

**UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION**

PROCEDURES D'IDENTIFICATION DES PARAMETRES DE CHARGE

**P. BECKERS
J.F. DEBONGNIE
B. DELTOUR
L. MASSET**

Rapport LMF/R5 - 1995

Rapport 5

Procédures d'identification des paramètres de charge

I. Fraisage

1. Position du problème

1.1. But du programme

Le but du programme est de déterminer les cas de charge à appliquer au maillage pour des positions successives de la fraise. Chaque cas de charge comprend les numéros des noeuds chargés, les forces qui y sont appliquées et la liste des noeuds qui sont coupés par la fraise. Ces cas de charge permettront par la suite de déterminer le défaut d'usinage de la pièce.

Les étapes principales du programme sont les suivantes :

- déterminer les positions successives de la fraise et les noeuds coupés pour chaque position;
- déterminer, pour une position donnée, les éléments du maillage coupés par la fraise et calculer les efforts de coupe sur chacun de ces éléments;
- répartir sur les noeuds du maillage les forces appliquées aux mailles.

1.2. Données du problème

1.2.1. Maillage

Le maillage comprend les coordonnées des noeuds et les définitions des mailles volumiques. Les seuls types d'éléments volumiques traités sont les tétraèdres, les hexaèdres et les octaèdres du premier ou du second degré. Le maillage peut également contenir d'autres types d'éléments (poutres, coques, ...) mais ceux-ci ne peuvent pas appartenir à la surface usinée de la pièce. Les noeuds de la surface usinée sont situés à une cote $Z = Z_{US}$ et repérés par un groupe 'SURF_USINEE'.

Maillage surfacique

A partir du maillage initial, on crée un maillage qui comprend les noeuds de la surface usinée et leurs coordonnées X , Y et Z ainsi que les numéros des noeuds qui composent les éléments de surface. Ceux-ci sont donc des quadrangles ou des triangles.

On crée également une *table des côtés des mailles* qui comprend, pour chaque côté :

- le numéro du noeud origine,
- le numéro du noeud d'interface (pour les éléments du 2nd degré),
- le numéro du noeud extrémité,
- le numéro de la première maille à laquelle appartient le côté,
- le numéro de la seconde maille,
- la longueur du côté.

Lorsqu'un côté n'appartient qu'à une seule maille, c'est un côté *frontière* du maillage et le numéro de la seconde maille n'existe pas.

1.2.2. Outil

Les données relatives à la fraise sont :

- le diamètre D (rayon R_f),
- le nombre de dents Z ,
- les angles d'outil κ_r , γ_f et γ_p .

1.2.3. Trajectoire

La trajectoire du centre de la fraise est composée d'une succession de segments élémentaires qui sont soit des segments de droites, soit des arcs de cercles. Les données descriptives d'un segment sont donc :

Pour un segment de droite

- les coordonnées de l'origine $C_0 (X_0, Y_0)$;
- les coordonnées de l'extrémité $C_1 (X_1, Y_1)$.

Pour un arc de cercle

- les coordonnées de l'origine $C_0 (X_0, Y_0)$;
- les coordonnées de l'extrémité $C_1 (X_1, Y_1)$;
- son rayon R_T (ou les coordonnées de son centre $C_T (X_T, Y_T)$), et le sens de rotation (horlogique ou anti-horlogique).

Pour chaque segment, on donne également :

- la vitesse de rotation de la fraise N (constante),
- la vitesse d'avance v_f (constante).

1.2.4. Matériau

Les données spécifiant les caractéristiques du matériau utilisé permettent de déterminer les valeurs à employer dans les calculs des forces de coupe (cf. rapport n°4 partie fraisage), c'est-à-dire les pressions spécifiques et les taux d'accroissement.

1.3. Méthode de calcul

La première étape consiste à déterminer l'ordre chronologique d'usinage des noeuds. Un noeud i est coupé lorsque le centre de la fraise a parcouru une distance d_i sur sa trajectoire (fig. 1). On appelle d_i la *distance de coupe* du noeud i . En classant les distances de coupe par ordre croissant, on établit l'ordre d'usinage des noeuds.

Les positions successives de la fraise sont choisies en fonction des distances de coupe des noeuds. Il existe plusieurs méthodes pour effectuer ce choix (cf. § 2).

Pour une position donnée, la fraise est représentée par un cercle de rayon R_f et de centre C dont les coordonnées sont calculées à partir de la distance d parcourue sur la trajectoire.

A ce moment, les noeuds dont la distance de coupe est inférieure à d ont déjà été usinés. On les appelle noeuds 1 . Les noeuds dont la distance de coupe est supérieure à d n'ont pas encore été usinés. On les appelle noeuds 0 .

Une maille est considérée comme coupée par la fraise lorsqu'au moins un de ses côtés est coupé. On doit donc déterminer, parmi tous les côtés des mailles de la surface usinée, ceux qui sont coupés par la fraise. Afin de limiter le coût de calcul, on n'examine que les côtés dont au moins une extrémité est usinée (noeuds 1). Pour chaque côté coupé, on calcule les coordonnées de l'intersection avec la fraise et la profondeur de passe en ce point.

Connaissant la liste des côtés coupés, on établit alors la suite des éléments coupés grâce à la table des côtés. Pour chaque élément de la suite, on connaît les extrémités de l'arc en prise et les profondeurs de passe en ces deux points.

Les forces résultantes appliquées à un élément sont calculées, dans le système d'axes de la fraise, par intégration des forces réparties sur l'arc. L'intégrale est approchée par la méthode de Gauss en prenant six points.

On répartit alors les forces dans les trois directions calculées en chacun des points de Gauss sur les noeuds de l'élément coupé. En procédant de la même façon pour toutes les mailles coupées, on détermine l'ensemble des forces appliquées au maillage pour une position donnée de la fraise.

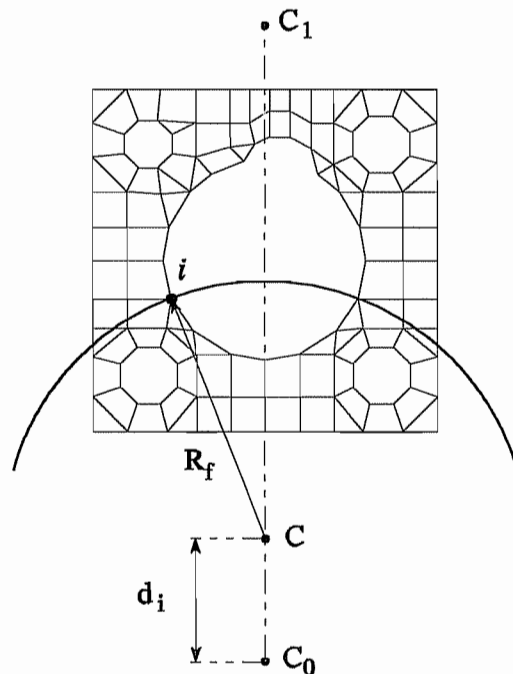


Figure 1 : Plaque de tête d'essieu X65

2. Choix des positions de calcul

2.1. Distances de coupe

2.1.1. Segment rectiligne

Lorsque la fraise parcourt un segment rectiligne, les coordonnées de son centre au moment où elle coupe un noeud i sont calculées en déterminant l'intersection d'un segment de droite avec un cercle. Le centre du cercle est le noeud i et son rayon est égal au rayon de la fraise R_f (fig. 2).

Soit le segment de droite s défini par son origine C_0 et son extrémité C_1 de coordonnées respectives (X_0, Y_0) et (X_1, Y_1) et le cercle \mathcal{E} de centre (X_i, Y_i) et de rayon R_f . Les coordonnées de l'intersection du segment s avec le cercle \mathcal{E} sont solutions du système composé de l'équation du segment

$$\begin{cases} X = (1 - t) X_0 + t X_1 \\ Y = (1 - t) Y_0 + t Y_1 \end{cases}$$

où $t \in [0,1]$, et de l'équation du cercle

$$(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2 = R_f^2$$

En effectuant le changement de variables

$$\begin{cases} x = X - X_i \\ y = Y - Y_i \end{cases}$$

le système d'équations devient

$$\begin{cases} x = (1 - t) x_0 + t x_1 \\ y = (1 - t) y_0 + t y_1 \\ x^2 + y^2 = R_f^2 \end{cases}$$

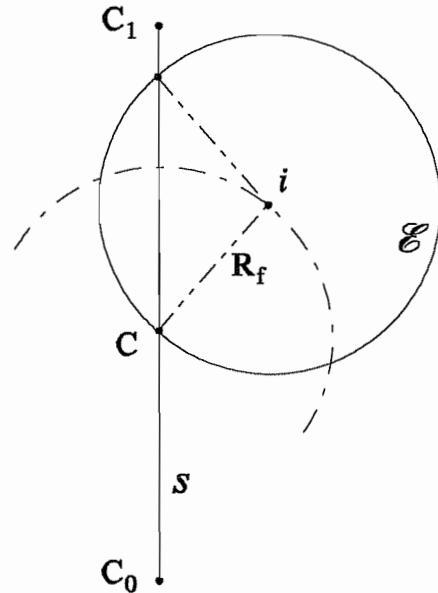


Figure 2 : Segment rectiligne

En remplaçant x et y dans l'équation du cercle par leur valeur en fonction de t , on obtient l'équation du second degré

$$(x_{10}^2 + y_{10}^2) t^2 + 2 (x_0 x_{10} + y_0 y_{10}) t + (x_0^2 + y_0^2 - R_f^2) = 0$$

Cette équation admet deux solutions si

$$\Delta' = R_f^2 (x_{10}^2 + y_{10}^2) - (x_0 y_{10} - y_0 x_{10})^2$$

est positif ou nul. Les deux solutions sont

$$t_{1,2} = \frac{-x_0 x_{10} - y_0 y_{10} \pm \sqrt{\Delta'}}{x_{10}^2 + y_{10}^2}$$

Remarque : Le dénominateur n'est jamais nul car un segment de trajectoire ne peut pas être de longueur nulle.

La fraise coupe le noeud i sur le segment $C_0 C_1$ si :

- le déterminant est positif ou nul;
- la plus petite valeur de t , c'est-à-dire t_2 , appartient à l'intervalle $[0,1]$.

La position du centre C de la fraise lorsque le noeud i est coupé est donné par

$$\begin{cases} X_C = (1 - t_2) X_0 + t_2 X_1 \\ Y_C = (1 - t_2) Y_0 + t_2 Y_1 \end{cases}$$

La longueur totale du segment rectiligne vaut

$$l_n = \sqrt{(X_0 - X_1)^2 + (Y_0 - Y_1)^2}$$

où n est le numéro du segment. La distance que doit parcourir le centre de la fraise sur $C_0 C_1$ pour qu'elle coupe le noeud i est égal à

$$l = t_2 l_n$$

2.1.2. Segment circulaire

Lorsque la fraise parcourt un segment circulaire, les coordonnées de son centre au moment où elle coupe un noeud i sont calculées en déterminant l'intersection de l'arc de cercle C_0C_1 avec le cercle ayant pour centre le noeud i et pour rayon R_f (fig.3).

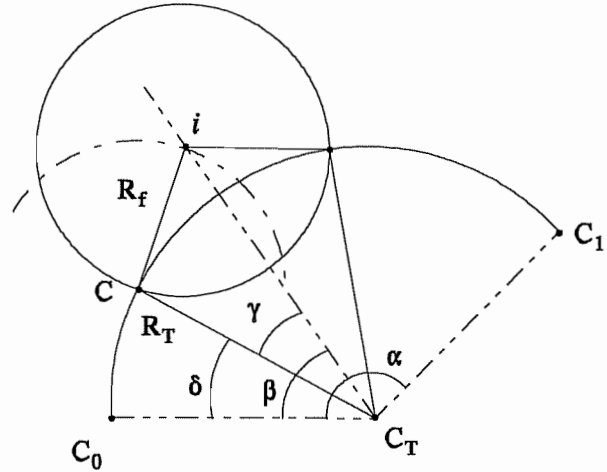


Figure 3 : Noeud coupé sur un segment circulaire

Les deux cercles se coupent si

$$R_T - R_f \leq |C_T i| \leq R_T + R_f$$

La première intersection est repérée sur le cercle de rayon R_T par l'angle $\beta - \gamma$. Dans le triangle CC_Ti , l'angle γ est donné par :

$$\gamma = \arccos \left(\frac{R_T^2 + |C_T i|^2 - R_f^2}{2 R_T |C_T i|} \right)$$

L'angle β est calculé par le produit scalaire $C_T C_0 \cdot C_T i$, ce qui donne

$$\beta = \arccos \left(\frac{(X_0 - X_T)(X_i - X_T) + (Y_0 - Y_T)(Y_i - Y_T)}{R_T |C_T i|} \right)$$

Le noeud i est coupé par la fraise parcourant le segment circulaire si l'angle δ , qui repère le point C sur le cercle de rayon R_T , satisfait à la condition suivante

$$\delta = \beta - \gamma + k 2 \pi \in [0, \alpha]$$

avec k entier. La longueur totale du segment circulaire vaut

$$l_n = \alpha R_T \text{ avec } \alpha = \arccos \left(\frac{(X_0 - X_T)(X_1 - X_T) + (Y_0 - Y_T)(Y_1 - Y_T)}{R_T^2} \right)$$

La distance que doit parcourir le centre de la fraise sur C_0C_1 pour qu'elle coupe le noeud i est égale à $l = \delta R_T$.

2.1.3. Distance de coupe pour un noeud

La distance de coupe d_i correspondant à un noeud i est la distance que parcourt le centre de la fraise à partir de son point de départ pour couper le noeud. Si celui-ci est coupé sur le $k^{\text{ème}}$ segment de la trajectoire, la distance de coupe d_i est égale à la somme des longueurs des $k-1$ trajectoires précédentes et de la distance parcourue sur le $k^{\text{ème}}$ segment pour couper le noeud.

Prenons un exemple simple où la trajectoire est constituée de trois segments (fig. 4). Le noeud i est coupé sur le segment rectiligne l_3 lorsque la fraise a parcouru une longueur l à partir de l'origine de ce segment. La distance de coupe correspondant au noeud i vaut

$$d_i = l_1 + l_2 + l$$

avec $l = |C_3 C|$.

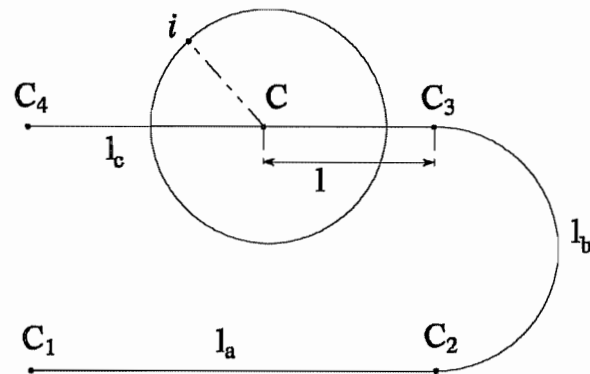


Figure 4 : Trajectoire 1-2-3

2.2. Choix des positions successives de la fraise

2.2.1. Méthodes envisagées

La méthode la plus simple consiste à effectuer un calcul pour chaque noeud de la surface usinée. Cette méthode est la moins économique puisqu'on détermine autant de cas de charge qu'il y a de noeuds usinés. Le nombre de cas de charge est en réalité un peu plus faible puisque certains noeuds sont parfois coupés en même temps, notamment certaines parties du maillage sont symétriques par rapport à la trajectoire (cas de la plaque X65).

Les positions successives de la fraise sont déterminées en avançant chaque fois d'une distance égale à la différence entre deux d_i successifs. Les autres méthodes possibles consisteraient à avancer d'une distance plus importante entre chaque calcul afin de réduire le nombre de cas de charge. Par exemple, on pourrait avancer avec un pas constant ou choisir le pas en fonction de la densité des noeuds. Des tests permettront de comparer les différentes méthodes et de choisir la mieux adaptée.

Quelle que soit la méthode choisie, on détermine avant chaque calcul la position du centre de la fraise qui correspond à un déplacement d sur sa trajectoire. Avant d'effectuer le calcul proprement dit des forces généralisées pour la position choisie, il faut d'abord effectuer une série d'opérations qui font l'objet du paragraphe suivant.

2.2.2. Calculs préalables

Mise à jour des indicateurs d'usinage des noeuds

Les noeuds dont la distance de coupe d_i est inférieure ou égale à d sont déjà coupés et deviennent donc des noeuds I . Les autres noeuds restent à 0 .

Correction des pressions de coupe

Chaque fois que la fraise passe d'un segment à un autre, la vitesse de rotation et la vitesse d'avance peuvent changer. Dès lors, il faut corriger les pressions de coupe en fonction des nouveaux paramètres (cf. rapport n°4).

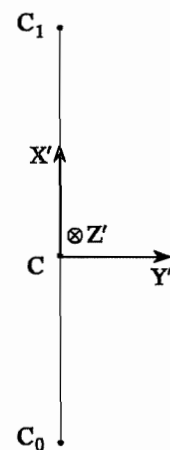
Système d'axes de la fraise

Le système d'axes lié à la fraise ($CX'YZ'$) est différent de celui de la pièce ($OXYZ$) et évolue en fonction de la position du centre de la fraise sur la trajectoire. On suppose que la fraise tourne dans le sens horlogique. Envisageons séparément les cas d'un segment rectiligne et d'un segment circulaire.

Segment rectiligne

Quand la fraise arrive sur une portion de trajectoire rectiligne, on détermine le nouveau système d'axes de la fraise et celui-ci ne change plus tant que la fraise se déplace sur ce segment. Le nouveau système d'axes est :

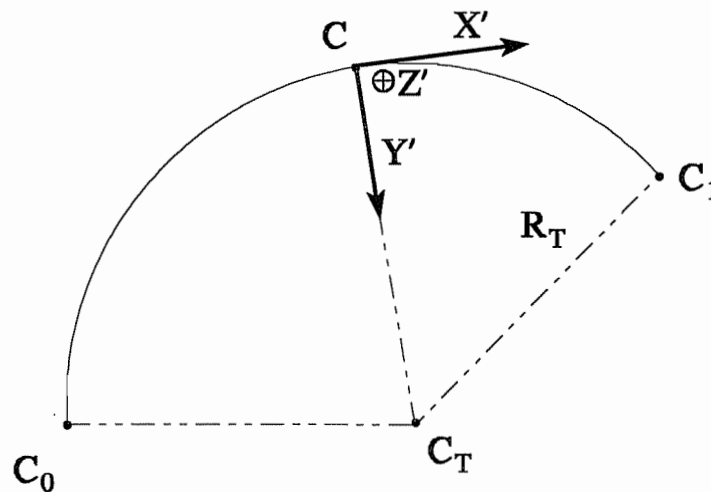
$$\begin{cases} CX' = \frac{C_0 C_1}{|C_0 C_1|} \\ CY' = CX' \wedge OZ \\ CZ' = -OZ \end{cases}$$



Segment circulaire

Pour une portion de trajectoire circulaire, il faut non seulement changer de système d'axes au début, mais également pour chaque nouvelle position de la fraise. De plus, le nouveau système d'axes dépend du sens de rotation de la trajectoire (horlogique ou anti-horlogique), ce qui donne :

$$\begin{cases} CX' = \pm \frac{C_T C \wedge OZ}{|C_T C \wedge OZ|} & (h / a-h) \\ CY' = \mp \frac{C_T C}{R_T} & (h / a-h) \\ CZ' = -OZ \end{cases}$$



3. Calcul des efforts de coupe

3.1. Intersections de l'outil et du maillage

3.1.1. Intersection d'un côté avec l'outil

Pour déterminer l'intersection d'un côté avec la fraise, on utilise l'expression analytique de l'intersection d'un segment de droite avec un cercle (cf. § 2.1.1.). Le segment de droite représente le côté dont les extrémités sont les noeuds i et j , et le cercle la fraise dont le centre est au point C (fig. 5).

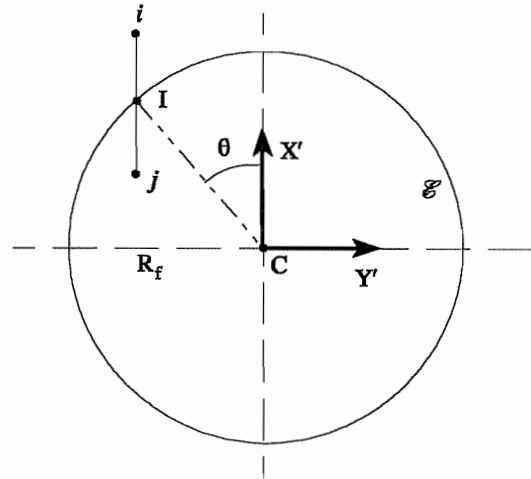


Figure 5 : Intersection du côté ij avec la fraise

Le côté est coupé si le déterminant de l'équation du second degré en t est positif ou nul, soit

$$\Delta' = R_f^2 (x_{ji}^2 + y_{ji}^2) - (x_i y_{ji} - y_i x_{ji})^2 \geq 0$$

et si au moins une des deux valeurs de t appartient à $[0,1]$. Les coordonnées d'une intersection est donnée par

$$\begin{cases} X_I = (1 - t) X_i + t X_j \\ Y_I = (1 - t) Y_i + t Y_j \end{cases}$$

avec le paramètre t égal à

$$t_{1,2} = \frac{-x_0 dx - y_0 dy \pm \sqrt{\Delta'}}{dx^2 + dy^2}$$

Pour un point d'intersection I , il faut vérifier s'il est situé ou non sur la partie *active* de la fraise, c'est-à-dire la moitié avant de la fraise, là où la matière est coupée. Ces deux situations se traduisent de manière analytique par

$$\begin{cases} CI.CX' \geq 0 & \Leftrightarrow I \in \text{partie active} \\ CI.CX' < 0 & \Leftrightarrow I \notin \text{partie active} \end{cases}$$

Un côté peut avoir une ou deux intersections avec le cercle. Examinons ces deux situations.

· *Le côté n'a qu'une intersection avec le cercle*

Dans ce cas, si le point I appartient à la partie active, on ajoute le côté à la liste des côtés coupés. Sinon, on ne le prend pas en compte.

· *Le côté a deux intersections avec le cercle*

Si les deux intersections appartiennent à la partie active, on ne prend pas en compte le côté. En effet, supposons que ce côté soit commun aux mailles a et b (fig. 6). On choisit d'associer la totalité de l'arc II'' à la maille b plutôt que de le répartir sur a et b . Cette manière de faire évite d'avoir à traiter des arcs définis en plusieurs morceaux sur certaines mailles. L'erreur commise lorsqu'on répartit les forces aux noeuds est faible si on suppose que la taille des éléments est petite par rapport à la taille de la fraise.

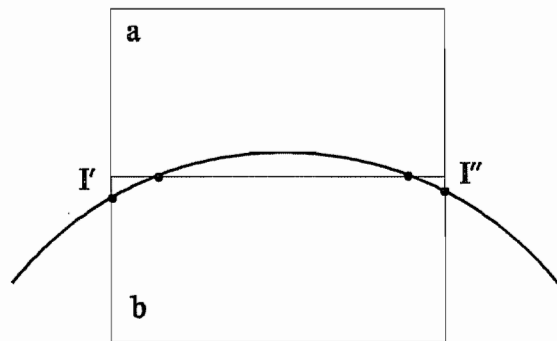


Figure 6 : Report sur la maille b

Si une intersection appartient à la partie active et l'autre pas, on ajoute le côté à la liste des côtés coupés. Enfin, si aucune des deux intersections n'appartient à la partie active, on ne le prend pas en compte.

Réduction du nombre de côtés à examiner

Pour déterminer la liste des côtés coupés, il faudrait, pour chaque position de la fraise, examiner tour à tour tous les côtés du maillage surfacique. Pour limiter le nombre de côtés à examiner, on peut utiliser les *indicateurs d'usinage* des noeuds. On évite ainsi de traiter les côtés 00 qui ne peuvent rentrer dans la liste des côtés coupés. En plus, si la trajectoire est composée d'un seul segment, on limite l'examen aux côtés 01 puisque ce sont les seuls coupés par la fraise.

3.1.2. Classement des côtés par ordre topologique

Le classement des côtés coupés par ordre topologique permet par après de déterminer la suite des mailles coupées (cf. § 3.1.3.). On range les côtés en fonction de la position de leur intersection sur le demi-cercle en partant de la gauche vers la droite lorsqu'on se place dans le sens de l'avance (fig. 7). Pour chaque côté, on calcule l'angle θ que fait le vecteur CI avec l'axe de la fraise CX' , soit

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{CI \cdot CY'}{R_f} \right)$$

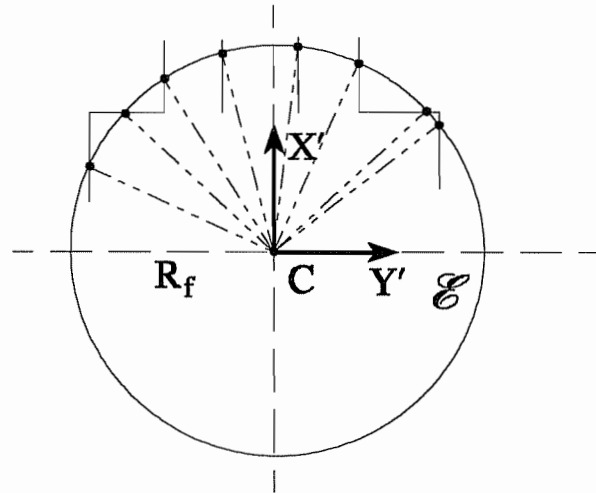


Figure 7 : Ensemble des côtés coupés

ce qui permet de classer les côtés par ordre de θ croissant. Il reste à limiter les valeurs de θ à l'arc en prise sur la pièce. Pour une trajectoire composée d'un seul segment, l'arc en prise est constitué d'un seul arc de cercle ou de plusieurs arcs de cercles disjoints (fig. 8). Les extrémités de ces arcs correspondent toutes à des intersections entre le cercle et des côtés frontières du maillage. La suite des côtés coupés déterminée ne doit donc pas être modifiée.

Pour une trajectoire composée de plusieurs segments, les limites de l'arc en prise sont plus délicates à déterminer puisque la fraise peut recouper des parties de la surface usinée précédemment. Ce cas n'a pas encore été programmé.

3.1.3. Suite de mailles coupées

A ce moment, on connaît la liste des côtés coupés classés de la gauche de la fraise vers la droite et pour chaque côté, les données suivantes :

- l'angle θ de l'intersection avec le cercle,
- la profondeur de passe a_a en ce point,
- les deux mailles auxquelles appartient le côté (une seule si c'est un côté *frontière*).

Considérons tout d'abord le cas d'une trajectoire composée d'un seul segment. Les limites de l'arc en prise sur la pièce correspondent à des bords extérieurs de la pièce et donc à des côtés frontières du maillage. En général, la suite des mailles coupées est composée de sous-suites déconnectées qui contiennent chacune une série de mailles adjacentes.

En partant du premier côté de la liste des côtés coupés, on examine à chaque fois un côté et son suivant. Il existe quatre cas possibles :

- Les deux côtés appartiennent à la même maille et aucun des deux n'est un côté frontière. Cette maille est une maille milieu d'une sous-suite de mailles (fig. 8 : côtés 100-109 et 47-109 de la maille 121).
- Les deux côtés appartiennent à la même maille mais le premier est un côté frontière. La maille est la première d'une sous-suite de mailles (fig. 8 : côtés 100-101 et 100-109 de la maille 119).
- Les deux côtés appartiennent à la même maille mais le second est un côté frontière. La maille est la dernière d'une sous-suite de mailles (fig. 8 : côtés 64-74 et 64-65 de la maille 55).
- Les deux côtés n'appartiennent pas à la même maille. On se trouve entre deux sous-suites (fig. 8 : côtés 41-95 et 30-31).

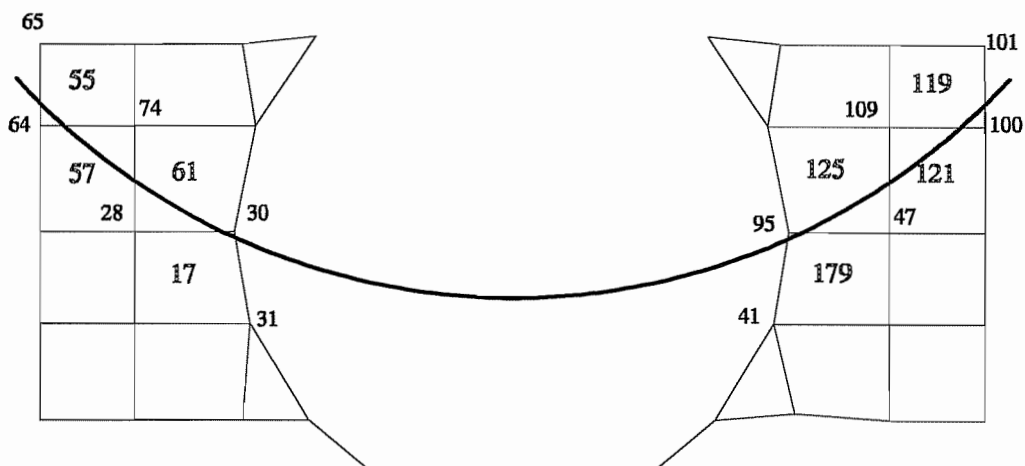


Figure 8 : Plaque X65 - Suite des mailles coupées lorsque la fraise coupe les noeuds 30 et 95

Côtés coupés	Mailles coupées	Suites
100-101	119	S1
100-109	121	
47-109	125	
47-95	179	
41-95		
30-31	17	S2
28-31	61	
28-74	57	
64-74	55	
64-65		

Tableau 1 : Suite des mailles coupées

Pour une trajectoire composée de plusieurs segments, il faut en plus tenir compte des extrémités de l'arc en prise sur la pièce ce qui rend le problème beaucoup plus complexe. Ce cas n'a pas encore été programmé.

3.2. Efforts de coupe sur un élément

3.2.1. Profondeur de passe

On connaît la profondeur de passe en chaque noeud de la surface usinée. Celle-ci correspond à la différence de hauteur entre la surface brute et le plan usiné et est calculée à partir du modèle CAO de la pièce brute.

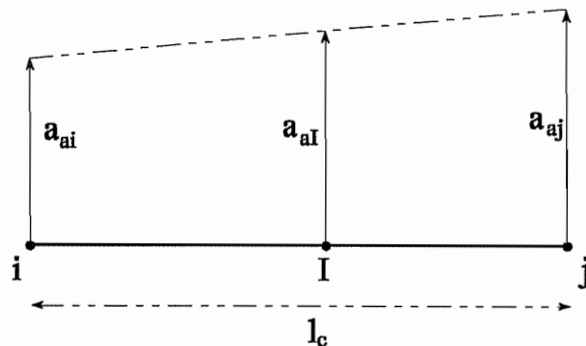


Figure 9 : Profondeur de passe au point d'intersection

Pour calculer les efforts de coupe appliqués sur un élément, on doit déterminer les profondeurs de passe aux intersections I_1 et I_2 des côtés coupés de la maille. Pour un côté ayant pour extrémités les noeuds i et j , la profondeur de passe au point I est calculée par interpolation linéaire entre les profondeurs de passe a_{ai} et a_{aj} :

$$a_{ai} = (1 - t) a_{ai} + t a_{aj}$$

avec $t = \frac{|iI|}{l_c}$, l_c étant la longueur du côté.

3.2.2. Forces de coupe

Le modèle de forces de coupe utilisé est le modèle de Kienzle. Dans les axes de la fraise, les forces de coupe réparties selon les trois directions valent

$$\bar{F}_x = \frac{a_a f}{2 \pi R_f} \left[-\frac{k_{c1.1}}{h_{\max}^{m_c}} \cdot \cos^{1-m_c} \theta \sin \theta + \frac{k_{f1.1}}{h_{\max}^{m_f}} \cdot \cos^{2-m_f} \theta \right]$$

$$\bar{F}_y = \frac{a_a f}{2 \pi R_f} \left[\frac{k_{c1.1}}{h_{\max}^{m_c}} \cdot \cos^{2-m_c} \theta + \frac{k_{f1.1}}{h_{\max}^{m_f}} \cdot \cos^{1-m_f} \theta \sin \theta \right]$$

$$\bar{F}_z = \frac{k_{p1.1}}{h_{\max}^{m_p}} \cdot \frac{a_a f}{2 \pi R_f} \cdot \cos^{1-m_p} \theta$$

Les pressions de coupe k qui interviennent dans ces expressions sont les valeurs corrigées en fonction des paramètres d'usinage et des angles de l'outil (cf. rapport n°4).

4. Calcul des forces généralisées

4.1. Forces résultantes sur un élément

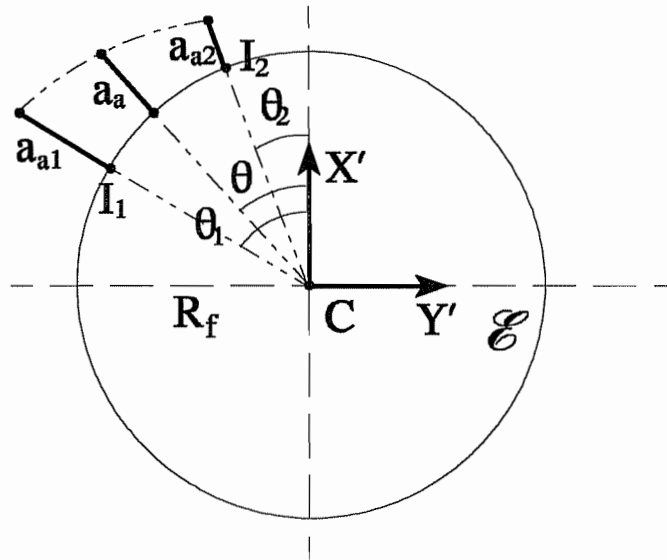


Figure 10 : Profondeur de passe en fonction de θ

Pour une maille coupée, les forces résultantes dans les axes de la fraise sont calculées en intégrant les forces réparties sur l'arc I_1I_2 . La variable d'intégration est l'angle θ . On suppose que la profondeur de passe varie linéairement entre a_{a1} et a_{a2} (fig. 10), ce qui donne

$$a_a(\theta) = \frac{\theta_2 - \theta}{\theta_2 - \theta_1} a_{a1} + \frac{\theta - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} a_{a2}$$

Les forces $F_{X'}$, $F_{Y'}$ et $F_{Z'}$ valent

$$F_{X'} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{\mathcal{F}}_{X'}(\theta) R_f d\theta = \frac{f}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} a_a(\theta) \left[-\frac{k_{c1.1}}{h_{\max}^{m_c}} \cos^{1-m_c} \theta \sin \theta + \frac{k_{f1.1}}{h_{\max}^{m_r}} \cos^{2-m_r} \theta \right] d\theta$$

$$F_{Y'} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{\mathcal{F}}_{Y'}(\theta) R_f d\theta = \frac{f}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} a_a(\theta) \left[\frac{k_{c1.1}}{h_{\max}^{m_c}} \cos^{2-m_c} \theta + \frac{k_{f1.1}}{h_{\max}^{m_r}} \cos^{1-m_r} \theta \sin \theta \right] d\theta$$

$$F_{Z'} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{\mathcal{F}}_{Z'}(\theta) R_f d\theta = \frac{k_{p1.1}}{h_{\max}^{m_p}} \frac{f}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} a_a(\theta) \cos^{1-m_p} \theta d\theta$$

Intégration d'une fonction par points de Gauss

Les intégrales sont calculées par la méthode de Gauss. Soit une fonction $f(x)$ à intégrer sur un intervalle $[-1, 1]$. L'intégrale de f est approchée par la série ci-dessous

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong \sum_{i=1}^N f(x_i) w_i$$

où les x_i sont les abscisses des points de Gauss et les w_i les poids de Gauss. Plus le nombre de points de Gauss est élevé, plus la série converge vers la valeur exacte de l'intégrale.

Nous avons choisi de prendre 6 points de Gauss pour évaluer l'intégrale. Dans ce cas, les abscisses et les poids de Gauss sont les suivants :

$$\begin{cases} x_i = \pm 0.238619, \pm 0.661209, \pm 0.932469 \\ w_i = 0.467913, 0.360761, 0.171324 \end{cases}$$

Les bornes d'intégration étant θ_1 et θ_2 , on effectue un changement de variable pour pouvoir appliquer la formule ci-dessus, soit

$$\zeta = \frac{\theta - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} - \frac{\theta_2 - \theta}{\theta_2 - \theta_1}$$

4.2. Répartition des forces aux noeuds d'un élément

4.2.1. Introduction

Lorsqu'on intègre les forces réparties sur l'arc en prise sur un élément, on remplace celles-ci par des forces f_x' , f_y' et f_z' appliquées aux six points de Gauss. Quel que soit le type d'élément (triangle ou quadrangle, premier ou second degré), on calcule les coordonnées isoparamétriques (ξ , η) du point de Gauss puis on calcule les fonctions de forme Φ_i associées aux noeuds de l'élément. Les forces f appliquées en un point de Gauss sont alors réparties aux noeuds de la manière suivante (fig.11).

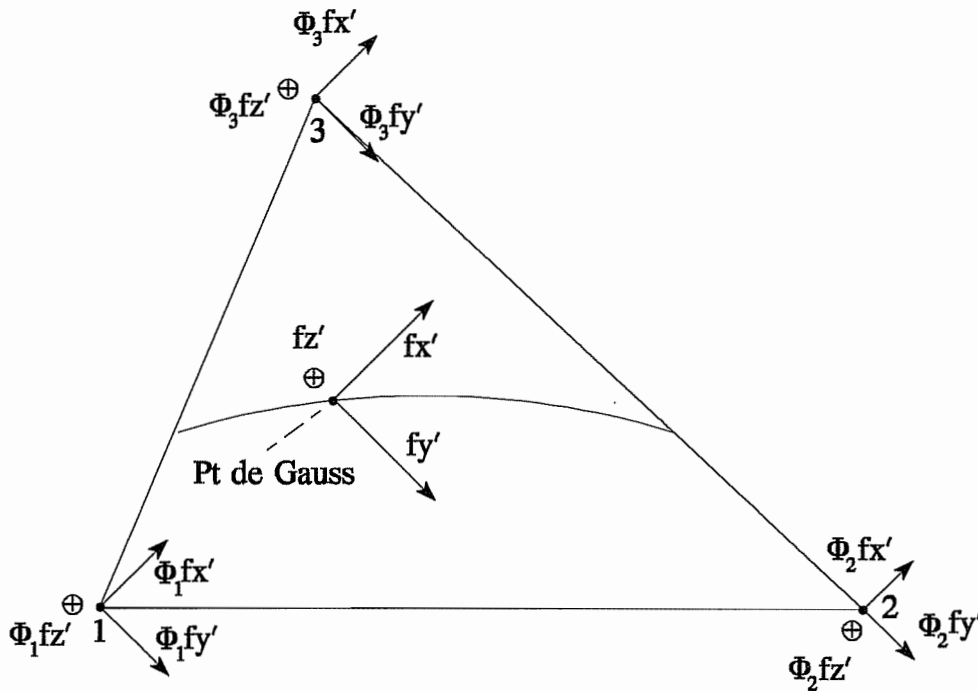


Figure 11 : Répartition aux noeuds d'un élément

4.2.2. Elément triangulaire du premier degré

Le passage aux coordonnées isoparamétriques s'écrit :

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta \\ y = \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta \end{cases}$$

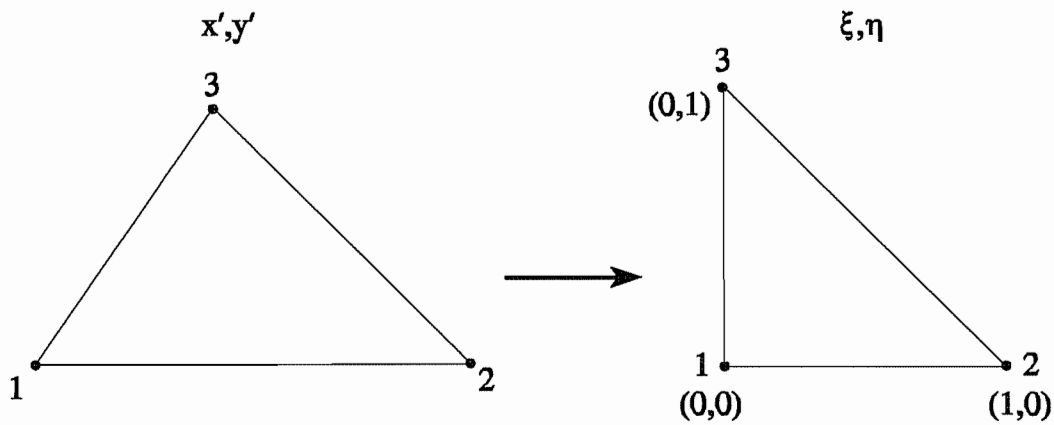


Figure 12 : Passage aux coordonnées isoparamétriques (triangle 1^{er} degré)

Les coefficients α_j et β_j valent :

$$\begin{cases} \alpha_1 = x_1 & \alpha_2 = x_{21} & \alpha_3 = x_{31} \\ \beta_1 = y_1 & \beta_2 = y_{21} & \beta_3 = y_{31} \end{cases} \quad \text{avec} \quad *_{ij} = *_{j1} - *_{i1}$$

Connaissant les coordonnées (x_A, y_A) du point d'application de la force, on calcule ses coordonnées isoparamétriques par :

$$\begin{cases} \xi_A = \frac{x_{A1} y_{31} - y_{A1} x_{31}}{\Delta} \\ \eta_A = \frac{x_{21} y_{A1} - y_{21} x_{A1}}{\Delta} \end{cases} \quad \text{où} \quad \Delta = x_{21} y_{31} - y_{21} x_{31}$$

Les fonctions de forme associées aux trois sommets de l'élément sont :

$$\begin{cases} \Phi_1 = 1 - \xi_A - \eta_A \\ \Phi_2 = \xi_A \\ \Phi_3 = \eta_A \end{cases}$$

4.2.3. Élément quadrangulaire du premier degré

Le passage aux coordonnées isoparamétriques s'écrit :

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta \\ y = \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta + \beta_4 \xi \eta \end{cases}$$

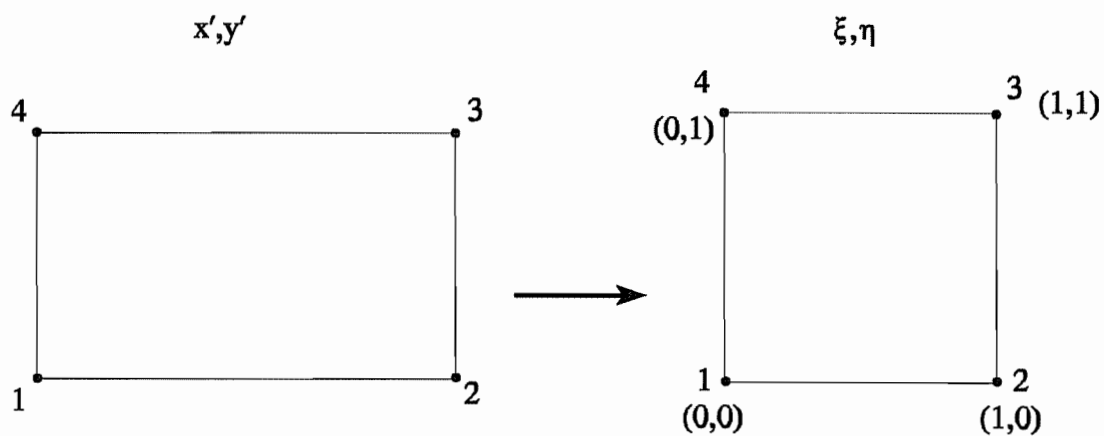


Figure 13 : Passage aux coordonnées isoparamétriques (quadrangle 1^{er} degré)

Les coefficients α_j et β_j valent :

$$\begin{cases} \alpha_1 = x_1 & \alpha_2 = x_{21} & \alpha_3 = x_{41} & \alpha_4 = x_{12} + x_{34} \\ \beta_1 = y_1 & \beta_2 = y_{21} & \beta_3 = y_{41} & \beta_4 = y_{12} + y_{34} \end{cases}$$

avec $x_{ij} = x_j - x_i$, $y_{ij} = y_j - y_i$

Les coordonnées isoparamétriques du point d'application sont calculées en résolvant le système :

$$\begin{cases} x_A = \alpha_1 + \alpha_2 \xi_A + \alpha_3 \eta_A + \alpha_4 \xi_A \eta_A \\ y_A = \beta_1 + \beta_2 \xi_A + \beta_3 \eta_A + \beta_4 \xi_A \eta_A \end{cases}$$

Les fonctions de forme associées aux quatre sommets de l'élément sont :

$$\begin{cases} \Phi_1 = (1 - \xi_A)(1 - \eta_A) \\ \Phi_2 = \xi_A(1 - \eta_A) \\ \Phi_3 = \xi_A \eta_A \\ \Phi_4 = \eta_A(1 - \xi_A) \end{cases}$$

4.2.4. Élément triangulaire du second degré

Le passage aux coordonnées isoparamétriques s'écrit :

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 \\ y = \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta + \beta_4 \xi^2 + \beta_5 \xi \eta + \beta_6 \eta^2 \end{cases}$$

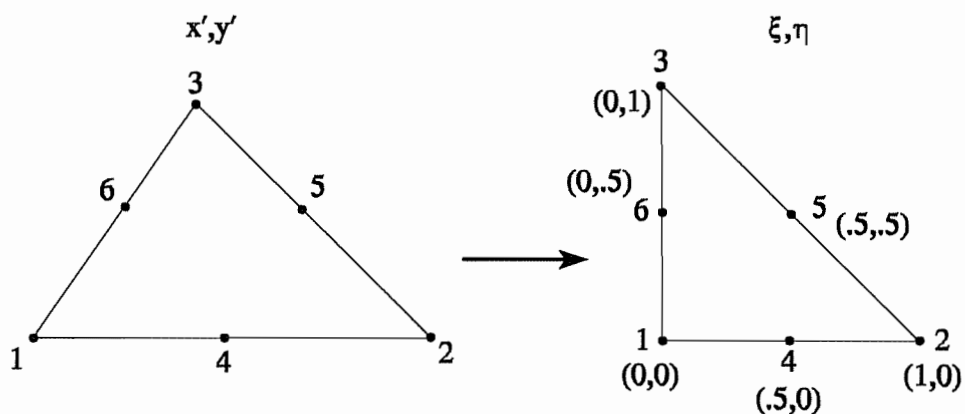


Figure 14 : Passage aux coordonnées isoparamétriques (triangle 2nd degré)

Les coefficients α_j et β_j valent :

$$\begin{cases} \alpha_1 = x_1 & \alpha_2 = 4x_4 - 3x_1 - x_2 & \alpha_3 = 4x_6 - 3x_1 - x_3 \\ \alpha_4 = 2(x_1 + x_2) - 4x_4 & \alpha_5 = 4(x_{41} + x_{65}) & \alpha_6 = 2(x_1 + x_3) - 4x_6 \\ \beta_1 = y_1 & \beta_2 = 4y_4 - 3y_1 - y_2 & \beta_3 = 4y_6 - 3y_1 - y_3 \\ \beta_4 = 2(y_1 + y_2) - 4y_4 & \beta_5 = 4(y_{41} + y_{65}) & \beta_6 = 2(y_1 + y_3) - 4y_6 \end{cases}$$

Il est impossible de trouver analytiquement les coordonnées isoparamétriques du point d'application de la force (équation du 4^{ème} degré). On utilise donc une méthode numérique pour calculer (ξ_A, η_A) .

Celle-ci consiste à minimiser le carré de la distance entre le point A et le point P de coordonnées (ξ, η) , soit :

$$\begin{cases} \min_{\xi, \eta} f(\xi, \eta) = (x_A - x(\xi, \eta))^2 + (y_A - y(\xi, \eta))^2 \\ \text{avec } (\xi, \eta) \in \{(\xi, \eta) \mid \xi \geq 0, \eta \geq 0, (\xi + \eta) \leq 1\} \\ \text{(avec une tolérance)} \end{cases}$$

Les fonctions de forme associées aux six noeuds de l'élément sont :

$$\begin{cases} \Phi_1 = (1 - \xi_A - \eta_A)(1 - 2(\xi_A + \eta_A)) \\ \Phi_2 = \xi_A(2\xi_A - 1) \\ \Phi_3 = \eta_A(2\eta_A - 1) \\ \Phi_4 = 4\xi_A(1 - \xi_A - \eta_A) \\ \Phi_5 = 4\xi_A\eta_A \\ \Phi_6 = 4\eta_A(1 - \xi_A - \eta_A) \end{cases}$$

4.2.5. Élément quadrangulaire du second degré

Le passage aux coordonnées isoparamétriques s'écrit :

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^2 \eta + \alpha_8 \xi \eta^2 \\ y = \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta + \beta_4 \xi^2 + \beta_5 \xi \eta + \beta_6 \eta^2 + \beta_7 \xi^2 \eta + \beta_8 \xi \eta^2 \end{cases}$$

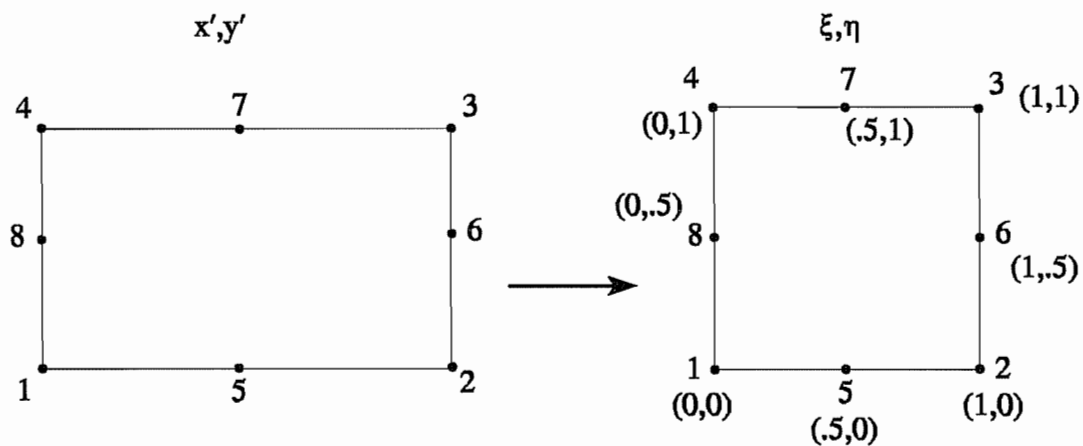


Figure 15 : Passage aux coordonnées isoparamétriques (quadrangle 2nd degré)

Les coefficients α_j valent :

$$\begin{cases} \alpha_1 = x_1 \\ \alpha_2 = 4x_5 - 3x_1 - x_2 \\ \alpha_3 = 4x_8 - 3x_1 - x_4 \\ \alpha_4 = 2(x_1 + x_2) - 4x_5 \\ \alpha_5 = 5x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 + 4(x_{56} + x_{87}) \\ \alpha_6 = 2(x_1 + x_4) - 4x_8 \\ \alpha_7 = 2(x_{13} + x_{24}) + 4x_{75} \\ \alpha_8 = 2(x_{12} + x_{43}) + 4x_{68} \end{cases}$$

Les coefficients β_j sont donnés par les mêmes expressions en remplaçant x par y . On calcule les coordonnées (ξ_A, η_A) du point d'application de la force de la même manière que pour les triangles du second degré, mais dans l'ensemble $[0,1] \times [0,1]$.

Les fonctions de forme associées aux huit noeuds de l'élément sont :

$$\begin{cases} \Phi_1 = (1 - \xi_A)(1 - \eta_A)(1 - 2(\xi_A + \eta_A)) \\ \Phi_2 = \xi_A(1 - \eta_A)(2(\xi_A - \eta_A) - 1) \\ \Phi_3 = \xi_A \eta_A (2(\xi_A + \eta_A) - 3) \\ \Phi_4 = \eta_A(1 - \xi_A)(2(\eta_A - \xi_A) - 1) \\ \Phi_5 = 4 \xi_A(1 - \xi_A)(1 - \eta_A) \\ \Phi_6 = 4 \xi_A \eta_A (1 - \eta_A) \\ \Phi_7 = 4 \xi_A \eta_A (1 - \xi_A) \\ \Phi_8 = 4 \eta_A(1 - \xi_A)(1 - \eta_A) \end{cases}$$

4.3. Forces généralisées et cas de charges

4.3.1. Passage au système d'axes de la pièce

Lorsqu'on a réparti les forces aux noeuds de tous les éléments coupés, il reste à repasser au système d'axes de la pièce par les formules suivantes :

$$\begin{cases} f_x = f_{x'} CX'.OX + f_{y'} CY'.OX \\ f_y = f_{x'} CX'.OY + f_{y'} CY'.OY \\ f_z = -f_{z'} \end{cases}$$

4.3.2. Cas de charge

On a ainsi établi le cas de charge correspondant à la coupe d'un ou plusieurs noeuds. On procède de même autant de fois qu'il y a de positions successives de la fraise. Chaque cas de charge est donc constitué de :

- la liste des noeuds coupés;
- la liste des noeuds chargés et les forces f_x , f_y et f_z qui leurs sont appliquées.

Ces données sont alors transmises au programme de calcul du défaut (cf. rapport n°7 : Description d'une méthode de reconstitution de la surface usinée).

II. Tournage

1. Position du problème

1.1. But du programme

Dans le cas du tournage, le problème est nettement plus simple que lors du fraisage. En effet, nous faisons l'hypothèse que la pointe de l'outil passe successivement par chacun des noeuds de la surface usinée. Cette simplification est justifiée par le fait que l'avance par tour est toujours nettement inférieure à la dimension d'une maille. Cela entraîne qu'il y aura donc un et un seul cas de charge par noeud usiné, et les forces seront calculées directement en ce point-là.

1.2. Données du problème

1.2.1. Maillage

Le maillage comprend les coordonnées des noeuds et les définitions des mailles volumiques. Les seuls types d'éléments volumiques traités sont les tétraèdres, les hexaèdres et les octaèdres du premier ou du second degré. Le maillage peut également contenir d'autres types d'éléments (poutres, coques, ...) mais ceux-ci ne peuvent pas appartenir à la surface usinée de la pièce. Selon le type de tournage effectué sur la pièce, la surface à usiner peut devenir relativement complexe à définir analytiquement. Il semble donc préférable de définir un groupe "SURF_USINEE" dans le maillage. C'est ce que nous avons fait dans les applications.

Maillage surfacique

A partir du maillage initial, on crée un maillage qui comprend les noeuds de la surface usinée et leurs coordonnées X , Y et Z ainsi que les numéros des noeuds qui composent les éléments de surface. Ceux-ci sont donc des quadrangles ou des triangles.

La création d'un maillage surfacique n'est utile que lors du contournage, pour connaître en chaque noeud la direction, dans un système d'axes liés à la pièce, des différentes composantes de l'effort de coupe. Pour faciliter la projection des efforts sur les axes structuraux X , Y et Z , le programme qui génère le maillage surfacique calcule en même temps la normale en chacun des noeuds de la surface usinée.

1.2.2. Outil

Les données relatives à l'outil sont les angles d'outil κ_r , γ_n et λ_s . Il est intéressant de signaler ici que l'angle de direction d'arête de l'outil κ_r , fourni dans les données, est en fait un angle nominal, valable lors du tournage cylindrique et du dressage de surface. Cependant, l'angle κ_r réel, en tournage conique, doit être augmenté (ou diminué) de l'angle de conicité et, en contournage, pour une trajectoire circulaire, l'angle d'arête varie pour chaque position de l'outil.

1.2.3. Trajectoire

La trajectoire réelle de la pointe de l'outil par rapport à la pièce, considérée comme immobile dans le repère absolu, est une spirale, qui ne passe forcément pas exactement par chacun des noeuds usinés. Cependant, grâce à l'hypothèse mentionnée au § 1.1, nous supposons que la trajectoire est composée d'une succession de cercles, coaxiaux dans le cas du tournage cylindrique, conique et du contournage, et concentriques dans le cas du dressage de surfaces.

Dans la suite, nous appellerons "*trajectoire de l'outil*" le déplacement relatif de celui-ci par rapport à la pièce en rotation. Cette trajectoire est composée, comme dans le cas du fraisage, d'une succession de segments élémentaires qui sont soit des segments de droites, soit des arcs de cercles. En adoptant toujours l'axe Z comme axe de rotation de la pièce, les données descriptives d'un segment sont donc :

Pour un segment de droite

- les coordonnées cylindriques de l'origine $C_0 (R_0, Z_0)$;
- les coordonnées cylindriques de l'extrémité $C_1 (R_1, Z_1)$.

Pour un arc de cercle

- les coordonnées cylindriques de l'origine $C_0 (R_0, Z_0)$;
- les coordonnées cylindriques de l'extrémité $C_1 (R_1, Z_1)$;
- son rayon R_T , les coordonnées cylindriques de son centre $C_T (R_T, Z_T)$, qui sont une donnée redondante, et le sens de rotation (horlogique ou anti-horlogique).

Pour chaque segment, on donne également :

- la vitesse de rotation de la pièce N ,
- la vitesse de coupe v_c .

Contrairement au cas du fraisage, pour lequel la fréquence de rotation était constante (vitesse de rotation de la fraise), en tournage on peut soit imposer une fréquence de rotation de la pièce constante, soit imposer une vitesse de coupe constante. Dans ce dernier cas, la fréquence de rotation est limitée par la fréquence maximale autorisée de la machine.

1.2.4. Matériau

Les données spécifiant les caractéristiques du matériau utilisé permettent de déterminer les valeurs à employer dans les calculs des forces de coupe (cf. rapport n°4 partie tournage).

1.3. Méthode de calcul

Etant donné que chaque noeud est usiné indépendamment, l'ordre chronologique d'usinage des noeuds n'a aucune importance pour le calcul du défaut final. Pour simplifier la procédure, nous avons choisi de considérer les noeuds dans l'ordre croissant de leur numéro, pour chacune des trajectoires.

A un instant quelconque de l'usinage, les noeuds ayant déjà été usinés sont appelés noeuds *1*. Par contre, les noeuds qui n'ont pas encore été usinés sont appelés noeuds *0*.

Les forces résultantes sont appliquées directement au noeud usiné, et sont calculées par le modèle de KIENZLE dans un système d'axes absolus liés à la pièce.

2. Calcul des efforts de coupe

2.1. Choix des positions successives de l'outil

La méthode la plus simple consiste, comme nous l'avons expliqué précédemment, à effectuer un calcul pour chaque noeud de la surface usinée. Cette méthode est cependant la moins économique puisqu'elle nécessite autant de cas de charge qu'il y a de noeuds usinés.

Une autre méthode consisterait à n'étudier que les déplacements des noeuds d'une seule génératrice pour le tournage cylindrique, conique et le contournage, et d'un seul rayon dans le cas d'un dressage de surface. Cependant, cette méthode exige que **la pièce et les conditions limites soient axisymétriques**, ce qui n'est généralement pas le cas.

De plus, nous pourrions envisager de ne pas effectuer les calculs en chacun des noeuds de la surface usinée, mais de choisir un certain nombre de génératrices (ou de rayon) et le nombre de noeuds sur chacune (ou chacun), en fonction de la densité des noeuds. Des tests permettront de comparer les différentes méthodes et de choisir la mieux adaptée.

2.2. Correction des pressions de coupe

Contrairement au fraisage, pour lequel les pressions de coupe sont constantes sur chaque trajectoire, celles-ci peuvent varier en fonction de la position du noeud usiné dans le cas du tournage. En effet, un des facteurs de correction des pressions de coupe dépend de la vitesse de coupe. Or, celle-ci peut varier d'un point à l'autre, dans le cas du tournage conique, du contournage et du dressage de surface, lorsque la vitesse de rotation de la pièce est imposée constante.

Dans ce cas, nous avons :

$$\frac{v_c}{(\text{m/min})} = \frac{N}{(\text{tr/min})} \cdot 2 \pi \frac{R_{us}}{(\text{mm})} 10^{-3}$$

avec R_{us} la coordonnée radiale du noeud considéré, dans un système de coordonnées cylindriques :

$$R_{us} = \sqrt{X_{us}^2 + Y_{us}^2}$$

Dès lors, il faut corriger les pressions de coupe pour chaque cas de charge, sauf lors d'un usinage cylindrique.

2.3. Profondeur de passe

La profondeur de passe en chaque noeud de la surface usinée correspond à la différence de hauteur entre la surface brute et le plan usiné. Elle est soit donnée constante sur toute la surface usinée, soit calculée à partir :

- d'une génératrice de la surface brute pour le tournage cylindrique, conique et le contournage;
- du modèle CAO facettisé (par des triangles) de la surface brute pour le dressage.

2.4. Forces de coupe

Le modèle de forces de coupe utilisé est le modèle de Kienzle :

$$F_c = b \cdot h^{1-m_c} \cdot k_{c1.1} = \frac{a \cdot f^{1-m_c}}{\sin^{m_c} \kappa_r} \cdot k_{c1.1}$$

$$F_f = \frac{a \cdot f^{1-m_f}}{\sin^{m_f} \kappa_r} \cdot k_{f1.1}$$

$$F_p = \frac{a \cdot f^{1-m_p}}{\sin^{m_p} \kappa_r} \cdot k_{p1.1}$$

Les pressions de coupe $k_{c1.1}$ qui interviennent dans ces expressions sont les valeurs corrigées en fonction des paramètres d'usinage et des angles d'outil (cf. rapport n°4).

Dans des axes absolus liés à la pièce sans son mouvement de rotation, les composantes de l'effort de coupe selon les trois directions valent, selon le type d'usinage :

2.4.1. Tournage cylindrique

$$\begin{cases} F_x = F_c \cdot \sin\theta - F_p \cdot \cos\theta \\ F_y = -F_c \cdot \cos\theta - F_p \cdot \sin\theta \\ F_z = F_f \cdot \text{sign}(Z_{ex} - Z_{or}) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{y_{us}}{\sqrt{x_{us}^2 + y_{us}^2}} \\ \cos\theta = \frac{x_{us}}{\sqrt{x_{us}^2 + y_{us}^2}} \end{cases}$$

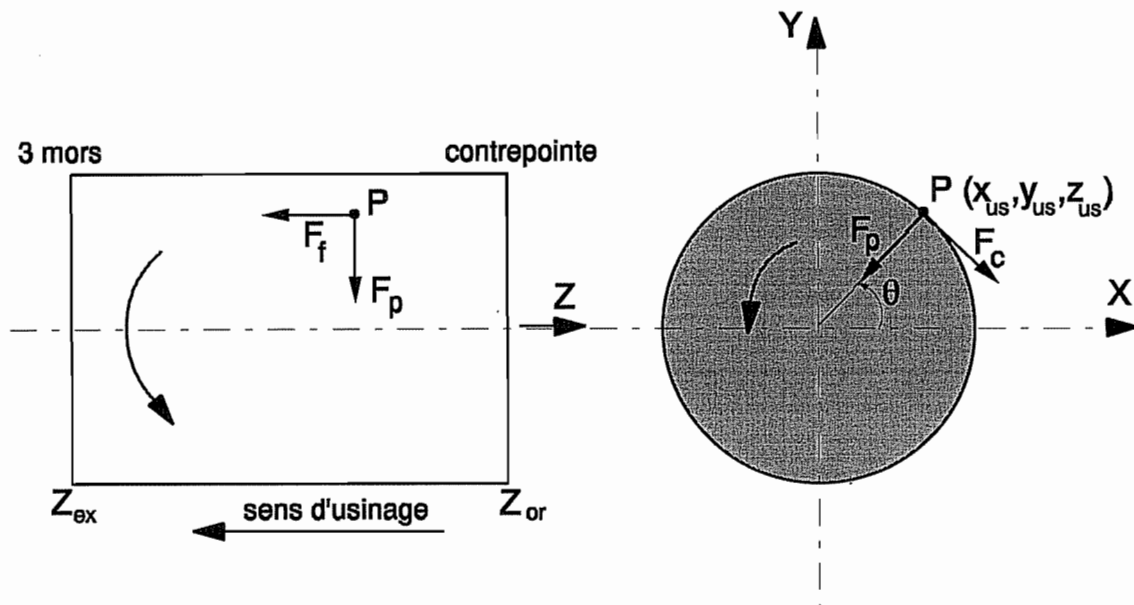


Figure 16 : Direction des efforts pour le tournage cylindrique

2.4.2. Tournage conique

$$\begin{cases} F_x = F_c \cdot \sin \theta - F_f \cdot \cos \theta \cdot \sin \alpha - F_p \cdot \cos \theta \cdot \cos \alpha \\ F_y = -F_c \cdot \cos \theta - F_f \cdot \sin \theta \cdot \sin \alpha - F_p \cdot \sin \theta \cdot \cos \alpha \\ F_z = F_f \cdot \cos \alpha \cdot \text{sign}(Z_{ex} - Z_{or}) + F_p \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{y_{us}}{\sqrt{x_{us}^2 + y_{us}^2}} \\ \cos \theta = \frac{x_{us}}{\sqrt{x_{us}^2 + y_{us}^2}} \\ \text{tg } \alpha = \frac{R_{or} - R_{ex}}{Z_{or} - Z_{ex}} = \text{conicité} \end{cases}$$

- Remarques :
1. Le tournage cylindrique est donc un cas particulier du tournage conique, avec un angle de conicité α nul.
 2. Pour le tournage conique, l'angle de direction d'arête de l'outil, à prendre en considération lors de la correction des pressions de coupe, est différent de l'angle nominal fourni dans les données. Il vaut :

$$\kappa_r = (\kappa_r)_{\text{nominal}} + \alpha$$

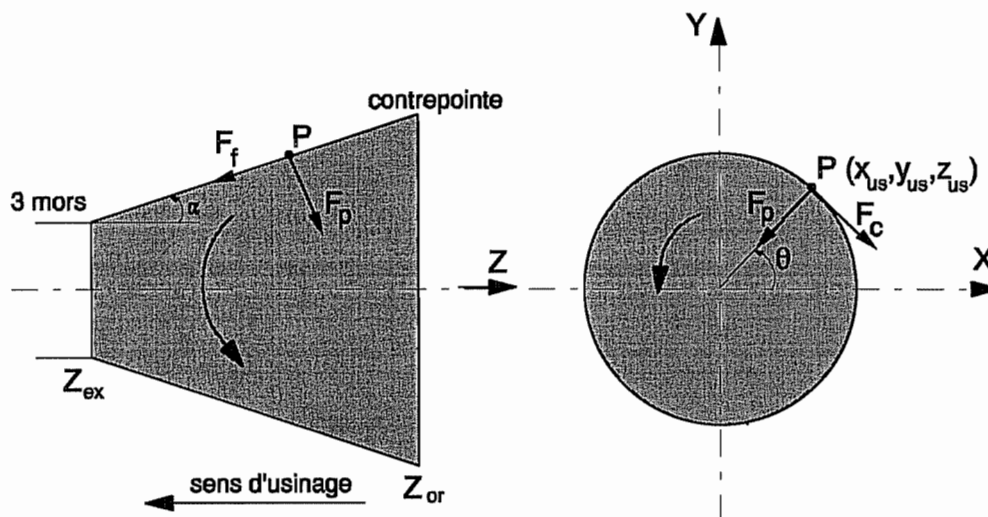


Figure 17 : Direction des efforts pour le tournage conique

2.4.3. Dressage de surface

$$\begin{cases} F_x = F_c \cdot \sin\theta - F_f \cdot \cos\theta \\ F_y = -F_c \cdot \cos\theta - F_f \cdot \sin\theta \\ F_z = -F_p \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{y_{us}}{\sqrt{x_{us}^2 + y_{us}^2}} \\ \cos\theta = \frac{x_{us}}{\sqrt{x_{us}^2 + y_{us}^2}} \end{cases}$$

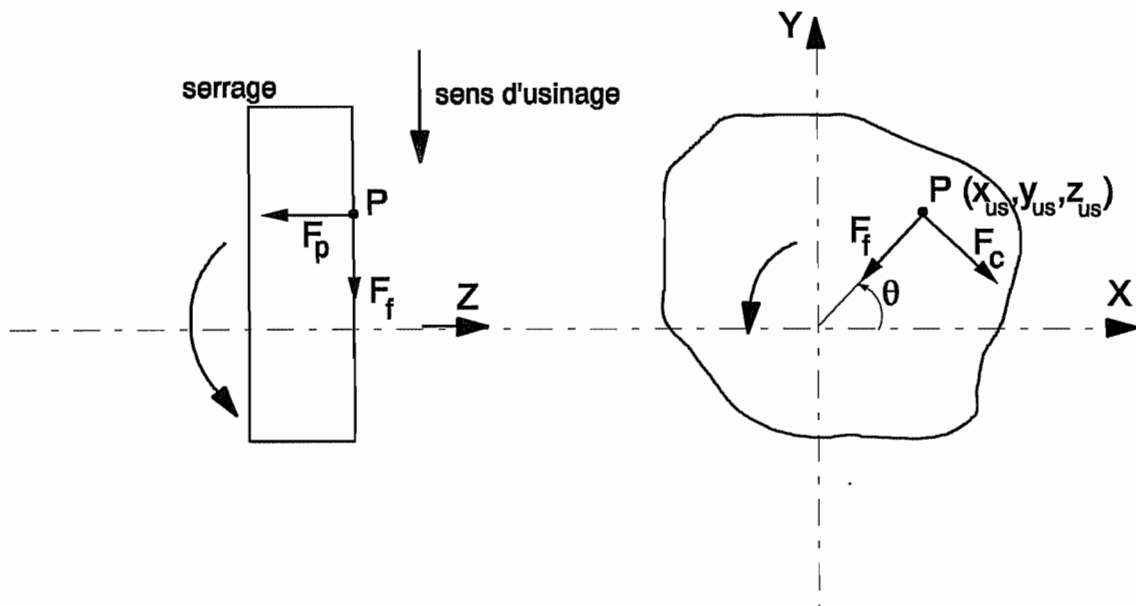


Figure 18 : Direction des efforts pour le dressage de surface

2.4.4. Contournage au tour

Nous ne parlerons de contournage que pour une trajectoire circulaire de l'outil, sinon le contournage devient du tournage cylindrique ou conique pur. Lorsque l'outil se déplace suivant une trajectoire circulaire, nous pouvons calculer en chaque noeud les directions des composantes de l'effort de coupe, et notre problème se ramène au cas de l'usinage conique avec un angle de conicité α , et donc également un angle réel de direction d'outil κ_r , qui varie avec la position axiale du noeud.

L'angle α peut être calculé analytiquement, puisque l'on peut établir l'équation d'une droite tangente, en un point connu, à un cercle dont le centre et le rayon sont donnés. On peut également obtenir α de manière approximative en connaissant les mailles adjacentes au noeud considéré, et en prenant comme orientation du noeud la moyenne de l'orientation des mailles qui l'entourent.

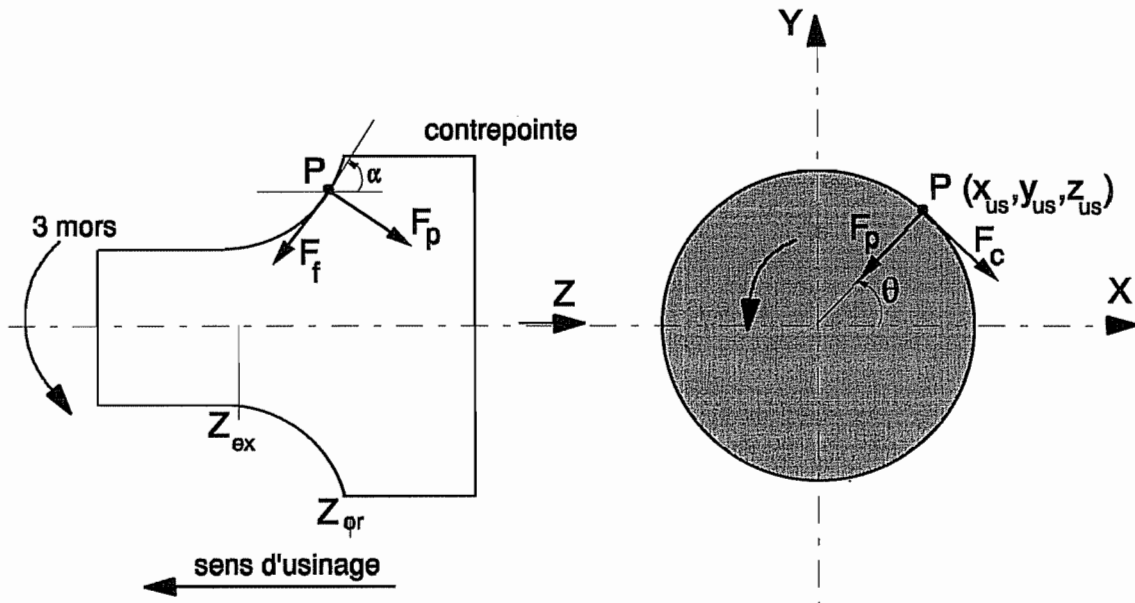


Figure 19 : Direction des efforts pour le contournage

III. Alésage à l'alésoir

1. Position du problème

1.1. But du programme

Le problème de l'usinage à l'alésoir est très semblable à celui du fraisage. Le but du programme est de déterminer les cas de charge à appliquer au maillage pour des positions successives de l'alésoir. Chaque cas de charge comprend les numéros des noeuds chargés, les forces qui y sont appliquées et la liste des noeuds qui sont coupés par l'outil. Ces cas de charge permettront par la suite de déterminer le défaut d'usinage de la pièce.

Les étapes principales du programme sont les suivantes :

- déterminer les positions successives de l'alésoir et les noeuds coupés pour chaque position;
- déterminer, pour une position donnée, les éléments du maillage coupés par l'outil et calculer les efforts de coupe sur chacun de ces éléments;
- répartir sur les noeuds du maillage les forces appliquées aux mailles.

1.2. Données du problème

1.2.1. Maillage

Le maillage comprend les coordonnées des noeuds et les définitions des mailles volumiques. Les seuls types d'éléments volumiques traités sont les tétraèdres et les hexaèdres du premier ou du second degré. Le maillage peut également contenir d'autres types d'éléments (poutres, coques, ...) mais ceux-ci ne doivent pas appartenir à la surface usinée de la pièce. Les noeuds de la surface usinée sont repérés par un groupe '*SURF_USINEE*'.

Maillage surfacique

A partir du maillage initial, on crée un maillage qui comprend les noeuds de la surface usinée et leurs coordonnées *X*, *Y* et *Z* ainsi que les numéros des noeuds qui composent les éléments de surface. Ceux-ci sont donc des quadrangles ou des triangles (du 1^{er} ou du 2nd degré).

On crée également une *table des côtés des mailles* qui comprend, pour chaque côté :

- le numéro du noeud origine,
- le numéro du noeud d'interface pour un élément du 2nd degré,
- le numéro du noeud extrémité,
- le numéro de la première maille à laquelle appartient le côté,
- le numéro de la seconde maille,
- la longueur du côté.

Lorsqu'un côté n'appartient qu'à une seule maille, c'est un côté *frontière* du maillage et le numéro de la seconde maille n'existe pas.

1.2.2. Outil

Les données relatives à l'alésoir sont :

- le diamètre D (rayon R),
- le nombre de dents Z ,
- les angles d'outil κ_r , γ_f et γ_p .

1.2.3. Trajectoire

La trajectoire de l'axe de l'alésoir est composée d'une succession de segments de droites, qui sont toujours parallèles à l'axe OZ du maillage. Les données descriptives d'un segment sont donc :

- les coordonnées de l'origine $C_0 (X_0, Y_0, Z_0)$;
- les coordonnées de l'extrémité $C_1 (X_1, Y_1, Z_1)$.

Pour chaque segment, on donne également :

- la vitesse de rotation de l'outil N (constante),
- la vitesse d'avance v_f (constante).

1.2.4. Matériau

Les données spécifiant les caractéristiques du matériau utilisé permettent de déterminer les valeurs à employer dans les calculs des forces de coupe (cf. rapport n°4 partie alésage à l'alésoir), c'est-à-dire les pressions spécifiques et les taux d'accroissement.

1.3. Méthode de calcul

La première étape consiste à déterminer l'ordre chronologique d'usinage des noeuds. Un noeud i est coupé lorsque le centre de l'alésoir a parcouru une distance d_i sur sa trajectoire. On appelle d_i la *distance de coupe* du noeud i . En classant les distances de coupe par ordre croissant, on établit l'ordre d'usinage des noeuds.

Les positions successives de l'outil sont choisies en fonction des distances de coupe des noeuds. Il existe plusieurs méthodes pour effectuer ce choix (cf. § 2).

Pour une position donnée, l'alésoir peut être assimilé à un plan perpendiculaire à l'axe OZ du maillage, et dont la coordonnée Z peut être calculée à partir de la distance d parcourue sur la trajectoire.

A ce moment, les noeuds dont la distance de coupe est inférieure à d ont déjà été usinés. On les appelle noeuds I . Les noeuds dont la distance de coupe est supérieure à d n'ont pas encore été usinés. On les appelle noeuds O .

Une maille est considérée comme coupée par l'outil lorsqu'au moins un de ses côtés est coupé. On doit donc déterminer, parmi tous les côtés des mailles de la surface usinée, ceux qui sont coupés par l'alésoir. Afin de limiter le coût de calcul, on n'examine que les côtés dont au moins une extrémité est usinée (noeuds I). Pour chaque côté coupé, on calcule les coordonnées de l'intersection avec l'outil et la profondeur de passe (radiale) en ce point.

Connaissant la liste des côtés coupés, on établit alors la suite des éléments coupés grâce à la table des côtés. Pour chaque élément de la suite, on connaît les extrémités de l'arc en prise et les profondeurs de passe en ces deux points.

Les forces résultantes appliquées à un élément sont calculées, dans le système d'axes de l'alésoir, par intégration des forces réparties sur l'arc. L'intégrale est approchée par la méthode de Gauss en prenant six points.

On répartit alors les forces dans les trois directions calculées en chacun des points de Gauss sur les noeuds de l'élément coupé. En procédant de la même façon pour toutes les mailles coupées, on détermine l'ensemble de forces appliquées au maillage pour une position donnée de l'outil.

2. Choix des positions de calcul

2.1. Distances de coupe

La distance de coupe d_i correspondant à un noeud i est la distance que parcourt le centre de l'alésoir à partir de son point de départ pour couper le noeud. Connaissant les coordonnées axiales Z_0 et Z_1 de l'origine et de l'extrémité de la trajectoire, ainsi que celle du noeud i usiné Z_i , la distance de coupe correspondant au noeud i vaut :

$$d_i = | Z_0 - Z_i |$$

2.2. Choix des positions successives de l'alésoir

2.2.1. Méthodes envisagées

La méthode la plus simple consiste à effectuer un calcul pour chaque noeud de la surface usinée. Cette méthode est la moins économique puisqu'on détermine autant de cas de charge qu'il y a de noeuds usinés. Le nombre de cas de charge est en réalité un peu plus faible puisque certains noeuds sont parfois coupés en même temps, notamment si les éléments bordant l'alésage sont disposés de manière à avoir des frontières dans des plans perpendiculaires à l'axe de l'alésage.

Les positions successives de l'alésoir sont déterminées en avançant chaque fois d'une distance égale à la différence entre deux d_i successifs. D'autres méthodes possibles consisteraient à avancer d'une distance plus importante entre chaque calcul afin de réduire le nombre de cas de charge. Par exemple, on pourrait avancer avec un pas constant ou choisir le pas en fonction de la densité des noeuds. Ces méthodes feront l'objet du rapport n° 8 traitant des procédures de limitation des cas de charge.

Quelle que soit la méthode choisie, on connaît avant chaque calcul la position du centre de l'outil qui correspond à un déplacement d sur sa trajectoire. Avant d'effectuer le calcul proprement dit des forces généralisées pour la position choisie, il faut d'abord effectuer une série d'opérations qui font l'objet du paragraphe suivant.

2.2.2. Calculs préalables

Mise à jour des indicateurs d'usinage des noeuds

Les noeuds dont la distance de coupe d_i est inférieure ou égale à d sont déjà coupés et deviennent donc des noeuds 1 . Les autres noeuds restent à 0 .

Correction des pressions de coupe

Etant donné que la trajectoire est toujours unique dans le cas de l'alésage à l'alésoir, avec une vitesse de rotation N et d'avance v_f constantes, la correction des pressions de coupe sera effectuée une fois pour toute en fonction des paramètres d'usinage (cf. rapport n°4).

Système d'axes de l'alésoir

Le système d'axes lié à l'outil ($CXYZ'$) est différent de celui de la pièce ($OXYZ$) mais ne varie pas en fonction de la position de l'outil sur la trajectoire. On suppose que l'alésoir tourne dans le sens horlogique.

Le nouveau système d'axes est :

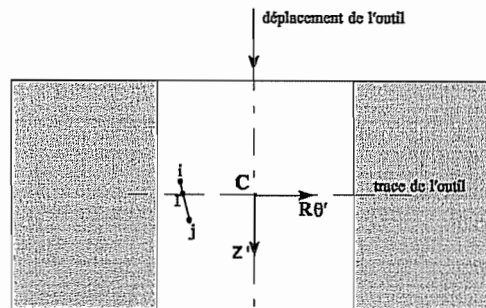
$$\begin{cases} CX' = OY \\ CY' = OX \\ CZ' = -OZ \end{cases}$$

3. Calcul des efforts de coupe

3.1. Intersections de l'outil et du maillage

3.1.1. Intersection d'un côté avec l'outil

Etant donné la géométrie du problème, on travaille dans le plan $(R\theta, z)$. Pour déterminer l'intersection d'un côté avec l'alésoir, on utilise l'expression analytique de l'intersection d'un segment de droite avec un plan. Le segment de droite représente le côté dont les extrémités sont les noeuds i et j , et le plan, l'alésoir dont le centre est au point C (fig. 20).



Le côté est coupé si

$$| Z_i - Z_c | \leq | Z_i - Z_j | ,$$

les noeuds i et j appartenant tous les deux à la surface usinée.

Figure 20 : Intersection du côté ij avec la surface de coupe de l'alésoir

Les coordonnées de l'intersection sont données par

$$\begin{cases} X_I = (1 - t) X_i + t X_j \\ Y_I = (1 - t) Y_i + t Y_j \\ Z_I = (1 - t) Z_i + t Z_j = Z_c \end{cases}$$

avec le paramètre t que l'on extrait de la dernière relation :

$$t = \frac{(Z_c - Z_i)}{(Z_j - Z_i)} \in [0, 1]$$

Réduction du nombre de côtés à examiner

Pour déterminer la liste des côtés coupés, il faudrait, pour chaque position de la fraise, examiner tour à tour tous les côtés du maillage surfacique. Pour limiter le nombre de côtés à examiner, on peut utiliser les *indicateurs d'usinage* des noeuds. On évite ainsi de traiter les côtés 00 qui ne peuvent rentrer dans la liste des côtés coupés. En plus, étant donné que la trajectoire est composée d'un seul segment, on limite l'examen aux côtés 01 puisque ce sont les seuls coupés par l'alésoir.

3.1.2. Classement des côtés par ordre topologique

Le classement des côtés coupés par ordre topologique permet par après de déterminer la suite des mailles coupées (cf. § 3.1.3.). On range les côtés en fonction de la position de leur intersection sur le plan en partant de l'axe CX' et en tournant dans le sens horlogique (fig. 21). Pour chaque côté, on calcule l'angle θ que fait le vecteur CI avec l'axe de l'alésoir CX' , soit

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{CI \cdot CY'}{R} \right)$$

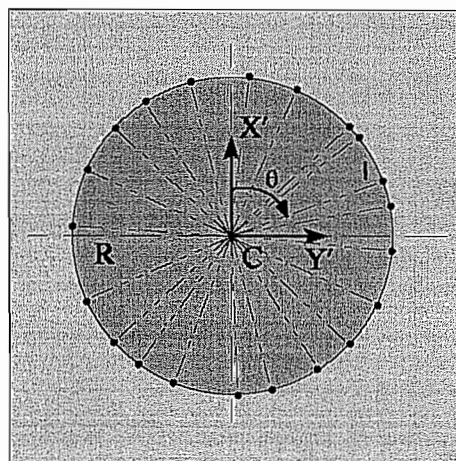


Figure 21 : Classement des côtés par θ croissant

ce qui permet de classer les côtés par ordre de θ croissant, avec $\theta \in [0, 2\pi]$. L'arc en prise

de l'alésoir est généralement un cercle complet, mais il peut également être constitué, dans certains cas, d'un ou de plusieurs arcs de cercles disjoints. Les extrémités de ces arcs correspondent toutes à des intersections entre le cercle et des côtés frontières du maillage. La suite des côtés coupés déterminée ne doit donc pas être modifiée.

3.1.3. Suite de mailles coupées

A ce moment, on connaît la liste des côtés coupés classés par ordre de θ croissant et pour chaque côté, les données suivantes :

- l'angle θ de l'intersection avec le plan,
- la profondeur de passe a_r en ce point,
- les deux mailles auxquelles appartient le côté (une seule si c'est un côté *frontière*).

Si l'arc en prise n'est pas le cercle complet, ses limites correspondent à des bords de la pièce (bords extérieurs ou cavités dans la surface usinée) et donc à des côtés frontières du maillage. Dans ce cas, la suite des mailles coupées est composée de sous-suites qui contiennent chacune une série de mailles adjacentes.

Lorsque l'arc en prise vaut 2π , la suite des mailles coupées se compose d'une seule série de mailles adjacentes, la première et la dernière mailles de cette série étant elles-mêmes adjacentes.

En partant du premier côté de la liste des côtés coupés, on examine à chaque fois un côté et son suivant. Il existe quatre cas possibles :

- Les deux côtés appartiennent à la même maille et aucun des deux n'est un côté frontière. Cette maille est une maille milieu d'une sous-suite de mailles.
- Les deux côtés appartiennent à la même maille mais le premier est un côté frontière. La maille est la première d'une sous-suite de mailles.
- Les deux côtés appartiennent à la même maille mais le second est un côté frontière. La maille est la dernière d'une sous-suite de mailles.
- Les deux côtés n'appartiennent pas à la même maille. On se trouve entre deux sous-suites.

3.2. Efforts de coupe sur un élément

3.2.1. Profondeur de passe radiale et engagement longitudinal

On connaît la profondeur de passe en chaque noeud de la surface usinée. Celle-ci correspond à la différence entre le rayon de l'alésoir et le rayon du trou avant usinage, et est donnée constante.

Cependant, un problème se pose au moment de l'entrée et de la sortie de l'outil dans la matière, lorsque le plan de la pièce n'est pas perpendiculaire à l'alésoir. L'arc en prise n'est plus alors qu'une portion de cercle, sur laquelle la profondeur de passe radiale est toujours constante, mais pas l'engagement axial h .

Une première approximation consiste à adopter une valeur de l'engagement axial constante sur tout l'arc en prise, ce qui revient à assimiler le plan oblique à une série de gradins. Plus le plan sera incliné, plus les résultats obtenus s'éloigneront de la réalité. Cependant, il faut remarquer qu'une forte inclinaison du plan de la pièce par rapport à l'alésage entraîne une déformation importante de l'alésoir, et donc un défaut d'usinage non négligeable (supérieur à celui engendré par les efforts de coupe). Cette situation devra donc être évitée.

Il est également possible d'adopter pour l'engagement axial sa valeur moyenne sur chacun des éléments de surface. Cette méthode est plus rigoureuse mais demande un effort de programmation supérieur.

3.2.2. Forces de coupe

Le modèle de forces de coupe utilisé est le modèle de Kienzle. Dans les axes de l'alésoir, les forces de coupe réparties selon les trois directions valent

$$\bar{\mathcal{F}}_x = \frac{a_r f}{2 \pi R} \left[-\frac{k_{c1.1}}{h_{max}^{m_c}} \cdot \cos^{1-m_c} \theta \sin \theta + \frac{k_{p1.1}}{h_{max}^{m_p}} \cdot \cos^{2-m_p} \theta \right]$$

$$\bar{\mathcal{F}}_y = \frac{a_r f}{2 \pi R} \left[\frac{k_{c1.1}}{h_{max}^{m_c}} \cdot \cos^{2-m_c} \theta + \frac{k_{p1.1}}{h_{max}^{m_p}} \cdot \cos^{1-m_p} \theta \sin \theta \right]$$

$$\bar{\mathcal{F}}_z = \frac{k_{f1.1}}{h_{max}^{m_f}} \cdot \frac{a_r f}{2 \pi R} \cdot \cos^{1-m_f} \theta$$

Les pressions de coupe k qui interviennent dans ces expressions sont les valeurs corrigées en fonction des paramètres d'usinage et des angles de l'outil (cf. rapport n°4).

4. Calcul des forces généralisées

4.1. Forces résultantes sur un élément

Pour une maille coupée, les forces résultantes dans les axes de la fraise sont calculées en intégrant les forces réparties sur l'arc $I_1 I_2$. La variable d'intégration est l'angle θ . On suppose que la profondeur de passe varie linéairement entre a_{r1} et a_{r2} (fig. 23), ce qui donne

$$a_r(\theta) = \frac{\theta_2 - \theta}{\theta_2 - \theta_1} a_{r1} + \frac{\theta - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} a_{r2}$$

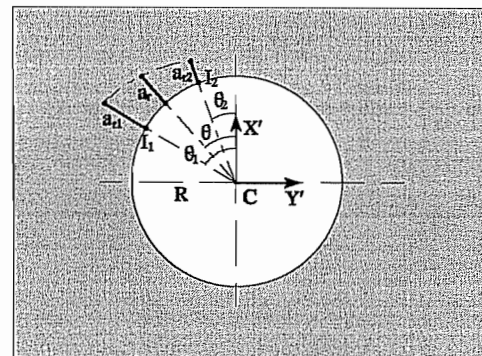


Figure 22 : Profondeur de passe radiale en fonction de θ

Les forces $F_{X'}$, $F_{Y'}$ et $F_{Z'}$ valent

$$F_{X'} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{\mathcal{F}}_{X'}(\theta) R d\theta = \frac{f}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} a_r(\theta) \left[-\frac{k_{c1.1}}{h_{\max}^{m_c}} \cos^{1-m_c} \theta \sin \theta + \frac{k_{p1.1}}{h_{\max}^{m_p}} \cos^{2-m_p} \theta \right] d\theta$$

$$F_{Y'} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{\mathcal{F}}_{Y'}(\theta) R d\theta = \frac{f}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} a_r(\theta) \left[\frac{k_{c1.1}}{h_{\max}^{m_c}} \cos^{2-m_c} \theta + \frac{k_{p1.1}}{h_{\max}^{m_p}} \cos^{1-m_p} \theta \sin \theta \right] d\theta$$

$$F_{Z'} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{\mathcal{F}}_{Z'}(\theta) R d\theta = \frac{k_{f1.1}}{h_{\max}^{m_f}} \frac{f}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} a_r(\theta) \cos^{1-m_f} \theta d\theta$$

Intégration d'une fonction par points de Gauss

Les intégrales sont calculées par la méthode de Gauss. Soit une fonction $f(x)$ à intégrer sur un intervalle $[-1, 1]$. L'intégrale de f est approchée par la série ci-dessous

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong \sum_{i=1}^N f(x_i) w_i$$

où les x_i sont les abscisses des points de Gauss et les w_i les poids de Gauss. Plus le nombre de points de Gauss est élevé, plus la série converge vers la valeur exacte de l'intégrale. Nous avons choisi de prendre 6 points de Gauss pour évaluer l'intégrale. Dans ce cas, les abscisses et les poids de Gauss sont les suivants :

$$\begin{cases} x_i = \pm 0.238619, \pm 0.661209, \pm 0.932469 \\ w_i = 0.467913, 0.360761, 0.171324 \end{cases}$$

Les bornes d'intégration étant θ_1 et θ_2 , on effectue un changement de variable pour pouvoir appliquer la formule ci-dessus, soit

$$\zeta = \frac{\theta - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} - \frac{\theta_2 - \theta}{\theta_2 - \theta_1}$$

4.2. Répartition des forces aux noeuds d'un élément

4.2.1. Introduction

Lorsqu'on intègre les forces réparties sur l'arc en prise sur un élément, on remplace celles-ci par des forces f_x' , f_y' et f_z' appliquées aux six points de Gauss. Quel que soit le type d'élément (triangle ou quadrangle, premier ou second degré), on calcule les coordonnées isoparamétriques (ξ , η) du point de Gauss puis on calcule les fonctions de forme Φ_i associées aux noeuds de l'élément. Les forces f appliquées en un point de Gauss sont alors réparties aux noeuds de la manière suivante (fig.24).

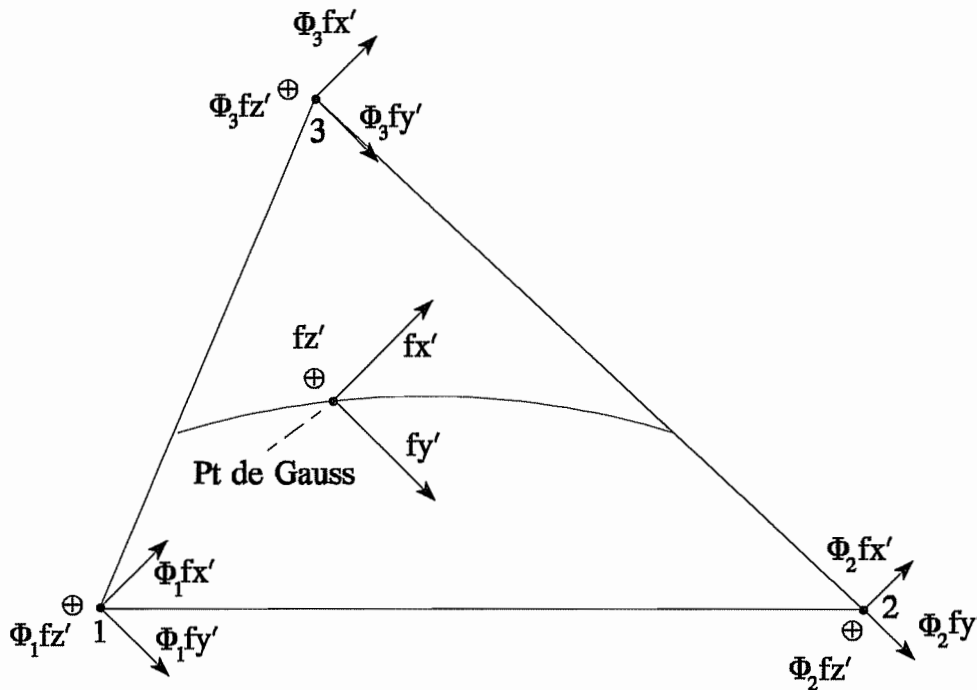


Figure 23 : Répartition aux noeuds d'un élément

4.2.2. Élément triangulaire du premier degré

Les coordonnées à prendre en considération ici sont $R\theta$ et z avec

$$\theta = \pi + \text{sign } y \cdot \left(\arccos \frac{x}{R} - \pi \right) \quad \text{avec} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Le passage aux coordonnées isoparamétriques s'écrit :

$$\begin{cases} R\theta = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta \\ z = \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta \end{cases}$$

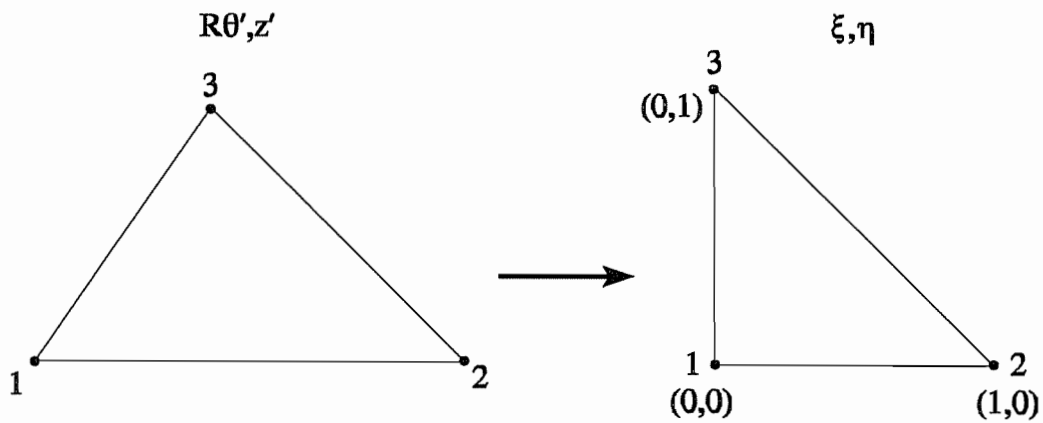


Figure 24 : Passage aux coordonnées isoparamétriques (triangle 1^{er} degré)

Les coefficients α_j et β_j valent :

$$\begin{cases} \alpha_1 = R\theta_1 & \alpha_2 = R\theta_{21} & \alpha_3 = R\theta_{31} \\ \beta_1 = z_1 & \beta_2 = z_{21} & \beta_3 = z_{31} \end{cases}$$

avec $*_{ij} = *_{j1} - *_{i1}$

Connaissant les coordonnées $(R\theta_A, z_A)$ du point d'application de la force, on calcule ses coordonnées isoparamétriques par :

$$\begin{cases} \xi_A = \frac{R\theta_{A1} z_{31} - z_{A1} R\theta_{31}}{\Delta} \\ \eta_A = \frac{R\theta_{21} z_{A1} - z_{21} R\theta_{A1}}{\Delta} \end{cases} \quad \text{où} \quad \Delta = R\theta_{21} z_{31} - z_{21} R\theta_{31}$$

Les fonctions de forme associées aux trois sommets de l'élément sont :

$$\begin{cases} \Phi_1 = 1 - \xi_A - \eta_A \\ \Phi_2 = \xi_A \\ \Phi_3 = \eta_A \end{cases}$$

4.2.3. Élément quadrangulaire du premier degré

De la même manière, le passage aux coordonnées isoparamétriques s'écrit :

$$\begin{cases} R\theta = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta \\ z = \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta + \beta_4 \xi \eta \end{cases}$$

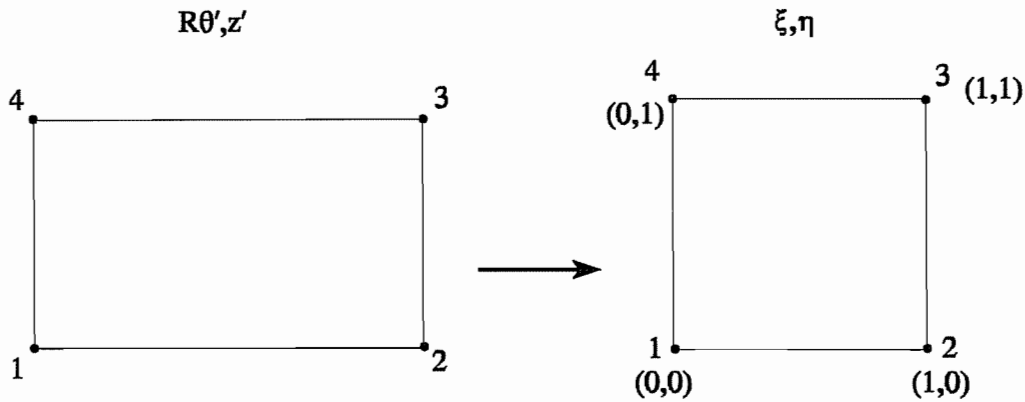


Figure 25 : Passage aux coordonnées isoparamétriques (quadrangle 1^{er} degré)

Les coefficients α_j et β_j valent :

$$\begin{cases} \alpha_1 = R\theta_{11} & \alpha_2 = R\theta_{21} & \alpha_3 = R\theta_{41} & \alpha_4 = R\theta_{12} + R\theta_{34} \\ \beta_1 = z_{11} & \beta_2 = z_{21} & \beta_3 = z_{41} & \beta_4 = z_{12} + z_{34} \end{cases}$$

avec $*_{ij} = *_{j1} - *_{i1}$

Les coordonnées isoparamétriques du point d'application sont calculées en résolvant le système :

$$\begin{cases} R\theta_A = \alpha_1 + \alpha_2 \xi_A + \alpha_3 \eta_A + \alpha_4 \xi_A \eta_A \\ z_A = \beta_1 + \beta_2 \xi_A + \beta_3 \eta_A + \beta_4 \xi_A \eta_A \end{cases}$$

Les fonctions de forme associées aux quatre sommets de l'élément sont :

$$\begin{cases} \Phi_1 = (1 - \xi_A)(1 - \eta_A) \\ \Phi_2 = \xi_A(1 - \eta_A) \\ \Phi_3 = \xi_A \eta_A \\ \Phi_4 = \eta_A(1 - \xi_A) \end{cases}$$

4.2.4. Élément triangulaire du second degré

Le passage aux coordonnées isoparamétriques s'écrit :

$$\begin{cases} R\theta = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 \\ z = \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta + \beta_4 \xi^2 + \beta_5 \xi \eta + \beta_6 \eta^2 \end{cases}$$

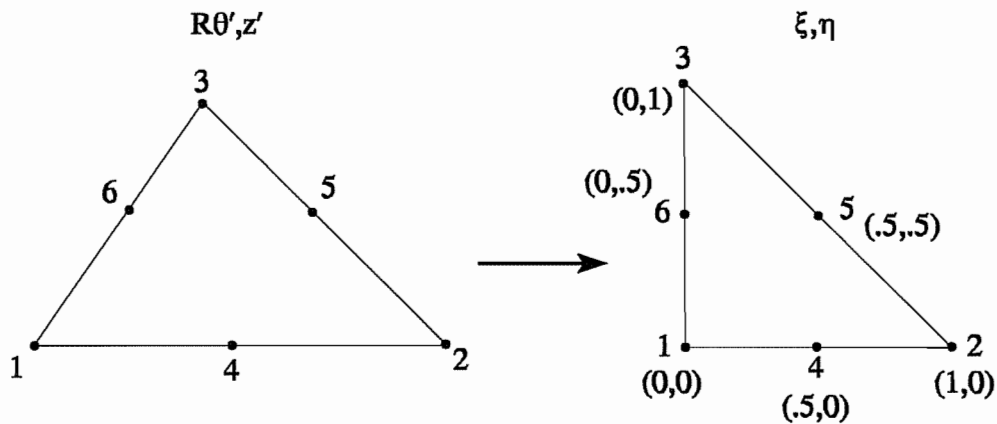


Figure 26 : Passage aux coordonnées isoparamétriques (triangle 2nd degré)

Les coefficients α_j et β_j valent :

$$\begin{cases} \alpha_1 = R\theta_1 & \alpha_2 = 4R\theta_4 - 3R\theta_1 - R\theta_2 \\ \alpha_3 = 4R\theta_6 - 3R\theta_1 - R\theta_3 & \alpha_4 = 2(R\theta_1 + R\theta_2) - 4R\theta_4 \\ \alpha_5 = 4(R\theta_{41} + R\theta_{65}) & \alpha_6 = 2(R\theta_1 + R\theta_3) - 4R\theta_6 \\ \beta_1 = z_1 & \beta_2 = 4z_4 - 3z_1 - z_2 \\ \beta_3 = 4z_6 - 3z_1 - z_3 & \beta_4 = 2(z_1 + z_2) - 4z_4 \\ \beta_5 = 4(z_{41} + z_{65}) & \beta_6 = 2(z_1 + z_3) - 4z_6 \end{cases}$$

Il est impossible de trouver analytiquement les coordonnées isoparamétriques du point d'application de la force (équation du 4^{ème} degré). On utilise donc une méthode numérique pour calculer (ξ_A, η_A) .

Celle-ci consiste à minimiser le carré de la distance entre le point A et le point P de coordonnées (ξ, η) , soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\xi, \eta} f(\xi, \eta) = (R\theta_A - R\theta(\xi, \eta))^2 + (z_A - z(\xi, \eta))^2 \\ \text{avec } \xi, \eta \in \{(\xi, \eta) \mid \xi \geq 0, \eta \geq 0, (\xi + \eta) \leq 1\} \\ \text{(avec une tolérance)} \end{array} \right.$$

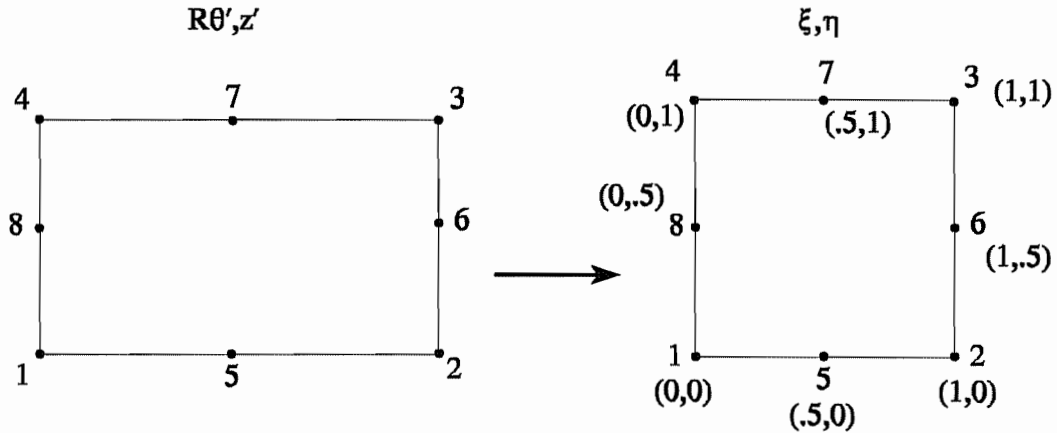
Les fonctions de forme associées aux six noeuds de l'élément sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 = (1 - \xi_A - \eta_A)(1 - 2(\xi_A + \eta_A)) \\ \Phi_2 = \xi_A(2\xi_A - 1) \\ \Phi_3 = \eta_A(2\eta_A - 1) \\ \Phi_4 = 4\xi_A(1 - \xi_A - \eta_A) \\ \Phi_5 = 4\xi_A\eta_A \\ \Phi_6 = 4\eta_A(1 - \xi_A - \eta_A) \end{array} \right.$$

4.2.5. Élément quadrangulaire du second degré

Le passage aux coordonnées isoparamétriques s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} R\theta = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^2 \eta + \alpha_8 \xi \eta^2 \\ z = \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta + \beta_4 \xi^2 + \beta_5 \xi \eta + \beta_6 \eta^2 + \beta_7 \xi^2 \eta + \beta_8 \xi \eta^2 \end{array} \right.$$


 Figure 27 : Passage aux coordonnées isoparamétriques (quadrangle 2nd degré)

Les coefficients α_j valent :

$$\begin{cases} \alpha_1 = R\theta_1 \\ \alpha_2 = 4R\theta_5 - 3R\theta_1 - R\theta_2 \\ \alpha_3 = 4R\theta_8 - 3R\theta_1 - R\theta_4 \\ \alpha_4 = 2(R\theta_1 + R\theta_2) - 4R\theta_5 \\ \alpha_5 = 5R\theta_1 - R\theta_2 - 3R\theta_3 - R\theta_4 + 4(R\theta_{56} + R\theta_{87}) \\ \alpha_6 = 2(R\theta_1 + R\theta_4) - 4R\theta_8 \\ \alpha_7 = 2(R\theta_{13} + R\theta_{24}) + 4R\theta_{75} \\ \alpha_8 = 2(R\theta_{12} + R\theta_{43}) + 4R\theta_{68} \end{cases}$$

Les coefficients β_j sont donnés par les mêmes expressions en remplaçant $R\theta$ par z . On calcule les coordonnées (ξ_A, η_A) du point d'application de la force de la même manière que pour les triangles du second degré, mais dans l'ensemble $[0,1] \times [0,1]$.

Les fonctions de forme associées aux huit noeuds de l'élément sont :

$$\begin{cases} \Phi_1 = (1 - \xi_A)(1 - \eta_A)(1 - 2(\xi_A + \eta_A)) \\ \Phi_2 = \xi_A(1 - \eta_A)(2(\xi_A - \eta_A) - 1) \\ \Phi_3 = \xi_A \eta_A (2(\xi_A + \eta_A) - 3) \\ \Phi_4 = \eta_A(1 - \xi_A)(2(\eta_A - \xi_A) - 1) \\ \Phi_5 = 4\xi_A(1 - \xi_A)(1 - \eta_A) \\ \Phi_6 = 4\xi_A \eta_A (1 - \eta_A) \\ \Phi_7 = 4\xi_A \eta_A (1 - \xi_A) \\ \Phi_8 = 4\eta_A(1 - \xi_A)(1 - \eta_A) \end{cases}$$

4.3. Forces généralisées et cas de charges

4.3.1. Passage au système d'axes de la pièce

Lorsqu'on a réparti les forces aux noeuds de tous les éléments coupés, il reste à repasser au système d'axes de la pièce par les formules suivantes :

$$\begin{cases} f_x = f_{y'} \\ f_y = f_{x'} \\ f_z = -f_{z'} \end{cases}$$

4.3.2. Cas de charge

On a ainsi établi le cas de charge correspondant à la coupe d'un ou plusieurs noeuds. On procède de même autant de fois qu'il y a de positions successives de l'outil. Chaque cas de charge est donc constitué de :

- la liste des noeuds coupés;
- la liste des noeuds chargés et les forces f_x , f_y et f_z qui leurs sont appliquées.

Ces données sont alors transmises au programme de calcul du défaut (cf. rapport n°7 : Description d'une méthode de reconstitution de la surface usinée).

IV. Brochage

1. Position du problème

1.1. But du programme

La méthode appliquée dans le cas du brochage comporte une différence importante par rapport aux autres types d'usinage : il n'y a qu'un seul cas de charges, appliqué simultanément à tous les noeuds de la surface usinée. Le but du programme est alors de déterminer le cas de charge à appliquer au maillage, dans le cas du régime établi (i.e., la broche couvre toute la pièce). Tous les noeuds de la surface usinée sont chargés et coupés, et les forces appliquées sont des densités constantes sur toute la surface usinée. Ce cas de charge permettra de déterminer le défaut d'usinage de la pièce.

Les étapes principales du programme sont les suivantes :

- calculer les pressions de coupe sur chacun des éléments de la surface usinée;
- répartir sur les noeuds du maillage les pressions appliquées aux mailles (réalisé automatiquement par NASTRAN).

1.2. Données du problème

1.2.1. Maillage

Le maillage comprend les coordonnées des noeuds et les définitions des mailles volumiques. Les seuls types d'éléments volumiques traités sont les tétraèdres et les hexaèdres du premier ou du second degré. Le maillage peut également contenir d'autres types d'éléments (poutres, coques, ...) mais ceux-ci ne peuvent pas appartenir à la surface usinée de la pièce. Les noeuds de la surface usinée sont repérés par un groupe '*SURF_USINEE*'.

Maillage surfacique

A partir du maillage initial, on crée un maillage qui comprend les noeuds de la surface usinée et leurs coordonnées *X*, *Y* et *Z* ainsi que les numéros des noeuds qui composent les éléments de surface. Ceux-ci sont donc des quadrangles ou des triangles (du 1^{er} ou du 2nd degré).

1.2.2. Outil

Les données relatives à la broche sont :

- l'écartement des dents e ,
- la progression par dent h ,
- l'inclinaison des dents λ ,
- les angles d'outil κ_r , γ_n et λ_s .

1.2.3. Trajectoire

La trajectoire de l'axe de la broche est une trajectoire rectiligne, située dans le plan (x,y) lors d'un surfacage plan (brochage extérieur) ou parallèle à l'axe OZ pour un brochage intérieur. La trajectoire est utile afin de connaître la direction d'avance de la broche, et donc des différentes composantes de l'effort global de coupe. Les données descriptives de la trajectoire sont :

- les coordonnées de l'origine $C_0 (X_0, Y_0, Z_0)$;
- les coordonnées de l'extrémité $C_1 (X_1, Y_1, Z_0)$ (brochage extérieur) ou $C_1 (X_0, Y_0, Z_1)$ (brochage intérieur).

Pour chaque segment, on donne également la vitesse d'avance v_f (constante) de la broche.

1.2.4. Matériau

Les données spécifiant les caractéristiques du matériau utilisé permettent de déterminer les valeurs à employer dans les calculs des forces de coupe (cf. rapport n°4 partie brochage), c'est-à-dire les pressions spécifiques et les taux d'accroissement.

1.3. Méthode de calcul

Tous les noeuds de la surface usinée étant coupé en même temps, il est inutile de déterminer l'ordre chronologique d'usinage des noeuds.

Les pressions de coupe, appliquées à tous les éléments de la surface usinée, sont calculées, dans le système d'axes de la broche, par les relations (31), (32) et (33) du rapport n°4 (partie brochage). On obtient alors des pressions normales et tangentielles, appliquées sur tous les éléments de la surface usinée, et NASTRAN répartit lui-même ces pressions en chacun des noeuds usiné.

1.4. Calculs préalables : correction des pressions de coupe

Etant donné que la trajectoire devrait toujours être unique dans le cas du brochage, avec une vitesse d'avance v_f constante, la correction des pressions de coupe sera effectuée une fois pour toute en fonction des paramètres d'usinage (cf. rapport n°4).

2. Calcul des pressions de coupe

Le modèle de forces de coupe utilisé est le modèle de Kienzle. Le rapport n°4 nous donne, pour les densités uniformes d'efforts τ_c , p et τ_a , les relations suivantes :

$$\tau_c = \frac{1}{e} h^{1-m_c} k_{c1.1}^* \cdot K_{\gamma,c} K_{\lambda,c} K_v K_{mat} K_{us} K_{br} = \frac{1}{e} h^{1-m_c} k_{c1.1}$$

$$p = \frac{1}{e} h^{1-m_f} k_{f1.1}^* \cdot K_{\gamma,f} K_{\lambda,f} K_v K_{mat} K_{us} K_{br} = \frac{1}{e} h^{1-m_f} k_{f1.1}$$

$$\tau_a = 0.28 \tau_c \operatorname{tg} \lambda$$

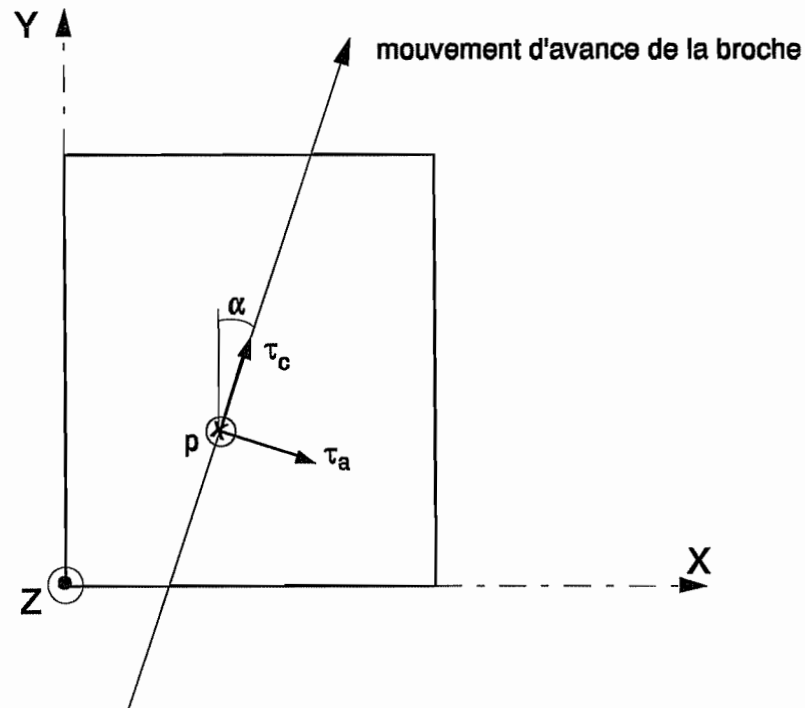
Les pressions de coupe k qui interviennent dans ces expressions sont les valeurs corrigées en fonction des paramètres d'usinage et des angles de l'outil (cf. rapport n°4).

2.1. Brochage plan extérieur

La pression d'avance p est toujours dans la direction normale à la surface usinée, et dirigée vers l'intérieur de la pièce. Dans le cas du brochage plan, cette pression est donc parallèle à l'axe OZ du maillage.

La pression de coupe τ_c est dirigée dans la direction et le sens de l'avance, c'est-à-dire qu'elle appartient au plan de coupe (x,y). Si l'avance n'est pas parallèle à l'axe OX ou à l'axe OY du maillage, τ_c possède une composante selon chacun de ces axes.

La pression axiale τ_a est quant à elle perpendiculaire au mouvement d'avance de la broche, et appartient également au plan de coupe (x,y). Elle se décompose de la même manière que la pression de coupe τ_c .



Dans les axes de la pièce, les pressions uniformes de coupe selon les trois directions valent alors :

$$\tau_x = \tau_c \sin \alpha + \tau_a \cos \alpha$$

$$\tau_y = \tau_c \cos \alpha - \tau_a \sin \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \arctg \left(\frac{Y_0 - Y_1}{X_0 - X_1} \right)$$

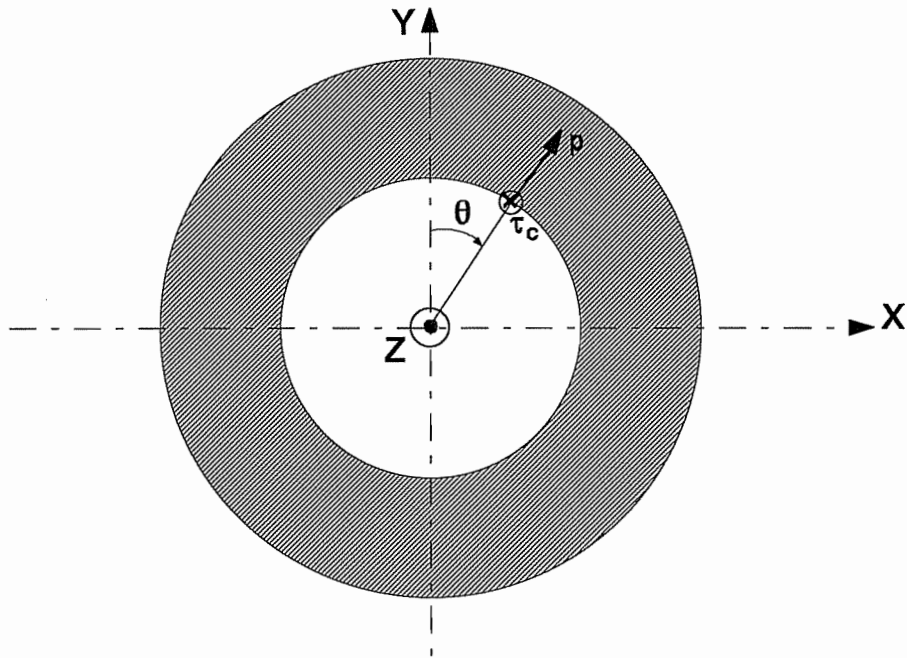
$$\tau_z = -p$$

2.2. Brochage cylindrique intérieur

La pression d'avance p est toujours dans la direction normale à la surface usinée, et dirigée vers l'intérieur de la pièce. Dans le cas du brochage intérieur, cette pression est donc radiale.

La pression de coupe τ_c est dirigée dans la direction et le sens de l'avance, c'est-à-dire qu'elle est parallèle à l'axe OZ du maillage.

La pression axiale τ_a quant à elle n'existe pas, car cela reviendrait à dire que la broche peut être hélicoïdale (étages obliques par rapport à l'axe).



Dans les axes de la pièce, les pressions uniformes de coupe selon les trois directions valent alors :

$$\tau_x = p \sin \theta$$

$$\tau_y = p \cos \theta$$

$$\tau_z = -\tau_c$$

3. Calcul des forces généralisées

Le code NASTRAN calcule lui-même la répartition des efforts aux noeuds des éléments sur lesquels sont appliquées des pressions normales et tangentielles.

V. Profondeur de passe

1. Position du problème

Au cours de l'usinage d'une pièce, l'épaisseur de matière à enlever n'est pas toujours constante. C'est notamment le cas lorsque la pièce sort de fonderie. Il faut donc tenir compte, lors du calcul des forces de coupes, de cette variation de la profondeur de passe.

La profondeur de passe est déterminée en chaque noeud du maillage éléments finis. Quelle que soit la technique d'usinage, on calcule la profondeur de passe en un noeud sur la normale à la surface usinée passant par celui-ci. La distance entre le noeud et le point de percée de la normale dans la surface extérieure de la pièce brute donne la profondeur de passe au droit du noeud.

Pour les types d'usinage où la surface usinée est plane (fraisage et dressage au tour), la surface extérieure de la pièce brute est fournie sous forme de fichier CAO facettisé. Celui-ci est composé de facettes triangulaires définies par trois points. La normale à la facette est également donnée.

Pour les types d'usinage où la surface usinée est axi-symétrique (tournage cylindrique, tournage conique et chariotage), la surface brute est également axi-symétrique et est décrite par sa génératrice dans le plan $Ox*z$ sous la forme d'une succession de segments de droites et d'arcs de cercles.

Pour les autres types d'usinage, la profondeur de passe est toujours supposée constante.

2. Surface brute facettisée

2.1. Données

Les données relatives au maillage sont :

- la liste des noeuds de la surface usinée,
- leurs coordonnées x et y .

La surface usinée est un plan de cote $z = z_{us}$. La surface extérieure de la pièce brute est donnée par un ensemble de facettes définies chacune par :

- ses trois sommets S_i de coordonnées (x_i, y_i, z_i) ,
- sa normale $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$.

2.2. Détermination de la facette active

Pour déterminer la profondeur de passe en un noeud, il faut d'abord déterminer la facette de la surface brute qui se trouve au-dessus de lui. En fait, il suffit de déterminer le point de percée de la normale à la surface usinée passant par le noeud dans la facette "active".

La normale à la surface usinée est le vecteur $\vec{o\hat{z}}$. Il est évident qu'une facette qui est située entièrement en-dessous de la surface usinée n'est pas impliquée dans le calcul des profondeurs de passe, de même qu'une facette dont la normale \vec{n} est perpendiculaire à $\vec{o\hat{z}}$ ne peut être percée.

Une facette est percée par la normale à un noeud lorsque ce noeud est intérieur à la projection de la facette sur le plan $z = z_{us}$. Le problème se réduit alors à un problème *plan*.

Considérons la projection de la facette f sur le plan de coordonnée $z = z_{us}$, soit le triangle $S_1 S_2 S_3$. Le passage aux coordonnées isoparamétriques (ξ, η) s'écrit :

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \xi \\ y = \beta_1 + \beta_2 \eta + \beta_3 \xi \end{cases} \quad (112)$$

Les coefficients α_j et β_j sont calculés grâce aux coordonnées x_i et y_i des trois sommets du triangle. En utilisant la convention $*_{ij} = *_{i} - *_{j}$, ils valent :

$$\begin{cases} \alpha_1 = x_1 & \alpha_2 = x_{31} & \alpha_3 = x_{21} \\ \beta_1 = y_1 & \beta_2 = y_{31} & \beta_3 = y_{21} \end{cases}$$

Soit le noeud P de coordonnées (x_p, y_p) . Ses coordonnées (ξ_p, η_p) sont calculées grâce à l'équation (1). La facette est percée par la normale au noeud P de coordonnées (x_p, y_p) si les coordonnées isoparamétriques de P obéissent aux trois relations suivantes :

- $\xi_p \geq 0$
- $\eta_p \geq 0$
- $\xi_p + \eta_p \leq 0$

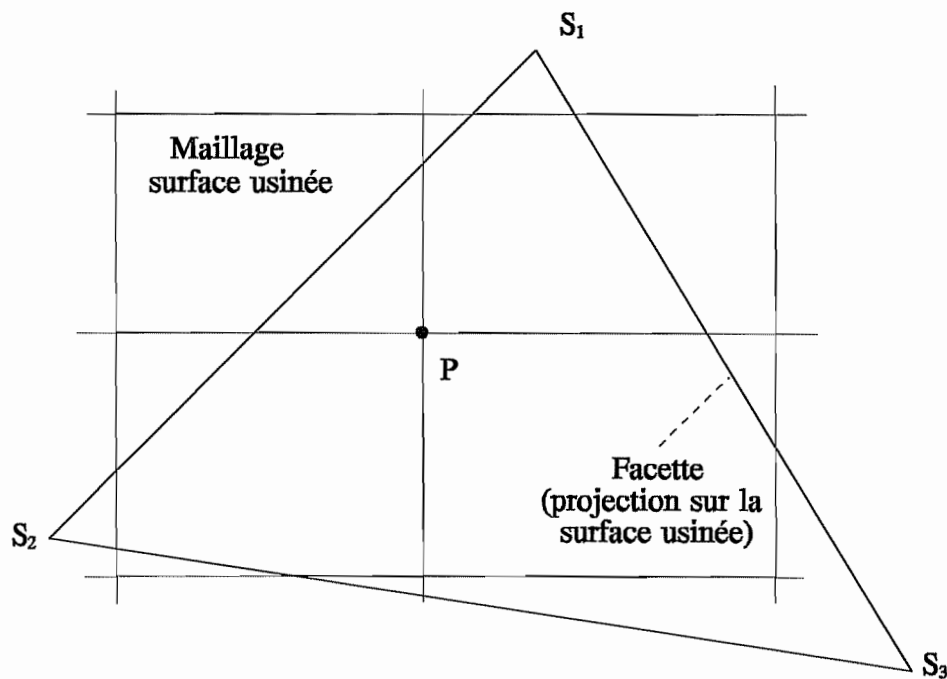


Figure 30 : Projection de la facette sur la surface usinée

2.3. Profondeur de passe

La profondeur de passe est égale à la distance entre le noeud et le point de percée de la normale dans la facette. L'équation du plan contenant la facette est de la forme

$$z = ax + by + c$$

ce qui est l'équation d'un plan non-parallèle à $\vec{o}z$. Les coefficients de l'équation sont calculés à partir des coordonnées des trois sommets. Les coordonnées du point de percée sont

$$P \equiv (x_p, y_p, ax_p + by_p + c)$$

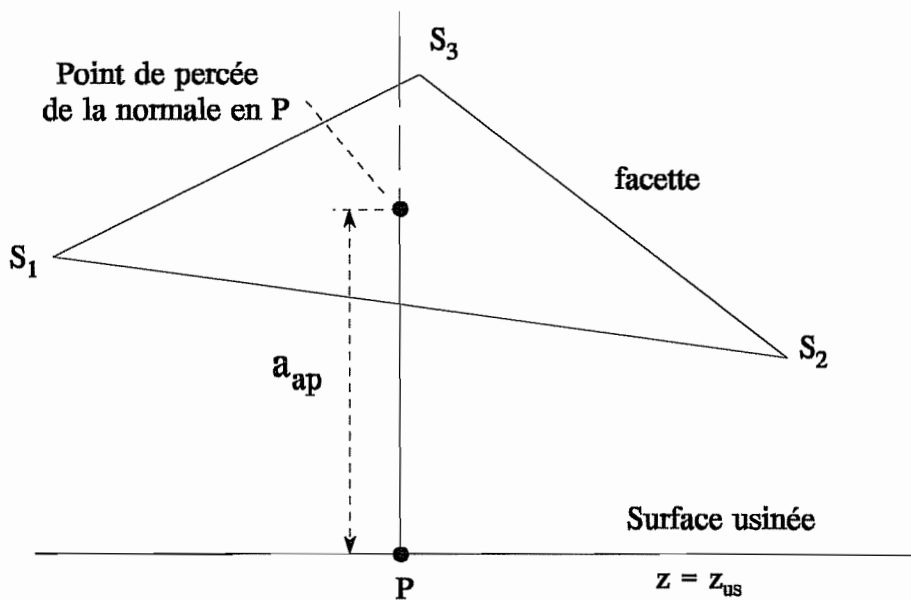


Figure 31 : Profondeur de passe au noeud P (vue de profil)

La profondeur de passe au droit du point P vaut finalement

$$a_{ap} = z_p - z_{us} = ax_p + by_p + c - z_{us}$$

3. Surface brute axisymétrique

3.1. Données

Les données relatives au maillage sont :

- la liste des noeuds de la surface usinée,
- leurs coordonnées x , y et z .

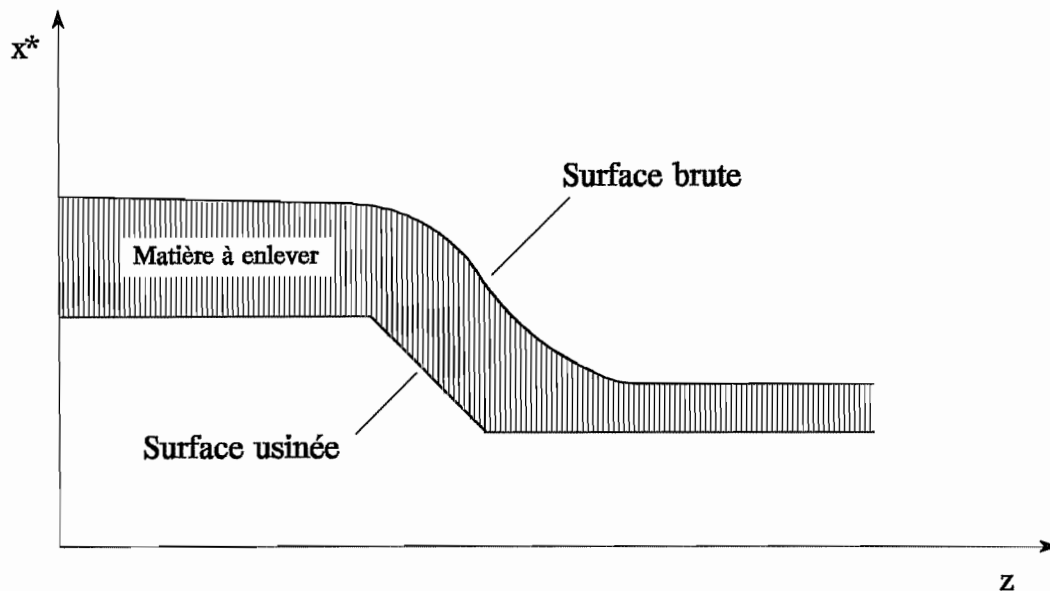


Figure 32 : Surface usinée et surface brute axisymétriques (traces dans le plan Ox^*z)

La surface usinée est axisymétrique et sa trace dans le plan Ox^*z est la trajectoire de l'outil. Elle est donc définie par une succession de segments de droites et d'arcs de cercles. La surface brute est également définie par sa trace dans Ox^*z .

3.2. Intersection de la normale en un noeud avec la surface brute

La première étape est de déterminer la normale à la surface usinée passant le noeud P . Connaissant les coordonnées (x_p, y_p, z_p) du noeud, on trouve ses coordonnées (x_p^*, z_p) et on peut déterminer le type de portion sur lequel se trouve le noeud : segment de droite ou arc de cercle. On détermine alors la normale en ce noeud.

Ensuite, en examinant successivement toutes les portions définissant la surface brute, on trouve celle qui est percée par la normale et les coordonnées (x_I^*, z_I) de l'intersection I .

3.3. Profondeur de passe

Connaissant les coordonnées du noeud (x_p^*, z_p) et celles de l'intersection I , on calcule la profondeur de passe au droit du noeud P qui est égale à la distance

$$|PI| = \sqrt{x_{pi}^{*2} + z_{pi}^2}$$

Table des matières

I. Fraisage	1
1. Position du problème	1
1.1. But du programme	1
1.2. Données du problème	1
1.2.1. Maillage	1
1.2.2. Outil	2
1.2.3. Trajectoire	2
1.2.4. Matériau	2
1.3. Méthode de calcul	3
2. Choix des positions de calcul	4
2.1. Distances de coupe	4
2.1.1. Segment rectiligne	4
2.1.2. Segment circulaire	6
2.1.3. Distance de coupe pour un noeud	7
2.2. Choix des positions successives de la fraise	7
2.2.1. Méthodes envisagées	7
2.2.2. Calculs préalables	8
3. Calcul des efforts de coupe	10
3.1. Intersections de l'outil et du maillage	10
3.1.1. Intersection d'un côté avec l'outil	10
3.1.2. Classement des côtés par ordre topologique	12
3.1.3. Suite de mailles coupées	12
3.2. Efforts de coupe sur un élément	14
3.2.1. Profondeur de passe	14
3.2.2. Forces de coupe	15
4. Calcul des forces généralisées	16
4.1. Forces résultantes sur un élément	16
4.2. Répartition des forces aux noeuds d'un élément	18
4.2.1. Introduction	18
4.2.2. Élément triangulaire du premier degré	19
4.2.3. Élément quadrangulaire du premier degré	20
4.2.4. Élément triangulaire du second degré	21
4.2.5. Élément quadrangulaire du second degré	23
4.3. Forces généralisées et cas de charges	24
4.3.1. Passage au système d'axes de la pièce	24
4.3.2. Cas de charge	24
II. Tournage	25
1. Position du problème	25
1.1. But du programme	25
1.2. Données du problème	25
1.2.1. Maillage	25
1.2.2. Outil	26
1.2.3. Trajectoire	26
1.2.4. Matériau	27
1.3. Méthode de calcul	27
2. Calcul des efforts de coupe	27
2.1. Choix des positions successives de l'outil	27

2.2. Correction des pressions de coupe	28
2.3. Profondeur de passe	28
2.4. Forces de coupe	29
2.4.1. Tournage cylindrique	30
2.4.2. Tournage conique	31
2.4.3. Dressage de surface	32
2.4.4. Contournage au tour	33
III. Alésage à l'alésoir	34
1. Position du problème	34
1.1. But du programme	34
1.2. Données du problème	34
1.2.1. Maillage	34
1.2.2. Outil	35
1.2.3. Trajectoire	35
1.2.4. Matériau	35
1.3. Méthode de calcul	36
2. Choix des positions de calcul	37
2.1. Distances de coupe	37
2.2. Choix des positions successives de l'alésoir	37
2.2.1. Méthodes envisagées	37
2.2.2. Calculs préalables	38
3. Calcul des efforts de coupe	39
3.1. Intersections de l'outil et du maillage	39
3.1.1. Intersection d'un côté avec l'outil	39
3.1.2. Classement des côtés par ordre topologique	40
3.1.3. Suite de mailles coupées	40
3.2. Efforts de coupe sur un élément	41
3.2.1. Profondeur de passe radiale et engagement longitudinal	41
3.2.2. Forces de coupe	42
4. Calcul des forces généralisées	42
4.1. Forces résultantes sur un élément	42
4.2. Répartition des forces aux noeuds d'un élément	44
4.2.1. Introduction	44
4.2.2. Élément triangulaire du premier degré	45
4.2.3. Élément quadrangulaire du premier degré	46
4.2.4. Élément triangulaire du second degré	47
4.2.5. Élément quadrangulaire du second degré	48
4.3. Forces généralisées et cas de charges	50
4.3.1. Passage au système d'axes de la pièce	50
4.3.2. Cas de charge	50
IV. Brochage	51
1. Position du problème	51
1.1. But du programme	51
1.2. Données du problème	51
1.2.1. Maillage	51
1.2.2. Outil	52
1.2.3. Trajectoire	52
1.2.4. Matériau	52
1.3. Méthode de calcul	52
1.4. Calculs préalables : correction des pressions de coupe	53

2. Calcul des pressions de coupe	53
2.1. Brochage plan extérieur	53
2.2. Brochage cylindrique intérieur	54
3. Calcul des forces généralisées	55
V. Profondeur de passe	56
1. Position du problème	56
2. Surface brute facettisée	57
2.1. Données	57
2.2. Détermination de la facette active	57
2.3. Profondeur de passe	59
3. Surface brute axisymétrique	60
3.1. Données	60
3.2. Intersection de la normale en un noeud avec la surface brute	60
3.3. Profondeur de passe	61