mailles	Nombre de D.D.L.	Energie	Energie extrapolée	Erreur énergie	Erreur relative
0. mm	1152	4593	3228	12.53	16.14	3.61	22.4
	1309	5418	3749	14.70	18.67	3.97	21.3
	2198	9873	6319	16.82	20.80	3.98	19.1
	3777	18157	10941	17.09	20.48	3.39	16.5
	8525	43891	25088	18.84	22.14	3.30	14.9
	17356	91684	51535	19.33	22.55	3.22	14.0

Résultats des tests avec fixations mal définies

En vue de remédier à cet inconvénient, les calculs ont été refaits, en imposant qu'une ligne nodale passe par le milieu des faces fixées. Cette mise en oeuvre plus correcte des conditions aux limites améliore fortement les résultats (Figure 11).

Au vu des résultats des tableaux, on observe que tous les problèmes semblent converger, sauf celui qui correspond à la charge concentrée sur une ligne.

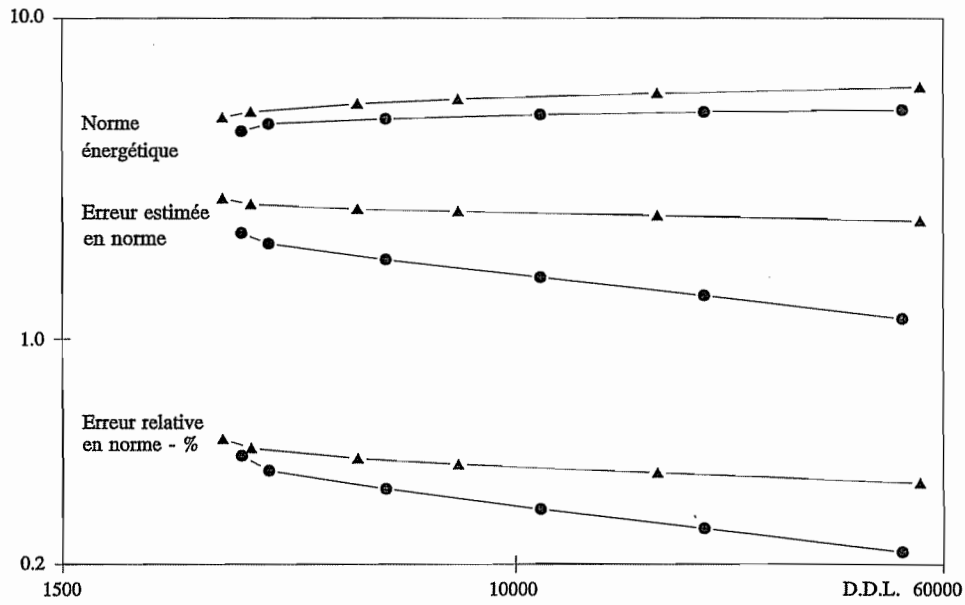


Figure 11 Fixations perpendiculaires

Afin de montrer l'influence des conditions aux limites sur le comportement du système, les faces latérales libres et fixées ont été interverties. De plus, les faces fixées l'ont été sur toute la hauteur (Figure 7). Pour ce nouveau problème la convergence est meilleure (Figure 12).

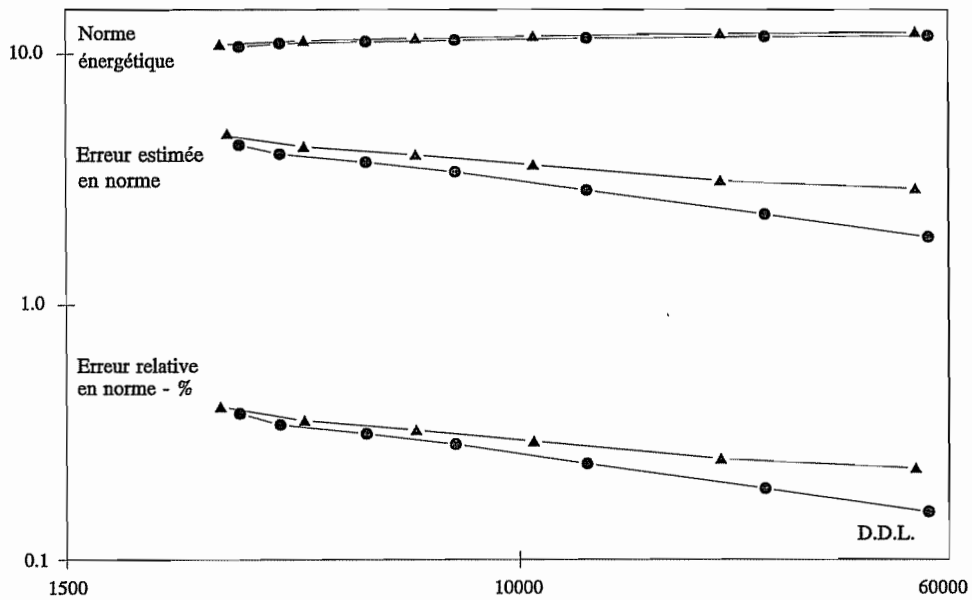


Figure 12 Fixations parallèles

Problème	Noeuds	Mailles	D.D.L.	Energie E.F., norme	Erreur, norme	Erreur relative
4mm	1111	4399	3177	4,4475	2,1380	0,4333
	1277	5218	3561	4,6915	1,9814	0,3891
	2111	9290	5811	4,8618	1,7674	0,3416
	4023	19124	11111	5,0113	1,5556	0,2965
	7948	39926	22086	5,1062	1,3659	0,2584
	18019	95317	50570	5,1865	1,1572	0,2178
Ligne	1031	4020	2937	4,9119	2,7439	0,4877
	1175	4725	3305	5,1148	2,6277	0,4569
	1830	8019	5162	5,4204	2,5424	0,4247
	2769	12925	7871	5,6000	2,4988	0,4074
	6270	31623	18150	5,8427	2,4215	0,3829
	18474	98775	54461	6,1061	2,3298	0,3565

Plaque : fixations sur les faces perpendiculaires à la ligne de charge

Problème	Noeuds	Mailles	D.D.L.	Energie E.F., norme	Erreur, norme	Erreur relative
4mm	1111	4399	3097	10,6602	4,3192	0,3755
	1318	5229	3670	10,9924	3,9744	0,3400
	1871	7818	5261	11,1716	3,6812	0,3130
	2731	11910	7637	11,3304	3,3667	0,2849
	4704	21752	13258	11,5461	2,8421	0,2390
	9765	47914	27924	11,7163	2,2760	0,1907
	19140	98248	55205	11,8132	1,8514	0,1548
ligne	1031	4020	2857	10,8784	4,7385	0,3993
	1446	5907	4057	11,2696	4,2538	0,3531
	2275	9918	6474	11,5265	3,9485	0,3241
	3724	17023	10600	11,7560	3,5988	0,2927
	8015	39216	23157	12,0431	3,1088	0,2499
	17875	92469	52347	12,2227	2,8901	0,2301

Plaque : fixations sur les faces parallèles à la ligne de charge

4. Conclusions

Pour obtenir un modèle susceptible de converger rapidement vers la solution exacte lorsque le maillage est raffiné ou adapté via un calcul d'erreur, il est nécessaire d'introduire correctement la mise en charge. Bien que les modèles éléments finis cinématiquement admissibles aient la propriété de s'adapter assez bien à des charges ponctuelles, ces charges les empêchent cependant de converger et ne permet pas aux procédures d'adaptation de maillages de jouer leur rôle. Il convient donc pour augmenter la fiabilité du modèle d'introduire la mise en charge sous forme répartie. L'utilisation de modèles statiquement admissibles demanderait également de les introduire sous forme répartie.

En ce qui concerne les simulations d'usinages, comme les résultats recherchés correspondent aux déplacements calculés sous la mise en charge, il est indispensable de répartir la charge sur une surface de dimension physiquement acceptable. Les essais ont également montré que si la charge est répartie, le résultat n'est pas très sensible à l'étendue de la surface sur laquelle elle est appliquée.