



UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

# Étude du mouvement autorotatif des grues sous vent turbulent

Travail de fin d'études réalisé en vue de l'obtention du grade de Master  
en Ingénieur Civil des Constructions par HÉLÈNE VANVINCKENROYE

Jury composé de :

Prof. V. Denoël  
Prof. P. Rigo  
Dr. T. Andrianne  
Dr. T. Canor  
Prof. V. De Ville De Goyet

Année académique 2013-2014





UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

# Étude du mouvement autorotatif des grues sous vent turbulent

Travail de fin d'études réalisé en vue de l'obtention du grade de Master  
en Ingénieur Civil des Constructions par HÉLÈNE VANVINCKENROYE

Jury composé de :

Prof. V. Denoël  
Prof. P. Rigo  
Dr. T. Andrianne  
Dr. T. Canor  
Prof. V. De Ville De Goyet

Année académique 2013-2014

# Remerciements

Avant de vous laisser entamer la lecture de ce rapport, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à sa production.

Tout d'abord, je souhaite vivement remercier mon promoteur, Vincent Denoël, pour avoir cru en moi, pour m'avoir soutenue et m'avoir encouragée dès mes premiers pas dans le domaine de la dynamique. Je lui suis extrêmement reconnaissante pour le temps qu'il m'a consacré, non seulement dans le cadre du travail de fin d'études, mais également dans celui de ma réflexion sur un emploi futur, puis lors de la demande de bourse auprès du FNRS. Finalement, je désire souligner son enthousiasme en toute circonstance qui apporte motivation et positif dans le travail et la journée de chacun. C'est avec grand plaisir que je m'engage dans l'équipe *SE* d'Argenco pour les années à venir.

Ensuite, j'aimerais remercier les membres de mon jury pour l'intérêt et le suivi accordés à mon travail. Je les remercie également pour le temps et l'attention qu'ils ont apporté et apporteront encore à ce travail.

De plus, je souhaite remercier l'équipe du *SE* et Thomas Andriane pour leurs conseils, l'attention qu'ils ont accordé à mon travail et la relecture de certains chapitres. Je remercie en particulier Nicolas Blaise pour sa disponibilité, pour le temps qu'il m'a accordé tout au long du quadrimestre et pour ses réponses à chacune de mes questions.

Finalement, ce travail n'aurait pas pu être réalisé sans l'environnement favorable dans lequel j'ai travaillé. Pour l'ambiance de travail, les encouragements et l'attention de chaque instant, je remercie tous les étudiants de 2<sup>ème</sup> Master avec qui j'ai eu l'occasion de travailler dans le couloir du +1. Je remercie en particulier David pour avoir suivi mon travail chaque jour, pour m'avoir encouragée, soutenue et aidée dans les moments plus difficiles. Après ces quatre mois passés ensemble devant nos ordinateurs, j'espère avoir l'occasion de remercier chacune d'entre elles en dehors du *B52* et de fêter dignement ce travail qui s'achève.

## Résumé

Ce travail a pour objectif d'étudier le comportement des grues placées en girouette dans un champ de vitesse de vent. L'autorotation des grues est un phénomène particulier susceptible d'entraîner la ruine partielle ou totale de la structure. La grue est idéalisée par un système à un degré de liberté en considérant une flèche parfaitement rigide pivotant autour d'un point fixe représentant la connexion flèche-mât. Dans le cas particulier où la structure se situe dans un champ de vitesse unidirectionnel et constant dans l'espace, le problème présente une forte analogie avec un pendule excité verticalement par son support. Un premier modèle étudie le comportement de la flèche sous certaines hypothèses simplificatrices telles que la prise en compte d'un champ de vitesse unidirectionnel et uniforme dans l'espace. Ce modèle vise à appréhender le comportement de la grue en limitant la complexité et en favorisant l'analogie avec le pendule. Selon la formulation du champ de vitesse choisi, la réponse de la structure est caractérisée par la variance de la position et de la vitesse angulaires, le pourcentage d'autorotations, etc. En particulier, lorsque le champ de vitesse varie périodiquement au cours du temps, l'étude de la stabilité de la grue dans l'espace paramétrique composé de l'amplitude et de la fréquence d'oscillation de la vitesse présente des lobes d'instabilités pour certaines valeurs de la fréquence de sollicitation. Les modèles intermédiaire et complet permettent la levée des hypothèses simplificatrices et la prise en compte d'un champ de vent réaliste caractérisé par sa densité spectrale de puissance. L'analyse stochastique est alors réalisée par simulations de Monte-Carlo. Un résultat important est la corrélation des variances de la position et de la vitesse angulaires selon la relation  $\sigma_\theta^2 = \sigma_{\dot{\theta}}^2$ .

## Abstract

This work aims to study the motion of tower cranes subjected to turbulent wind. Tower cranes are structures composed of a rigid mast and a rotating jig. The jig may exhibit autorotations that could lead to partial or total collapse of the structure. The crane is modeled by a single degree-of-freedom oscillator assuming a perfectly rigid jig rotating around a fixed point representing the jig-mast connection. In case of a unidirectional and spatially uniform velocity field, the problem presents strong similarities with a vertically excited pendulum. Three models are developed. The first one focuses on the behavior of the jig under some simplified assumptions, as a unidirectional and spatially uniform velocity field. This model aims to understand the behavior of the crane with a limited number of parameters. Depending on the shape of the velocity field, the response of the structure is characterized by the variance of the angular position and velocity, the percentage of autorotations, etc. In case of a deterministic and periodic wind velocity, the stability of the jig is represented in the amplitude-frequency parameter space and instability lobes can be highlighted for characteristic frequencies of the sollicitation. The intermediate and complete models raise the assumptions of the first model and define a realistic wind field characterized by its power spectral density. The stochastic process is studied thanks to Monte Carlo simulations. An important observation is the correlation of the variances of the angular position and velocity with  $\sigma_\theta^2 = \sigma_{\dot{\theta}}^2$ .

UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

Travail de fin d'études réalisé en vue de l'obtention du grade de Master en Ingénieur  
Civil des Constructions par HÉLÈNE VANVINCKENROYE

## Étude du mouvement autorotatif des grues sous vent turbulent

Les grues de chantier sont des structures élancées susceptibles de rentrer dans différents régimes dynamiques sous l'action du vent turbulent. En fonction de la configuration géométrique et de la turbulence, la flèche peut subir de petites oscillations, de grandes oscillations ou des rotations. L'objectif principal de ce travail est la simulation et l'analyse du comportement autorotatif de la flèche de la grue.

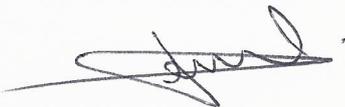
Dans une première partie, le comportement du système est appréhendé sous un certain nombre de simplifications. La flèche est idéalisée par un système à un degré de liberté unique qu'est la rotation autour de son pivot en considérant la mâture comme une poutre infiniment rigide. Le champ de vitesse, quant à lui, est considéré comme unidirectionnel et uniforme dans l'espace. Finalement, la vitesse de la flèche est supposée faible devant la vitesse du vent, ce qui consiste à négliger l'amortissement aérodynamique. Un équilibre en rotation de la flèche permet l'établissement de l'équation gouvernant ce problème. Il s'agit d'une équation différentielle non-linéaire. En effet, tout d'abord, la flèche est susceptible de présenter des oscillations de grande amplitude, et ensuite le frottement à l'interface flèche-mâture induit à la fois des non-linéarités et des discontinuités. Il s'agit en effet de frottement sec générant au pivot un couple de valeur constante et opposé à la vitesse de rotation de la flèche. Il est donc nécessaire de développer une méthode numérique adaptée permettant de résoudre les problèmes à la fois discontinus et non-linéaires. Le problème ainsi simplifié présente une forte analogie avec celui d'un pendule excité verticalement par son support.

Dans la seconde partie du travail, la complexité du modèle est fortement augmentée avec la prise en compte d'un champ de vitesse du vent spatialement variable et en accord avec une distribution stochastique réaliste. De plus, le modèle sera enrichi par la prise en compte de l'amortissement aérodynamique.

L'étude du comportement de la flèche est faite à l'aide de simulations de Monte Carlo dont les résultats s'appuieront dans la mesure du possible sur des connaissances théoriques ou expérimentales et des développements analytiques.

Le jury :

Prof. V. Denoël



Prof. P. Rigo



Dr. T. Andrianne



Dr. T. Canor



Prof. V. De Ville De Goyet



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Description générale du problème</b>	<b>3</b>
2.1	Définition du problème . . . . .	3
2.2	Équivalence grue-pendule . . . . .	8
2.3	État de l'art . . . . .	10
2.4	Caractérisation et génération d'échantillons de processus aléatoires . . . . .	17
2.5	Conclusion . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Étude du problème simplifié</b>	<b>23</b>
3.1	Hypothèses du modèle simplifié. . . . .	23
3.2	Analyse dimensionnelle du problème . . . . .	25
3.3	Ordres de grandeur des différents paramètres . . . . .	26
3.4	Résolution de l'équation différentielle. . . . .	27
3.5	Étude du comportement sous champ de vitesse unidirectionnel et uniforme et à fluctuation harmonique. . . . .	31
3.5.1	Observations du mouvement pour des valeurs particulières des paramètres . . . . .	32
3.5.2	Comparaison des différents types d'amortissement . . . . .	34
3.5.3	Caractérisation du mouvement dans l'espace $\kappa - I_u$ . . . . .	34
3.6	Étude du comportement sous champ de vitesse unidirectionnel et uniforme modélisée par un bruit blanc . . . . .	41
3.6.1	Observations du mouvement pour des valeurs particulières des paramètres . . . . .	43
3.6.2	Caractérisation du mouvement en fonction de l'intensité de turbulence. . . . .	52
3.7	Conclusion . . . . .	55

<b>4</b>	<b>Étude du modèle intermédiaire</b>	<b>56</b>
4.1	Implications de la levée des différentes hypothèses . . . . .	56
4.2	Analyse dimensionnelle du problème après suspension des hypothèses . . . .	58
4.3	Étude du mouvement de la grue pour un ensemble de paramètres fixés . . . .	61
4.4	Caractérisation du mouvement dans l'espace $\kappa - I_u$ . . . . .	68
4.5	Conclusion . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Étude du modèle complet</b>	<b>72</b>
5.1	Génération du champ de vitesse du vent . . . . .	72
5.1.1	Définition du domaine et des fonctions nécessaires à la génération du champ . . . . .	72
5.1.2	Description du champ généré et validation des résultats . . . . .	77
5.2	Étude du comportement de la grue via le modèle complet . . . . .	80
5.2.1	Influence des paramètres du vent $\gamma$ et $\delta$ . . . . .	81
5.2.2	Influence des paramètres géométriques de la grue $m$ et $n$ . . . . .	88
5.2.3	Caractérisation du mouvement pour un ensemble de paramètres fixés . . . .	91
5.2.4	Comparaison des densités spectrales de la vitesse turbulente de Von Kar- man et Davenport . . . . .	102
5.2.5	Caractérisation du mouvement en fonction de l'intensité de turbulence. . . .	106
5.3	Conclusion . . . . .	109
<b>6</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>110</b>
<b>7</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>113</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Les grues de chantier sont des structures en treillis composées d'une mâture et d'une flèche pivotante. Lorsque la grue est laissée en girouette et sous l'action du vent, plusieurs régimes de mouvement sont susceptibles d'apparaître. En fonction du champ de vitesse du vent et de la géométrie de la grue et de son environnement, la partie tournante peut présenter de petites oscillations, de grandes oscillations ou des autorotations. Ces dernières années, un grand nombre de ruines de grues ont été rapportées dans différents pays, comme par exemple en 2012 à New-York (Figure ci-dessous). Ces accidents peuvent être liés à la nécessité de construire des grues de plus grande portée, plus légères et de capacité plus importante. Ce travail tente d'étudier plus en profondeur le comportement des grues sous l'action du vent de manière à mieux appréhender les différents régimes de mouvement et mieux comprendre l'importance de chacun des paramètres du problème.



Ruine d'une grue après une tempête à New-York [craneaccidents.com, 2012].

Dans le cadre de cette étude, la grue est idéalisée par un système à un degré de liberté, composé d'une flèche et d'une contreflèche rigides et libres de tourner autour d'un point pivot représentant la jonction entre la mâture et la flèche. Ces deux derniers éléments sont supposés parfaitement rigides. La flèche est donc un mécanisme en rotation soumis à des efforts liés au vent, au frottement ainsi qu'à des forces d'inertie. C'est dans ces conditions qu'est posé le problème. Le tout est étudié sous sa forme adimensionnelle de manière à limiter le nombre de paramètres influençant le comportement de la grue.

Une analogie directe peut être effectuée avec l'étude du pendule paramétrique qui est

un système gouverné par des équations similaires. La problématique des grues présente cependant une complexité importante et diffère de celle du pendule par de nombreux aspects. Certains de ces aspects ont trait à la structure, comme la flexibilité de la mâture et de la flèche ou l'amortissement généré par le frottement à l'interface flèche-mâture. Une autre source de complexité est la modélisation du vent tenant compte des échelles de similitude entre la longueur de la flèche, la vitesse du vent et la longueur de turbulence. Finalement, l'interaction entre la structure et le vent est d'une importance primordiale. En effet, le comportement de la structure dépend de sa position et de sa vitesse par l'intermédiaire de l'amortissement aérodynamique et du maître-couple de la grue.

Tous ces éléments rendent cette problématique unique. De plus, il est important de constater qu'un grand nombre de résultats expérimentaux sont disponibles dans la littérature, mais que peu de recherches théoriques existent à ce jour. Il s'agit donc d'une première dans l'étude de la dynamique des grues visant à appréhender le comportement de celles-ci et apporter une base théorique aux observations expérimentales.

Ce travail est divisé en quatre parties.

La première partie vise à poser l'ensemble des bases nécessaires à la réalisation du travail. Tout d'abord, le problème est décrit en toute généralité. Ensuite, l'équivalence avec l'étude d'un pendule paramétrique est mise en évidence. Enfin, une section est consacrée à l'état de l'art tant en matière de pendule qu'en matière de grues ou de vent. Finalement, certaines bases théoriques sont exposées à propos de l'étude de processus aléatoires.

La seconde partie étudie le problème sous un ensemble d'hypothèses simplificatrices et en imposant une forme déterministe de vitesse de vent. Ces hypothèses permettent la bonne compréhension du problème de base ainsi que l'influence de chacune des forces appliquées sur la grue. Ce modèle est appelé *modèle simplifié*.

Dans la troisième partie, les hypothèses simplificatrices sont levées et la complexité du modèle augmente. La vitesse du vent prend cependant toujours une forme fixée, et le problème est donc déterministe. L'influence de chacune des hypothèses est discutée en détail. Ce modèle est appelé *modèle intermédiaire*.

Finalement, le problème est étudié de manière plus réaliste en adaptant le modèle intermédiaire par la prise en compte d'une vitesse de vent stochastique définie par sa densité spectrale de puissance. Celle-ci est donc un processus aléatoire et, par conséquent, la réponse de la grue le sera également. L'influence de chaque paramètre du problème est discuté et la stabilité du problème est étudiée en détail. Ce dernier modèle est appelé *modèle complet*.

## Chapitre 2

# Description générale du problème

Cette première partie s'attache à définir tous les concepts et notions théoriques nécessaires à la résolution du problème. Dans un premier temps, celui-ci est défini en toute généralité. Ensuite, l'équation de base est construite et il est mis en évidence qu'une forte équivalence existe entre le comportement de la grue et celui d'un pendule paramétrique. Sur base de ces conclusions, une étude bibliographique présente de manière non-exhaustive les différentes recherches déjà effectuées sur le sujet. Finalement, dans le but de poser les fondements nécessaires aux développements ultérieurs, certaines notions théoriques relatives aux processus aléatoires sont exposées.

### 2.1 Définition du problème

Dans le cadre de ce travail, le problème traité est le mouvement auto-rotatif des flèches de grues soumises à l'action du vent lorsqu'elles sont en girouette. La flèche est modélisée par un système rigide à un degré de liberté, comme illustré à la Figure 2.1.1.

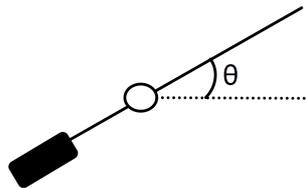


FIGURE 2.1.1 – Idéalisation de la flèche d'une grue - vue en plan.

Cette idéalisation suppose que la mâture et la flèche sont infiniment rigides et que le pivot est donc fixe. La flèche tourne autour du sommet de la mâture dans un plan horizontal. Cette hypothèse est justifiée par la grande raideur de la structure vis-à-vis de la connexion reliant la flèche à la mâture.

La grue est exposée à un champ de vitesse de vent turbulent tridimensionnel. Celui-ci possède une composante moyenne et une composante fluctuante. Soit  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  le système

d'axes orthonormé tel que l'axe  $x$  est horizontal et parallèle à la direction principale du vent, et que l'axe  $z$  est vertical, la vitesse peut s'exprimer comme

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \mathbf{U}(x, y, z) + \mathbf{u}(x, y, z, t) \quad (2.1.1)$$

$$= (U(x, y, z) + u(x, y, z, t))\mathbf{e}_x + v(x, y, z, t)\mathbf{e}_y + w(x, y, z, t)\mathbf{e}_z, \quad (2.1.2)$$

avec  $\mathbf{v}$  la vitesse du vent,  $\mathbf{U}$  la vitesse moyenne,  $\mathbf{u}$  la composante fluctuante de la vitesse. La composante verticale de la fluctuation  $w$  n'a ici aucun impact sur le comportement de la flèche étant donné les degrés de liberté choisis. Nous traiterons donc le cas d'un vent à deux composantes turbulentes dans le plan horizontal, c'est-à-dire  $w = 0$ .

L'écoulement d'air autour de la grue entraîne en tout point de la surface exposée et en chaque instant une pression de traînée  $p_d$  parallèle à la direction du vent, et une pression de dérive  $p_l$  perpendiculaire à la direction du vent dans le plan horizontal. Selon Bernoulli, elles peuvent être modélisées par

$$p_d(x, y, z, t) = \frac{1}{2}\rho_{air}C_d |\mathbf{v}_{rel}(x, y, z, t)|^2, \quad (2.1.3)$$

$$p_l(x, y, z, t) = \frac{1}{2}\rho_{air}C_l |\mathbf{v}_{rel}(x, y, z, t)|^2, \quad (2.1.4)$$

avec  $C_d$  le coefficient de traînée,  $C_l$  le coefficient de dérive de la flèche,  $\rho_{air}$  la masse volumique de l'air et  $|\mathbf{v}_{rel}(x, y, z, t)|$  l'amplitude de la vitesse relative entre la flèche et le vent. Les coefficients de traînée et de dérive dépendent du type de profilé et de son exposition au vent. À titre d'exemple, si l'on considère un treillis à section triangulaire, l'orientation du vent par rapport à la grue va modifier le maître-couple, c'est-à-dire la surface de la grue projetée perpendiculairement à l'écoulement. En effet, lorsque la flèche est perpendiculaire à l'écoulement (voir Figure 2.1.2a), la largeur exposée est beaucoup plus importante que lorsque la grue est inclinée par rapport à l'écoulement (Figure 2.1.2b).



(a) Champ de vitesse perpendiculaire au profilé.

(b) Champ de vitesse incliné par rapport au profilé.

FIGURE 2.1.2 – Exemple de variation du coefficient de traînée avec l'orientation du profilé.

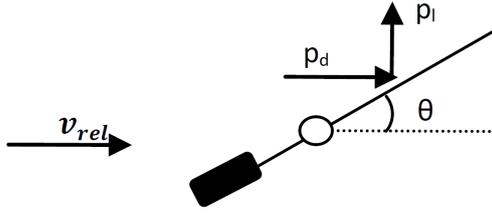
En toute généralité, cette pression peut se décomposer dans un système d'axes local lié à la grue en une composante parallèle et une composante perpendiculaire à la flèche dans le plan horizontal.

$$p_{\perp}(x, y, z, t) = \frac{1}{2}\rho_{air} (C_l \cos(\theta) - C_d \sin(\theta)) |\mathbf{v}_{rel}(x, y, z, t)|^2 \quad (2.1.5)$$

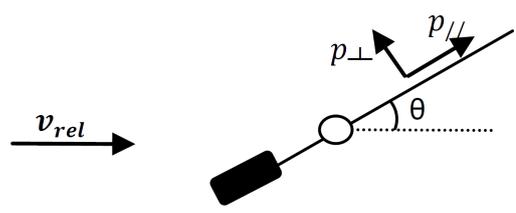
$$= \frac{1}{2}\rho_{air} C_{\perp} |\mathbf{v}_{rel}(x, y, z, t)|^2,$$

$$p_{//}(x, y, z, t) = \frac{1}{2}\rho_{air} (C_l \sin(\theta) + C_d \cos(\theta)) |\mathbf{v}_{rel}(x, y, z, t)|^2 \quad (2.1.6)$$

$$= \frac{1}{2}\rho_{air} C_{//} |\mathbf{v}_{rel}(x, y, z, t)|^2.$$



(a) Pressions dans le système d'axes lié à la direction du vent



(b) Pressions dans le système d'axes lié à la grue

FIGURE 2.1.3 – Définition de la pression en un point de l'espace.

La décomposition de la pression en axes locaux fait apparaître un sinus et un cosinus de l'angle qui sont inclus dans les nouveaux coefficients  $C_{\perp}$  et  $C_{//}$  propres au système d'axe de la grue. Ces derniers sont donc également dépendant de l'angle relatif entre la vitesse moyenne du vent et la grue.

L'évolution des coefficients de traînée  $C_d$  et de dérive  $C_l$  en fonction de l'angle  $\theta$  entre la vitesse du vent et la flèche de la grue peut être étudiée. Voisin fournit dans sa thèse [Voisin, 2003] l'évolution du coefficient de traînée  $C_d$  et de la surface au vent  $S_{vent}$  avec l'angle  $\theta$  pour une grue de type MD238<sup>1</sup>. La surface au vent est calculée expérimentalement de la manière suivante

$$S_{vent}(\theta) = \frac{\bar{F}}{\frac{1}{2}\rho_{air}U^2} = C_{\perp}(\theta)S, \quad (2.1.7)$$

où  $S$  est le maître couple de la grue pour un vent perpendiculaire à celle-ci.

La surface au vent  $S_{vent}$  ainsi que le coefficient  $C_d$  présent dans l'expression du coefficient  $C_{\perp}$  sont fournis par Voisin. La détermination des trois coefficients  $C_l$ ,  $C_d$  et  $C_{\perp}$  nécessite de connaître la surface de référence  $S$ . Celle-ci est indépendante de la position angulaire et peut donc être obtenue en exprimant la relation (2.1.8) pour un angle particulier tel que le coefficient  $C_l$  est éliminé de l'équation pour cet angle.

Sur base de l'équation

$$C_{\perp}(\theta) = C_l(\theta) \cos(\theta) - C_d(\theta) \sin(\theta), \quad (2.1.8)$$

on sait que  $C_{\perp}(+90^\circ) = -C_d(+90^\circ) \sin(+90^\circ) = -C_d(+90^\circ)$ .

1. La grue MD238 est un modèle de grue à tour à tirants commercialisé par Potain.

On trouve ainsi

$$|S| = \left| \frac{S_{vent}(\theta)}{C_{\perp}(\theta)} \right| \quad (2.1.9)$$

$$= \left| \frac{S_{vent}(+90^{\circ})}{C_{\perp}(+90^{\circ})} \right| \quad (2.1.10)$$

$$= \left| \frac{S_{vent}(+90^{\circ})}{-C_d(+90^{\circ})} \right| \quad (2.1.11)$$

$$= \frac{S_{vent}(+90^{\circ})}{C_d(+90^{\circ})}. \quad (2.1.12)$$

Les valeurs absolues entraînent un changement de signe pour les angles positifs lié à une différence de convention de signe entre [Voisin, 2003] et ce travail.

On obtient ainsi

$$C_{\perp}(\theta) = \frac{S_{vent}(\theta)}{S} \quad (2.1.13)$$

$$= \frac{S_{vent}(\theta) \times C_{\perp}(+90^{\circ})}{S_{vent}(+90^{\circ})}. \quad (2.1.14)$$

Sur base des coefficients  $C_d$  et  $C_{\perp}$ , le coefficient de dérive peut être calculé selon la formule (2.1.8). Les trois coefficients ainsi calculés sont représentés en trait plein à la Figure 2.1.4.

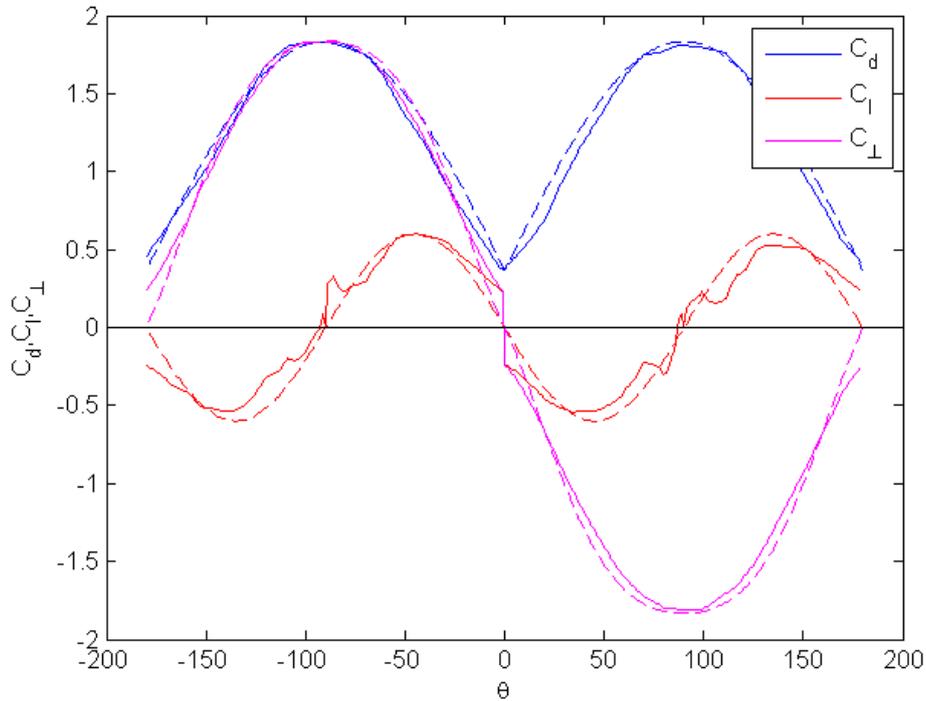


FIGURE 2.1.4 –  $C_d$ ,  $C_l$  et  $C_{\perp}$  d'une grue MD238 à partir de [Voisin, 2003] (en trait plein) et courbe calée (en traits discontinus)

On observe que les courbes d'évolution des trois coefficients peuvent être approchées par des courbes sinusoïdales de période  $\pi/2$  et  $\pi$ . À la Figure 2.1.4, les courbes en traits pointillés correspondent bien aux courbes expérimentales et seront admises dans la suite du travail comme forme analytique des coefficients. On obtient ainsi, grâce aux trois paramètres  $\tilde{C}_d$ ,  $C_{d,0}$  et  $\tilde{C}_l$ , les formes approchées suivantes

$$C_d \simeq \tilde{C}_d |\sin(\theta)| + C_{d,0}, \quad (2.1.15)$$

$$C_l \simeq -\tilde{C}_l \sin(2\theta), \quad (2.1.16)$$

$$\begin{aligned} C_{\perp} &\simeq C_l(\theta) \cos(\theta) - C_d(\theta) \sin(\theta) \\ &\simeq -\tilde{C}_d \sin(\theta) |\sin(\theta)| - C_{d,0} \sin(\theta) - \tilde{C}_l \sin(2\theta) \cos(\theta) \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Pour le modèle de grue MD238 étudié ici, les valeurs des coefficients sont  $\tilde{C}_d = 1.47$ ,  $C_{d,0} = 0.37$  et  $\tilde{C}_l = 0.6$ .

La flèche de la grue est soumise à deux couples extérieurs et à son inertie. Le premier couple extérieur est généré par la pression du vent alors que le second est un couple de frottement  $M_f$  à l'interface flèche - mât. Celui-ci est modélisé par un couple de frottement sec (de Coulomb). Cette idéalisation du frottement se justifie expérimentalement. En effet, Voisin présente dans [Voisin, 2003] le lâcher libre d'une flèche de grue de type MD238. Cet essai consiste à lancer la flèche à une vitesse de 0.7tr/min grâce à un moteur puis à la laisser évoluer en roue libre. La grue est donc uniquement soumise à un couple de frottement  $M_f$  et à un couple d'inertie  $M_{\theta}$ . L'évolution de la vitesse angulaire au cours du temps est représentée à la Figure 2.1.5. La vitesse décroît de manière linéaire. Cette observation entraîne que la flèche est soumise à un moment extérieur constant et opposé au couple d'inertie, ce qui confirme bien l'hypothèse d'un frottement sec. Lorsque la vitesse est non nulle, le couple de frottement est d'amplitude  $M_f$  et de sens opposé au couple d'inertie. Lorsque la vitesse est nulle, il prend une valeur entre  $-M_f$  et  $M_f$  de manière à contrer les efforts extérieurs appliqués sur la grue et la maintenir au repos.

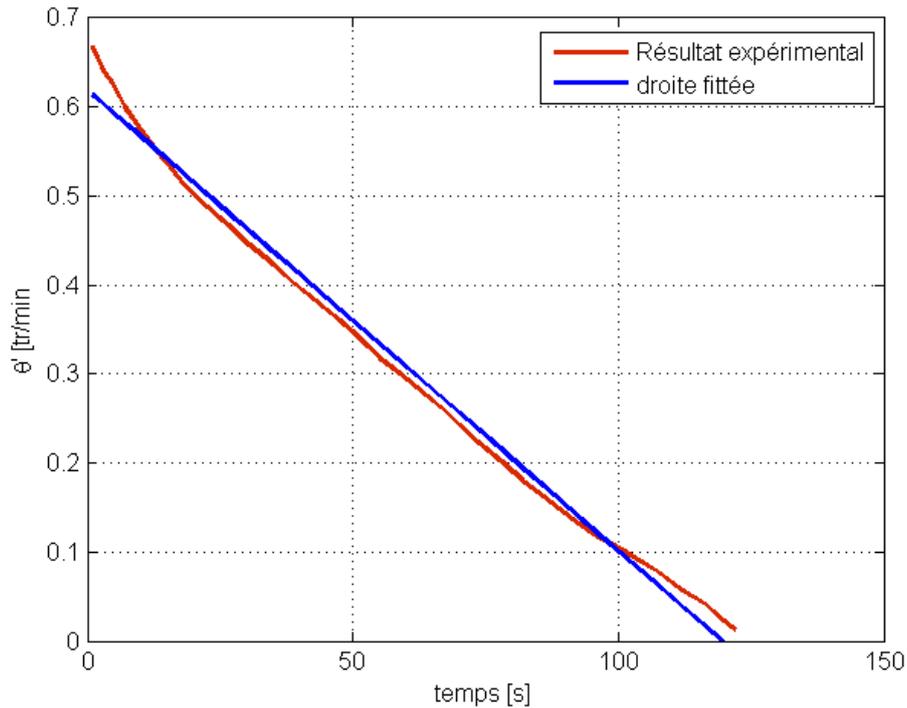


FIGURE 2.1.5 – Essai de roue libre d’une grue de type MD238 [Voisin, 2003]

## 2.2 Équivalence grue-pendule

Dans cette section, les équations de la flèche sont développées de manière à mettre en évidence l’analogie avec le pendule paramétrique. Il s’agit d’un pendule dont le mouvement est gouverné par des équations dont les paramètres (ici liés à la sollicitation) dépendent du temps. Dès lors, nous considérons la flèche de la grue comme un système à un degré de liberté en supposant que la mâture est parfaitement rigide et articulée autour d’un point fixe. Nous le comparons au cas d’un pendule excité verticalement par son support.

Le champ de vitesse du vent est considéré comme unidirectionnel, c’est-à-dire qu’une seule composante turbulente est prise en compte, selon la direction principale. De plus, la force de dérive est négligée par rapport à la traînée. La grue est donc soumise à un effort de vent parallèle à la direction moyenne de celui-ci et à un couple de frottement  $M_f$  au niveau de son point fixe, alors que le pendule est ici considéré comme non-amorti.

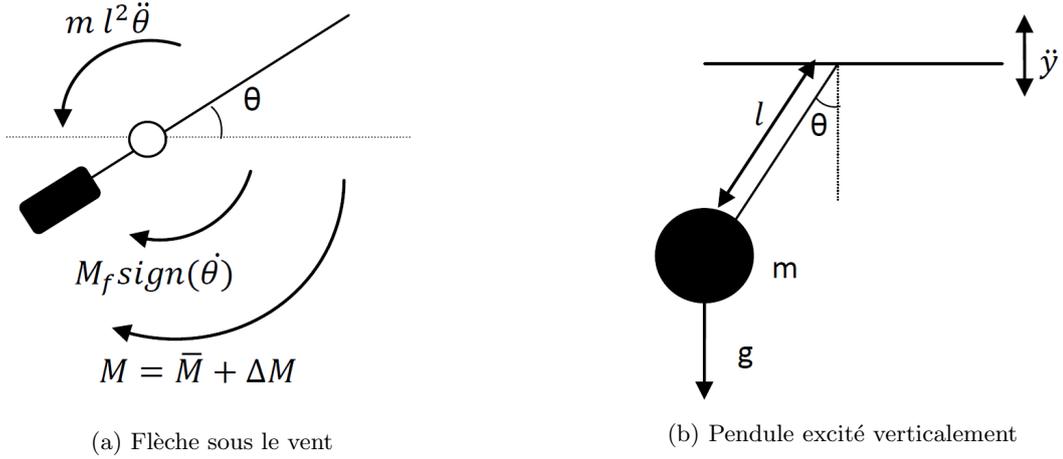
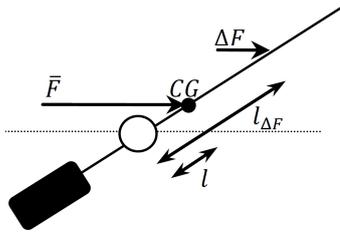


FIGURE 2.2.1 – Schéma de la flèche et du pendule idéalisés par un système à un degré de liberté et du pendule.

La seconde loi de Newton appliquée à la rotation autour du point fixe de chacun des deux systèmes fournit la relation

$$\begin{aligned}
 \bar{M} + \Delta M &= -ml^2\ddot{\theta} - M_f \text{sign}(\dot{\theta}) \\
 (\bar{F}l + \Delta F l_{\Delta F}) \sin \theta &= -ml^2\ddot{\theta} - M_f \text{sign}(\dot{\theta}) \\
 &\Downarrow \\
 \ddot{\theta} + \frac{\bar{F}l + \Delta F l_{\Delta F}}{ml^2} \sin \theta &= -\frac{M_f}{ml^2} \text{sign}(\dot{\theta}). \tag{2.2.1}
 \end{aligned}$$

Avec les différents éléments de l'équation définis ci-dessous :



- $m$  : masse de la flèche ;
- $l$  : distance entre le pivot et le centre de gravité ( $CG$ ) ;
- $l_{\Delta F}$  : distance entre le pivot et le point d'application de  $\Delta F$  ;
- $\bar{F}$  : effort induit par la composante moyenne du vent  $U$  ;
- $\Delta F$  : effort induit par la fluctuation du vent  $u$  ;
- $M_f$  : moment de frottement sec ;

L'équation gouvernant le mouvement d'un pendule non-amorti s'écrit quant à elle de la manière suivante

$$\begin{aligned}
 m(g - \ddot{y})l \sin(\theta) &= -ml^2\ddot{\theta} \\
 &\Downarrow \\
 \ddot{\theta} + \frac{g - \ddot{y}}{l} \sin(\theta) &= 0, \tag{2.2.2}
 \end{aligned}$$

avec  $l$  la longueur du pendule,  $m$  sa masse et  $g$  l'accélération de la gravité.

On observe bien ici l'analogie entre la gravité et le vent moyen, ainsi qu'entre l'excitation du support et la fluctuation du vent, qui sont tous deux de moyenne nulle.

## 2.3 État de l'art

La littérature présente très peu de recherches sur le comportement des grues sous l'action du vent à proprement parler. En effet, de nombreux articles décrivent les problèmes de manœuvrabilité des grues ou de leur charge, mais très peu discutent de leur comportement oscillatoire. Certains articles présentent des résultats d'essais expérimentaux effectués sur des grues en soufflerie. C'est le cas de Eden et Voisin [Eden et al., 1983, Voisin, 2003] qui étudient l'effet de la traînée sur la grue, ainsi que la valeur du coefficient de traînée à adopter en fonction du type de profilé de flèche et de l'angle entre la vitesse du vent et la flèche. Cet aspect fait également l'objet d'une discussion spécifique dans ce travail. Sun et Mara étudient le comportement de la flèche à l'aide d'éléments finis ([Sun et al., 2009, Mara, 2010]). Cet aspect ne sera pas considéré dans ce travail car la flèche est un mécanisme et que l'utilisation d'un nombre très limité de degrés de liberté sur une flèche infiniment rigide permettent d'appréhender correctement le comportement en rotation de la flèche. En effet, comme la grande raideur de la structure par rapport à la connexion flèche-mât permet de considérer celle-ci comme infiniment rigide lorsque la grue est en girouette.

Peu d'études théoriques ont été réalisées sur le comportement des grues sous vent turbulent. Il a cependant été montré qu'il existe une forte analogie avec le comportement du pendule paramétrique. La littérature fournit une multitude d'informations à propos de ce dernier qui peuvent être exploitées pour l'étude du système simplifié.

Un pendule est un système non-linéaire étudié à de nombreuses reprises et sous de nombreux aspects dans la littérature. Celui-ci peut être libre ou forcé, simple ou double, le problème peut être déterministe ou stochastique. Les premières observations débutent au 17<sup>ème</sup> siècle avec de grandes figures de la science comme Galilée, Newton et Hooke. Celles-ci ont mené à des résultats importants comme les lois de conservation de l'énergie ou la détermination de l'accélération de la gravité terrestre. À la fin du 19<sup>ème</sup> siècle ainsi qu'au début du 20<sup>ème</sup> siècle, Foucault met en évidence la rotation de la Terre grâce au pendule désormais nommé pendule de Foucault [Stinner et al., 2005].

Le pendule non forcé (uniquement soumis à la gravité), non-amorti et subissant de petits déplacements présente un mouvement de rotation harmonique sous une fréquence naturelle dépendant uniquement de l'accélération de la gravité et de sa longueur. L'équation modélisant ce mouvement est

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta + \mathcal{O}(\theta^3) = 0, \quad (2.3.1)$$

où  $\theta$  est l'inclinaison du pendule par rapport à la verticale,  $l$  est la longueur du pendule et  $g$  est l'accélération de la gravité. La linéarisation peut se faire sous l'hypothèse de faibles amplitudes de l'angle  $\theta$ .

Si le pendule est initialement au repos, la solution de cette équation différentielle est

$$\theta = A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right). \quad (2.3.2)$$

où  $A$  est une constante dépendant de la position initiale du pendule. Cette solution fait

apparaître la fréquence naturelle du système linéaire  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

Il s'agit d'un pendule idéal non-amorti. Aucune énergie n'est dissipée de sorte que l'énergie totale est conservée et se répartit périodiquement entre l'énergie potentielle gravifique et l'énergie cinétique.

L'étude du problème peut s'étendre au pendule amorti et excité par son point de fixation. La première configuration étudiée est celle où l'excitation du support est harmonique [Gitterman, 2010b, Alevras et al., 2013]. L'ensemble du problème est déterministe. Dans un second temps, le problème est étudié avec une excitation stochastique [Najdecka and Wierciroch, 2007]. Dans ces deux configurations, les oscillations peuvent être de grande amplitude et l'équation ne peut donc plus être linéarisée.

Si le support est soumis à une excitation verticale harmonique  $y(t) = B \cos(\omega t)$ , le mouvement du pendule est régi par l'équation

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + \left[ \frac{g}{l} + \frac{B}{l}\omega^2 \cos(\omega t) \right] \sin(\theta) = 0, \quad (2.3.3)$$

où  $c$  est le coefficient d'amortissement visqueux et  $B$  l'amplitude de la composante fluctuante de l'excitation.

Sous l'hypothèse de petites oscillations, le système peut se ramener à l'équation différentielle suivante, appelée équation de Mathieu

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + \left[ \Omega^2 + \frac{A}{l}\omega^2 \cos(\omega t) \right] \theta = 0. \quad (2.3.4)$$

Cette équation s'écrit en adimensionnel,

$$\begin{aligned} \theta'' + c\theta' + [1 + \lambda \cos(\nu\tau)] \sin(\theta) &= 0, \\ \tau = \Omega t; \quad ' &= \frac{d}{d\tau}; \quad \nu = \frac{\omega}{\Omega}; \quad \lambda = \frac{A\omega^2}{g}. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Il a ainsi pu être observé que la première zone d'instabilité correspond à une excitation de fréquence égale au double de la fréquence naturelle, soit  $\nu = \frac{\omega}{\Omega} = 2$ . On observe dans ce cas des oscillations à la fréquence propre du système. Si l'amplitude des oscillations augmente, on peut observer des rotations de période égale à une ou deux fois la période d'excitation. Une troisième possibilité est le comportement chaotique du pendule. Ces trois comportements sont observés selon les valeurs des paramètres. Ils peuvent également coexister pour certaines combinaisons de ces derniers. À titre d'exemple, la Figure 2.3.1 illustre l'évolution du mouvement dans le plan de phase  $(\theta, \dot{\theta})$ .

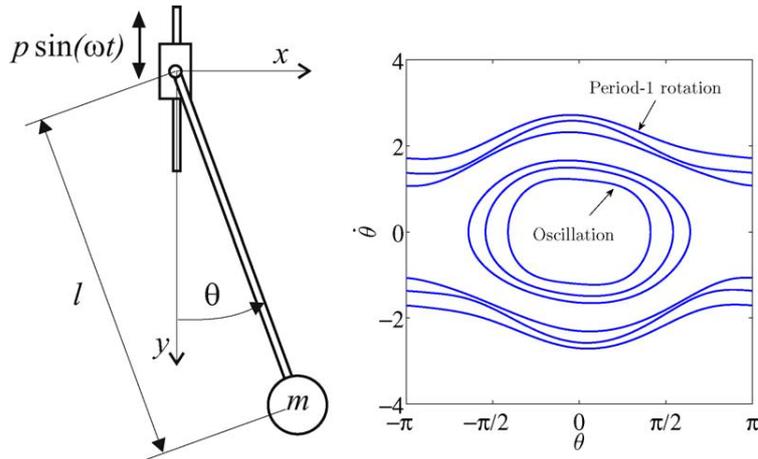


FIGURE 2.3.1 – [Nandakumar et al., 2012] Schéma d’un pendule excité verticalement par son support (à gauche) et exemple d’oscillations et d’auto-rotations pour  $c = 0.1$ ,  $\lambda = 0.8$ ,  $\omega = 2.1$  (à droite).

Le phénomène d’auto-rotation présente un intérêt majeur dans le cadre de ce travail. Ce mode est le plus énergétique et fait donc déjà l’objet d’études individuelles.

L’identification des zones de rotation se fait en représentant l’évolution d’une grandeur dans l’espace paramétrique constitué par les paramètres adimensionnels  $p$  et  $\omega$  ([Nandakumar et al., 2012]).

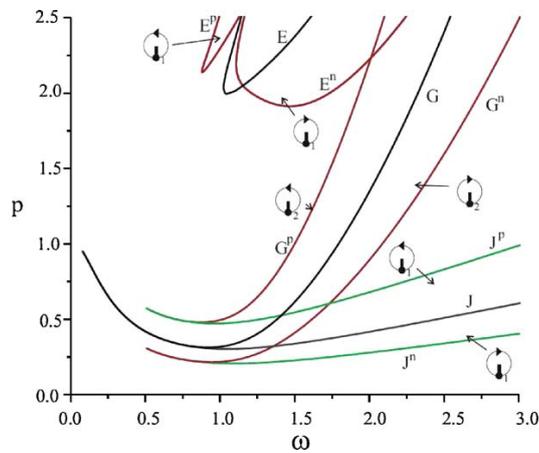


FIGURE 2.3.2 – [Nandakumar et al., 2012] Évolution de l’énergie et type de mouvement pour  $\lambda = 0.5$  et  $\omega = 1.8$ .

À la Figure 2.3.2, nous observons les courbes  $J$ ,  $G$  et  $E$ . La zone sous la courbe  $J$  correspond à des oscillations stables. La zone entre la courbe  $J$  et la courbe  $G$  correspond à des rotations stables de période  $\omega$ . Entre la courbe  $G$  et  $E$ , le mouvement rotatif est instable. Au-dessus de la courbe  $E$ , la rotation redevient stable.

L’étude du pendule excité harmoniquement par son support permet de déterminer le type de réponse. Il est maintenant intéressant d’étudier le comportement du pendule si la fréquence

d'excitation du support  $\omega$  n'est pas déterministe mais stochastique. Dans son article [Alevras et al., 2013], Alevras propose la forme

$$\begin{aligned} y &= A \cos(q), \\ \dot{q} &= \omega + \tilde{\sigma}\zeta(t). \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Cette représentation de l'excitation stochastique est proposée pour l'étude d'un pendule plongé dans l'eau et excité verticalement par l'oscillation du niveau de l'eau sous l'effet de houle ([Najdecka and Wiercigroch, 2007]). Dans ce cas, il est judicieux de choisir une sollicitation d'amplitude constante et de pulsation stochastique puisque c'est ainsi que se comporte le phénomène de houle.

La fonction  $\zeta(t)$  est un bruit blanc gaussien. L'indicateur n'est plus l'énergie du mouvement mais le pourcentage d'autorotations. Cet indicateur est illustré à la Figure 2.3.3 dans l'espace paramétrique  $\lambda - \nu$ . Une autorotation est ici définie comme une variation de l'angle de  $2\pi$  sans changement de signe de la vitesse. Cette définition ne prend pas en compte les autorotations irrégulières lors desquelles le pendule passe par la position verticale  $+\pi$  ou  $-\pi$  mais change de sens de rotation avant d'avoir parcouru un tour complet de  $2\pi$ .

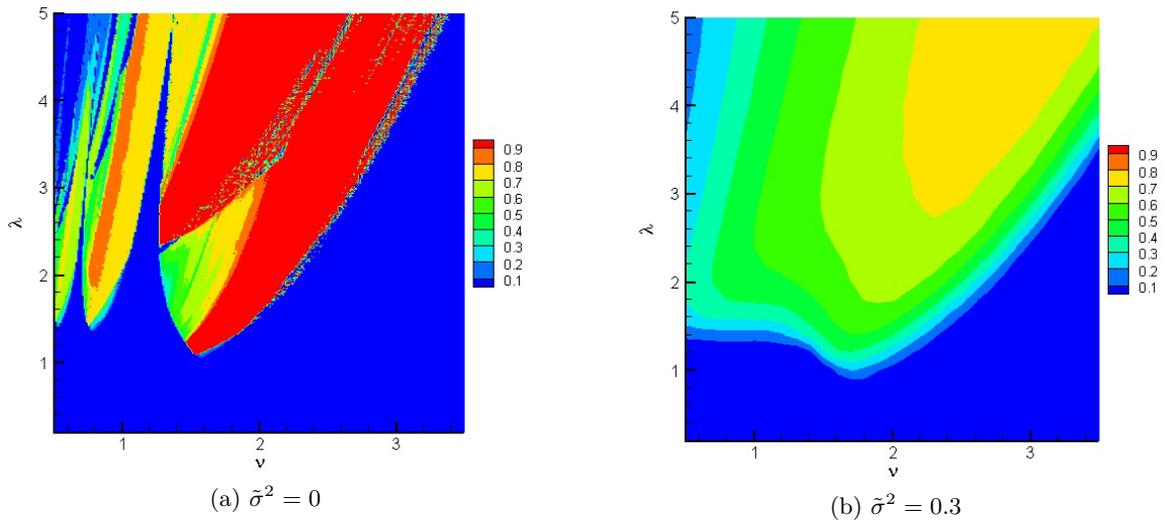


FIGURE 2.3.3 – Pourcentage de rotations [Alevras et al., 2013];  $c = 0.3$ .

Nous observons que la présence de turbulence de type bruit blanc réduit fortement le nombre de mouvements rotatifs complets.

La description des lobes d'instabilité observés fait l'objet d'études approfondies [Lilien and Dacosta, 1994]. Les lobes peuvent ainsi être caractérisés par la position des pics

$$\kappa = \frac{2}{k} ; \text{ avec } k \text{ entier.}$$

Les pointes des lobes sont en effet présentes aux valeurs de  $\kappa$  égales à  $2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \dots$

Des recherches proposent d'autres modélisations aléatoires de l'excitation, comme par

exemple la densité spectrale  $S_y(\omega)$  de la position du support  $y(t)$ . C'est également la représentation qui sera choisie pour la vitesse du vent dans ce travail.

Grâce à ces études, des applications ont pu être développées. Les études réalisées par Nandakumar et Najdecka ([Nandakumar et al., 2012, Najdecka and Wiercigroch, 2007]) développent l'étude du moment rotatif du pendule dans le but d'extraire l'énergie des vagues. L'objectif est de développer un système de pendule suspendu à un flotteur à la surface des vagues. Le pendule est donc soumis à une excitation stochastique de son support. Le mouvement rotatif du pendule étant le plus énergétique, une étude est réalisée sur les paramètres de manière à favoriser ce mouvement. Des méthodes de contrôle sont également développées pour maintenir la rotation du pendule quelles que soient les conditions initiales ou en cas de variations des paramètres.

Le comportement du pendule est également étudié sous un champ de gravité non-uniforme [Suits, 2006]. L'effet du gradient gravitationnel sur la fréquence d'oscillation du pendule est notable dès que la longueur de celui-ci devient significative (de l'ordre de la centaine de mètres).

Une dernière application est l'analogie entre le pendule et le mouvement des bateaux soumis à l'excitation stochastique des vagues ([Troesch et al., 1992]). Cette comparaison permet d'étudier le chavirement des bateaux qui est un phénomène dynamique fortement non-linéaire similaire au mouvement du pendule excité par son support.

L'ensemble des études et résultats décrits ci-dessus trouvent ici une application directe dans l'étude du mouvement auto-rotatif des grues de chantier. Plusieurs cas notables d'autorotations ont pu être observés, notamment à Seattle (2006) et au centre-ville de Las Vegas [youtube.com, 2008] lors de grands vents, comme illustré à la Figure 2.3.4. Ce type de comportement structurel est particulièrement à éviter en milieu urbain au regard du risque d'effondrement..



FIGURE 2.3.4 – Mouvement auto-rotatif d'une grue au centre-ville de Las Vegas [youtube.com, 2008].

Peu d'études ont déjà été réalisées concernant l'action du vent sur les grues. Dans sa thèse [Voisin, 2003], Voisin mesure expérimentalement les coefficients de trainée de certains modèles de grue et en étudie l'influence en fonction de l'angle d'incidence et de l'angle de

dérage. L'importance de ces coefficients a déjà été discutée lors de la présentation générale du problème.

De nombreuses références traitent cependant de la caractérisation du vent dans un espace ouvert. [Dyrbye and Hansen, 1997] présentent plusieurs formulations de la stochasticité du vent. Nous retenons la densité spectrale de puissance, caractérisant la répartition de l'énergie du vent dans le domaine fréquentiel. Plusieurs formulations caractérisant la turbulence du vent dans un espace ouvert et à 10 mètres du sol peuvent être envisagées. La formulation utilisée dans ce travail est celle de Von Karman (1948)

$$S_u^*(\omega) = \frac{4L_u/U\sigma_u^2}{\left(1 + 70.8 \left(\frac{\omega L_u}{2\pi U}\right)^2\right)^{5/6}}, \quad (2.3.7)$$

où  $L_u$  est la longueur de turbulence et  $\sigma_u$  est l'écart-type de la composante turbulente de la vitesse. Profitons de l'introduction de ces concepts pour définir l'intensité de turbulence, caractérisant l'importance de la turbulence par rapport à la vitesse moyenne

$$I_u = \frac{\sigma_u}{U}. \quad (2.3.8)$$

La relation 2.3.7 est représentée sous sa forme adimensionnelle à la Figure 2.3.5a.

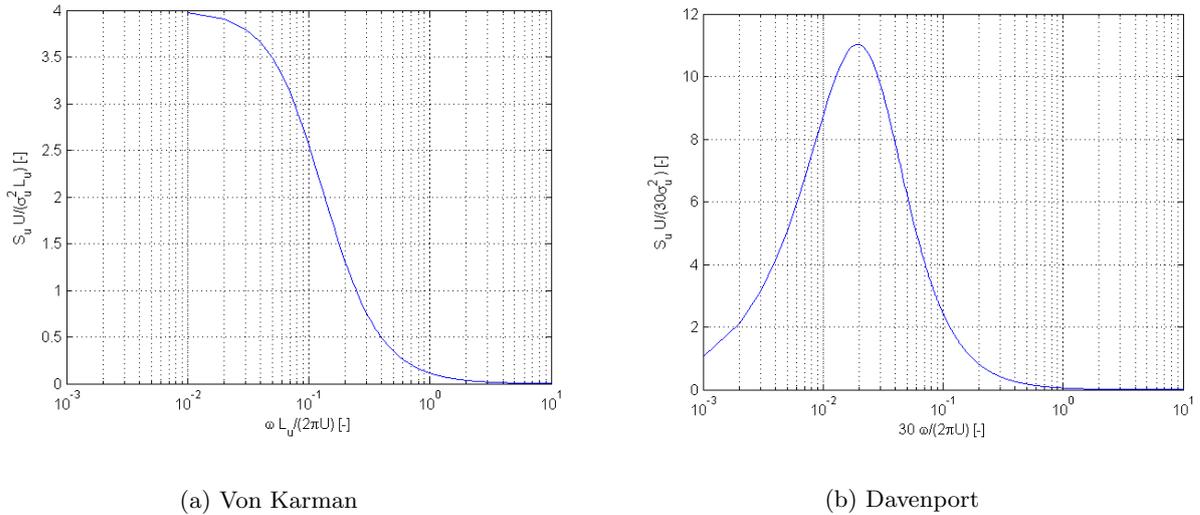


FIGURE 2.3.5 – Exemples de formulations de densité spectrale de puissance de la turbulence vent.

Le contenu fréquentiel de la vitesse du vent décroît avec la fréquence. La faiblesse de cette formulation est de présenter la faiblesse d'avoir un contenu fréquentiel non nul pour les basses fréquences. En effet, il s'agit de la formulation de la densité spectrale du vent pour un temps de simulation de l'ordre de dix minutes et le comportement très basse fréquence (période de retour supérieur à la journée) est inclus dans la vitesse moyenne sur cette durée de simulation. D'autres formulations comme celle de Davenport présentent un contenu fréquentiel nul pour

les basses fréquences

$$S_u^*(\omega) = \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{1200}{U}\right)^2 \frac{\omega}{2\pi} \sigma_u^2}{\left(1 + \left(\frac{1200\omega}{2\pi U}\right)^2\right)^{4/3}}, \quad (2.3.9)$$

Cette formulation est représentée à la Figure 2.3.5b. Notons qu'elle ne dépend pas de la longueur de turbulence, contrairement à la formulation de Von Karman. De manière à pouvoir comparer les deux graphes, nous représentons la formulation de Davenport dans des axes similaires à ceux de Von Karman en supposant que  $L_u = 30m$ . Aucune hypothèse n'est faite sur la formulation, il s'agit simplement d'une mise à l'échelle des variables des axes pour pouvoir comparer les valeurs des deux graphes.

La formulation retenue dans ce travail est celle de Von Karman, également retenue par l'Eurocode. À titre de comparaison, la formulation de Davenport sera également brièvement étudiée.

Ces formulations sont valables pour la turbulence dans toutes les directions, avec leur écart-type respectif. Dyrbye conseille dans [Dyrbye and Hansen, 1997] de prendre  $\sigma_v \approx 0.75\sigma_u$ , et de générer les deux composantes turbulentes du vent indépendamment l'une de l'autre.

La caractérisation d'un champ de vent ne se limite cependant pas à la densité spectrale de puissance en un point. Il est également nécessaire de prendre en compte la cohérence entre les vitesses dans une même direction mais en deux points différents de l'espace. La formulation de la fonction de cohérence  $\Gamma$  proposée par l'Eurocode est celle de Davenport

$$\Gamma(r, \omega) = e^{\frac{-Cr\omega}{2\pi U}}, \quad (2.3.10)$$

avec  $r$  la distance entre les deux points de l'espace considérés, et  $C$  est un facteur constant, généralement pris égal à 10. Une cohérence nulle signifie que les vitesses en deux points de l'espace sont indépendantes l'une de l'autre alors qu'une cohérence unitaire signifie que la vitesse est identique.

Cette forme est visible à la Figure 2.3.6. Nous observons que lorsque les deux points considérés se rapprochent, la cohérence tend vers l'unité. C'est également le cas lorsque les tourbillons sont de basses fréquences, et donc de grande dimension spatiale. En effet, dans cette configuration, les vitesses en deux points de l'espace sont liées à un tourbillon unique et la cohérence entre les deux tend donc également vers 1. Lorsque la distance entre deux points augmente, ou que les tourbillons sont à hautes fréquences, la cohérence diminue jusqu'à tendre vers une valeur nulle.

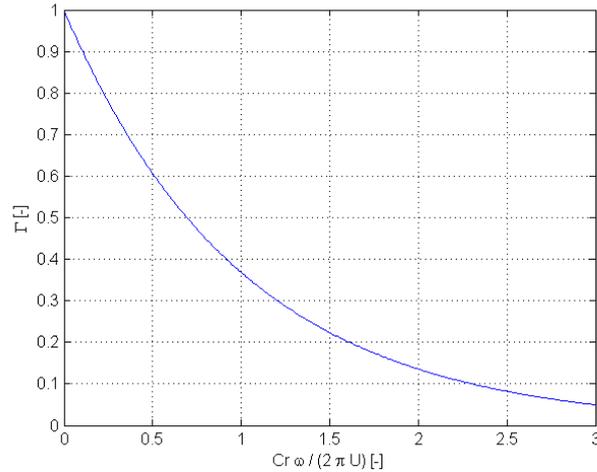


FIGURE 2.3.6 – Fonction de cohérence de la vitesse en deux points de l'espace.

## 2.4 Caractérisation et génération d'échantillons de processus aléatoires

La composante fluctuante de la vitesse du vent est un processus aléatoire. Dans les différentes étapes de ce travail, nous considérons successivement différentes définitions du vent de complexité croissante de manière à s'approcher de plus en plus du phénomène réel. Dans un premier temps, nous considérons un vent déterministe harmonique. Ensuite, le vent est idéalisé par un bruit blanc, et finalement une densité spectrale de puissance réaliste est utilisée sur base de considérations fournies dans la littérature. Ces deux dernières formes de vitesse du vent sont des processus aléatoires. L'attention est donc portée en premier lieu sur la définitions des notions nécessaires à la bonne compréhension des développements.

Un processus aléatoire est un ensemble de variables aléatoires qui évoluent au cours du temps. Dans un premier temps, un échantillon est caractérisé sur base de son expression temporelle jusqu'à l'expression de la densité spectrale de puissance dans le domaine fréquentiel. Ensuite, la génération d'un échantillon sur base d'une densité spectrale de puissance connue est détaillée.

Un échantillon d'un processus aléatoire peut être exprimé dans le domaine temporel comme dans le domaine fréquentiel. La définition dans le domaine temporel consiste en l'ensemble des valeurs que prend cet échantillon  $x(t)$  sur un intervalle de temps  $[-T/2, T/2]$ . Ce signal peut également être exprimé comme une somme infinie de fonctions harmoniques de type  $e^{i\omega t}$  de pulsation  $\omega$  variable. La définition de l'échantillon dans le domaine fréquentiel  $\mathcal{X}(\omega)$  est l'amplitude de chacune de ces harmoniques. Cette fonction  $\mathcal{X}(\omega)$  est la transformée de Fourier de la fonction  $x(t)$  alors que  $x(t)$  est la transformée inverse de  $\mathcal{X}(\omega)$ . Les relations

liant ces deux fonctions sont les suivantes

$$\mathcal{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.4.1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.4.2)$$

En continu, le temps est défini de  $-T/2$  à  $T/2$  ou de  $0$  à  $T$ , et la pulsation de  $-\infty$  à  $+\infty$ . En discret, le domaine de définition des deux variables est plus complexe au vu du nombre limité d'informations stockées. Prenons pour situation de départ un signal temporel de  $N$  points, dont le temps varie de  $0$  à  $t_{final}$  par pas de temps  $\Delta t$ .

$$t_{final} = (N - 1)\Delta t. \quad (2.4.3)$$

Plusieurs considérations sont à prendre en compte :

- La transformée de Fourier de ce signal est un vecteur de  $N$  composantes imaginaires. Le signal temporel est un signal réel et contient donc  $N$  "informations". Le signal fréquentiel lui est équivalent et contient donc également  $N$  informations. Celui-ci est a priori imaginaire, et chaque nombre imaginaire contient deux informations : sa partie réelle et sa partie imaginaire. Ceci implique que les  $N$  nombres imaginaires contenus dans la transformée de Fourier discrète ne sont pas indépendants. En effet, la transformée de Fourier est définie sur un domaine symétrique et sa valeur dans les pulsations négatives et la complexe conjuguée de celle dans les pulsations positives, c'est-à-dire que :

$$\mathcal{X}(-\omega) = \overline{\mathcal{X}(\omega)}. \quad (2.4.4)$$

- Le phénomène de plus basse fréquence qui peut être capturé est celui qui se produit une fois sur le signal temporel. Ainsi,

$$\omega_{min} = \Delta\omega = \frac{2\pi}{t_{final}}. \quad (2.4.5)$$

La valeur fournie par la transformée de Fourier en  $\omega = 0$  n'a pas de sens physique. Dans le domaine continu, le carré de la moyenne du signal est représenté par une fonction de Dirac à l'origine. Dans le domaine discret, ce Dirac est remplacé par la valeur en  $\omega = 0$ . C'est la raison pour laquelle la valeur fournie par la transformée de Fourier en  $\omega$  existe, mais n'a rien à voir avec le contenu fréquentiel du signal. Dans ce travail, cette valeur sera supprimée de manière à conserver une allure régulière et physique des courbes.

- La transformée de Fourier discrète contenant  $N$  points, la valeur de  $\omega_{max}$  est définie comme  $(N/2 - 1)d\omega$  si  $N$  est pair et  $(N - 1)/2d\omega$  si  $N$  est impair.

Les considérations ci-dessus sont rassemblées à la Figure 2.4.1 selon que  $N$  est pair ou impair.

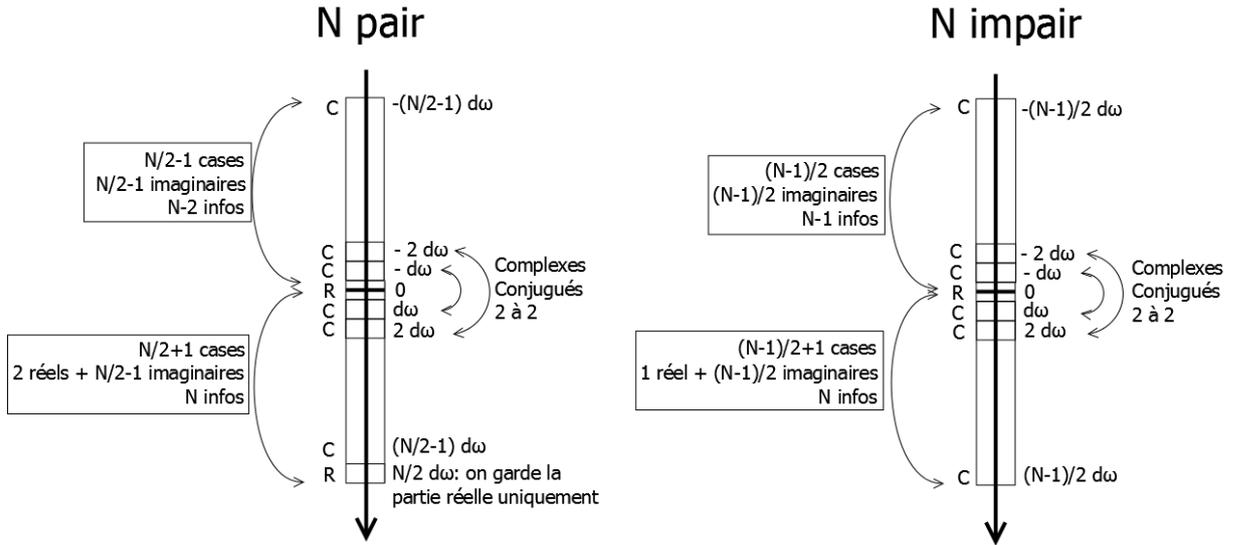


FIGURE 2.4.1 – Discrétisation dans le domaine fréquentiel.

Le contenu énergétique de la transformée de Fourier est exprimé via la densité spectrale de puissance

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{T} |\mathcal{X}(\omega, T)|^2. \quad (2.4.6)$$

Cette densité spectrale de puissance caractérise le contenu fréquentiel de la composante fluctuante du vent et qui sera donc commune à tous les échantillons du processus aléatoire.

Une caractéristique essentielle de la densité spectrale de puissance est que son intégrale correspond à la variance du signal dans le domaine temporel, i.e.

$$\int_{\mathfrak{R}} S_x(\omega) d\omega = \sigma_x^2. \quad (2.4.7)$$

Notons que Matlab utilise une définition de la densité spectrale de puissance  $S^*$  différente de celle utilisée en général et définie ci-dessus  $S$ . La définition de  $S^*$  est telle que

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{R}^+} S_x^*(f) df &= \sigma_x^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}} S_x^*(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \int_{\mathfrak{R}} \frac{S_x^*(\omega)}{4\pi} d\omega \\ &\Downarrow \\ S_x^* \left( f = \frac{\omega}{2\pi} \right) &= 4\pi S_x(\omega) \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

L'intégrale se fait cette fois sur les valeurs positives des fréquences.

Dans l'ensemble de ce travail, les densités spectrales de puissance présentées respectent la première définition  $S(\omega)$ . La formulation de Von Karman fournie par l'Équation 2.3.7 respecte

quant à elle la seconde définition qui est également celle utilisée par Matlab.

À partir de la thèse de V. Denoël [Denoël, 2003], la génération d'un ensemble d'échantillons d'un processus aléatoire est détaillée sur base d'une densité spectrale de puissance  $S_x(\omega)$  connue. L'Équation (2.4.6) se traduit par

$$\mathcal{X}(\omega, T) = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \sqrt{S_x(\omega)} e^{j\phi(\omega)}, \quad (2.4.9)$$

où  $\phi_i$  est la phase de l'harmonique  $i$  déterminée aléatoirement selon une loi de probabilité uniforme entre 0 et  $2\pi$ . C'est à cette étape que s'illustre la stochasticité du phénomène puisque deux échantillons différents n'ont pas les mêmes angles  $\phi_i$ . Les différents échantillons sont donc constitués des mêmes harmoniques déphasées de manière aléatoire.

Une fois que la transformée de Fourier du signal est connue, le signal lui-même est obtenu via la transformée inverse définie à l'équation (2.4.2).

Lorsqu'un ensemble de signaux cohérents doivent être générés, comme un champ de vitesse dans l'espace, la méthode est adaptée de manière à intégrer cette cohérence entre les signaux.

La première étape consiste à construire la matrice de densités spectrales croisées  $[S_x(\omega)]$ .

$$[S_x(\omega)]_{ij} = \sqrt{S_{x,i}(\omega) \times S_{x,j}(\omega)} \times [\Gamma(\omega)]_{ij}. \quad (2.4.10)$$

Dans le cas particulier de la construction d'un champ de vitesse unidirectionnel dans l'espace, les indices  $i$  et  $j$  représentent chacun un point de l'espace. La densité spectrale de puissance unilatérale est identique en tout point de l'espace, et on peut dès lors dire que

$$S_{u,i}(\omega) = S_{u,j}(\omega) = S_u(\omega). \quad (2.4.11)$$

La fonction de cohérence spatiale prend donc la forme

$$[S_u(\omega)] = S_u(\omega) [\Gamma(\omega)]. \quad (2.4.12)$$

La matrice de densité spectrale conjointe peut, pour chaque valeur de  $\omega$ , être décomposée dans sa base propre en une matrice diagonale contenant ses valeurs propres  $[D(\omega)]$  et d'une matrice pleine contenant ses vecteurs propres  $[V(\omega)]$  telles que

$$[S_x(\omega)] = [V(\omega)] [D(\omega)] [V(\omega)]^T. \quad (2.4.13)$$

L'ensemble des matrices ci-dessus sont des matrices carrées de dimensions égales au nombre total de points dans le domaine  $n$  où le champ de vitesse doit être simulé. Cependant, une matrice existe pour chaque pulsation et leur stockage peut rapidement devenir conséquent. C'est la raison pour laquelle il peut être intéressant de réduire la quantité d'information à stocker en ne considérant qu'un nombre réduit  $n_{red} < n$  de valeurs propres, et les vecteurs propres correspondant. Seules les  $n_{red}$  plus grandes valeurs propres sont conservées alors que les autres sont négligées face aux premières. La matrice de densité spectrale de puissance

prend alors la forme

$$\underbrace{[S_x(\omega)]}_{N \times N} = \underbrace{\begin{bmatrix} [V_{red}(\omega)] & [0] \end{bmatrix}}_{N \times N} \underbrace{\begin{bmatrix} [D_{red}(\omega)] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}}_{N \times N} \underbrace{\begin{bmatrix} [V_{red}(\omega)]^T & [0] \end{bmatrix}}_{N \times N} \quad (2.4.14)$$

$$= \underbrace{[V_{red}(\omega)]}_{N \times N_{red}} \underbrace{[D_{red}(\omega)]}_{N_{red} \times N_{red}} \underbrace{[V_{red}(\omega)]^T}_{N_{red} \times N}. \quad (2.4.15)$$

La densité spectrale de puissance étant proportionnelle au carré de la norme de la transformée de Fourier du signal (Équation (2.4.6)), la transformée de Fourier de la vitesse peut être déterminée par

$$\underbrace{[\mathcal{X}(\omega)]}_{N \times 1} = \underbrace{[V_{(red)}(\omega)]}_{N \times N_{red}} \underbrace{[\mathcal{X}_{D,(red)}(\omega)]}_{N_{red} \times 1}, \quad (2.4.16)$$

où  $[\mathcal{X}_{D,(red)}(\omega)]$  est un vecteur de  $N_{red}$  transformées de Fourier calculées sur base des  $N_{red}$  densités spectrales de puissance contenues sur la diagonale de  $[D_{red}(\omega)]$ .

En effet, le calcul inverse montre que

$$\begin{aligned} [S_x(\omega)] &= \frac{2\pi}{T} [\mathcal{X}(\omega)] [\mathcal{X}(\omega)]^T \\ &= \frac{2\pi}{T} ([V_{(red)}(\omega)] [\mathcal{X}_{D,(red)}(\omega)]) ([V_{(red)}(\omega)] [\mathcal{X}_{D,(red)}(\omega)])^T \\ &= [V_{(red)}(\omega)] \left( \frac{2\pi}{T} [\mathcal{X}_{D,(red)}(\omega)] [\mathcal{X}_{D,(red)}(\omega)]^T \right) [V_{(red)}(\omega)]^T \\ &= [V_{(red)}(\omega)] [\mathcal{X}_{D,(red)}(\omega)] [V_{(red)}(\omega)]^T. \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Grâce à la relation (2.4.16), le vecteur  $[\mathcal{X}(\omega)]$  contient  $N$  transformées de Fourier indépendantes. Les  $N$  échantillons de vitesse en chaque point de l'espace peuvent être calculés individuellement sur base de ces  $N$  transformées de Fourier et de la relation (2.4.2).

La génération d'un champ de vitesse se fait donc selon les étapes suivantes :

1. Création de la matrice de densité de puissance croisée,
2. Calcul pour chaque valeur de  $\omega$  les matrices de vecteurs propres et de valeurs propres, éventuellement réduites,
3. Génération, pour chacune des  $N_{red}$  valeurs propres, d'une transformée de Fourier selon la méthode présentée plus haut pour un signal individuel Equation ((2.4.9)),
4. Combinaison des  $N_{red}$  vecteurs propres de  $N$  valeurs au prorata des  $N_{red}$  transformées de Fourier simulées de manière à obtenir  $N$  transformées de Fourier indépendantes,

5. Sur base des  $N$  transformées de Fourier indépendantes, calcul des  $N$  signaux temporels souhaités aux  $N$  points de l'espace.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les bases nécessaires à l'analyse du mouvement de la grue ont été posées. En effet, le problème étudié dans le cadre de ce travail est clairement défini et un ensemble de connaissances théoriques et bibliographiques concernant le pendule paramétrique, les grues ou la modélisation du vent ont été exposées. L'analyse est menée successivement selon trois modèles de complexité croissante. Ces trois modèles constituent les trois chapitres à venir.

## Chapitre 3

# Étude du problème simplifié

Dans cette seconde partie, nous étudions en détail le mouvement de la flèche de la grue sous une expression simplifiée de la vitesse du vent, à savoir un vent uniforme et unidirectionnel. Cette expression est motivée par la volonté d'étudier le comportement du système en maintenant la forte analogie existante entre la grue et le pendule. Tout d'abord, les équations régissant le mouvement de ce système sont établies. Celles-ci peuvent prendre une forme adimensionnelle via la définition d'un certain nombre de paramètres. Ensuite, la méthode de résolution de cette équation est détaillée. Finalement, nous étudions le comportement de la flèche pour deux champs de vitesse du vent. Le premier champ fait intervenir une composante fluctuante harmonique et déterministe et le second une vitesse fluctuante modélisée par un bruit blanc.

### 3.1 Hypothèses du modèle simplifié

L'ensemble des hypothèses faites sur ce modèle sont les suivantes :

- (1) **La vitesse du vent est importante par rapport à la vitesse de la grue, et les termes de vitesses fluctuantes du second ordre peuvent être négligés par rapport à ceux de la vitesse moyenne au second ordre.**

Plusieurs hypothèses sont faites ici. Tout d'abord, on suppose que la vitesse de la flèche est négligeable par rapport à la vitesse du vent, ce qui revient à remplacer la vitesse relative vent-flèche par la vitesse du vent. Cette hypothèse s'avère raisonnable au regard du grand temps caractéristique de la grue par rapport à celui du vent et entraîne l'absence d'amortissement aérodynamique. En effet, si la flèche réalise un tour complet en deux minutes et a une longueur de 40 mètres, la vitesse de son extrémité est de l'ordre de  $2m/s$ , ce qui est raisonnable par rapport à la vitesse du vent qui peut atteindre des valeurs de l'ordre de  $30m/s$ .

Ensuite, les termes de vitesse fluctuante au second ordre sont négligés. Cette hypothèse induit une erreur d'autant plus faible que l'intensité de turbulence  $I_u$  ou  $I_v$  est faible.

En effet, l'intensité de turbulence se définit comme le rapport de la fluctuation de la vitesse à la vitesse moyenne.

$$\sigma_{u_i} = I_{u_i} \times U. \quad (3.1.1)$$

Les termes de fluctuation au second ordre sont donc proportionnels au carré de l'intensité de turbulence.

Ces deux hypothèses entraînent la décomposition de la norme de la vitesse au carré en une somme de deux termes : le premier est lié à la vitesse moyenne et le second à la vitesse fluctuante.

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_{\text{rel}}(x, y, z, t)|^2 &= |\mathbf{v}(x, y, z, t) - \mathbf{v}_{\text{flèche}}(x, y, z, t)|^2 & (3.1.2) \\ &\simeq |\mathbf{v}(x, y, z, t)|^2 \\ &\simeq (U + u)^2 + v^2 \\ &\simeq U^2 + 2Uu + u^2 + v^2 \\ &\simeq U^2 + 2Uu. & (3.1.3) \end{aligned}$$

La pression peut ainsi être décomposée en une composante moyenne et une composante fluctuante. Chacune des deux composantes de la pression perpendiculaire à la grue  $\bar{p}_\perp$  et  $\Delta p_\perp$  entraîne un couple autour de l'axe de rotation

$$\bar{M} = \int_A \bar{p}_\perp r dA = \int_A \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} C_\perp(\theta_{\text{rel}}) U^2 r dA, \quad (3.1.4)$$

$$\Delta M = \int_A \Delta p_\perp r dA = \int_A \rho_{\text{air}} C_\perp(\theta_{\text{rel}}) U u r dA. \quad (3.1.5)$$

où  $\theta_{\text{rel}}$  est l'angle entre la vitesse du vent et l'axe longitudinal de la grue, et  $r$  une abscisse en axes locaux de la grue variant de  $-l_1$  à  $l_2$ . L'incrément  $dA$  vaut  $b(r)dr$ . La configuration de la grue est schématisée à la Figure 3.1.1.

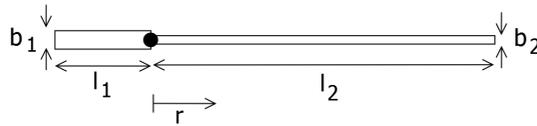


FIGURE 3.1.1 – Schéma de la géométrie de la grue.

(2) **Le champ de vitesse du vent présente des caractéristiques uniformes dans l'espace.**

Cette hypothèse entraîne que le rapport des moments  $\Delta M$  et  $\bar{M}$  est égal au rapport des pressions  $\Delta p_\perp$  et  $\bar{p}_\perp$  :

$$\frac{\Delta M}{\bar{M}} = \frac{\Delta p_\perp}{\bar{p}_\perp} = \frac{2u}{U}. \quad (3.1.6)$$

(3) **Le champ de vitesse du vent est unidirectionnel, ce qui signifie que la vitesse fluctuante perpendiculaire à la vitesse moyenne du vent  $v$  est nulle**

Cette hypothèse permet de remplacer l'angle  $\theta_{rel}$  utilisé dans les équations (3.1.4) et (3.1.5) par l'angle  $\theta$  entre la vitesse moyenne du vent et l'axe longitudinal de la flèche.

- (4) **Le coefficient  $C_{\perp}$  varie de manière sinusoïdale avec l'orientation de la flèche  $\theta$ .**

Celui-ci prend donc la forme

$$C_{\perp} = \widetilde{C}_{\perp} \sin(\theta). \quad (3.1.7)$$

Cette hypothèse entraîne que la composante moyenne de la force perpendiculaire à la flèche est directement fonction du sinus de la position angulaire  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} \overline{F}_{\perp} &= \frac{1}{2} \rho_{air} C_{\perp} U^2 S \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \rho_{air} \widetilde{C}_{\perp} U^2 S}_{\widetilde{F}_{\perp}} \sin(\theta). \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

## 3.2 Analyse dimensionnelle du problème

Dans cette section, nous cherchons à mettre en évidence les paramètres et variables adimensionnels régissant le système. Pour ce faire, nous établissons l'équation du mouvement sur base des hypothèses pré-citées.

$$ml^2\ddot{\theta} + M_f \text{sign}(\dot{\theta}) + \overline{M} + \Delta M = 0 \quad (3.2.1)$$

$$ml^2\ddot{\theta} + M_f \text{sign}(\dot{\theta}) + \overline{F}_{\perp} l_{\overline{F}} \left(1 + \frac{\Delta M}{\overline{M}}\right) = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta} + M_f \text{sign}(\dot{\theta}) + \widetilde{F}_{\perp} l_{\overline{F}} \left(1 + \frac{\Delta M}{\overline{M}}\right) \sin(\theta) = 0$$

$$\frac{ml^2\ddot{\theta}}{\widetilde{F}_{\perp} l_{\overline{F}}} + \frac{M_f \text{sign}(\dot{\theta})}{\widetilde{F}_{\perp} l_{\overline{F}}} + \left(1 + \frac{\Delta M}{\overline{M}}\right) \sin(\theta) = 0. \quad (3.2.2)$$

De manière à rendre l'équation adimensionnelle, les paramètres suivants sont définis par

$$\Omega^* = \sqrt{\frac{\widetilde{F}_{\perp} l_{\overline{F}}}{ml^2}}, \quad T^* = \frac{1}{\Omega^*}, \quad \alpha = \frac{\Delta M}{\overline{M}} = \frac{2u}{U}, \quad \beta = \frac{M_f}{\widetilde{F}_{\perp} l_{\overline{F}}}. \quad (3.2.3)$$

L'hypothèse (4) permet la définition d'un paramètre  $\Omega^*$  indépendant de la position angulaire.

Suite au choix de ces paramètres, les variables temporelle  $t$  et fréquentielle  $\omega$  sont rem-

placées par les variables adimensionnelles

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{t}{T^*} = \Omega^* t, \\ \kappa &= \frac{\omega}{\Omega^*}.\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

La dérivée temporelle  $\frac{\partial \bullet}{\partial t} = \dot{\bullet}$  est également transformée en adimensionnel :

$$\frac{\partial \bullet}{\partial \tau} = \bullet' = \frac{\partial \bullet}{\Omega^* \partial t} = \frac{\dot{\bullet}}{\Omega^*}.\tag{3.2.5}$$

Il en est de même pour la dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 \bullet}{\partial \tau^2} = \bullet'' = \frac{\partial^2 \bullet}{\Omega^{*2} \partial t^2} = \frac{\ddot{\bullet}}{\Omega^{*2}}.\tag{3.2.6}$$

L'équation (2.2.1) devient alors

$$\theta'' + \beta \text{sign}(\theta') + (1 + \alpha) \sin(\theta) = 0.\tag{3.2.7}$$

Nous ramenons ainsi les paramètres du problème aux 4 paramètres  $\Omega^*$ ,  $\tau$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  et l'équation du mouvement est rendue adimensionnelle.

### 3.3 Ordres de grandeur des différents paramètres

L'ordre de grandeur des différentes variables et paramètres est évalué sur base des essais expérimentaux réalisés par [Voisin, 2003] et sur base d'un catalogue commercial du fabricant Potain [Potain, 2014].

	Masse	Longueur	Coefficient de traînée	Vitesse angulaire	Accélération angulaire	Couple de frottement
Paramètre	$m$	$L$	$C_d$	$\theta$	$\ddot{\theta}$	$M_f$
Unité	$t$	$m$	$[-]$	$rad/s$	$rad/s^2$	$kNm$
Ordre de grandeur	100	50	1.5	3	1	25

TABLEAU 3.3.1 – Ordres de grandeur des paramètres dimensionnels liés à la flèche.

	Masse volumique de l'air	Vitesse moyenne	Fluctuation	Pression	Force moyenne	Force fluctuante	Pulsation
Paramètre	$\rho_{air}$	$U$	$u$	$p$	$\overline{F}_\perp$	$f_\perp$	$\Omega^*$
Unité	$kg/m^3$	$m/s$	$m/s$	$Pa$	$kN$	$kN$	$rad/s$
Ordre de grandeur	1.2	30	10	750	15	10	0.05

TABLEAU 3.3.2 – Ordres de grandeur des paramètres dimensionnels liés au vent.

Paramètre	$\alpha$	$\beta$	$\theta'$	$\theta''$
Ordre de grandeur	0.5	0.01	60	20

TABLEAU 3.3.3 – Ordres de grandeur des paramètres adimensionnels.

### 3.4 Résolution de l'équation différentielle

L'équation différentielle à résoudre est l'équation (3.4.1).

$$\theta'' + \beta \text{sign}(\theta') + (1 + \alpha) \sin(\theta) = 0. \quad (3.4.1)$$

Cette équation présente plusieurs particularités.

Tout d'abord, il s'agit d'une équation différentielle non-linéaire. En effet, la fonction  $\text{sign}()$  n'est pas linéaire puisque  $\text{sign}(a + b) \neq \text{sign}(a) + \text{sign}(b)$ . La fonction  $\sinus$  est elle aussi non-linéaire. Dans le cas de petites rotations, elle peut être linéarisée car  $\sin(\epsilon\theta) \approx \epsilon\theta$ . L'apparition d'autorotations est ici d'un intérêt primordial et il est donc évident que l'hypothèse des petites rotations ne peut pas être acceptée.

Ensuite, l'équation (3.5.3) n'est pas continue puisque la fonction  $\text{sign}()$  présente une discontinuité lorsque la vitesse change de signe. En effet, cette fonction a l'allure représentée à la Figure 3.4.1.

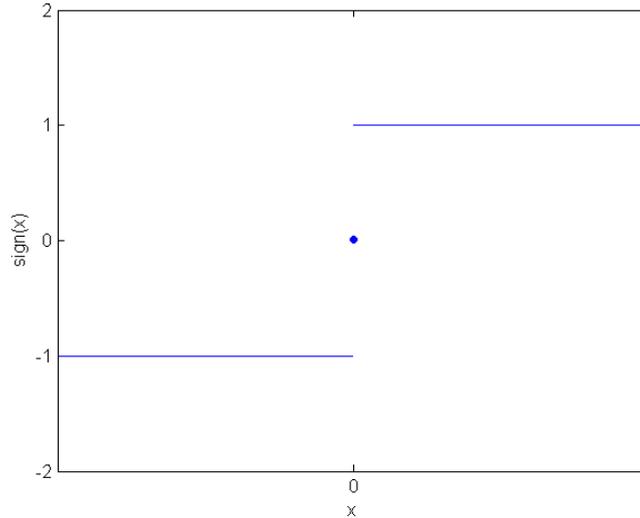


FIGURE 3.4.1 – Allure de la fonction  $sign()$ .

Lorsque la variable de la fonction (ici la vitesse angulaire) est nulle, le moment de frottement prend une valeur inconnue entre  $-M_f$  et  $+M_f$ . Dans l'équation du mouvement, cela modélise le phénomène de frottement sec. En effet, lorsque la vitesse de la grue est nulle et que le couple appliqué par le vent augmente, le couple de frottement au point de rotation s'oppose au couple du vent et prend la valeur nécessaire pour maintenir la flèche au repos. Il s'agit de frottement statique. Le moment de friction est cependant borné à  $M_f$  et lorsque cette valeur est atteinte, la flèche se met en mouvement. On parle alors de frottement dynamique.

Les méthodes de résolution d'équations différentielles traditionnelles (explicites de type différences centrées ou implicites) ne permettent pas la résolution d'équations discontinues. Une méthode implicite adaptée a donc été implémentée. Celle-ci consiste à diviser l'équation différentielle discontinue (3.4.1) en deux équations continues distinctes selon que la vitesse angulaire est positive ou négative

$$\theta'' + \beta + (1 + \alpha) \sin(\theta) = 0 \quad \text{si } \theta' \geq 0, \quad (3.4.2)$$

$$\theta'' - \beta + (1 + \alpha) \sin(\theta) = 0 \quad \text{si } \theta' \leq 0. \quad (3.4.3)$$

Il est maintenant possible de résoudre l'équation entre deux discontinuités, c'est-à-dire dans une zone dans laquelle la vitesse angulaire est de signe constant, à l'aide de la fonction *ode23* (algorithme de Runge-Kutta) en considérant l'équation adéquate (3.4.2) ou (3.4.3). La résolution s'arrête lorsque la vitesse angulaire atteint une valeur nulle et le passage de la discontinuité est géré hors du solver *ode23* avant de relancer une résolution *ode23* en changeant l'équation à résoudre, jusqu'à la discontinuité suivante, comme illustré à la Figure 3.4.2. Lorsque la vitesse est positive, la résolution se fait avec l'équation (3.4.2) ( $Eq_+$ ) et lorsqu'elle est négative, la résolution se fait avec l'équation (3.4.3) ( $Eq_-$ ).

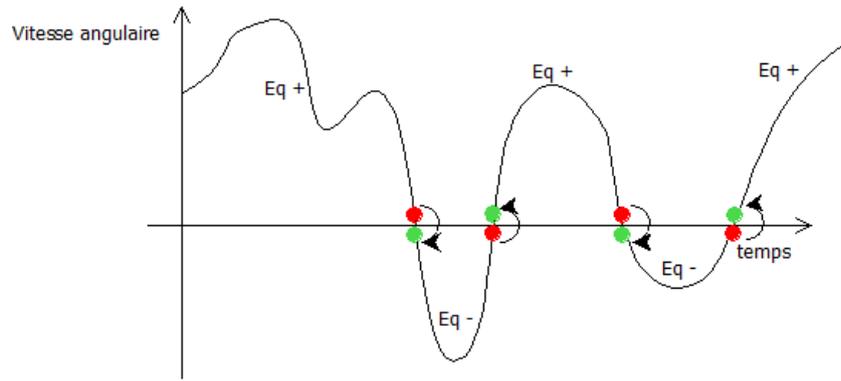


FIGURE 3.4.2 – Résolution de l'équation via *ode23* et passage manuel de la discontinuité.

Cette méthode consistant à interrompre la résolution de *ode23* sous certaines conditions est appelée *détection d'évènements*. L'évènement considéré ici est le passage de la vitesse angulaire par une valeur nulle. La résolution *ode23* s'arrête, la valeur de la vitesse est imposée à  $\epsilon$  et changée de signe. Une nouvelle résolution via *ode23* peut alors démarrer. Le passage de l'évènement présente cependant quelques subtilités.

Lorsque la vitesse angulaire passe par un extremum au voisinage de zéro, le code détecte que la configuration est à proximité d'un évènement et va donc tenter de converger vers le point de vitesse nulle. Ce point étant inexistant, le calcul ne converge pas. De plus, on se situe dans une zone de faible vitesse et la dynamique du système peut ne pas suffire à éloigner la vitesse angulaire de la valeur nulle et ainsi éviter la recherche de l'évènement. La détection d'évènement est donc divisée en deux cas :

- Si la vitesse approche du zéro de manière décroissante, c'est-à-dire que l'on se trouve dans une zone de résolution de l'équation (3.4.2) où la vitesse est positive, la résolution s'arrête lorsque celle-ci vaut  $-\epsilon$ .

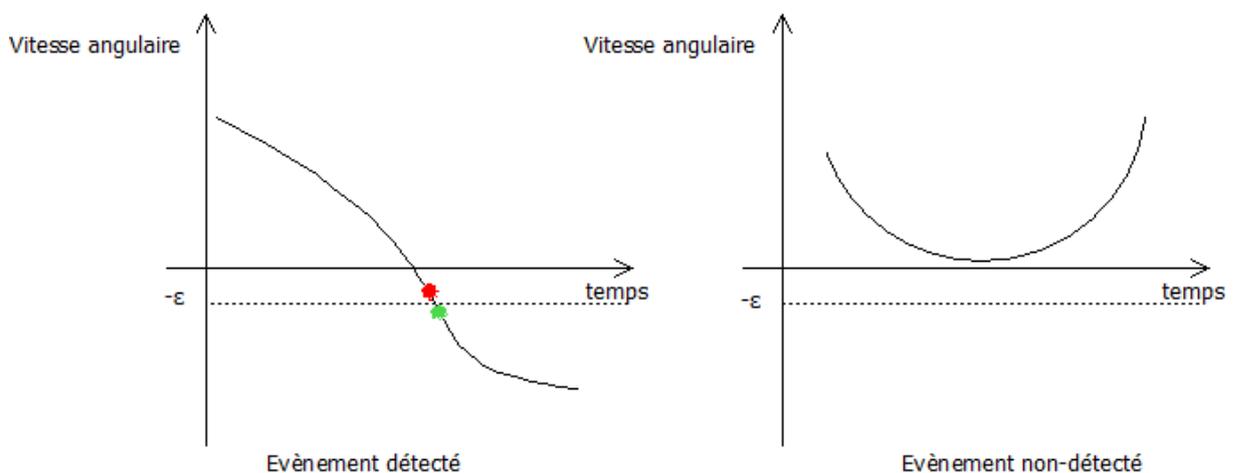


FIGURE 3.4.3 – Passage d'une zone de vitesse positive à une zone de vitesse négative.

- Si au contraire la vitesse approche de zéro de manière croissante, c'est-à-dire que l'on se trouve dans une zone de résolution de l'équation (3.4.3) où la vitesse est négative, la résolution s'arrête lorsque celle-ci vaut  $+\epsilon$ .

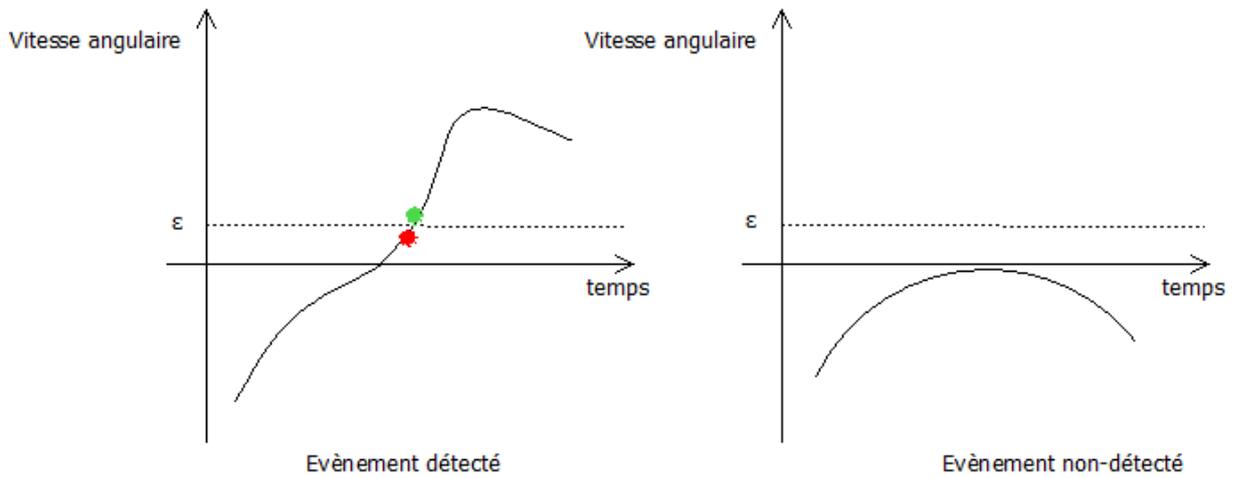


FIGURE 3.4.4 – Passage d’une zone de vitesse négative à une zone de vitesse positive.

Les résultats des Figures 3.4.3 et 3.4.4 sont synthétisés à la Figure 3.4.5. Les zones où les équations (3.4.2) (Equation +) et (3.4.3) (Equation -) sont appliquées se superposent. La limite entre les deux est située en  $+\epsilon$  lorsqu’on passe d’une vitesse négative à une vitesse positive (en rose) et en  $-\epsilon$  lorsqu’on passe d’une vitesse positive à une vitesse négative (en mauve). De cette manière, on évite le changement d’équation dans une bande de vitesse angulaire quasi-nulle ( $\ll \epsilon$ ) et les problèmes sus-cités.

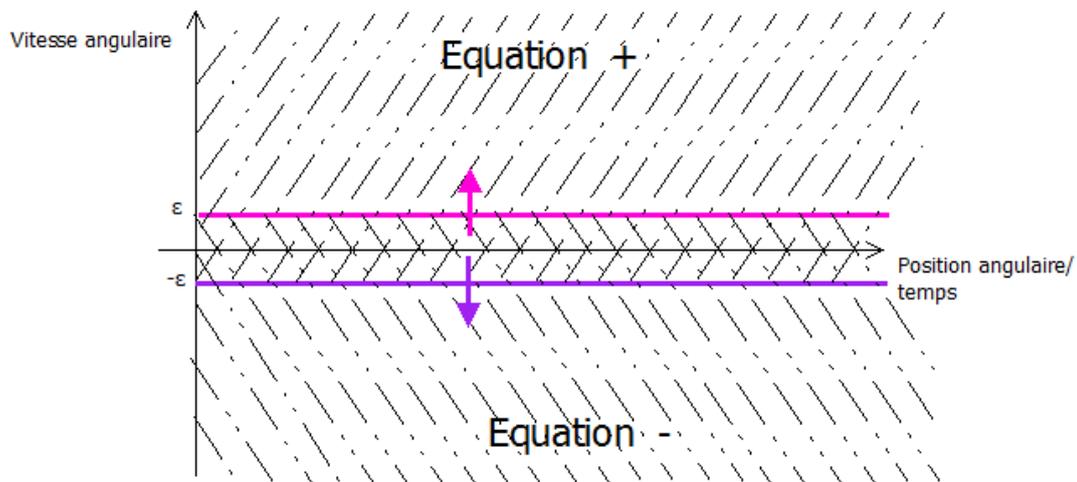


FIGURE 3.4.5 – Domaine de résolution des équations (3.4.2) et (3.4.3).

L’algorithme de résolution est lancé pour un ensemble de données initiales et s’arrête automatiquement lorsqu’un évènement est détecté. Le signe de la vitesse est inversé et l’équation considérée est modifiée. Une nouvelle simulation peut alors démarrer jusqu’à la détection d’un nouvel évènement. Le schéma de résolution est présenté à la Figure 3.4.6.

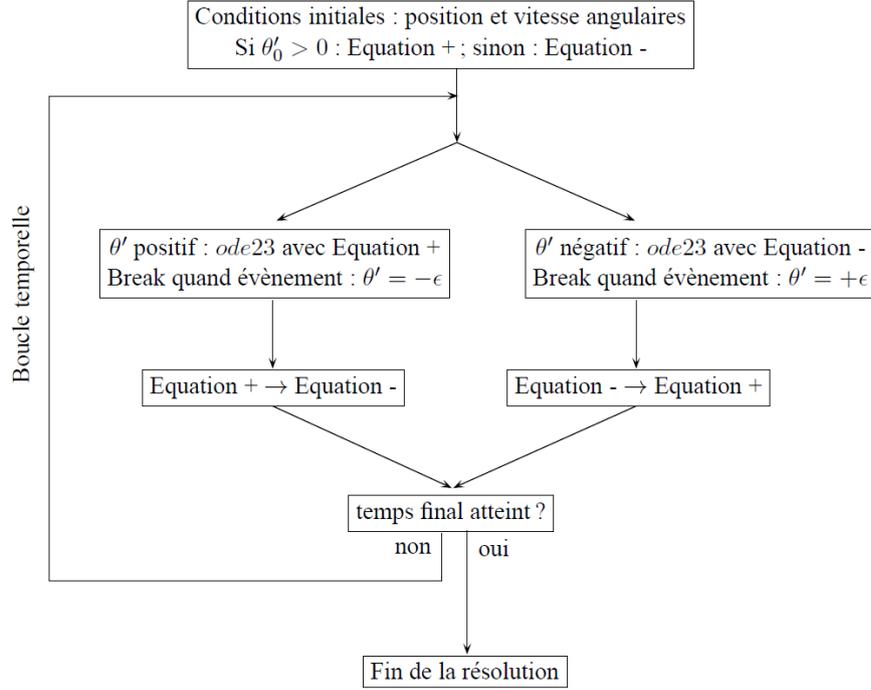


FIGURE 3.4.6 – Algorithme de résolution de l'équation différentielle.

### 3.5 Étude du comportement sous champ de vitesse unidirectionnel et uniforme et à fluctuation harmonique

Dans cette première partie, nous étudions le comportement de la grue sous le champ de vitesse

$$\mathbf{v} = (U + u(t))\mathbf{e}_x = (U + A \sin(\omega t)) \mathbf{e}_x. \quad (3.5.1)$$

Il s'agit d'un champ de vitesse unidirectionnel et constant dans l'espace, avec une fluctuation harmonique. L'écart-type du sinus d'amplitude  $A$  vaut  $\sigma_u = \frac{A}{\sqrt{2}}$ <sup>1</sup>. Par conséquent, l'amplitude du sinus peut être ramenée à l'intensité de turbulence  $I_u$  par la relation

$$A = \sigma_u \sqrt{2} = I_u U \sqrt{2}. \quad (3.5.2)$$

L'équation du mouvement prend alors la forme adimensionnelle modifiée

$$\theta'' + \beta \text{sign}(\theta') + \left(1 + 2(\sqrt{2}I_u) \sin(\kappa\tau)\right) \sin(\theta) = 0, \quad (3.5.3)$$

Dans le paragraphe suivant, le comportement de la flèche et l'influence des différents paramètres sont illustrés. Dans un premier temps, les différents régimes dynamiques du système sont mis en évidence. Ensuite, les résultats obtenus pour un amortissement de Coulomb sont

1.  $\sigma[A \sin(\omega t)] = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{A^2}{T} \left[ \frac{\omega t - \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{2\omega} \right]_0^T = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2 \sin(2\omega T)}{4\omega T}$

Cette expression tend vers  $\frac{A^2}{2}$  lorsque  $T$  tend vers l'infini.

comparés à ceux obtenus pour un amortissement visqueux et pour un système non-amorti. Enfin, la stabilité du système sera étudiée en fonction des paramètres caractérisant la sollicitation  $I_u$  et  $\kappa$ . La comparaison de ces résultats avec ceux issus d'études présentes dans la littérature permettra de valider l'implémentation de la routine.

### 3.5.1 Observations du mouvement pour des valeurs particulières des paramètres

Dans cette première partie, les valeurs des paramètres sont fixées et différents résultats sont analysés dans le domaine temporel.

Les Figures 3.5.1 à 3.5.3 représentent le comportement de la flèche pour trois intensités de turbulence  $I_u$  croissantes.

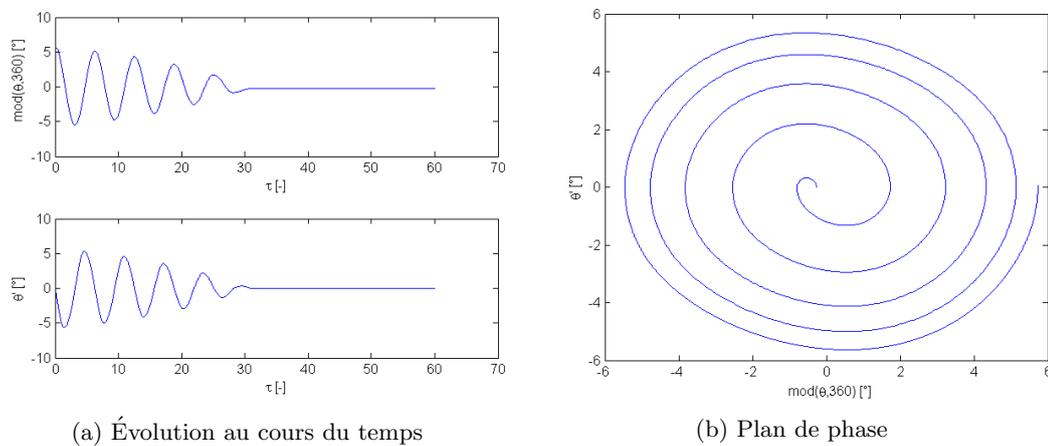


FIGURE 3.5.1 – Mouvement de la flèche - Petites oscillations :  $\beta = 0.01$ ;  $I_u = 0.1$ ;  $\kappa = 2$ .

La Figure 3.5.1 représente le comportement de la flèche sous une faible intensité de turbulence ( $I_u = 0.1$ ). La phase transitoire est composée de faibles oscillations liées aux conditions initiales. Le mouvement s'amortit ensuite et la flèche atteint une position d'équilibre. Dans le plan de phase, nous observons des changements de signe de l'angle ainsi que de la vitesse angulaire, ce qui caractérise les oscillations. Lorsque l'angle atteint un extremum, la vitesse est nulle. De plus, l'allure en spirale vers l'intérieur du graphe est liée à l'amortissement qui entraîne une diminution de l'amplitude des oscillations de l'angle et de la vitesse.

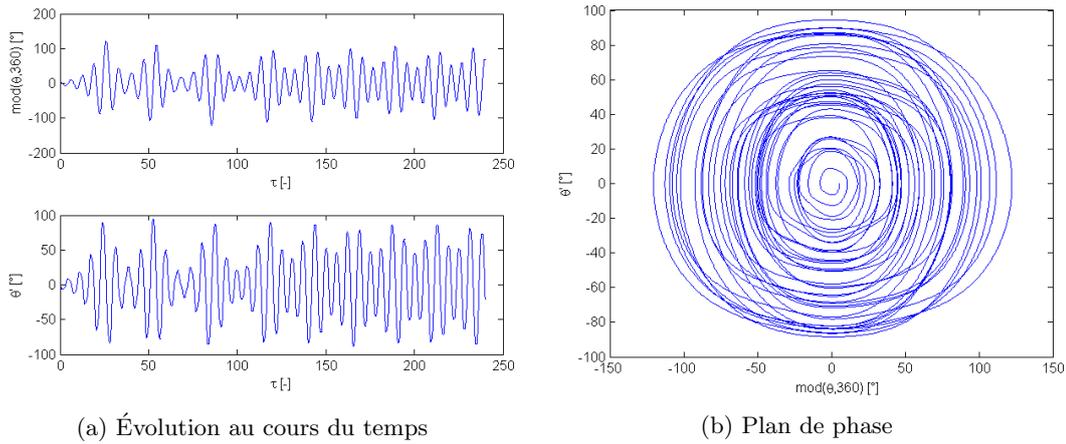


FIGURE 3.5.2 – Mouvement de la flèche - Grandes oscillations :  $\beta = 0.01$ ;  $I_u = 0.3$ ;  $\kappa = 2$ .

La Figure 3.5.2 présente les mêmes résultats pour une intensité de turbulence plus importante  $I_u = 0.3$ . Nous observons ici que les oscillations sont de grande amplitude, pouvant atteindre plus de  $100^\circ$ . De plus, ce mouvement se développe en régime permanent et est maintenu au cours du temps. L'allure du plan de phase est similaire à celle de la Figure 3.5.1.

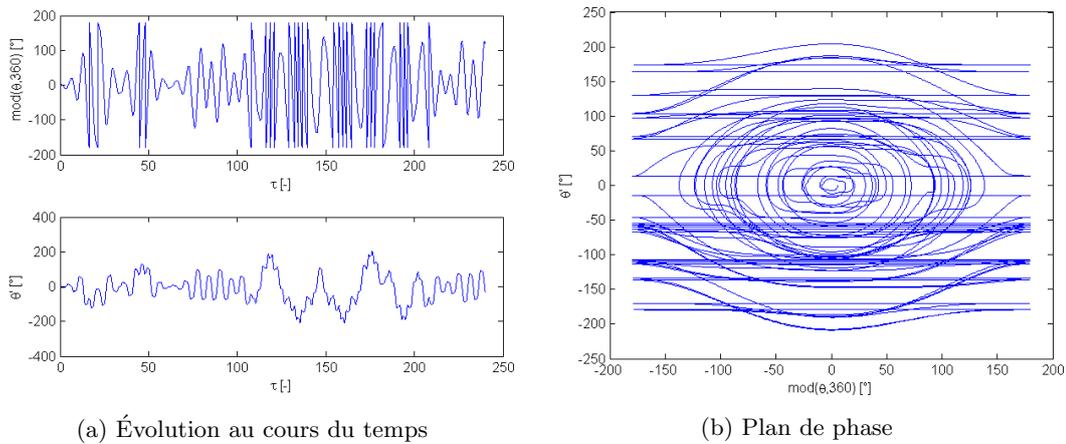


FIGURE 3.5.3 – Mouvement de la flèche - Grandes oscillations et rotations :  $\beta = 0.01$ ;  $I_u = 0.5$ ;  $\kappa = 2$ .

À la Figure 3.5.3, l'intensité de turbulence vaut  $I_u = 0.5$  et l'on constate cette fois un mouvement rotatif de la flèche. L'angle est compris entre  $-180^\circ$  et  $180^\circ$ . Les discontinuités visibles dans l'évolution de l'angle au cours du temps et les horizontales présentes dans le plan de phase correspondent donc au passage de la flèche de  $180^\circ$  à  $-180^\circ$  ou inversement. Les rotations sont représentées dans le plan de phase par l'allure en arc de la courbe le long de laquelle l'angle oscille alors que la vitesse angulaire ne change pas de signe. Le tronçon horizontal représente le passage soudain de  $\theta = -180^\circ$  à  $\theta = +180^\circ$  ou inversement.

Grâce aux graphes ci-dessus, les trois types de comportement ont pu être mis en évidence.

### 3.5.2 Comparaison des différents types d'amortissement

Nous comparons maintenant les résultats obtenus ici pour un amortissement de Coulomb (Equation (3.5.4))

$$\theta'' + \beta \text{sign}(\theta') + \left(1 + 2(\sqrt{2}I_u) \sin(\kappa\tau)\right) \sin(\theta) = 0, \quad (3.5.4)$$

aux résultats obtenus pour un amortissement visqueux (Equation (3.5.5))

$$\theta'' + c\theta' + \left(1 + 2(\sqrt{2}I_u) \sin(\kappa\tau)\right) \sin(\theta) = 0, \quad (3.5.5)$$

ou sans amortissement ( $\beta = 0$  ou  $c = 0$  dans les équations (3.5.4) et (3.5.5)). La valeur de  $c$  a été prise identique à celle de  $\beta$  de manière à obtenir des résultats d'un même ordre de grandeur et pouvoir effectuer une comparaison pertinente. Il est cependant important de remarquer qu'aucune correspondance ne peut être faite entre les deux valeurs et que les amplitudes des déplacements ne peuvent pas être comparées. Seule l'allure des graphes peut ici être observée.

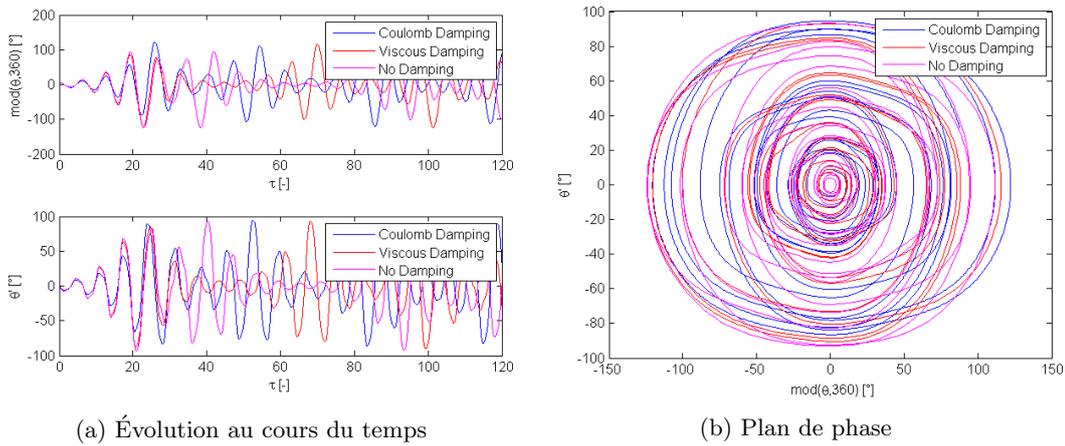


FIGURE 3.5.4 – Mouvement de la flèche - Comparaison des différents amortissements :  $\beta = 0.01$ ;  $c = 0.01$ ;  $I_u = 0.1$ ;  $\kappa = 2$ .

Nous observons à la fois une variation d'amplitude et un déphasage important entre les trois courbes. En régime transitoire, les conditions initiales ont encore une influence considérable et on observe donc une correspondance significative entre les résultats. Lors du passage en régime permanent celle-ci disparaît et il est difficile d'observer une similitude entre les différentes courbes.

### 3.5.3 Caractérisation du mouvement dans l'espace $\kappa - I_u$

Dans cette dernière partie, les différents mouvements sont caractérisés de manière à pouvoir étudier l'influence des différents paramètres.

La caractérisation est faite de différentes manières :

- les cycles sont comptés et la différence est faite entre rotation et oscillation. Un cycle de rotation correspond à un passage par la position verticale  $+/- 180^\circ$  alors qu'une oscillation correspond à un changement de signe de la vitesse,
- l'énergie du signal est mesurée. La distinction est faite entre l'énergie relative à  $\theta$  et celle relative à  $\theta'$ . La première est représentative de l'amplitude des oscillations ou autorotations alors que la seconde est représentative de la vitesse de mouvement, quelle que soit leur amplitude. L'énergie est ramenée à l'unité de temps.

$$\begin{aligned}\overline{E_\theta} &= \frac{\int_{\tau_1}^{\tau_2} \theta^2 d\tau}{\tau_2 - \tau_1} = \sigma_\theta^2, \\ \overline{E_{\theta'}} &= \frac{\int_{\tau_1}^{\tau_2} \theta'^2 d\tau}{\tau_2 - \tau_1} = \sigma_{\theta'}^2.\end{aligned}\quad (3.5.6)$$

L'intégrale du carré de la position ou de la vitesse angulaires se ramène à la variance de ces deux variables étant donné qu'elles sont de moyenne nulle.

$$\frac{\int_{\tau_1}^{\tau_2} x(t)^2 d\tau}{\tau_2 - \tau_1} = \frac{\int_{\tau_1}^{\tau_2} (x(t) - \mu_x)^2 d\tau}{\tau_2 - \tau_1} = E[(x - \mu_x)^2] = \sigma_x^2. \quad (3.5.7)$$

$\tau_1$  et  $\tau_2$  sont choisis comme deux temps suffisamment éloignés par rapport au temps caractéristique du système  $T^*$  et dans la phase permanente du mouvement. L'énergie étant rapportée à un pas de temps unitaire, l'intervalle de temps considéré n'a pas d'impact.

Au vu de la grande variabilité de l'énergie du mouvement, il est choisi de travailler avec le logarithme de celle-ci  $\log(E)$  de manière à rapprocher les zones de grande énergie et mettre en évidence le passage de faible énergie à grande énergie.

De manière à bien appréhender le comportement du pendule, il est intéressant de comparer les valeurs que prennent ces caractéristiques dans l'espace paramétrique  $\kappa - I_u$ .

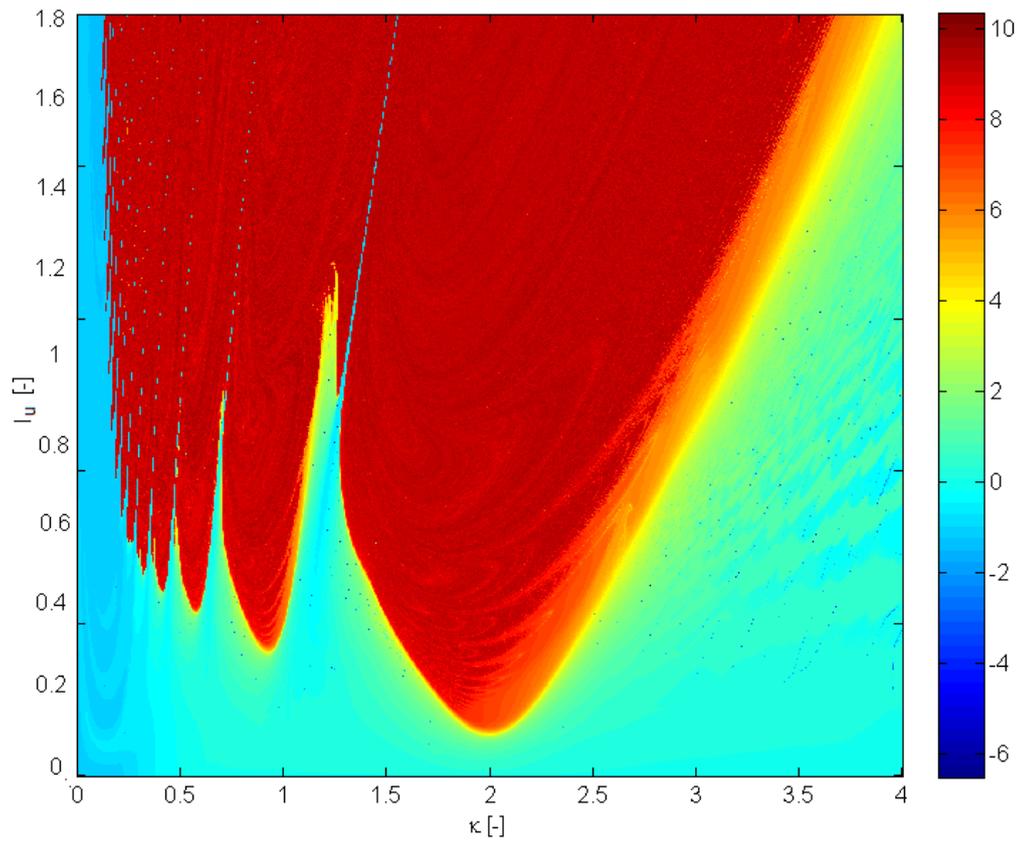


FIGURE 3.5.5 – Logarithme de  $\sigma_\theta^2$  : amortissement de Coulomb -  $\beta = 0.01$ .

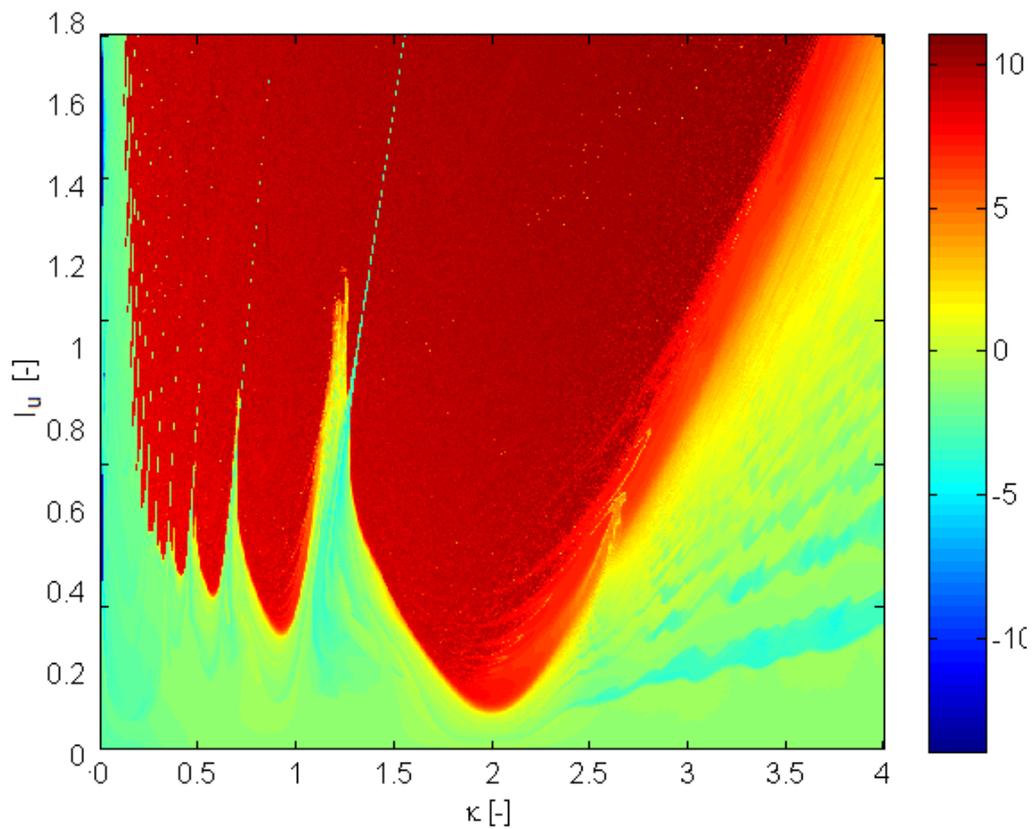


FIGURE 3.5.6 – Logarithme de  $\sigma_\theta^2$  : amortissement de Coulomb -  $\beta = 0.01$ .

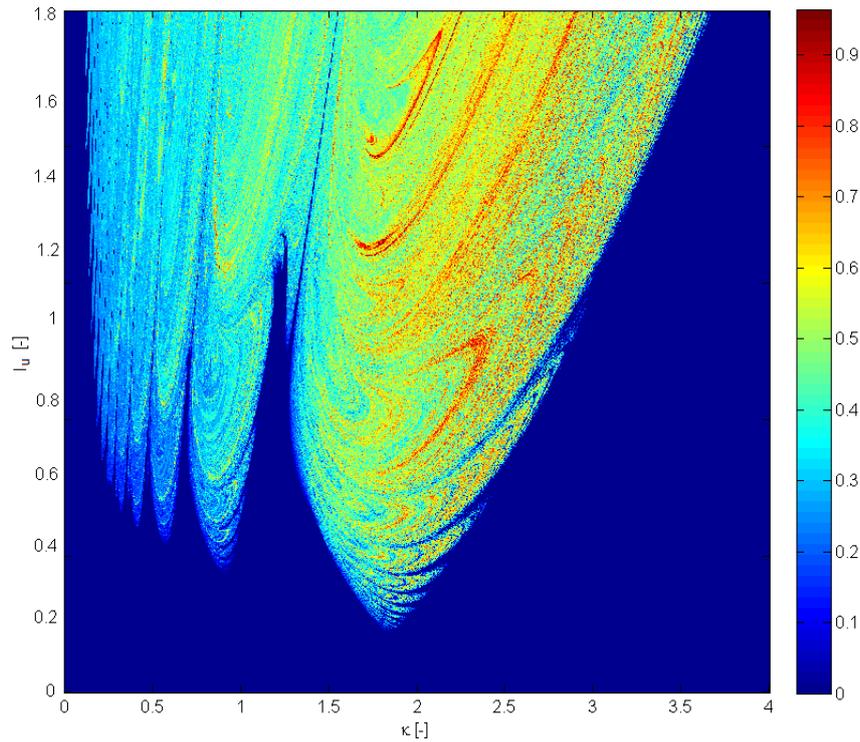


FIGURE 3.5.7 – Pourcentage d’auto-rotations : amortissement de Coulomb -  $\beta = 0.01$ .

Les Figures 3.5.5 à 3.5.7 présentent les diagrammes de stabilité du mouvement de la grue pour un coefficient  $\beta = 0.01$ . L’apparition de lobes d’instabilité peut être observée. Ces lobes présentent d’une part le fait que l’instabilité apparaît lorsque l’intensité de turbulence augmente, et d’autre part qu’elle est plus présente pour certaines valeurs du coefficient  $\kappa$ . Ces valeurs sont situées à forte proximité des entiers  $\kappa = 2$  et  $\kappa = 1$  ainsi que des diviseurs entiers de deux ( $\kappa = 2/k$  avec  $k$  entier). En effet, ces deux premières valeurs entières correspondent à une fréquence de sollicitation multiple de la fréquence propre du système linéarisé et donc à un phénomène d’instabilité. Les non-linéarités du système modifient légèrement la position des lobes mais ceux-ci restent cependant à proximité des valeurs critiques de  $\kappa$  déjà identifiées à la Figure 2.3.3 pour un pendule paramétrique excité verticalement par son support. Cette corrélation entre la fréquence de sollicitation et la fréquence propre du système va permettre une périodicité du couple sollicitation - mouvement égale au plus petit commun multiple de la période de la sollicitation et de celle du mouvement.

La Figure 3.5.7 met en évidence le fait que les zones de grande énergie correspondent au régime auto-rotatif de la grue. Nous observons également qu’il existe des valeurs de  $\kappa$  qui ne présentent pas d’instabilité à grande intensité de turbulence. Ceci se retrouve sous la forme de droites obliques de faible énergie ou faible pourcentage de rotations situées entre les lobes d’instabilité.

Nous comparons maintenant les résultats des Figures 3.5.5 à 3.5.7 obtenus pour un amortissement  $\beta = 0.01$  aux mêmes résultats obtenus pour une valeur  $\beta = 0.001$ . Ceux-ci sont

fournis aux Figures 3.5.8 à 3.5.9.

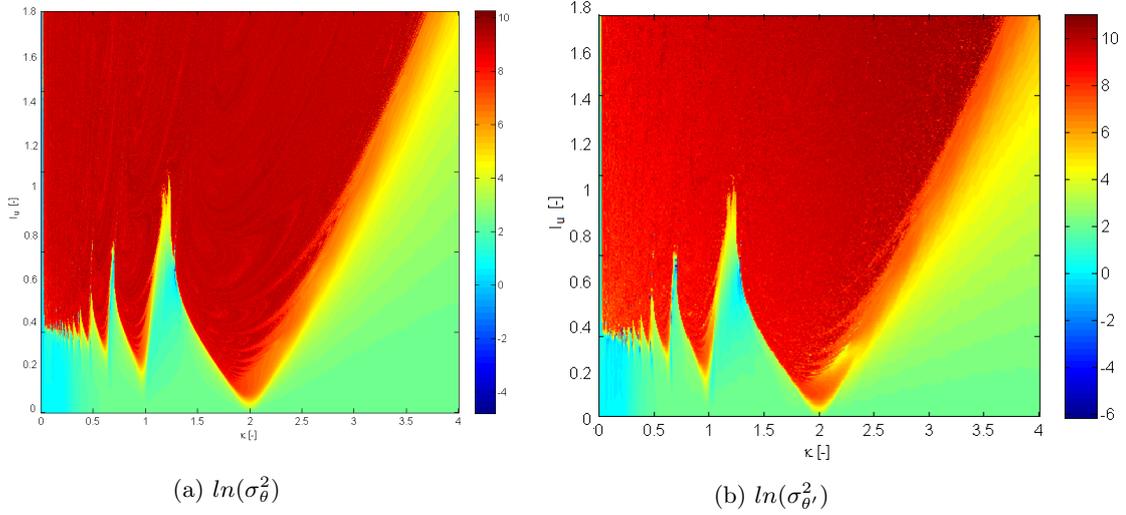


FIGURE 3.5.8 – Logarithme de l'énergie : amortissement de Coulomb -  $\beta = 0.001$ .

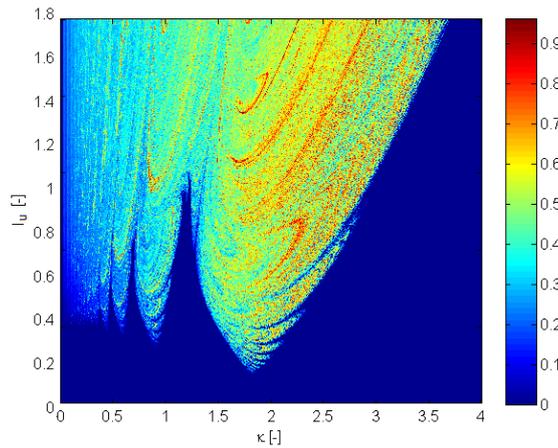


FIGURE 3.5.9 – Pourcentage d'autorotations : amortissement de Coulomb -  $\beta = 0.001$ .

Les Figures 3.5.8 à 3.5.9 mettent en évidence l'influence de l'amortissement. Lorsque l'amortissement diminue (ici  $\beta = 0.001$ ), le régime auto-rotatif apparaît pour une plus faible intensité de turbulence. Les lobes sont en effet plus allongés verticalement sur les Figures 3.5.8 à 3.5.9 que sur les Figures 3.5.5 à 3.5.7. L'énergie en zone d'instabilités reste du même ordre de grandeur dans les deux cas. Finalement, les zones sans instabilité sont toujours présentes entre les lobes.

Nous observons maintenant les résultats obtenus pour un amortissement visqueux. La comparaison est faite avec deux valeurs de l'amortissement  $c = 0.3$  et  $c = 0.01$ . Lorsque les facteurs d'amortissement  $\beta$  et  $c$  diminuent, les diagrammes de stabilité des deux types d'amortissement se rapprochent l'un de l'autre puisque le terme d'amortissement disparaît.

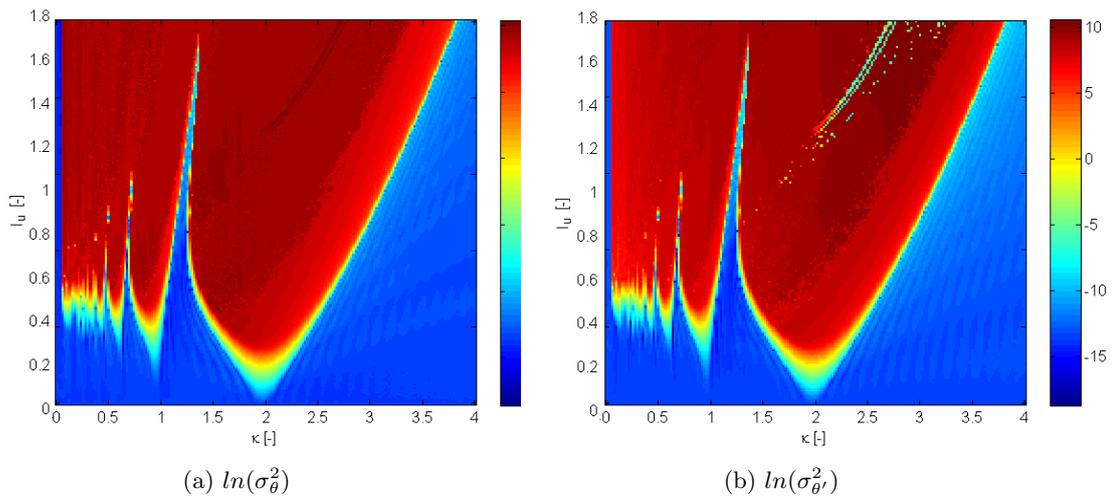


FIGURE 3.5.10 – Logarithme de l'énergie : Amortissement visqueux -  $c = 0.3$ .

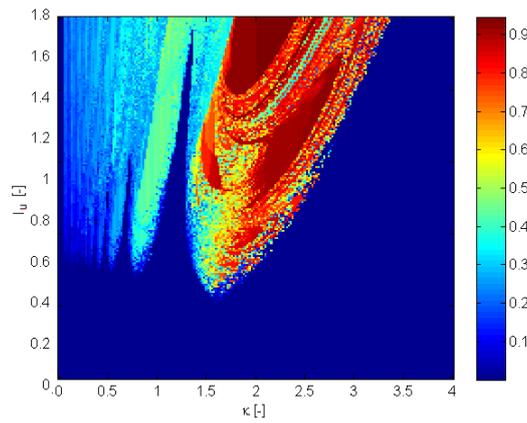


FIGURE 3.5.11 – Pourcentage d'autorotations : Amortissement visqueux -  $c = 0.3$ .

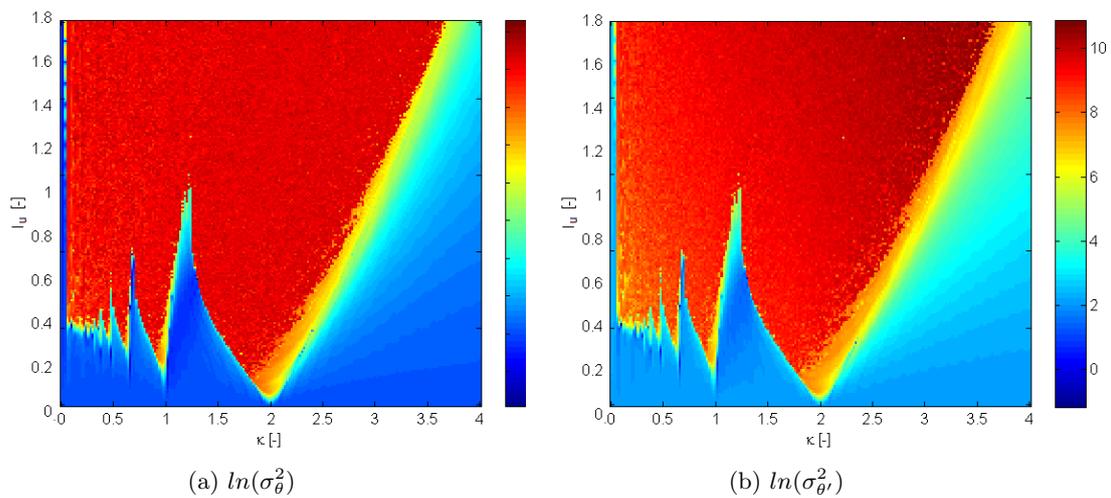


FIGURE 3.5.12 – Logarithme de l'énergie : Amortissement visqueux -  $c = 0.01$ .

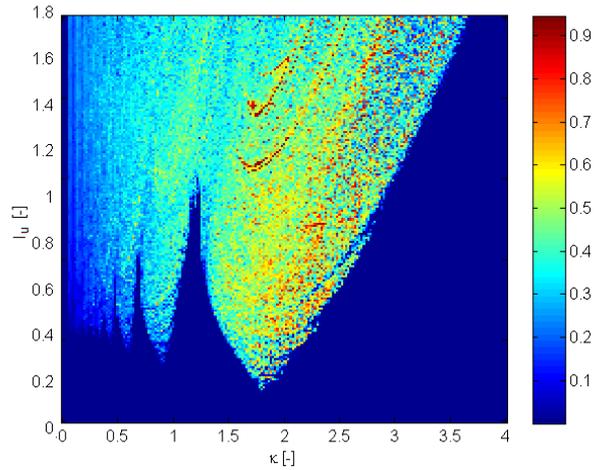


FIGURE 3.5.13 – Pourcentage d’auto-rotations : Amortissement visqueux -  $c = 0.01$ .

Aux Figures 3.5.10 à 3.5.13, les résultats sont affichés pour un amortissement visqueux. La comparaison de ces résultats montre que lorsque l’amortissement diminue, l’énergie augmente et les globes s’agrandissent verticalement. Cette conclusion est identique à celle faite dans le cas de l’amortissement sec. De plus, nous observons que la vitesse de rotation est plus importante puisque l’énergie selon  $\theta'$  augmente. Par contre, nous observons que le pourcentage de rotations diminue dans les lobes d’instabilités. Ceci implique que le surplus d’énergie n’est pas suffisant pour entraîner des rotations.

Ce phénomène est illustré à la Figure 3.5.14 pour un point du diagramme de stabilité. On observe bien que la vitesse de rotation est plus importante lorsque l’amortissement diminue alors que le nombre d’auto-rotations n’augmente pas forcément.

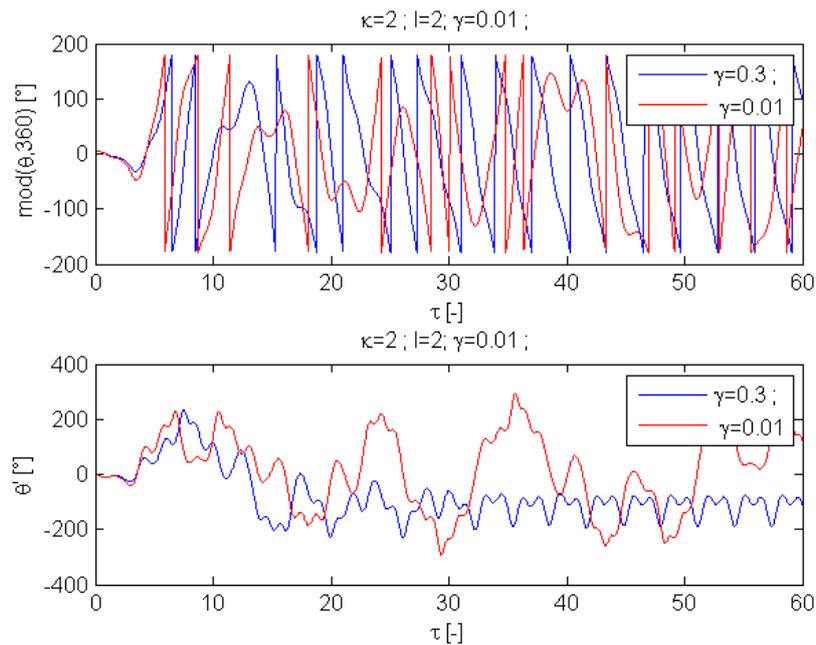


FIGURE 3.5.14 – Superposition des résultats au cours du temps pour  $\kappa = 2$  et  $I = 2$ .

Les résultats de la Figure 3.5.11 sont à mettre en parallèle avec ceux de la Figure 2.3.3 (à gauche) fournis par Alevras [Alevras et al., 2013]. Il peut être observé que les lobes ont la même position et que l’allure globale est fortement similaire. Ceci confirme la validité du code développé.

La comparaison des résultats pour les amortissements de Coulomb et visqueux met en évidence la similitude de forme entre les lobes d’instabilités. Dans les deux cas le régime auto-rotatif apparaît d’une part, lorsque l’intensité de turbulence augmente et d’autre part préférentiellement pour certaines valeurs particulières de  $\kappa$ . Rappelons qu’aucun calibrage ne peut être réalisé entre l’amortissement de Coulomb et l’amortissement visqueux. On se limitera donc à une comparaison qualitative.

### 3.6 Étude du comportement sous champ de vitesse unidirectionnel et uniforme modélisée par un bruit blanc

Dans cette section, le comportement de la grue est étudié sous un champ de vitesse modélisé par un bruit blanc. Un bruit blanc est un signal qui possède un contenu fréquentiel constant, ce qui signifie que toutes les harmoniques dont le signal est composé ont la même amplitude. La densité spectrale de puissance d’un bruit blanc est donc une fonction constante, quelle que soit la pulsation considérée. Dans le domaine temporel, ce signal est déterminé par une loi normale, ce qui signifie que la valeur du signal en un instant donné est générée indépendamment des autres valeurs aux instants précédents. Théoriquement, un bruit blanc est un signal de variance infinie. Un tel signal ne peut cependant pas exister et suite à la discrétisation du phénomène et à la limite supérieure des fréquences observées, une variance peut être déterminée par l’intégrale de la densité spectrale de puissance, comme décrit à l’équation (2.4.7).

La discrétisation de ces considérations nécessite quelques adaptations. En effet, un bruit blanc possède une densité spectrale de puissance uniforme, or ceci est impossible dans le domaine discret puisque le nombre de points est limité. En effet, si le signal temporel s’étend de  $t = 0$  à  $t = t_{final}$  et possède  $N$  points, alors la densité spectrale de puissance est elle aussi définie par  $N$  points. Sachant que  $\Delta\omega = \frac{1}{t_{final}}$ , la densité spectrale s’étend de  $-\frac{N}{2}\Delta\omega = -\frac{N}{2t_{final}} = -\frac{1}{2\Delta t}$  à  $\frac{N}{2}\Delta\omega = \frac{N}{2t_{final}} = \frac{1}{2\Delta t}$ . Il est dès lors impossible de définir une densité spectrale de puissance uniforme avec un nombre fini de points. Ceci est illustré à la Figure 3.6.2.

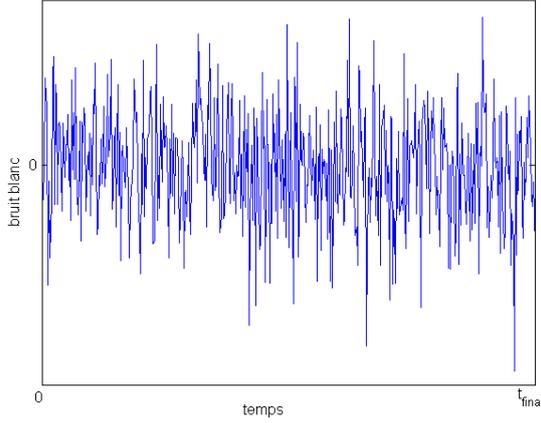


FIGURE 3.6.1 – Densité spectrale de puissance discrétisée d'un bruit blanc.

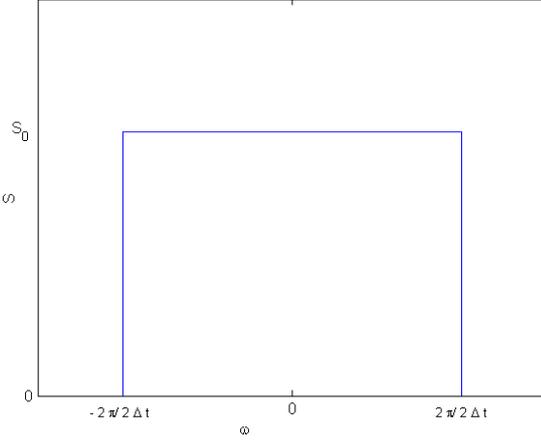


FIGURE 3.6.2 – Densité spectrale de puissance discrétisée d'un bruit blanc.

Les pulsations non représentées suite à la discrétisation sont les grandes pulsations (en valeur absolue). Si celles-ci sont importantes par rapport à la pulsation caractéristique du système  $\Omega^*$ , leur contribution à la dynamique de la flèche est négligeable. En effet, la flèche n'a pas le temps de réagir aux changements de sollicitation très rapides de ces harmoniques. L'erreur liée à la discrétisation du signal est donc faible si

$$\frac{1}{2\Delta t} \gg \Omega^* \quad (3.6.1)$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta t \ll \frac{1}{2\Omega^*} = \mathcal{O}(10s). \quad (3.6.2)$$

La variance du signal temporel dépend du nombre de points  $N$  et vaut

$$\sigma_u^2 = S_0 \times \frac{1}{\Delta t}. \quad (3.6.3)$$

Il est possible de construire l'équation du mouvement de la flèche (3.4.1).

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2u}{U} \\ &= \frac{2\sigma\mathcal{N}(0,1)}{U} \\ &= \sqrt{\frac{S_0}{\Delta t}} \frac{2\mathcal{N}(0,1)}{U} \\ &= \sqrt{\frac{S_0}{T^*}} \frac{2}{U} \sqrt{\frac{T^*}{\Delta t}} \mathcal{N}(0,1) \\ &= I_u \sqrt{\frac{T^*}{\Delta t}} \mathcal{N}(0,1). \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

L'intensité de turbulence  $I_u$  représente l'importance du moment fluctuant par rapport au

moment moyen lié au vent. Celle-ci est indépendante des paramètres de discrétisation

$$I_u = \sqrt{\frac{S_0}{T^*}} \frac{2}{U}. \quad (3.6.5)$$

### 3.6.1 Observations du mouvement pour des valeurs particulières des paramètres

Dans cette section, nous observons le comportement de la grue pour deux intensités de turbulence  $I_u = 0.5$  et  $I_u = 1$ . Le signal de vent étant aléatoire, la réponse le sera également. L'étude du comportement se fait donc par simulations de Monte-Carlo. Cette méthode consiste à générer un grand nombre de signaux de vent. Pour chacun de ces signaux, la réponse du système est calculée, et l'on étudie ensuite les caractéristiques stochastiques de l'ensemble des réponses obtenues.

Les résultats obtenus pour une intensité  $I_u = 0.5$  sont visibles aux Figures 3.6.3 à 3.6.6.

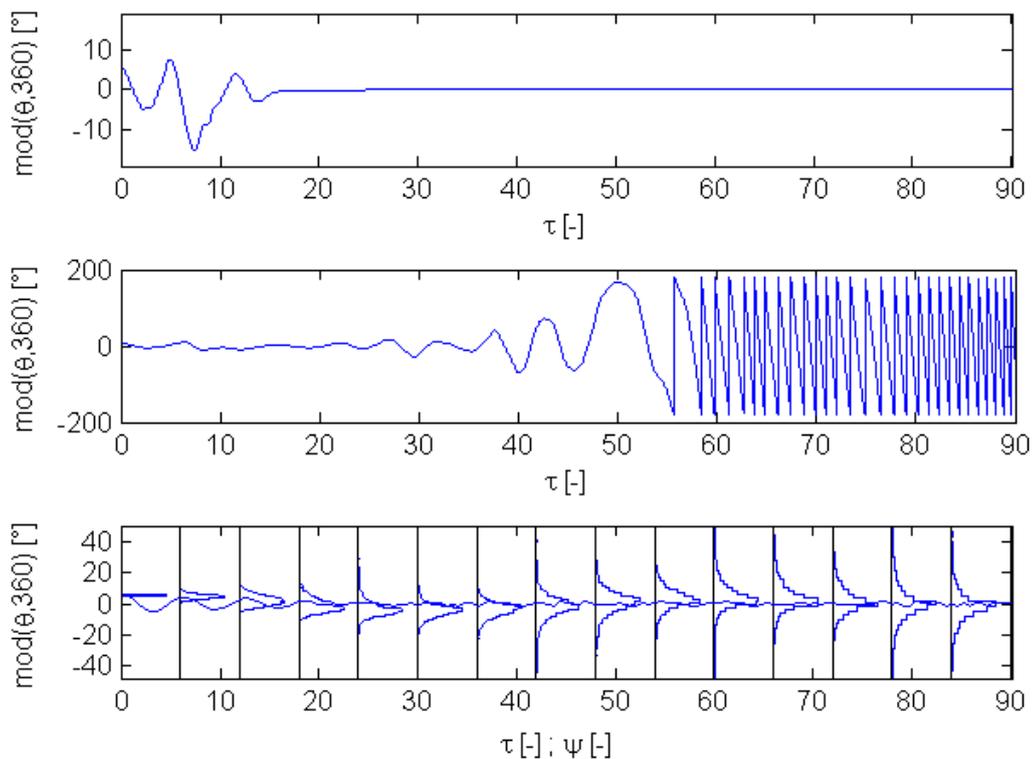


FIGURE 3.6.3 – Position angulaire au cours du temps (haut) et évolution de la densité de probabilité  $\psi$  de  $\theta$  (bas) pour  $\beta = 0.01$  et  $I_u = 0.5$ .

La Figure 3.6.3 présente deux évolutions de la position angulaire au cours du temps pour deux échantillons de vitesse fluctuante différents (au-dessus). Pour un grand nombre de simulations (ici 1000 simulations), il est possible de tracer en chaque instant la densité de probabilité  $\psi$  de la position angulaire. C'est ce résultat sous la forme d'un histogramme qui est superposé à la moyenne de la position angulaire sur le graphe inférieur. Nous observons qu'à partir de approximativement  $\tau = 70$ , la densité de probabilité de la position angulaire

ne varie plus au cours du temps, ce qui signifie l'atteinte du régime stationnaire. À l'instant initial, on observe que la densité de probabilité est un Dirac (dans le cas d'un histogramme, l'unité est atteinte pour un seul intervalle de valeurs). En effet, on considère une condition initiale déterministe. Par conséquent, tous les échantillons présentent la même position et vitesse angulaire à cet instant. Notons que le problème résolu ici est non-linéaire et que les variables de sortie  $\theta$  et  $\theta'$  sont non-Gaussiennes.

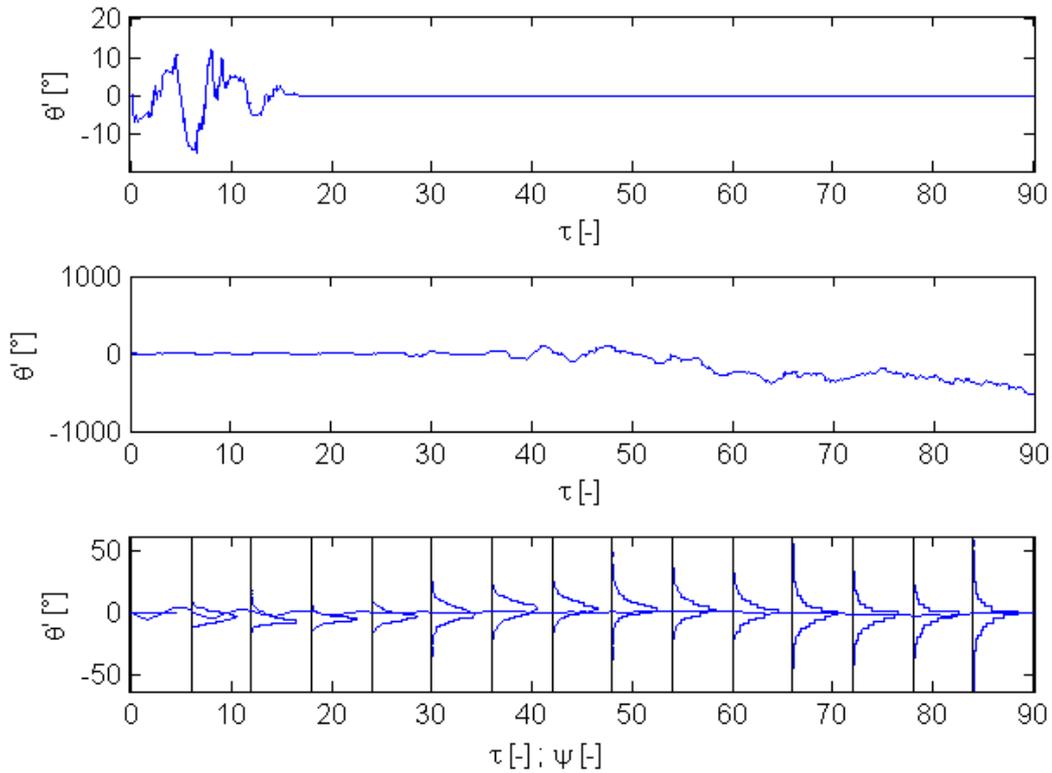


FIGURE 3.6.4 – Vitesse angulaire au cours du temps (haut) et évolution de la densité de probabilité  $\psi$  de  $\theta'$  (bas) pour  $\beta = 0.01$  et  $I_u = 0.5$ .

La Figure 3.6.4 présente deux évolutions de la vitesse angulaire au cours du temps pour deux échantillons de vitesse fluctuante différents (au-dessus). Comme pour la position angulaire, le graphe inférieur représente la densité de probabilité  $\psi$  de la vitesse angulaire sous la forme d'un histogramme, ainsi que sa moyenne. L'historgramme est constant à partir de  $\tau = 70$ , la densité de probabilité de la position angulaire ne varie plus au cours du temps, ce qui signifie l'atteinte du régime stationnaire.

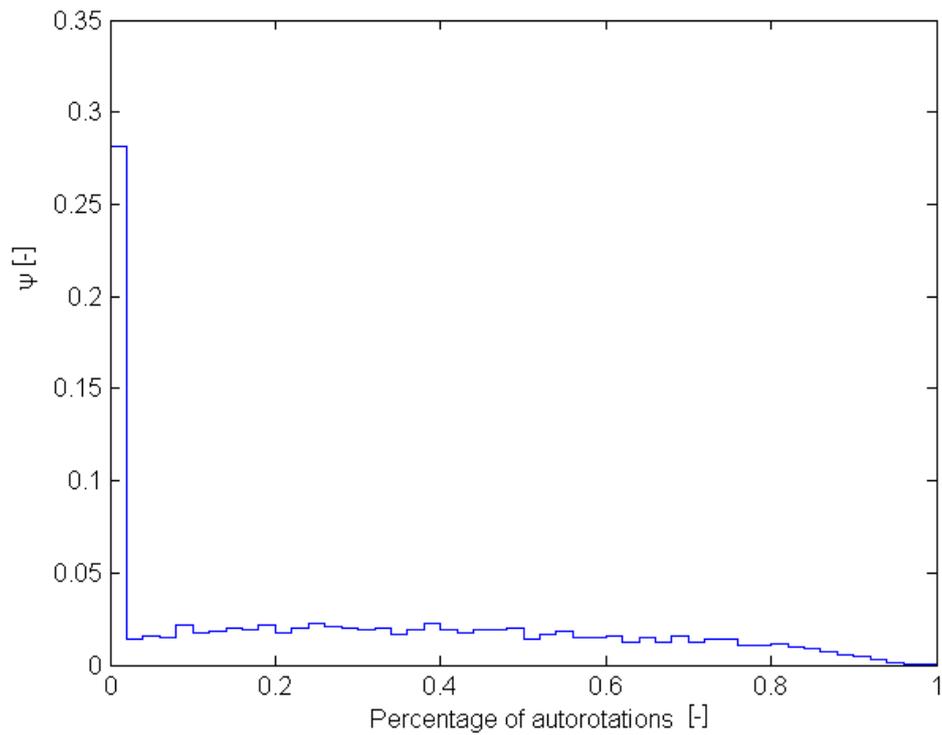


FIGURE 3.6.5 – Densité de probabilité du pourcentage de rotations pour  $\beta = 0.01$  et  $I_u = 0.5$ .

La Figure 3.6.5 présente la densité de probabilité du pourcentage de cycles de rotations sous la forme d'un histogramme. Il peut être observé qu'une majorité des échantillons de vitesse de vent va engendrer moins de 10% d'autorotations. Il est rare mais cependant possible de rencontrer jusque 100% de rotations, ce qui correspond à un mouvement autorotatif pur.

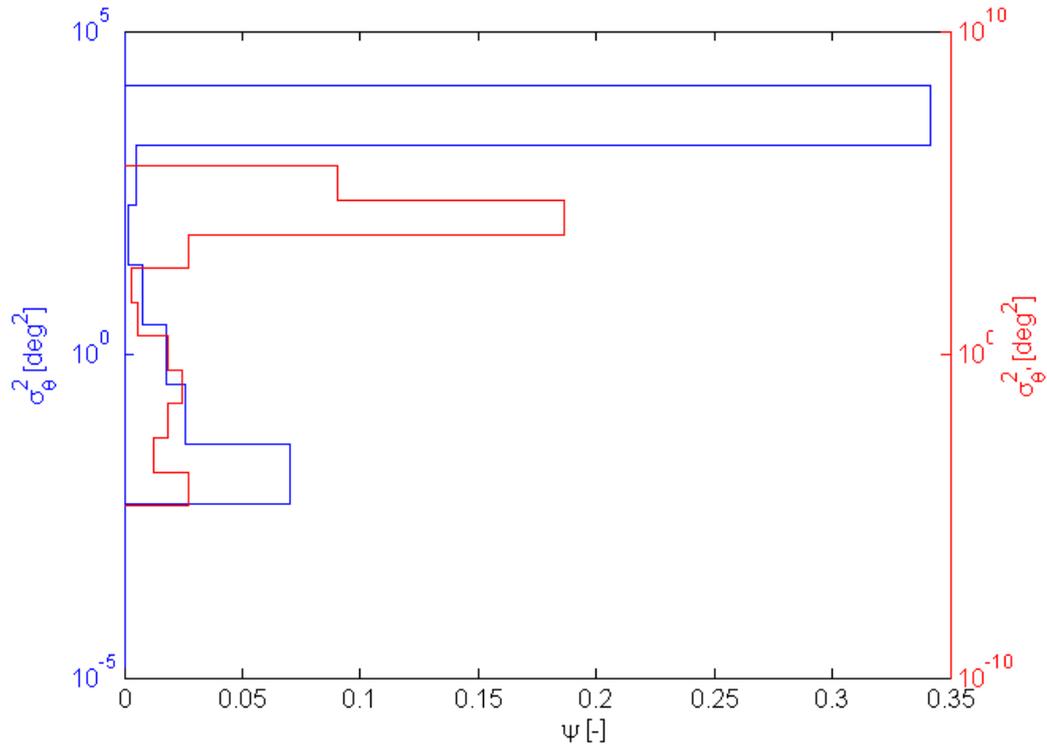
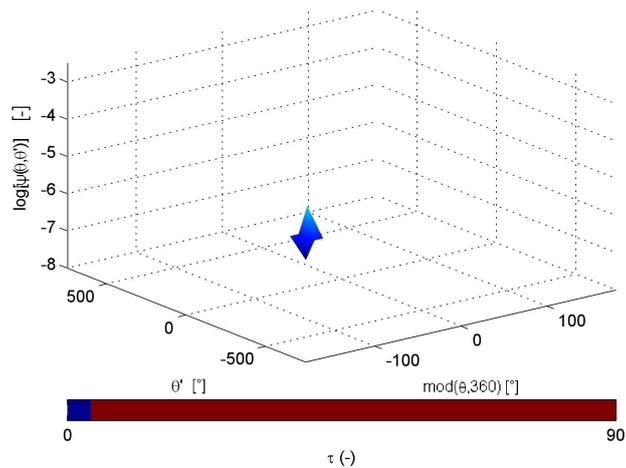


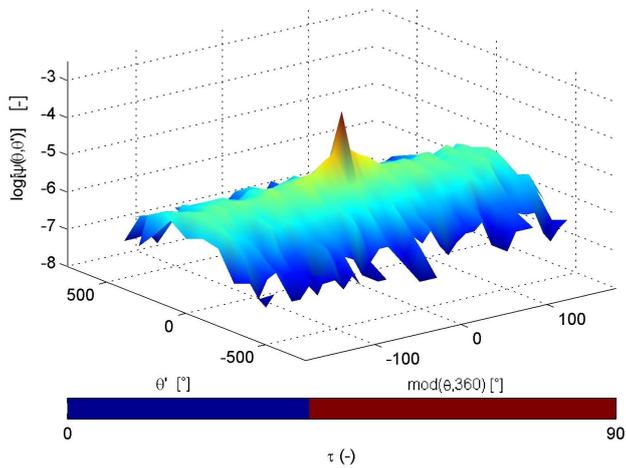
FIGURE 3.6.6 – Densité de probabilité du logarithme de l'énergie selon  $\theta$  et  $\theta'$  pour  $\beta = 0.01$  et  $I_u = 0.5$ .

La Figure 3.6.6 présente la densité de probabilité de l'énergie. L'énergie selon  $\theta$  prend globalement des valeurs plus faibles que l'énergie de  $\theta'$ . Ceci signifie que des oscillations rapides mais d'amplitude limitée sont observées.

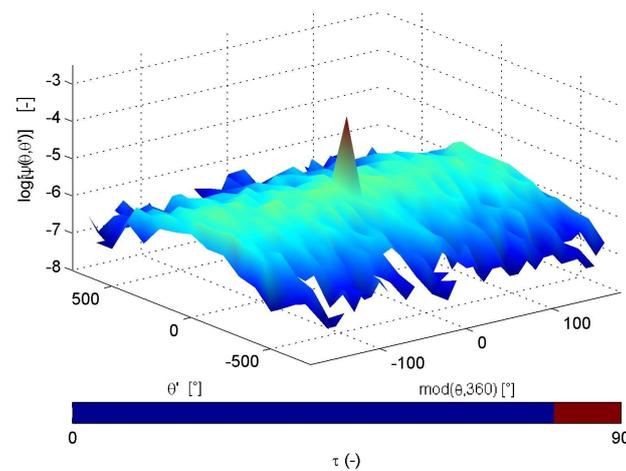
De même qu'il est possible de calculer la densité de probabilité de  $\theta$  ou  $\theta'$  au cours du temps, il est possible de calculer la densité de probabilité conjointe de  $\theta$  et  $\theta'$ . Celle-ci se représente dans le plan  $(\theta, \theta')$ . L'état stationnaire est atteint lorsque les variables caractéristiques d'un signal sont constantes au cours du temps. Nous observons ici les densités de probabilité individuelles de  $\theta$  et de  $\theta'$  et la densité de probabilité conjointe. À titre d'illustration, la Figure 3.6.7 présente la densité de probabilité en trois temps donnés.



(a)  $\tau = 0[-]$



(b)  $\tau = 40[-]$



(c)  $\tau = 80[-]$

FIGURE 3.6.7 – Logarithme de la densité de probabilité conjointe  $\theta - \theta'$  pour  $\beta = 0.01$  et  $I_u = 0.5$ .

En  $\tau = 0$ , on observe une impulsion de Dirac correspondant aux conditions initiales du mouvement. En effet, les position et vitesse angulaires initiales sont déterministes. Au cours du temps, on observe un étalement de la densité de probabilité conjointe dans le plan. Un pic est toujours présent à proximité de la position d'équilibre  $\theta = \theta' = 0$ . En effet, il arrive que la grue atteigne une vitesse nulle pour un angle de faible amplitude. A cette position, le frottement de la flèche avec la mâture peut suffire à contrer le couple lié au vent. En effet, celui-ci est faible étant donné la faible valeur de  $\theta$  et donc le maître-couple limité. On observe ainsi un pic lié à cette position d'équilibre au voisinage de  $\theta = 0$ . Notons que cette position d'équilibre peut être maintenue grâce au fait que le vent est unidirectionnel. En effet, dans le cas d'un champ de vitesse à deux dimensions, il existera toujours une composante de vent perpendiculaire à la grue pour la mettre en mouvement.

La probabilité de se trouver à proximité des faibles vitesses semble favorable alors qu'aucune zone préférentielle ne se profile pour la position angulaire.

Les mêmes résultats sont obtenus pour une intensité  $I_u = 1$ . Ceux-ci sont visibles aux Figures 3.6.8 à 3.6.11. Nous comparons ici les résultats obtenus pour les deux intensités de turbulence.

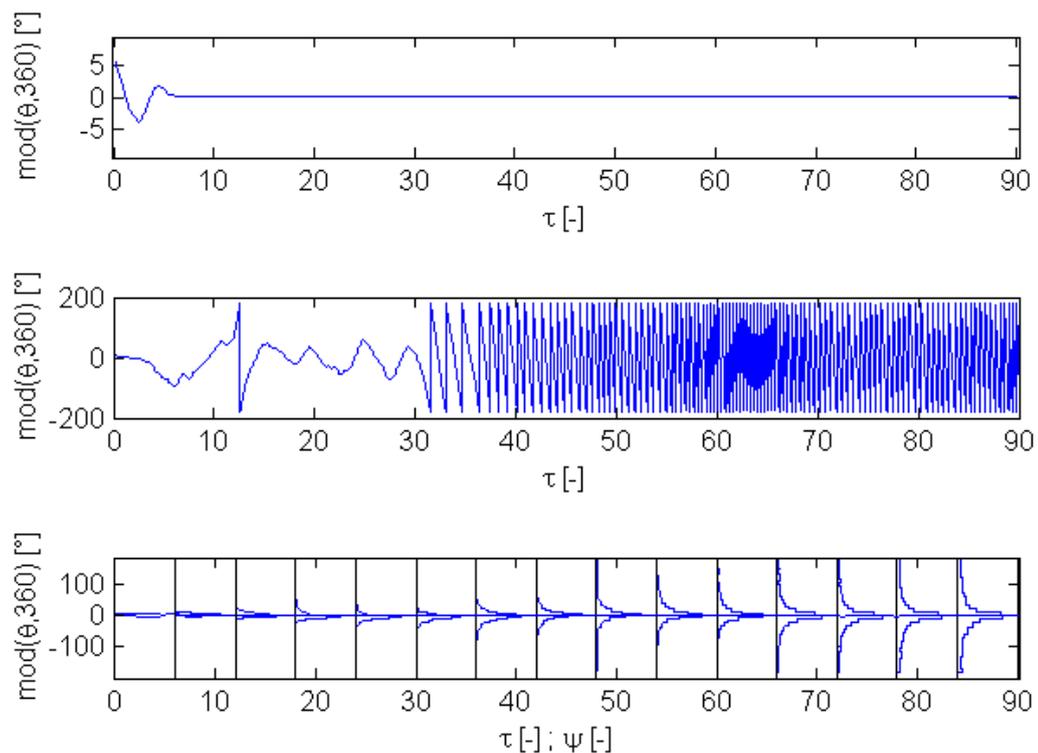


FIGURE 3.6.8 – Position angulaire (haut) et évolution de la densité de probabilité de  $\theta$  (bas) au cours du temps pour  $\beta = 0.01$  et  $I_u = 1$ .

À la Figure 3.6.8, nous observons que l'historgramme de la position angulaire est beaucoup plus étalé quand l'intensité de turbulence augmente, ce qui signifie qu'on a affaire à des oscillations de plus grande amplitude. Cette conclusion est en accord avec l'augmentation de l'intensité de turbulence. La même conclusion peut être tirée à la Figure 3.6.9 où l'on peut voir que la vitesse angulaire atteindra des valeurs extrêmes beaucoup plus élevées.

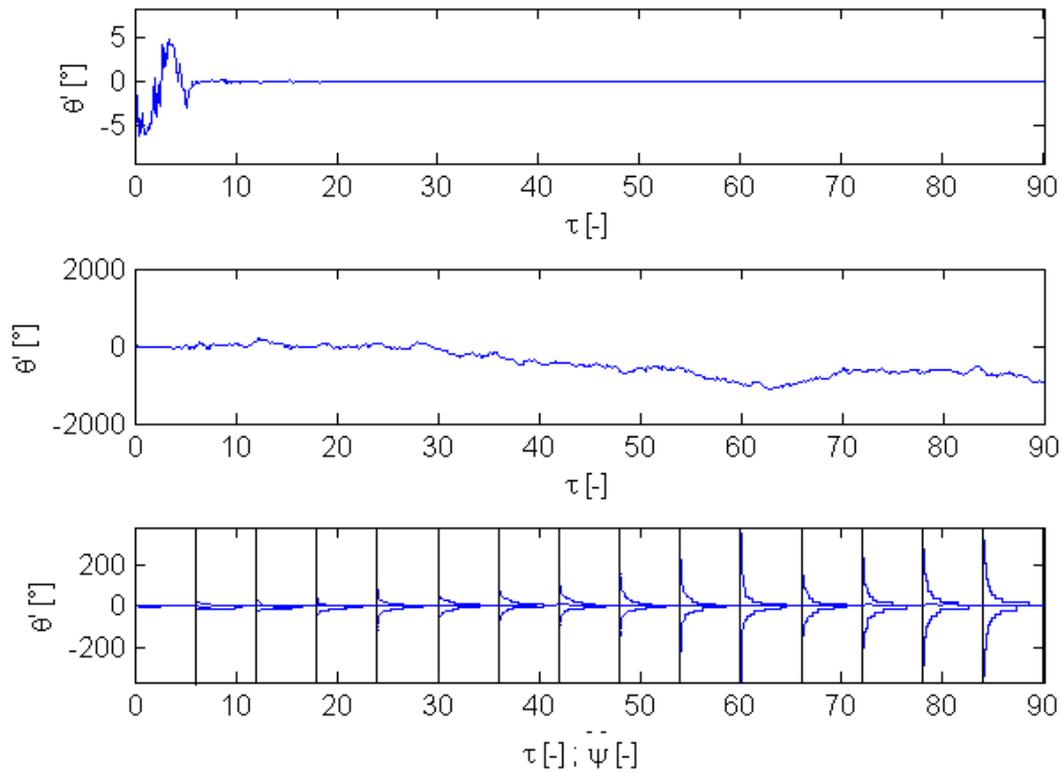


FIGURE 3.6.9 – Vitesse angulaire (haut) et évolution de la densité de probabilité de  $\theta'$  (bas) au cours du temps pour  $\beta = 0.01$  et  $I_u = 1$ .

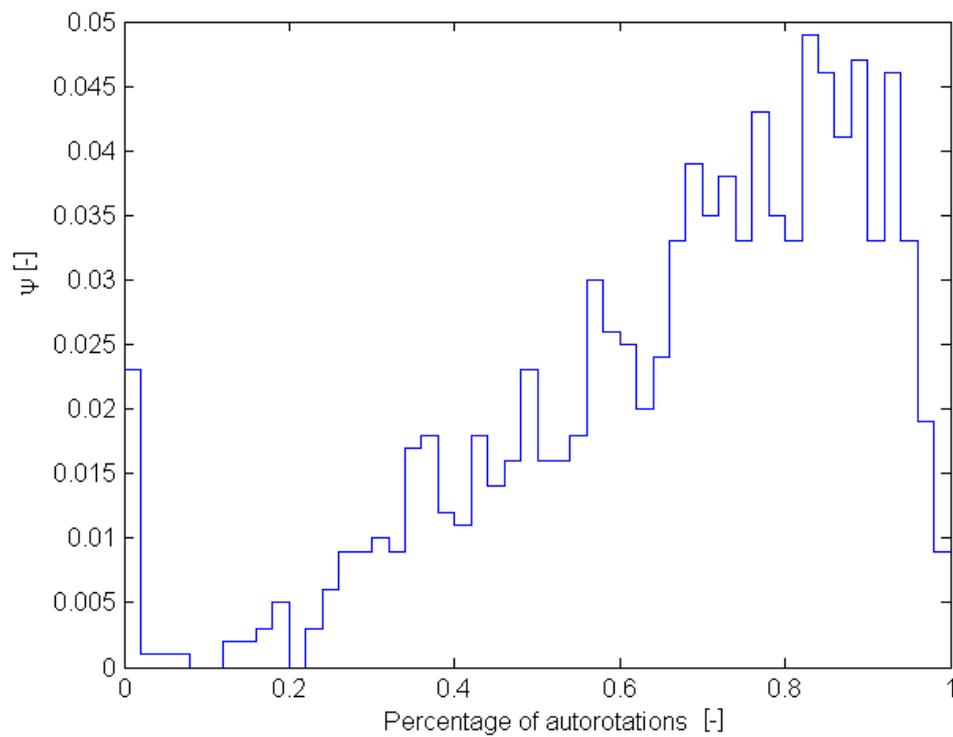


FIGURE 3.6.10 – Densité de probabilité du pourcentage de rotations pour  $\beta = 0.01$  et  $I_u = 1$ .

La Figure 3.6.10 montre que la densité de probabilité du pourcentage d'autorotations est fortement décalée vers les grands pourcentages, ce qui signifie que le pourcentage d'autorotations sera en moyenne plus élevé lorsque l'intensité de turbulence augmente. De plus, on observe une probabilité importante de n'avoir aucune rotation en régime permanent. Ce pic correspond à une flèche en équilibre dans une position proche de  $\theta = 0$ . Comme déjà expliqué plus tôt, le frottement permet à la grue de rester immobile dans cette position lorsque le vent est unidirectionnel.

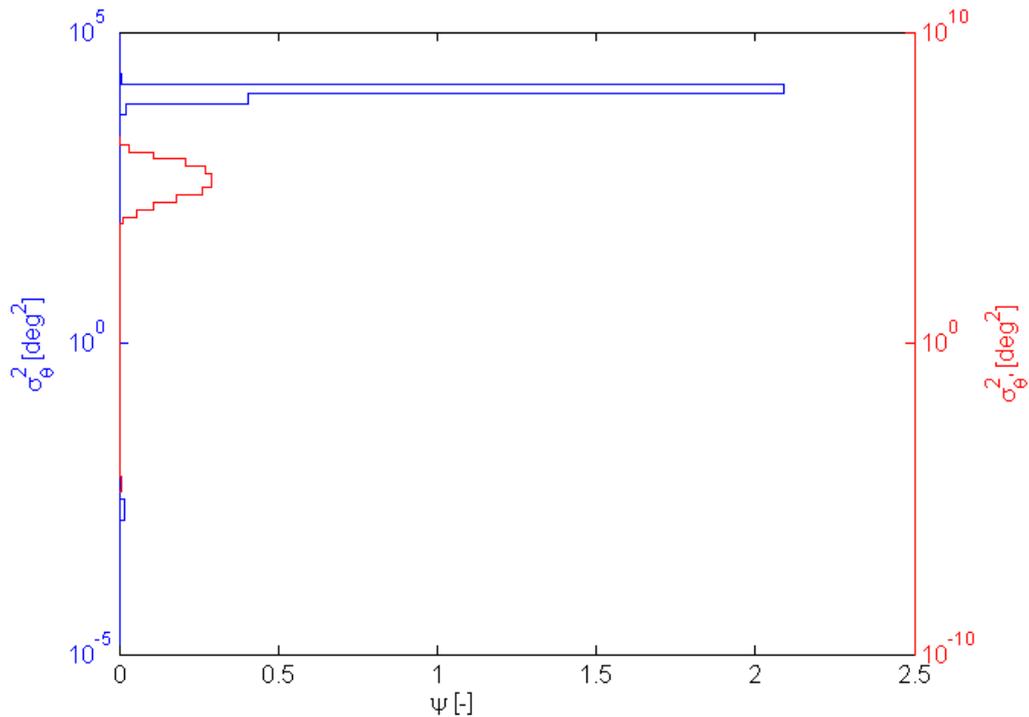
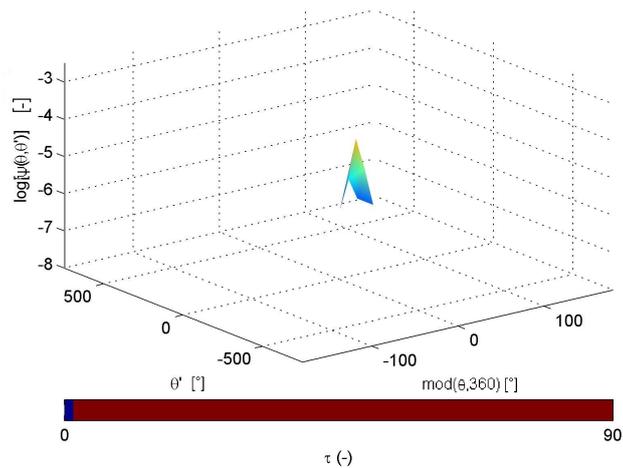


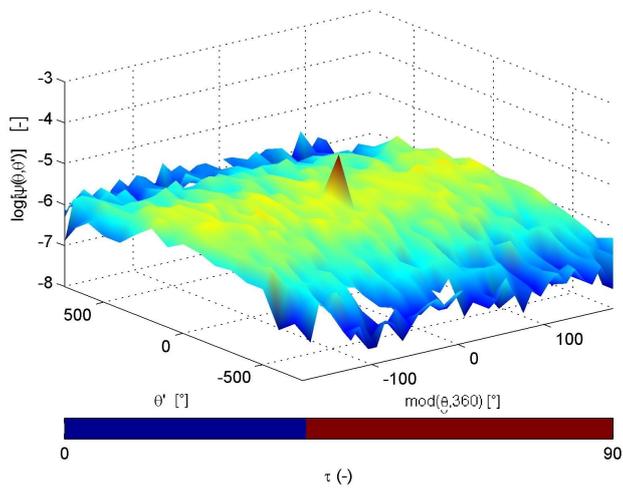
FIGURE 3.6.11 – Densité de probabilité du logarithme de l'énergie selon  $\theta$  et  $\theta'$  pour  $\beta = 0.01$  et  $I_u = 1$ .

Finalement, la Figure 3.6.11 montre que la vitesse angulaire présente une énergie plus élevée pour une intensité de turbulence plus importante. De plus, on observe également que l'énergie liée à la position angulaire est non symétrique. Cette observation se justifie par le fait que la position angulaire est une variable bornée. Par conséquent, sa variance l'est également.

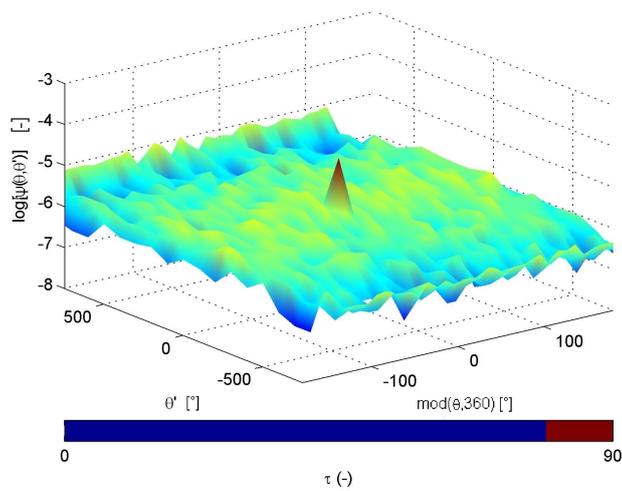
La Figure 3.6.12 présente la densité de probabilité conjointe  $\psi(\theta, \theta')$  pour une intensité de turbulence unitaire. Pour cette intensité de turbulence, la dispersion des résultats dans le plan  $(\theta, \theta')$  est plus importante, et par conséquent la densité de probabilité conjointe est plus étalée. Ceci revient à dire que la probabilité d'obtenir de grandes vitesses et positions angulaires augmente lorsque l'intensité de turbulence augmente.



(a)  $\tau = 0[-]$



(b)  $\tau = 40[-]$



(c)  $\tau = 80[-]$

FIGURE 3.6.12 – Logarithme de la densité de probabilité conjointe  $\theta - \theta'$  pour  $\beta = 0.01$  et  $I_u = 1$ .

### 3.6.2 Caractérisation du mouvement en fonction de l'intensité de turbulence

Dans cette seconde partie, nous observons l'évolution des caractéristiques (énergie, pourcentage de rotations,...) en fonction de l'intensité de turbulence  $I_u$ .

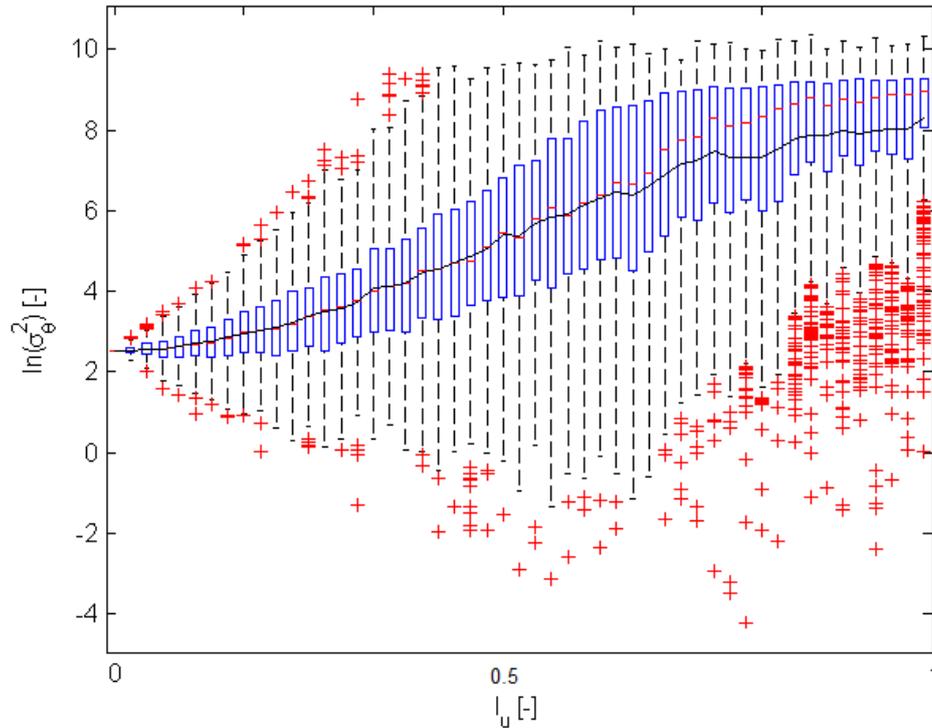


FIGURE 3.6.13 – Logarithme de l'énergie selon  $\theta$  en fonction de  $I_u$  pour  $\beta = 0.001$ .

La Figure 3.6.13 présente l'évolution de l'énergie selon  $\theta$  en fonction de l'intensité de turbulence  $I_u$ . Pour chaque intensité, les caractéristiques sont représentées sous la forme d'une boîte à moustaches. Le trait rouge représente la médiane des échantillons. La boîte bleue représente les limites du 25<sup>ème</sup> et 75<sup>ème</sup> percentile, c'est-à-dire les valeurs de  $\theta$  telles que respectivement 25% et 75% des échantillons se trouvent sous ces valeurs. Les moustaches en traits pointillés représentent la dispersion des valeurs, à l'exception des valeurs extrêmes qui, dans la théorie générale des statistiques, peuvent être considérées comme erronées. Celles-ci sont représentées par des croix rouges. La courbe en noir tracée par-dessus les boîtes à moustaches représente la moyenne des valeurs obtenues pour chaque intensité de turbulence.

Nous observons que, conformément à la signification de l'intensité de turbulence, l'énergie moyenne augmente lorsque l'intensité de turbulence augmente. De plus, l'augmentation est lente sur les faibles et grandes intensités alors qu'elle est plus rapide pour les intensités moyenne aux alentours de  $I_u = 0.5$ . Ceci correspond à l'apparition des autorotations qui entraînent une forte augmentation d'énergie. Une fois que les autorotations sont présentes, leur fréquence (occurrence par rapport aux cycles d'oscillations au sein d'un même mouvement, pour un même signal d'entrée) va augmenter avec l'intensité et entraîner une augmentation

plus lente de l'énergie. Les mêmes observations peuvent être faites pour l'énergie selon  $\theta'$  à la Figure 3.6.14.

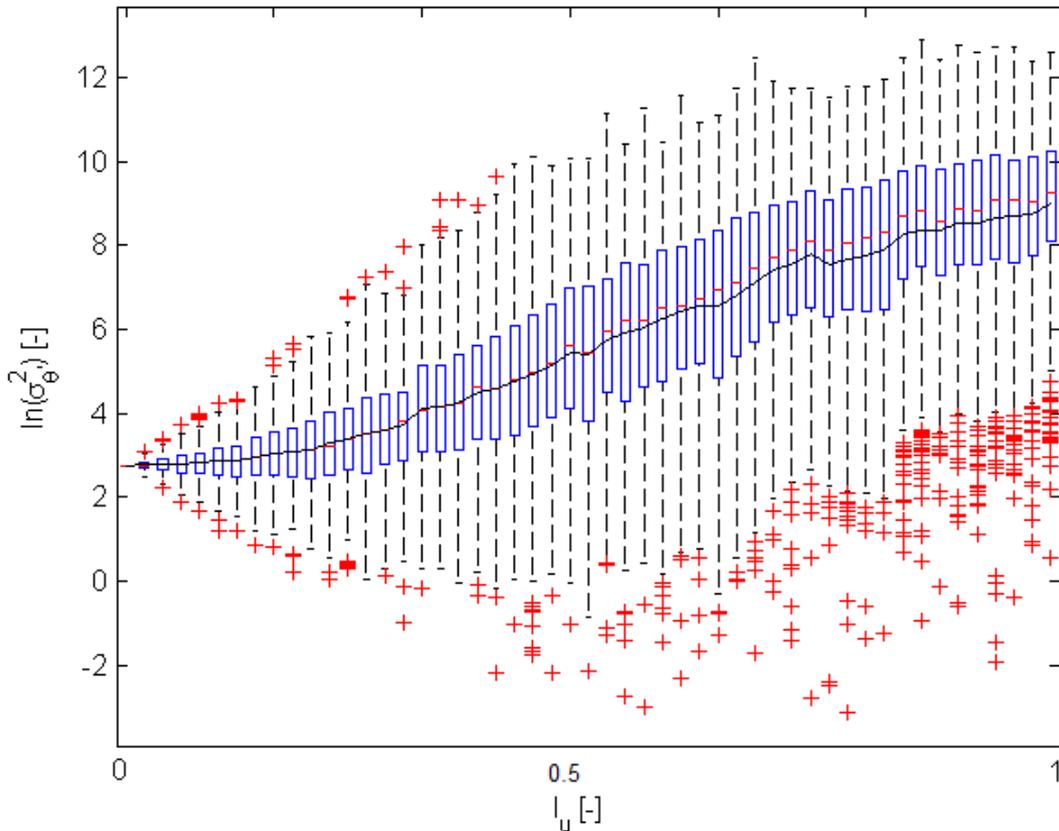


FIGURE 3.6.14 – Logarithme de l'énergie selon  $\theta'$  en fonction de  $I_u$  pour  $\beta = 0.001$ .

La Figure 3.6.15 présente les points des Figures 3.6.13 et 3.6.14 dans le plan  $(\log(\sigma_\theta^2 - \sigma_{\theta'}^2))$  et en fonction de l'intensité de turbulence. Il peut être observé que la corrélation entre les deux variables est non seulement très forte, mais encore que la droite calée sur les points est la droite  $\ln(\sigma_\theta^2) = \ln(\sigma_{\theta'}^2)$ . Le coefficient de corrélation vaut 0.54. Cependant, bien que la moyenne soit croissante avec l'intensité de turbulence sur les Figures 3.6.13 et 3.6.14, cette observation est moins marquée pour les échantillons individuellement. Ceci s'observe aux Figures 3.6.13 et 3.6.14 où la dispersion est importante et à la Figure 3.6.15 où l'ordre des couleurs par intensité de turbulence croissante n'est pas respecté. Finalement, bien que les points suivent la tendance  $\ln(\sigma_\theta^2) = \ln(\sigma_{\theta'}^2)$ , l'énergie de la position angulaire semble bornée alors que pour une vitesse angulaire croissante, le nombre de points tend naturellement vers zéro. Ceci est lié au fait que la position angulaire est une variable bornée entre  $-180^\circ$  et  $+180^\circ$  alors que la vitesse est une variable non-bornée.

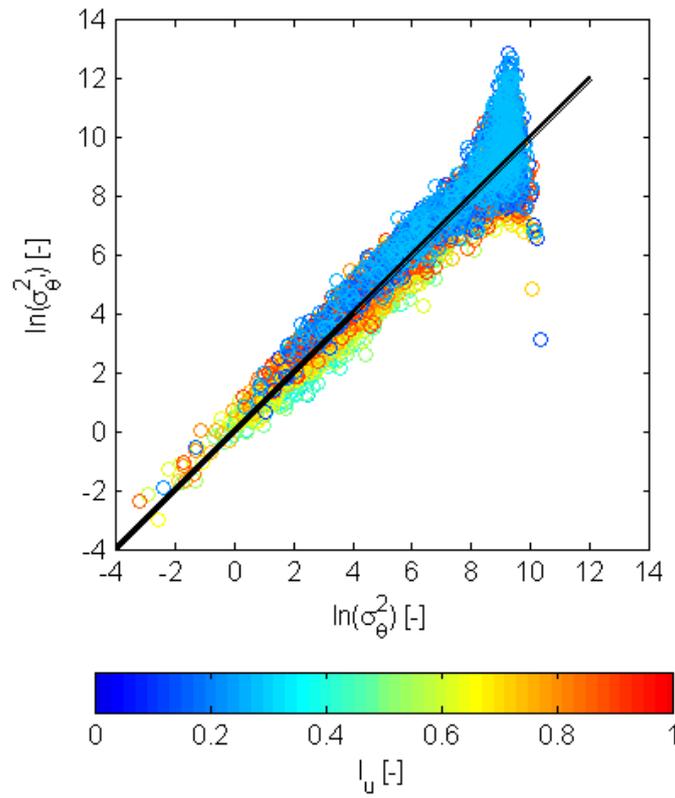


FIGURE 3.6.15 – Corrélation de  $\sigma_\theta^2$  et  $\sigma_\theta^2$  via le modèle simplifié.

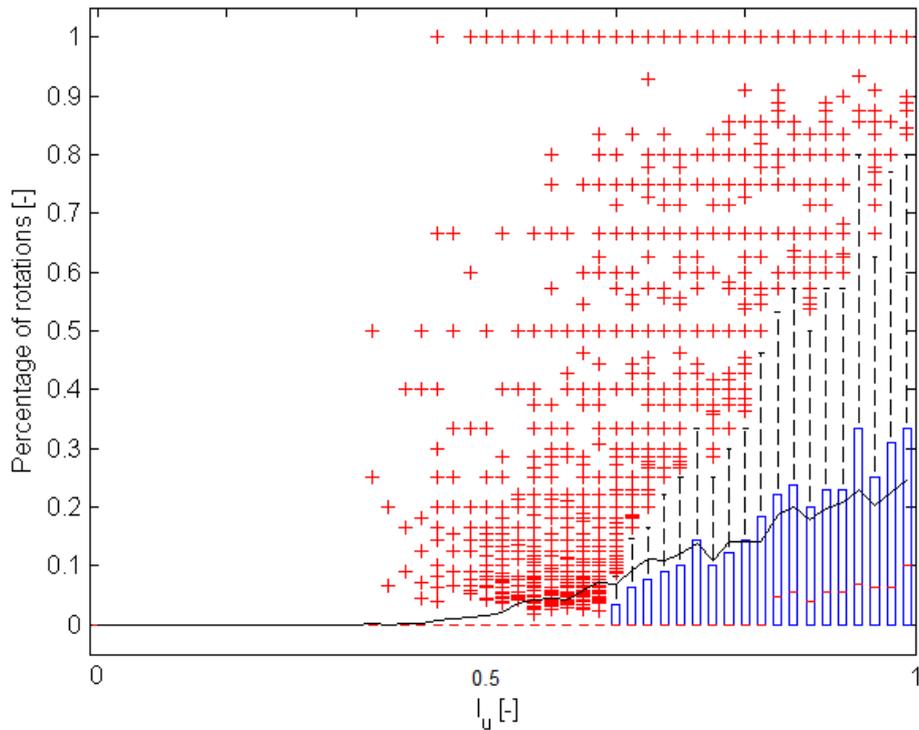


FIGURE 3.6.16 – Pourcentage d'autorotations en fonction de  $I_u$  pour  $\beta = 0.001$ .

La Figure 3.6.16 représente l'évolution du pourcentage de rotations en fonction de l'intensité de turbulence  $I_u$ . De nouveau, et conformément à notre intuition, nous observons que le pourcentage d'autorotations augmente avec l'intensité de turbulence. Pour de faibles intensités, aucune autorotation n'est observée. À partir de  $I_u = 0.4$ , le pourcentage d'autorotations augmente. Dès  $I_u = 0.45$ , il est possible de rencontrer un échantillon tel que le mouvement est purement auto-rotatif, c'est-à-dire qu'aucune oscillation n'est observée.

### 3.7 Conclusion

Le modèle simplifié est développé sous un nombre conséquent d'hypothèses dans le but d'appréhender le comportement de la grue de manière efficace et concise. L'amortissement aérodynamique est négligé et seule la vitesse fluctuante parallèle à la vitesse moyenne est prise en compte. De plus les termes de vitesse fluctuante au second ordre sont négligés. Finalement, le coefficient de pression  $C_{\perp}$  prend une forme simplifiée. La sollicitation de la grue se subdivise ainsi en une composante moyenne liée à la vitesse moyenne du vent et une composante fluctuante liée à la vitesse fluctuante. Les hypothèses ainsi posées permettent une analogie importante entre le mouvement de la flèche et celui du pendule paramétrique. D'une part, la sollicitation liée à la vitesse moyenne du vent est associée à la force gravitaire appliquée sur le pendule et d'autre part, la sollicitation liée à la composante fluctuante de la vitesse est associée à l'excitation verticale du support du pendule. Sur base de ces hypothèses, l'équation du mouvement est établie et adimensionnée. Au vu de son caractère discontinu, une routine de résolution particulière est implémentée en considérant l'équation comme continue par tronçon.

Sur base de la routine ainsi implémentée, deux cas sont étudiés en imposant deux formes différentes de la composante fluctuante de la vitesse du vent. Le premier cas considère une vitesse harmonique d'intensité et de période donnée. Ce cas théorique permet la mise en évidence des différents régimes dynamiques de la grue (oscillations de petite et grande amplitude et autorotations) et la caractérisation du mouvement dans un espace paramétrique constitué de l'amplitude et de la fréquence de la vitesse turbulente du vent. On observe ainsi la présence de lobes d'instabilité pour certaines fréquences de sollicitation et de zones de stabilité entre ces lobes pour de grandes intensités de turbulence où aucune autorotation n'a lieu. Ce cas se rapproche du pendule excité périodiquement par son support et la comparaison des résultats de la grue avec certains résultats de la littérature permettent la validation de la routine.

Le deuxième cas étudié modélise la vitesse fluctuante du vent par un bruit blanc. Ce cas constitue un premier contact avec la stochastique car le champ de vitesse est maintenant défini par sa densité spectrale de puissance. Il permet l'étude stochastique de la réponse du système par simulations de Monte-Carlo et l'influence de l'intensité de turbulence sur ceux-ci. Au vu de la décorrélation totale de la vitesse fluctuante au cours du temps, la dispersion des résultats reste importante.

## Chapitre 4

# Étude du modèle intermédiaire

Dans cette section, les hypothèses faites lors de l'étude du problème simplifié sont levées une à une. La forme de la turbulence du vent est cependant toujours imposée sous la forme d'un sinus et le problème reste donc déterministe. Dans un premier temps, chacune des hypothèses faites dans le modèle simplifié est levée et leur implication dans le modèle est étudiée. Ensuite, l'équation gouvernant le problème est déterminée avec la prise en compte de tous les nouveaux éléments liés à la levée des hypothèses. Finalement, le mouvement de la grue est étudié sous ces conditions et sous l'hypothèse d'une turbulence de vent sinusoïdale. Ce modèle, appelé *modèle intermédiaire*, permet d'évaluer l'importance de la levée des hypothèses tout en conservant une forme de turbulence du vent déterministe.

### 4.1 Implications de la levée des différentes hypothèses

Dans cette section, les hypothèses du problème simplifié sont parcourues une à une et l'implication de leur suspension dans le problème complet est décrite.

- (1) **La vitesse relative est prise sous sa forme complète, en prenant en compte la turbulence bidimensionnelle du vent, les termes de vitesse fluctuante au second ordre et la vitesse de la grue.**

La vitesse relative le long de la grue prend donc la forme

$$\mathbf{v}_{rel}(x, y, t) = \mathbf{v}_{vent}(x, y, t) - \mathbf{v}_{grue}(x, y, t) \quad (4.1.1)$$

$$\begin{aligned} &= (U + u(x, y, t); v(x, y, t)) \\ &\quad - \left( -\dot{\theta}(t)r(x, y, t) \sin(\theta(t)); \dot{\theta}r(x, y, t) \cos(\theta(t)) \right) \\ &= \left( U + u + \dot{\theta}r \sin(\theta); v - \dot{\theta}r \cos(\theta) \right), \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

où  $r(x, y, t)$  est la distance entre le point de la grue situé en  $(x, y)$  et le point fixe de la grue à l'instant  $t$ , soit l'abscisse dans les axes locaux liés à la grue.

Ceci a un impact non seulement sur la norme de la vitesse, mais également sur l'angle

d'attaque du vent, qui est l'angle entre la vitesse relative et la grue. En effet, dans le problème simplifié, la vitesse relative avait la direction de la vitesse moyenne et l'angle entre celle-ci et la grue se réduisait à la position angulaire  $\theta$ . L'angle entre la vitesse relative et la grue vaut désormais

$$\theta_{rel} = \theta - \frac{v_{rel,y}}{v_{rel,x}}. \quad (4.1.3)$$

Le nombre de termes dans le carré de la vitesse relative n'est plus limité au nombre de deux. On observe en effet des termes liés à la vitesse du vent (composantes moyenne et fluctuantes au premier et au second ordre), des termes liés à la vitesse de la grue, et des termes croisés. La vitesse et par extension la pression et le moment ne peuvent plus être écrits comme la somme d'une composante moyenne et une composante fluctuante et il est nécessaire de développer un nouveau formalisme.

**(2) Le champ de vitesse du vent est constant spatialement.**

Dans ce chapitre, le vent est toujours considéré comme uniforme dans l'espace et déterministe. Cette hypothèse fait l'objet du dernier chapitre où la stochasticité de la turbulence du vent est prise en compte ainsi que la cohérence spatiale entre deux points.

**(3) Le champ de vitesse du vent est bidirectionnel, ce qui signifie que la vitesse fluctuante possède une composante  $u$  parallèle et une composante  $v$  perpendiculaire à la vitesse moyenne du vent  $U$ .**

**(4) La dépendance du coefficient  $C_{\perp}$  avec l'angle relatif  $\theta_{rel}$  prend sa forme la plus générale :**

$$\begin{aligned} C_{\perp}(\theta_{rel}) &= C_l(\theta_{rel}) \cos(\theta_{rel}) - C_d(\theta_{rel}) \sin(\theta_{rel}) \\ &= -\tilde{C}_d \sin(\theta_{rel}) |\sin(\theta_{rel})| - C_{d,0} \sin(\theta_{rel}) \\ &\quad - \tilde{C}_l \sin(2\theta_{rel}) \cos(\theta_{rel}). \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Les paramètres  $\tilde{C}_d$ ,  $C_{d,0}$  et  $\tilde{C}_l$  utilisés dans l'ensemble de ce travail seront ceux décrits à la section 2.1 pour une grue de type *MD238*.

Ceci implique que la force générée par la vitesse moyenne du vent n'est plus de forme sinusoïdale et ne peut par conséquent plus être écrite comme

$$\bar{F}_{\perp} = \tilde{F}_{\perp} \sin(\theta).$$

où  $\tilde{F}_{\perp}$  est indépendante de la position angulaire  $\theta$ , et peut être utilisé pour la définition de la pulsation caractéristique  $\Omega^*$ .

On définit dès lors la force liée à la vitesse moyenne du vent, en l'absence de composantes

fluctuantes et d'amortissement aérodynamique :

$$\begin{aligned}
\overline{F}_\perp &= \int_{-l_1}^{l_2} \frac{1}{2} \rho_{air} C_\perp(\theta) U^2 b(r) dr \\
&= \frac{1}{2} \rho_{air} C_\perp(\theta) U^2 S \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} \rho_{air} C_\perp^* U^2 S}_{\tilde{F}_\perp} \frac{C_\perp(\theta)}{C_\perp^*}.
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

où  $C_\perp^*$  est un coefficient de référence de valeur arbitraire et constante.

De la même manière, on définit le moment lié à la vitesse moyenne du vent :

$$\begin{aligned}
\overline{M} &= \int_{-l_1}^{l_2} \frac{1}{2} \rho_{air} C_\perp(\theta) U^2 b(r) r dr \\
&= \overline{F}_\perp l_{\overline{F}} \\
&= \tilde{F}_\perp l_{\overline{F}} \frac{C_\perp(\theta)}{C_\perp^*}.
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

où  $l_{\overline{F}}$  est le bras de levier de la force  $\overline{F}_\perp$  et peut être calculé comme le centre de gravité de la grue (voir Figure 4.2.1).

$$\begin{aligned}
(b_1 l_1 + b_2 l_2) l_{\overline{F}} &= b_2 \frac{l_2^2}{2} - b_1 \frac{l_1^2}{2} \\
&\downarrow \\
Sl_{\overline{F}} &= b_2 \frac{l_2^2}{2} - b_1 \frac{l_1^2}{2}.
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Ainsi, la nouvelle force de référence  $\tilde{F}_\perp$  est indépendante de la position angulaire  $\theta$  et peut être utilisée pour la définition de la pulsation caractéristique  $\Omega^*$ .

## 4.2 Analyse dimensionnelle du problème après suspension des hypothèses

De manière similaire au cas du problème simplifié, l'équation gouvernant le système est transformée en une forme adimensionnelle régie par un nombre minimum de paramètres

adimensionnels également. Pour ce faire, on reprend de l'équation de base

$$\begin{aligned}
ml^2\ddot{\theta} + M_f \text{sign}(\dot{\theta}) + M_{tot} &= 0 \\
\frac{ml^2}{\tilde{F}_\perp l_{\tilde{F}}} \ddot{\theta} + \frac{M_f}{\tilde{F}_\perp l_{\tilde{F}}} \text{sign}(\dot{\theta}) + \frac{\int_{-l_1}^{l_2} \frac{1}{2} \rho_{air} C_\perp(\theta_{rel}) \|\mathbf{v}_{rel}\|^2 b(r) dr}{\tilde{F}_\perp l_{\tilde{F}}} &= 0 \\
\frac{ml^2}{\tilde{F}_\perp l_{\tilde{F}}} \ddot{\theta} + \frac{M_f}{\tilde{F}_\perp l_{\tilde{F}}} \text{sign}(\dot{\theta}) + \frac{\int_{-l_1}^{l_2} \frac{1}{2} \rho_{air} C_\perp(\theta_{rel}) \|\mathbf{v}_{rel}\|^2 b(r) r dr}{\frac{1}{2} \rho_{air} C_\perp^* U^2 S l_{\tilde{F}}} &= 0 \\
\frac{ml^2}{\tilde{F}_\perp l_{\tilde{F}}} \ddot{\theta} + \frac{M_f}{\tilde{F}_\perp l_{\tilde{F}}} \text{sign}(\dot{\theta}) + \int_{-l_1}^{l_2} \frac{C_\perp(\theta_{rel})}{C_\perp^*} \frac{\|\mathbf{v}_{rel}/U\|^2 b(r) r dr}{S l_{\tilde{F}}} &= 0 \\
\frac{ml^2}{\tilde{F}_\perp l_{\tilde{F}}} \ddot{\theta} + \frac{M_f}{\tilde{F}_\perp l_{\tilde{F}}} \text{sign}(\dot{\theta}) + \int_{-l_1}^{l_2} \frac{C_\perp(\theta_{rel})}{C_\perp^*} \frac{\|\mathbf{v}_{rel}/U\|^2 b(r) r dr}{b_2 \frac{l_2^2}{2} - b_1 \frac{l_1^2}{2}} &= 0. \tag{4.2.1}
\end{aligned}$$

De manière à rendre l'équation adimensionnelle, différents paramètres sont définis.

$$\Omega^* = \sqrt{\frac{\tilde{F}_\perp l_{\tilde{F}}}{ml^2}}, \quad T^* = \frac{1}{\Omega^*}, \quad \alpha = \frac{M_{tot}}{\tilde{F}_\perp l_{\tilde{F}}}, \quad \beta = \frac{M_f}{\tilde{F}_\perp l_{\tilde{F}}}. \tag{4.2.2}$$

Suite au choix de ces paramètres, les variables temporelle  $t$  et fréquentielle  $\omega$  sont remplacées par les variables adimensionnelles de manière identique au problème simplifié

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{t}{T^*} = \Omega^* t, \\
\kappa &= \frac{\omega}{\Omega^*} \tag{4.2.3}
\end{aligned}$$

De manière à ce que  $\tilde{F}_\perp$  soit le plus proche possible de  $F_\perp$  et que  $\Omega^*$  ait une relation directe avec la fréquence propre du système, la valeur de  $C_\perp^*$  est choisie de manière cohérente avec  $C_\perp(\theta)$ . Au vu de la Figure 2.1.4, on choisit  $C_\perp^* = \tilde{C}_d + C_{d,0}$ . Ainsi, en première approximation, seule l'influence de l'angle par le biais des *sinus* n'est pas prise en compte. Ceux-ci sont de moyenne nulle et d'amplitude maximale unitaire. En choisissant cette valeur de  $C_\perp^*$ , on espère retrouver un comportement fréquentiel particulier pour  $\omega = \Omega^*$ , ou  $\kappa = 1$ .

L'équation (4.2.1) peut donc prendre la forme

$$\begin{aligned}
\frac{\ddot{\theta}}{\Omega^{*2}} + \beta \text{sign}(\dot{\theta}) + \alpha &= 0 \\
\Downarrow \\
\theta'' + \beta \text{sign}(\theta') + \alpha &= 0 \tag{4.2.4}
\end{aligned}$$

Une grande partie de la complexité du problème réside dans le paramètre  $\alpha$ . Il est donc jugé utile de le développer plus en détail.

Pour ce faire, les paramètres géométriques de la grue illustrés à la Figure 4.2.1 sont adimensionnalisés. La flèche est définie comme le côté de plus grande longueur et la contreflèche celui de plus petite longueur, de sorte que  $l_2 \geq l_1$ . Lors du passage en adimensionnel, il est tenu compte du fait que la longueur  $l_1$  peut prendre une valeur nulle, alors que la longueur

$l_2$  est toujours positive. De manière à observer une dégénération du problème en cas de grue sans contreflèche ( $l_1 = 0$ ), les longueurs seront rapportées à la longueur de la flèche.

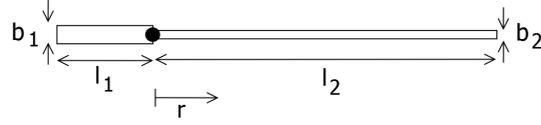


FIGURE 4.2.1 – Schéma de la géométrie de la grue.

$$m = \frac{l_1}{l_2} \leq 1 ; n = \frac{b_1}{b_2}; \quad (4.2.5)$$

De plus, de manière à rendre l'intégrale adimensionnelle, le changement de variable suivant est effectué :

$$\xi = \frac{r}{l_2} \quad (4.2.6)$$

Ainsi, le paramètre  $\alpha$  peut être exprimé par

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_{-l_1}^{l_2} \frac{C_{\perp}(\theta_{rel})}{C_{\perp}^*} \|\mathbf{v}_{rel}/U\|^2 b(r) r dr \\ &= \frac{\int_{-l_1}^0 C_{\perp}(\theta_{rel}) \|\mathbf{v}_{rel}/U\|^2 b_1 r dr + \int_0^{l_2} C_{\perp}(\theta_{rel}) \|\mathbf{v}_{rel}/U\|^2 b_2 r dr}{C_{\perp}^* \left( b_2 \frac{l_2^2}{2} - b_1 \frac{l_1^2}{2} \right)} \\ &= \frac{b_1 l_2^2 \int_{-m}^0 C_{\perp}(\theta_{rel}) \|\mathbf{v}_{rel}/U\|^2 \xi d\xi + b_2 l_2^2 \int_0^1 C_{\perp}(\theta_{rel}) \|\mathbf{v}_{rel}/U\|^2 \xi d\xi}{C_{\perp}^* \left( b_2 \frac{l_2^2}{2} - b_1 \frac{l_1^2}{2} \right)} \\ &= \frac{2}{C_{\perp}^* (1 - m^2 n)} \left[ n \int_{-m}^0 C_{\perp}(\theta_{rel}) \|\mathbf{v}_{rel}/U\|^2 \xi d\xi + \int_0^1 C_{\perp}(\theta_{rel}) \|\mathbf{v}_{rel}/U\|^2 \xi d\xi \right], \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

où la norme de la vitesse adimensionnelle  $\|\mathbf{v}_{rel}/U\|^2$  prend la forme

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\mathbf{v}_{rel}}{U} \right\|^2 &= \left\| \left( 1 + \frac{u}{U} + \frac{\dot{\theta} r \sin(\theta)}{U}; \frac{v}{U} - \frac{\dot{\theta} r \cos(\theta)}{U} \right) \right\|^2 \\ &= \left( 1 + \frac{u}{U} + \frac{\dot{\theta} r \sin(\theta)}{U} \right)^2 + \left( \frac{v}{U} - \frac{\dot{\theta} r \cos(\theta)}{U} \right)^2 \\ &= \left( 1 + \frac{u}{U} + \frac{2\pi\Omega^* l_2}{2\pi U} \theta' \xi \sin(\theta) \right)^2 + \left( \frac{v}{U} - \frac{2\pi\Omega^* l_2}{2\pi U} \theta' \xi \cos(\theta) \right)^2 \\ &= \left( 1 + \frac{u}{U} + \frac{2\pi\Omega^*}{\Omega_{l_2}} \theta' \xi \sin(\theta) \right)^2 + \left( \frac{v}{U} - \frac{2\pi\Omega^*}{\Omega_{l_2}} \theta' \xi \cos(\theta) \right)^2 \\ &= \left( 1 + \frac{u}{U} + 2\pi\gamma\theta' \xi \sin(\theta) \right)^2 + \left( \frac{v}{U} - 2\pi\gamma\theta' \xi \cos(\theta) \right)^2. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

On observe l'apparition d'une pulsation caractéristique

$$\Omega_{l_2} = \frac{2\pi U}{l_2}, \quad (4.2.9)$$

comprise dans un nouveau paramètre adimensionnel

$$\gamma = \frac{\Omega^*}{\Omega_{l_2}}. \quad (4.2.10)$$

La pulsation  $\Omega_{l_2}$  caractérise le rapport entre la vitesse moyenne du vent et la longueur de la flèche, et est de l'ordre de 4 si la vitesse est de l'ordre de  $20m/s$  et la longueur de la flèche de l'ordre de  $30m$ . La pulsation de référence  $\Omega^*$  est de l'ordre de  $0.05rad/s$  de sorte que le paramètre  $\gamma$  est de l'ordre du centième.

Pour le modèle intermédiaire, la vitesse turbulente prend une forme sinusoïdale, comme dans le modèle simplifié :

$$\begin{aligned} u &= A \sin(\omega t) \\ &\Downarrow \\ \frac{u}{U} &= \sqrt{2} I_u \sin(\kappa \tau) \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Il en est de même pour la turbulence perpendiculaire à la direction moyenne du vent :

$$\frac{v}{U} = \sqrt{2} I_v \sin(\kappa \tau) \quad (4.2.12)$$

Notons que cette hypothèse entraîne une cohérence parfaite entre les deux composantes de la turbulence puisque les deux s'annulent et atteignent leur valeur maximale simultanément.

### 4.3 Étude du mouvement de la grue pour un ensemble de paramètres fixés

Cette section permet une évaluation intermédiaire de la levée des différentes hypothèses en déterministe. Les paramètres du problème sont donc fixés et leur influence sera étudiée plus en détail dans la dernière partie à l'aide du modèle complet. Les paramètres sont donc les suivants :

$$m = 0.3; n = 3.33; \beta = 0.01; \gamma = 0.01;$$

Seuls les paramètres liés à la turbulence  $\kappa$  et  $I_u$  sont variables dans cette section.

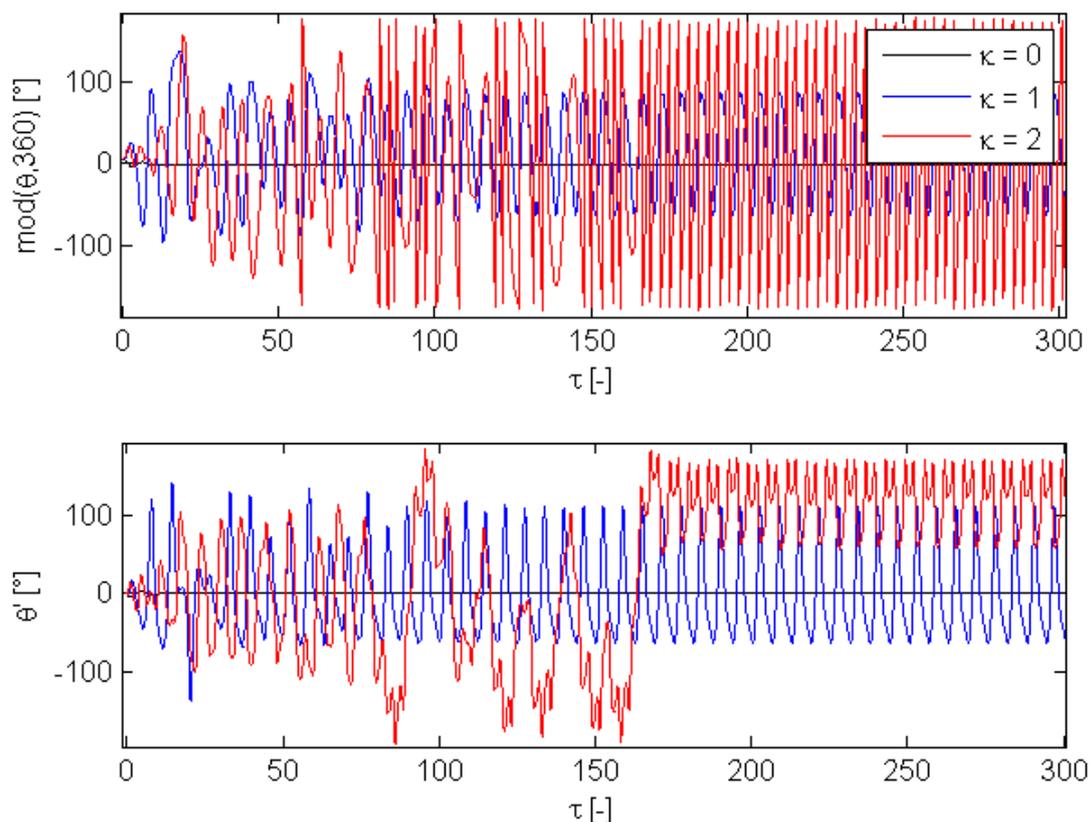


FIGURE 4.3.1 – Évolution de la position et de la vitesse angulaire au cours du temps pour  $I_u = 0.4$  et trois valeurs de  $\kappa$  différentes via le modèle intermédiaire.

La Figure 4.3.1 présente l'évolution de la position et de la vitesse angulaires au cours du temps pour trois fréquences de sollicitation différentes.

Pour une fréquence nulle, c'est-à-dire une vitesse turbulente constante dans les deux directions, et pour une intensité de turbulence selon la direction moyenne de 0.6, la grue s'aligne avec la direction moyenne du vent et y reste au repos ( $\theta = \theta' = 0$ ). Ceci signifie que le moment généré par la turbulence du vent perpendiculaire à la direction moyenne  $v$ , qui dans cette situation est également perpendiculaire à la grue et est la principale génératrice de moment, ne suffit pas à vaincre le couple de frottement sec à l'interface grue-mâture et à faire sortir la flèche de sa position d'équilibre.

Lorsque la fréquence de sollicitation  $\kappa$  est unitaire, la flèche oscille autour de sa position d'équilibre. Aucune autorotation n'est observée pour cette intensité de turbulence. Une fois que les position et vitesse angulaires ont atteint l'état stationnaire, la période d'oscillation peut être calculée et on trouve pour la courbe en bleu une période  $\tau = 6.21 = 0.988 \times 2\pi \simeq 2\pi$ , ce qui entraîne une pulsation  $\kappa = \frac{2\pi}{\tau} \simeq 1$  et donc un mouvement dont la fréquence est très proche de la fréquence de référence du système  $\Omega^*$ . Nous observons ici que la volonté de choisir une pulsation de référence cohérente avec la pulsation propre (variable avec  $\theta$ ) du système a porté ses fruits puisque la pulsation de la réponse est constante et très proche de la

pulsation de référence. La légère différence observée est due à la complexité du système, soit la turbulence bidimensionnelle, la complexité du facteur  $C_{\perp}$ , la prise en compte des termes de vitesse fluctuante au second ordre et l'amortissement aérodynamique.

Lorsque la fréquence de sollicitation vaut le double de la fréquence propre du système (en rouge), la grue entre en autorotation pure. On observe alors une période  $\tau = 12.45 = 0.99 \times 4\pi \simeq 4\pi$  de sorte que la pulsation de la réponse vaut  $\kappa = \frac{2\pi}{\tau} \simeq \frac{1}{2}$ . Nous observons de nouveau un comportement cohérent avec la pulsation de référence. Notons que la pulsation de la sollicitation est doublée et que celle de la réponse est diminuée de moitié. Il peut également être observé qu'une période de la réponse correspond à deux tours de la flèche : un à grande vitesse et un à plus faible vitesse, tous deux de durée  $2\pi$ .

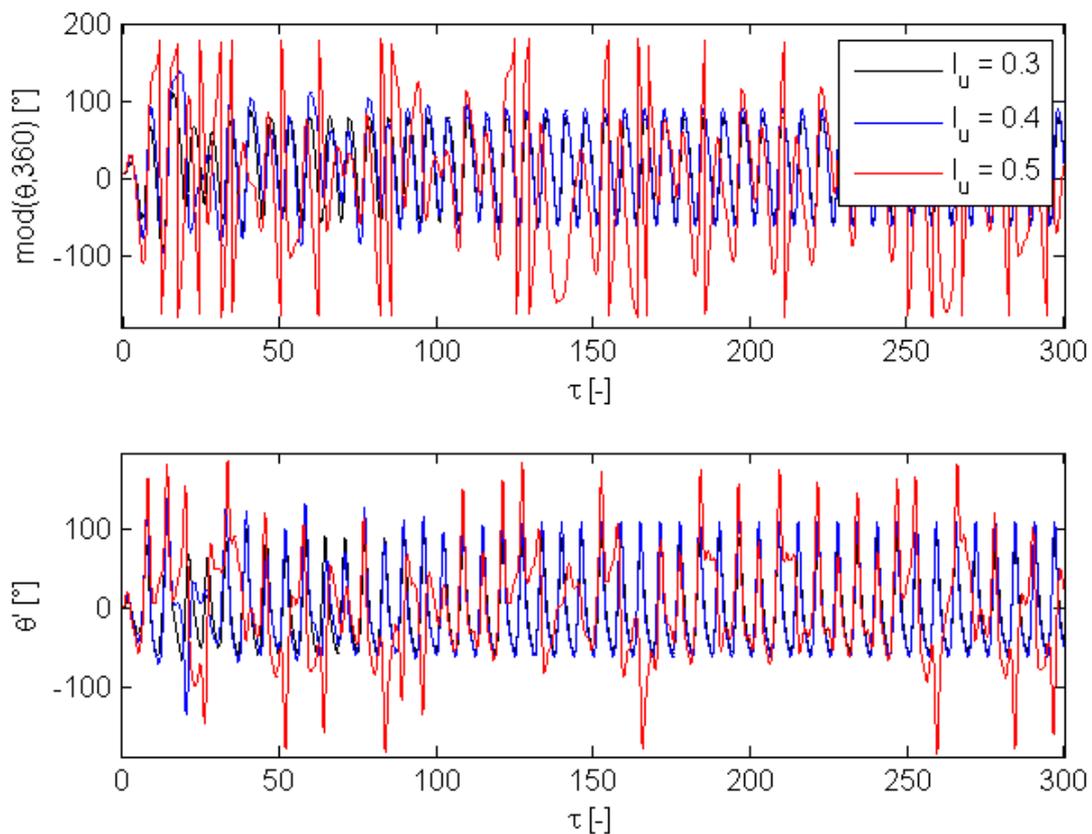


FIGURE 4.3.2 – Évolution de la position et de la vitesse angulaire au cours du temps pour  $\kappa = 1$  et trois valeurs de  $I_u$  différentes via le modèle intermédiaire.

La Figure 4.3.2 présente l'évolution de la position et la vitesse angulaires pour une fréquence de sollicitation  $\kappa = 1$  et trois intensités de turbulence différentes. Les deux premières intensités de turbulence  $I_u = 0.3$  et  $I_u = 0.4$  fournissent un mouvement oscillatoire sans autorotations. Une intensité de 0.5 donne lieu à un mélange d'autorotations et d'oscillations. Les énergies liées à la position et la vitesse angulaires sont toutes les deux croissantes avec l'intensité de turbulence. Les valeurs de ces énergies sont fournies à la Table 4.3.1.

$I_u$ [-]	0.4	0.6	0.8
$E_\theta$ [-]	2522.8	3160.8	6641.8
$E_{\theta'}$ [-]	2397.0	3112.2	4174.1

TABLEAU 4.3.1 – Énergies liées à la position et la vitesse angulaires en fonction de l'intensité de turbulence

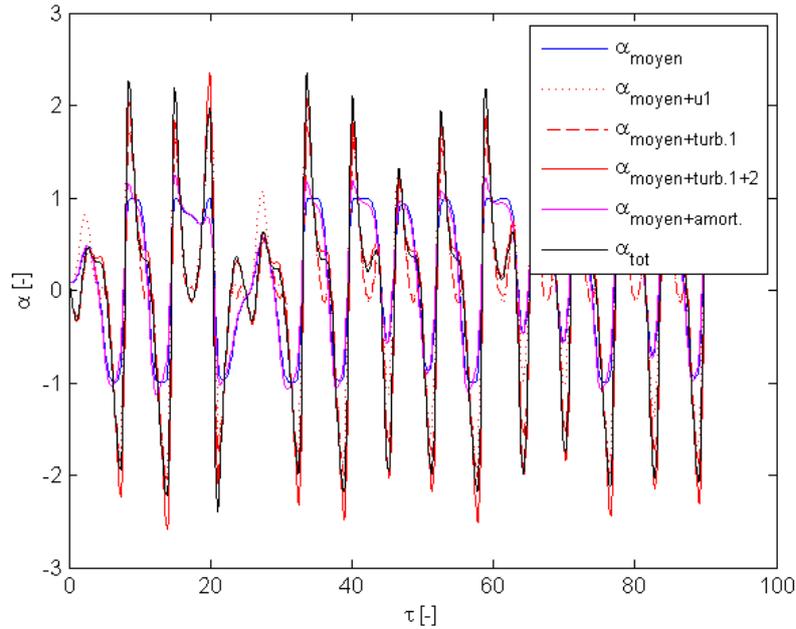


FIGURE 4.3.3 – Moments sous les différentes hypothèses pour les paramètres de référence et  $I_u = 0.6$ .

La Figure 4.3.3 présente différents moments au cours du temps calculés en levant successivement chacune des hypothèses faites dans le modèle simplifié de manière à observer leur influence. Selon le cas considéré, on prend en compte ou non la composante fluctuante du vent dans une ou deux directions, les termes de fluctuations au premier ordre ou au second ordre, l'amortissement aérodynamique, ou l'ensemble de ces effets.

Notons tout d'abord que chaque moment est calculé en un instant donné sur base des position et vitesse angulaires fournies par la résolution du mouvement prenant en compte le moment total, c'est-à-dire le plus précis de tous. On procède donc à une résolution du problème complet, et en chaque instant on compare les moments calculés sur base du  $\theta$  et  $\theta'$  en cet instant selon les différentes hypothèses. Les moments présentés ci-dessous sont donc utiles pour les comparer entre eux mais ne sont pas pertinents pour une étude du mouvement. Les moments calculés sont les suivants :

- $\alpha_{moyen}$  :  
Prise en compte de la vitesse moyenne du vent uniquement. Les composantes fluctuantes du vent et l'amortissement aérodynamique sont négligés.
- $\alpha_{moyen+u1}$  :

Prise en compte de la vitesse moyenne du vent et des termes au premier ordre de la composante fluctuante de la vitesse dans la direction moyenne  $u$ . Les termes de vitesse fluctuante  $u$  au second ordre, les termes de vitesse fluctuante perpendiculaire à la vitesse moyenne  $v$  ainsi que l'amortissement aérodynamique sont négligés.

- $\alpha_{moyen+turb.1}$  :  
Prise en compte de la vitesse moyenne du vent et des termes au premier ordre des composantes fluctuantes de la vitesse du vent  $u$  et  $v$ . Les termes de vitesse fluctuante au second ordre ainsi que l'amortissement aérodynamique sont négligés.
- $\alpha_{moyen+turb.1+2}$  :  
Prise en compte de la vitesse moyenne du vent et de tous les termes des composantes fluctuantes de la vitesse du vent  $u$  et  $v$  (premier et second ordre). L'amortissement aérodynamique est négligé.
- $\alpha_{moyen+amort.}$  :  
Prise en compte de la vitesse moyenne du vent et de l'amortissement aérodynamique. Les composantes fluctuantes de la vitesse du vent sont négligées.
- $\alpha_{tot}$  :  
Tous les phénomènes sont pris en compte : la vitesse moyenne du vent, les deux composantes fluctuantes du vent au premier et au second ordre, ainsi que l'amortissement aérodynamique.

Ces informations sont synthétisées au Tableau 4.3.2.

Éléments pris en compte	U	$u$		$v$		amortissement aérodyn.
		1 <sup>er</sup> ordre	2 <sup>nd</sup> ordre	1 <sup>er</sup> ordre	2 <sup>nd</sup> ordre	
$\alpha_{moyen}$	X					
$\alpha_{moyen+u1}$	X	X				
$\alpha_{moyen+turb.1}$	X	X		X		
$\alpha_{moyen+turb.1+2}$	X	X	X	X	X	
$\alpha_{moyen+amort.}$	X					X
$\alpha_{tot}$	X	X	X	X	X	X

TABLEAU 4.3.2 – Éléments pris en compte dans chacun des moments adimensionnels.

Dans le but d'améliorer la lisibilité du graphe, seul un tronçon plus court est observé, à la Figure 4.3.4.

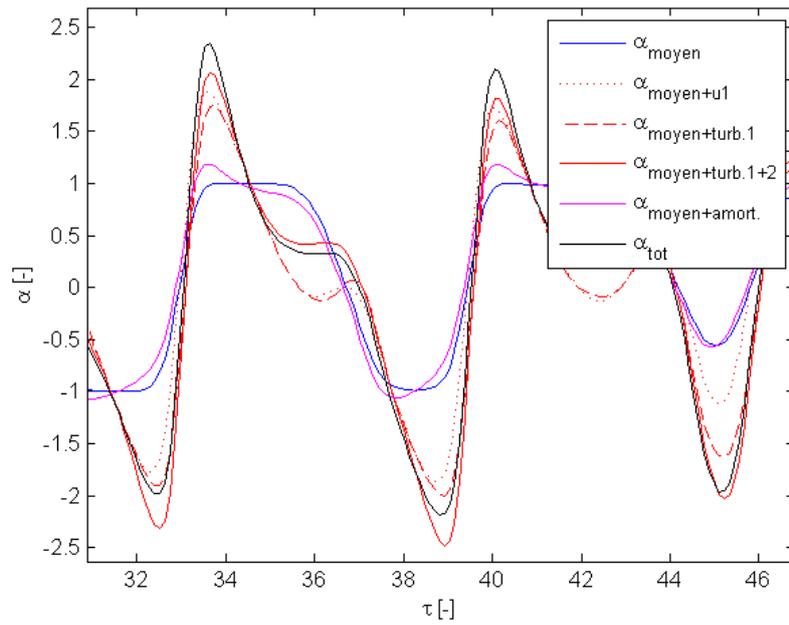


FIGURE 4.3.4 – Moments sous les différentes hypothèses pour les paramètres de référence pour  $I_u = 0.6$ .

Tout d'abord, il est évident que la prise en compte du vent moyen uniquement (en bleu) ne suffit pas du tout à représenter correctement le phénomène complet (en noir). L'amélioration apportée par les effets du premier ordre de la composante turbulente  $u$  (en traits rouge pointillés) sont significatifs. C'est également le cas des termes du premier ordre liés à la composante turbulente  $v$  (en traits rouge discontinus). Les effets du second ordre ainsi que l'amortissement aérodynamique apportent une précision supplémentaire de moindre importance.

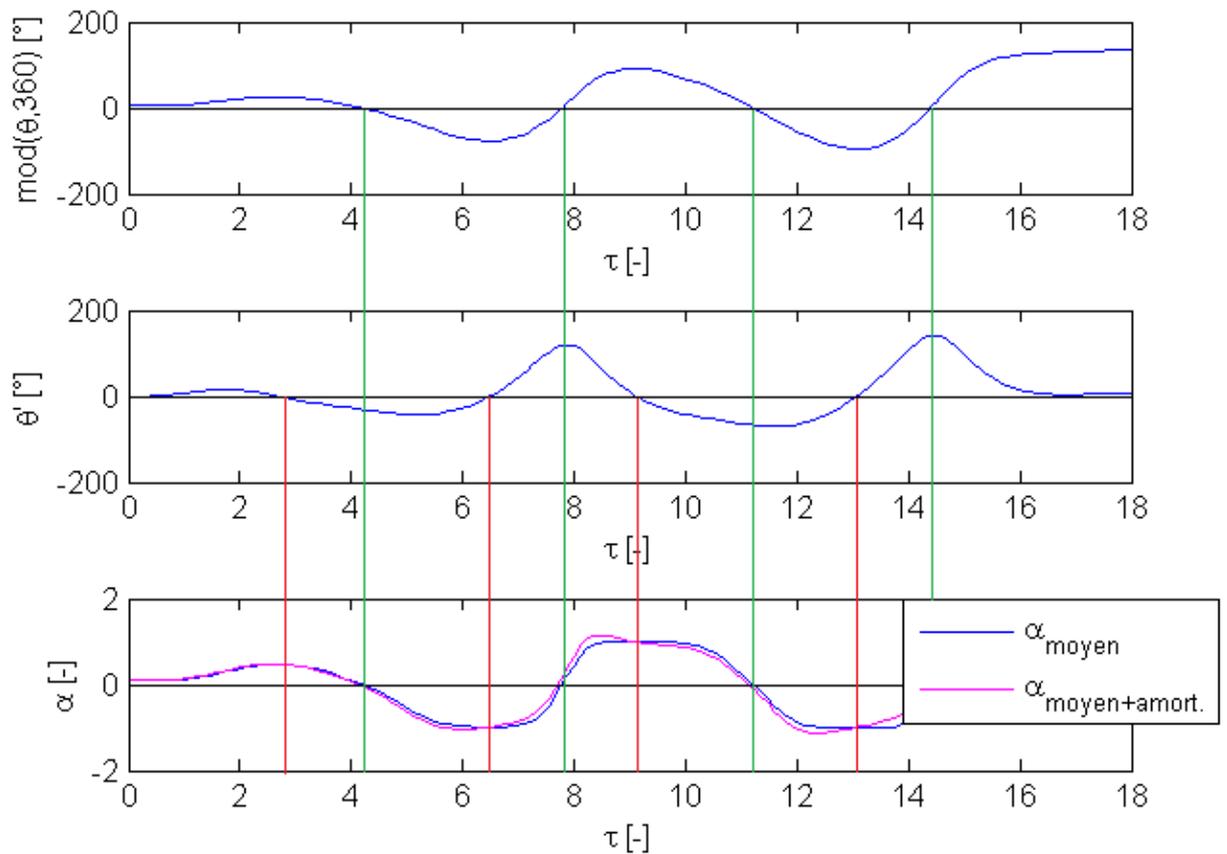


FIGURE 4.3.5 – Influence de l’amortissement aérodynamique sur le moment appliqué sur la grue pour  $I_u = 0.6$ .

À la Figure 4.3.5, l’évolution de la position angulaire, de la vitesse angulaire et du moment sont mis en parallèle de manière à évaluer l’influence de l’amortissement aérodynamique. Les deux moments comparés sont le moment sous vent moyen  $\alpha_{moyen}$  et le moment sous vent moyen avec amortissement  $\alpha_{moyen+amort.}$

Lorsque la position angulaire est positive et croissante ( $\theta \geq 0$  et  $\theta' \geq 0$ ), le mouvement de la flèche a pour effet d’augmenter la vitesse relative. L’amortissement aérodynamique a donc pour effet d’augmenter l’amplitude du moment qui est positif.

Lorsque la position angulaire est positive et décroissante ( $\theta \geq 0$  et  $\theta' \leq 0$ ), le mouvement de la flèche a pour effet de diminuer la vitesse relative. L’amortissement aérodynamique a donc pour effet de diminuer l’amplitude du moment qui est positif.

Lorsque la position angulaire est négative et décroissante ( $\theta \leq 0$  et  $\theta' \leq 0$ ), le mouvement de la flèche a pour effet d’augmenter la vitesse relative. L’amortissement aérodynamique a donc pour effet d’augmenter l’amplitude du moment qui est négatif.

Finalement, lorsque la position angulaire est négative et croissante ( $\theta \leq 0$  et  $\theta' \geq 0$ ), le mouvement de la flèche a pour effet de diminuer la vitesse relative. L’amortissement aérodynamique a donc pour effet de diminuer l’amplitude du moment qui est négatif.

L'ensemble de ces considérations sont reprises à la Table 4.3.3.

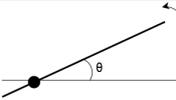
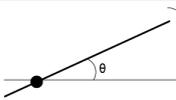
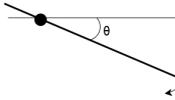
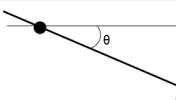
	$\theta \geq 0$		$\theta \leq 0$	
	$\theta' \geq 0$	$\theta' \leq 0$	$\theta' \leq 0$	$\theta' \geq 0$
				
$\alpha_{moyen}$	+	+	-	-
$  \mathbf{v}_{rel}   \dots   \mathbf{v}_{vent}  $	$\geq$	$\leq$	$\geq$	$\leq$
$ \alpha_{moyen}  \dots  \alpha_{moyen+amort.} $	$\geq$	$\leq$	$\geq$	$\leq$
$\alpha_{moyen} \dots \alpha_{moyen+amort.}$	$\geq$	$\leq$	$\leq$	$\geq$

TABLEAU 4.3.3 – Influence de l'amortissement sur le moment appliqué sur la grue

#### 4.4 Caractérisation du mouvement dans l'espace $\kappa - I_u$

De la même manière que dans la section précédente, les paramètres sont fixés aux valeurs suivantes :

$$m = 0.3; n = 3.33; \beta = 0.01; \gamma = 0.01;$$

Les Figures 4.4.1 et 4.4.2 présentent les énergies liées respectivement à la position et à la vitesse angulaires dans l'espace paramétrique  $\kappa - I_u$ . Notons que l'ajout de la turbulence perpendiculaire à la direction moyenne du vent a un effet fortement déstabilisant sur le comportement de la grue. Par conséquent, la vitesse de rotation sera beaucoup plus importante et le temps de calcul de la routine augmente considérablement. C'est la raison pour laquelle on se limite ici à un domaine restreint et réaliste des paramètres  $\kappa$  et  $I_u$  par rapport au modèle simplifié où l'on se permettait d'étendre l'espace paramétrique à des valeurs moins réalistes.

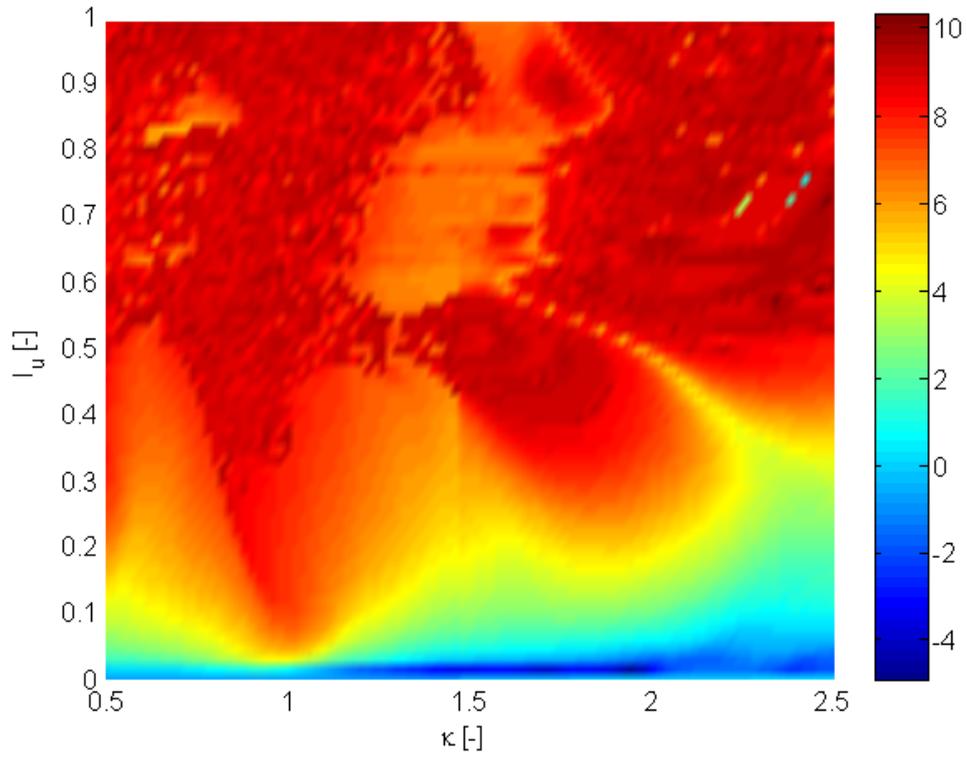


FIGURE 4.4.1 – Logarithme de  $\sigma_{\theta}^2$  dans l'espace  $\kappa - I_u$  pour les paramètres de référence.

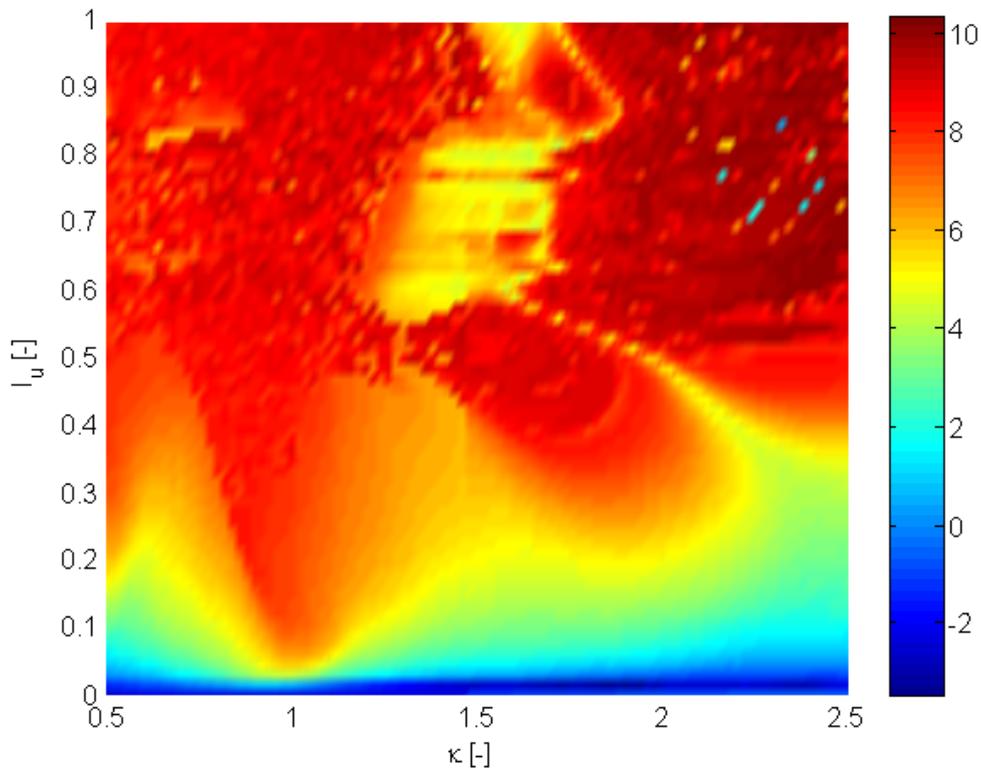


FIGURE 4.4.2 – Logarithme de  $\sigma_{\theta'}^2$  dans l'espace  $\kappa - I_u$  pour les paramètres de référence.

On observe tout d’abord, comme dans le cas du modèle simplifié, la présence de lobes d’instabilité à proximité de  $\kappa = 1$  et  $\kappa = 2$ . La complexité du modèle et les différentes hypothèses peuvent avoir un effet aussi bien stabilisant que déstabilisant. Les lobes sont plus larges et moins prononcés. De plus, le comportement pour des intensités de turbulence est plus irrégulier. Une différence notable entre le modèle simplifié et le modèle intermédiaire est la hauteur des lobes. En effet, dans le modèle simplifié, les lobes diminuent de taille lorsque  $\kappa$  diminue alors que l’effet inverse est observé ici.

Dans le cas d’un champ de vitesse unidirectionnel, la grue pouvait trouver une position d’équilibre au repos en s’alignant avec la vitesse du vent. Ce cas de figure est désormais tout à fait exclu suite à la prise en compte d’un champ bidirectionnel. En effet, il n’existe désormais plus de position de la grue telle que la vitesse est en permanence parallèle à la flèche et, par conséquent, l’énergie minimale est plus importante dans l’étude du modèle intermédiaire.

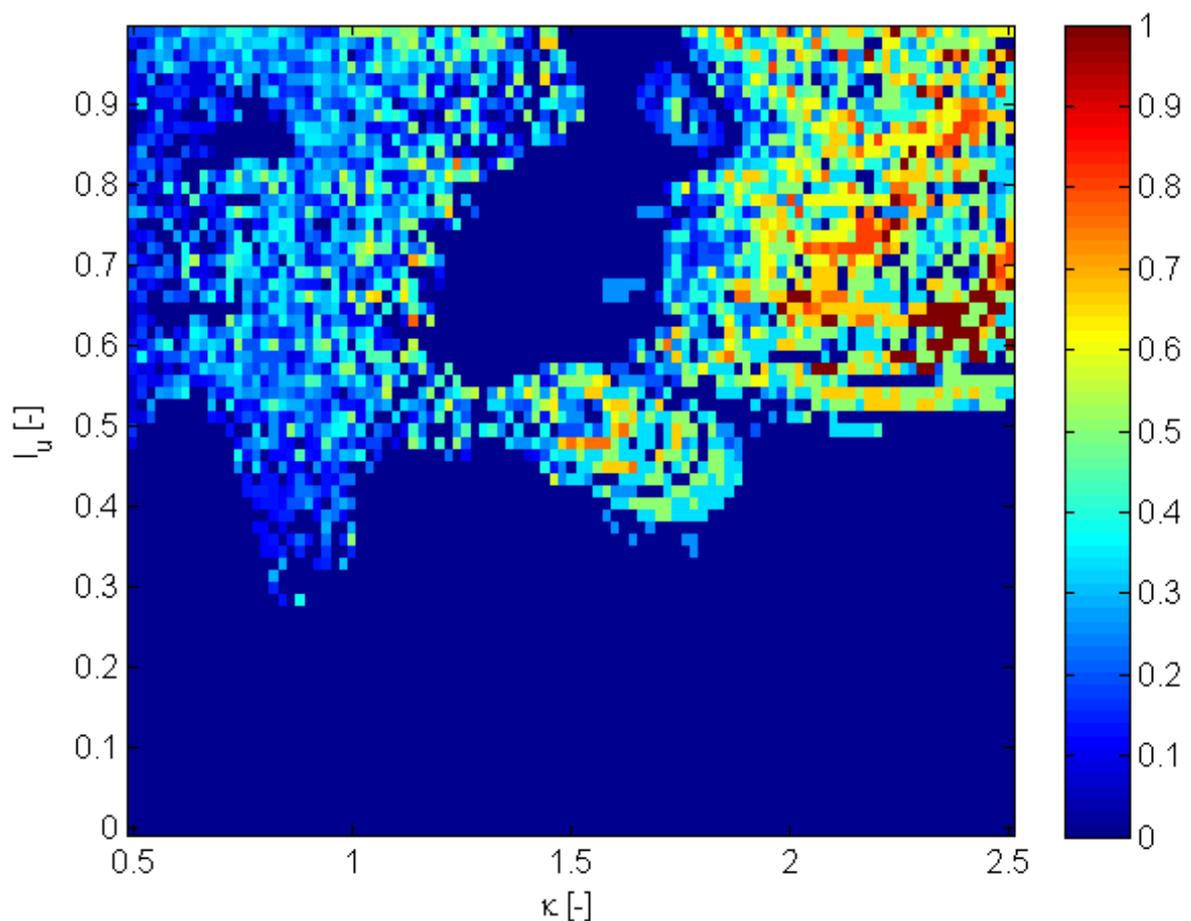


FIGURE 4.4.3 – Pourcentage d’autorotations dans l’espace  $\kappa - I_u$  pour les paramètres de référence.

Finalement, la Figure 4.4.3 présente l’évolution du pourcentage d’autorotation dans l’espace  $\kappa - I_u$ . Comme dans le modèle simplifié, ce graphe est plus erratique que celui de l’énergie. Les lobes sont également observés à proximité de  $\kappa = 1$  et  $\kappa = 2$ .

## 4.5 Conclusion

Ce second modèle constitue une amélioration du modèle simplifié grâce à la levée des différentes hypothèses. En effet, l'amortissement aérodynamique lié à la rotation de la grue est désormais pris en compte. De plus, la vitesse est bidirectionnelle et l'ensemble des termes au premier et au second ordre sont pris en compte. Finalement, le coefficient  $C_{\perp}$  prend sa forme la plus complète. Suite à ces changements, l'équation du mouvement est adaptée et un nouveau paramètre caractérisant l'importance de l'amortissement aérodynamique par rapport à l'effort lié au vent moyen apparaît. Ainsi, l'influence de chacune des hypothèses sur le comportement du système a pu être étudiée. La composante turbulente du vent perpendiculaire à la vitesse moyenne a un impact non négligeable alors que l'influence des termes du second ordre de vitesse fluctuante et d'amortissement aérodynamique est plus limitée.

## Chapitre 5

# Étude du modèle complet

Dans cette dernière partie, la complexité du modèle est encore augmentée en utilisant un champ de turbulence de vent caractérisé par une densité spectrale de puissance réaliste de type Von Karman et d'une fonction de cohérence spatiale. Ce modèle est appelé *modèle complet*. La génération du champ de turbulence du vent est décrite et étudiée en détail et le mouvement de la grue est étudié en plusieurs étapes.

- L'influence des paramètres de vent est étudiée pour une géométrie de la grue fixée,
- L'influence de la géométrie de la grue est étudiée pour des paramètres de vent fixés,
- Le comportement de la grue est caractérisé pour un ensemble de paramètres fixés à l'aide de simulations de Monte-Carlo,
- Le mouvement de la grue est caractérisé en fonction de l'intensité de turbulence par simulations de Monte-Carlo.

### 5.1 Génération du champ de vitesse du vent

Dans un premier temps, la méthode de génération d'un champ de vitesse cohérent est expliquée et détaillée, ainsi que les adaptations nécessaires au domaine adimensionnel. Ensuite, différents résultats intermédiaires sont illustrés et comparés en faisant varier les paramètres du champ. Finalement, une comparaison est faite entre les densité spectrale de puissance et fonction de cohérence spatiale théoriques, et celles calculées sur les signaux simulés, de manière à valider la génération du champ de vitesse.

#### 5.1.1 Définition du domaine et des fonctions nécessaires à la génération du champ

Dans un premier temps, il est nécessaire de générer un champ de vitesse fluctuante adimensionnelle pour chacune des deux directions. Le champ lui-même est adimensionnel, c'est-à-dire que l'on définit les vitesses fluctuantes adimensionnelles  $\frac{u}{U}$  et  $\frac{v}{U}$  dans un domaine défini par

des variables adimensionnelles. Celles-ci sont obtenues par le changement de variable

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{x}{l_2} \\ \tilde{y} = \frac{y}{l_2} \\ \xi = \frac{r}{l_2}, \end{cases} \quad (5.1.1)$$

de sorte qu'en dimensionnel et en adimensionnel, la grue est paramétrée de la manière suivante, et comme illustré aux Figures 5.1.1a et 5.1.1b.

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ r \in [-l_1; l_2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = \xi \cos(\theta) \\ \tilde{y} = \xi \sin(\theta) \\ \xi \in [-m; 1] \end{cases}$$

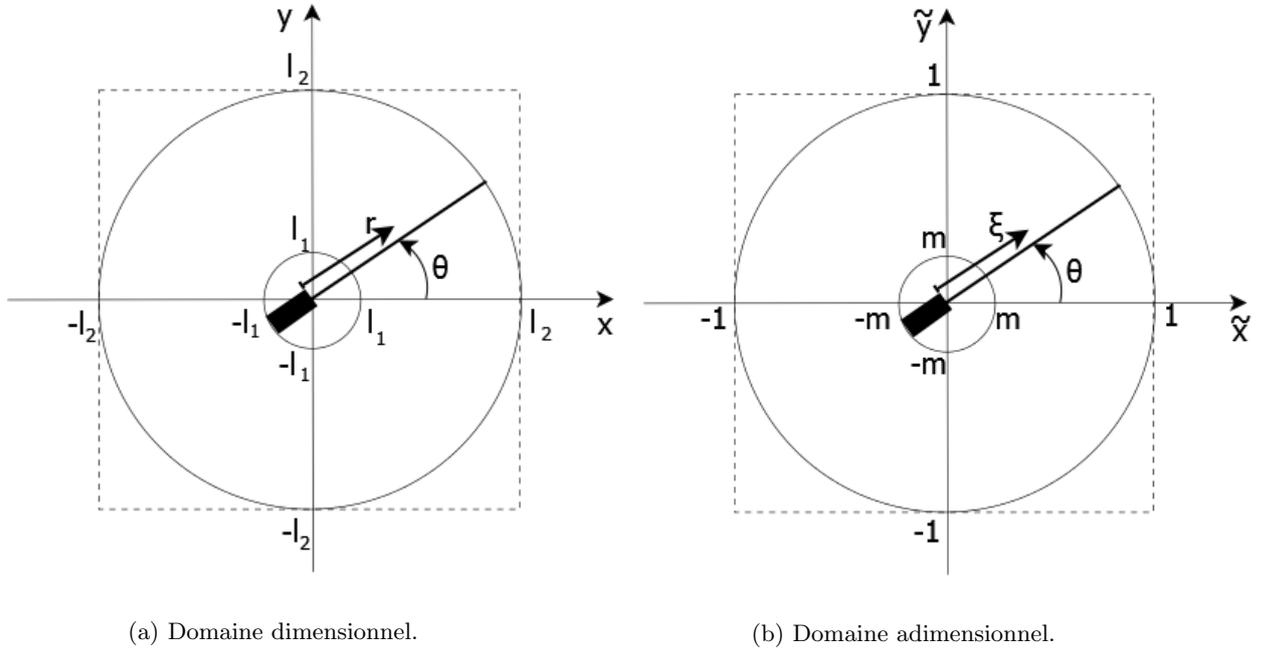


FIGURE 5.1.1 – Paramétrisation du champ.

La méthode exposée à la section 2.4 est adaptée aux variables adimensionnelles. Tout d'abord, la densité spectrale de puissance utilisée est celle de Von Karman.

$$S_u^*(\omega) = \frac{4L_u/U\sigma_u^2}{\left(1 + 70.8 \left(\frac{\omega L_u}{2\pi U}\right)^2\right)^{5/6}}. \quad (5.1.2)$$

La variable à simuler est  $\frac{u}{U}$  et non  $u$ , on utilise donc :

$$\begin{aligned}
S_{u/U}^*(\omega \rightarrow t) &= \frac{S_u^*(\omega \rightarrow t)}{U^2} \\
&= \frac{4L_u/U I_u^2}{\left(1 + 70.8 \left(\frac{\omega L_u}{2\pi U}\right)^2\right)^{5/6}} \\
&= \frac{\frac{8\pi}{\Omega_{L_u}} I_u^2}{\left(1 + 70.8 \left(\frac{\omega}{\Omega_{L_u}}\right)^2\right)^{5/6}} \\
&= \frac{\frac{8\pi}{\Omega^*} \frac{\Omega^*}{\Omega_{L_u}} I_u^2}{\left(1 + 70.8 \left(\frac{\Omega^*}{\Omega_{L_u}} \frac{\omega}{\Omega^*}\right)^2\right)^{5/6}}. \\
&\Downarrow \\
S_{u/U}^*(\kappa \rightarrow \tau) &= \Omega^* S_{u/U}^*(\omega \rightarrow t) \\
&= \frac{8\pi \frac{\Omega^*}{\Omega_{L_u}} I_u^2}{\left(1 + 70.8 \left(\frac{\Omega^*}{\Omega_{L_u}} \kappa\right)^2\right)^{5/6}} \\
&= \frac{8\pi \delta I_u^2}{\left(1 + 70.8 (\delta \kappa)^2\right)^{5/6}}. \tag{5.1.3}
\end{aligned}$$

Rappelons que la définition de la densité spectrale de puissance définie ci-dessus et utilisée par Matlab  $S^*$  n'est pas identique à celle utilisée conventionnellement dans les études stochastiques  $S$ . En toute généralité, on trouve ainsi :

$$S_{u/U}(\kappa \rightarrow \tau) = \frac{S_{u/U}^*(\kappa \rightarrow \tau)}{4\pi} = \frac{2\delta I_u^2}{\left(1 + 70.8 (\delta \kappa)^2\right)^{5/6}}. \tag{5.1.4}$$

On observe ainsi l'apparition d'une nouvelle pulsation caractéristique

$$\Omega_{L_u} = \frac{2\pi U}{L_u} \tag{5.1.5}$$

comprise dans un nouveau paramètre adimensionnel

$$\delta = \frac{\Omega^*}{\Omega_{L_u}}. \tag{5.1.6}$$

La pulsation  $\Omega_{L_u}$  caractérise le rapport entre la vitesse moyenne du vent et la longueur de turbulence et est de l'ordre de  $5rad/s$  si la longueur de turbulence est de l'ordre de  $40m$  et la vitesse du vent de l'ordre de  $30m/s$ . La pulsation de référence  $\Omega^*$  est de l'ordre de  $0.05rad/s$  de sorte que le paramètre  $\delta$  est de l'ordre de  $0.01$ .

À la Figure 5.1.2, la densité spectrale de puissance est tracée pour trois valeurs du paramètre  $\delta$ .

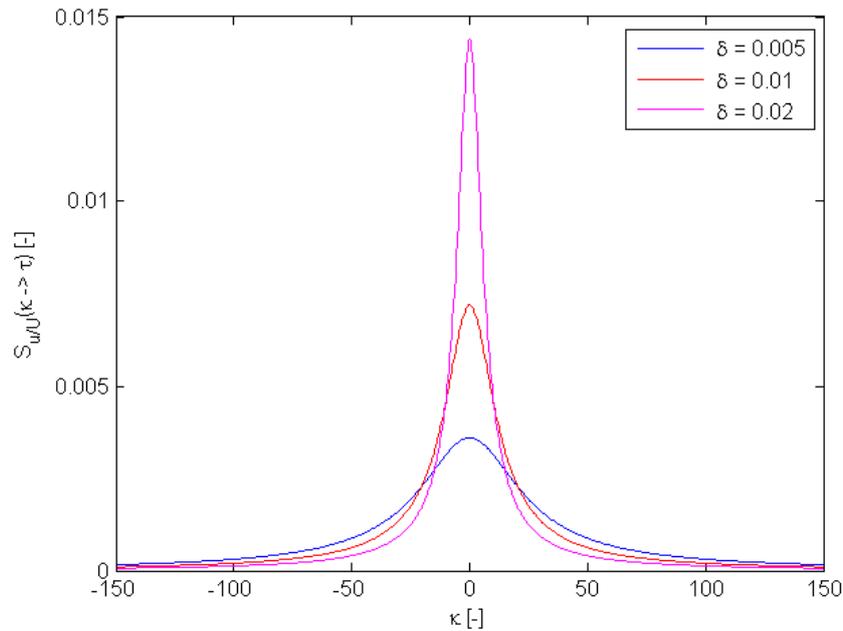


FIGURE 5.1.2 – Densité spectrale de puissance de la vitesse du vent dans le domaine adimensionnel pour  $I_u = 0.6$ .

Il peut être observé que le contenu basse fréquence augmente avec le paramètre  $\delta$ . Ceci peut être relié à la physique du phénomène de vent, puisqu'une valeur importante de  $\delta$  correspond à une grande longueur de turbulence. De plus, les tourbillons de grande dimension spatiale ont une basse fréquence. La densité spectrale de puissance décroît rapidement lorsque la fréquence augmente, et l'on peut admettre que l'influence du paramètre  $\delta$  disparaît rapidement lorsque la densité spectrale de puissance tend vers une valeur nulle.

La génération d'un champ de vitesse cohérent nécessite également la définition d'une fonction de cohérence spatiale. Celle-ci est définie en (2.3.10) comme :

$$\begin{aligned}
\Gamma(d, \omega) &= e^{\frac{-Cd\omega}{2\pi U}} \\
&= e^{\frac{-Csl_2\omega}{2\pi U}} \\
&= e^{\frac{-Cs\omega}{\Omega l_2}} \\
\Gamma(s, \kappa) &= e^{-Cs\gamma\kappa}
\end{aligned}
\tag{5.1.7}$$

où  $d$  est la distance entre 2 points de l'espace,  $C$  est un paramètre constant et égal à 10,  $s = \frac{d}{l_2}$  est la distance entre deux points dans le domaine adimensionnel.

À la Figure 5.1.3, la fonction de cohérence spatiale est tracée pour trois valeurs du paramètre  $\gamma$  et pour deux points situés à une distance  $s = 1$ . Cette distance correspond à la distance entre le pivot de la grue et l'extrémité de sa flèche.

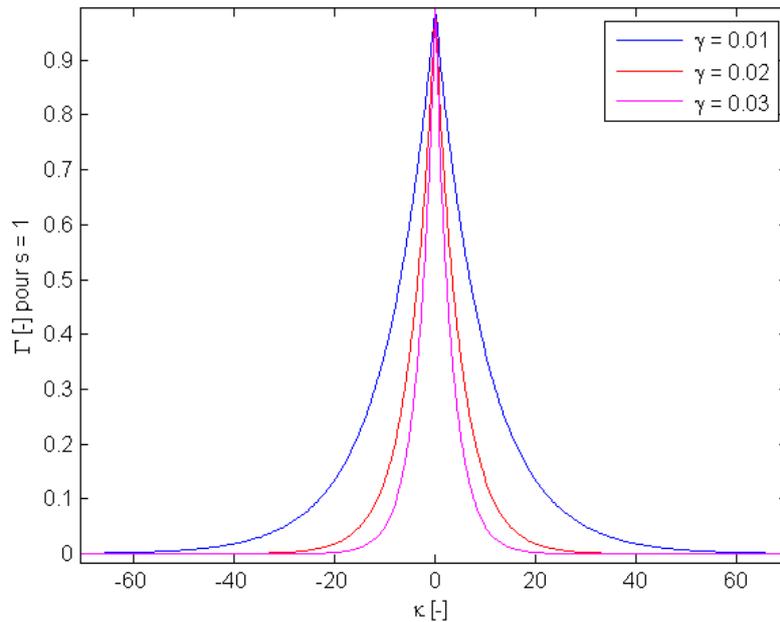


FIGURE 5.1.3 – Fonction de cohérence dans le domaine adimensionnel pour deux points situés à une distance  $s = 1$ .

Il peut être observé que plus le paramètre  $\gamma$  est important, plus la bande de pulsations significatives est étroite. En effet, la distance entre deux points est fonction de la dimension caractéristique du système (ici  $l_2$ , la longueur de la flèche). Lorsque cette dimension augmente, le paramètre  $\gamma$  augmente, et seuls les tourbillons basse fréquence sont de dimension suffisamment importante pour corrélérer deux points éloignés.

Quelle que soit la valeur du paramètre  $\kappa$ , une cohérence parfaite ( $\Gamma = 1$ ) est observée pour une fréquence nulle, puisqu'un tourbillon théorique de fréquence nulle à une dimension infinie. De même, la cohérence tend vers une valeur nulle pour les grandes pulsations, puisqu'il s'agit de tourbillons de très petite dimension.

### 5.1.2 Description du champ généré et validation des résultats

Dans cette section, les résultats de la génération du champ de vitesse turbulente sont analysés et comparés à certains résultats théoriques de manière à valider cette partie du code.

Le calcul de la densité spectrale de puissance sur base d'un signal généré se fait en divisant le signal temporel en un certain nombre de "fenêtres" de durée inférieure à la durée totale du signal et se superposant. La densité spectrale de puissance est alors calculée pour chaque fenêtre, et une moyenne est faite sur l'ensemble de celles-ci, comme illustré à la Figure 5.1.4.

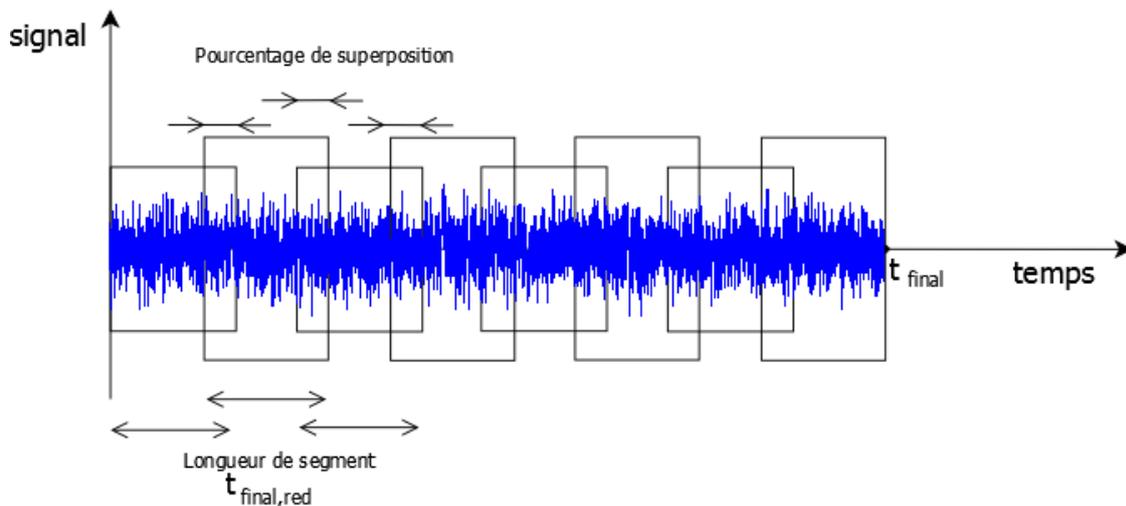


FIGURE 5.1.4 – Calcul de la densité spectrale de puissance par moyennage de fenêtres.

La longueur de chaque fenêtre ainsi que le pourcentage de superposition doivent être judicieusement choisis.

- La longueur de la fenêtre et le pas de discrétisation vont déterminer la durée du signal temporel  $t_{final,red}$  et, par conséquent, le pas fréquentiel  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{t_{final,red}}$ . De manière à avoir une bonne représentation des pics de la densité spectrale de puissance, il est nécessaire d'avoir un  $\Delta\omega$  suffisamment petit et donc une fenêtre de durée suffisamment longue.
- Le nombre de points du signal initial (de durée  $t_{final}$ ) et le pourcentage de superposition vont déterminer le nombre de fenêtres qu'il est possible de distinguer. Plus le nombre de fenêtres est important, plus la moyenne est précise et plus la courbe calculée se rapproche de la courbe théorique. Ce second aspect est la source des légères oscillations observées sur chacun des graphes des densités spectrales de puissances calculées à partir d'une simulation temporelle.

La densité spectrale calculée est donc d'autant plus précise que le temps final de chaque fenêtre  $t_{final,red}$  est grand et que le nombre de fenêtres est important. Une solution pour atteindre cet objectif sans augmenter exagérément le nombre de points et donc le temps de calcul est de choisir un pas de discrétisation temporel aussi grand que possible. Il faut cependant veiller à ne pas dépasser une certaine limite pour représenter de manière adaptée les hautes fréquences. En effet, la pulsation maximale est définie par  $\omega_{max} = \frac{2\pi}{2\Delta t}$ . Cette valeur est déterminée par la densité spectrale de puissance et la fonction de cohérence. Au vu des Figures 5.1.2 et 5.1.3, on estime que la densité spectrale de la turbulence du vent et la fonction de cohérence sont négligeables à partir de  $\kappa = 75$  et on choisira un pas de discrétisation temporelle  $\Delta\tau$  toujours inférieur à  $\frac{2\pi}{\kappa_{max}} = \frac{2\pi}{2 \times 75} = 0.04$ .

La Figure 5.1.5 présente la densité spectrale de puissance calculée sur base de la simulation numérique de  $u/U$  en deux points espacés de  $s = 1$ , ce qui correspond à la distance entre le pivot et l'extrémité de la flèche de la grue.

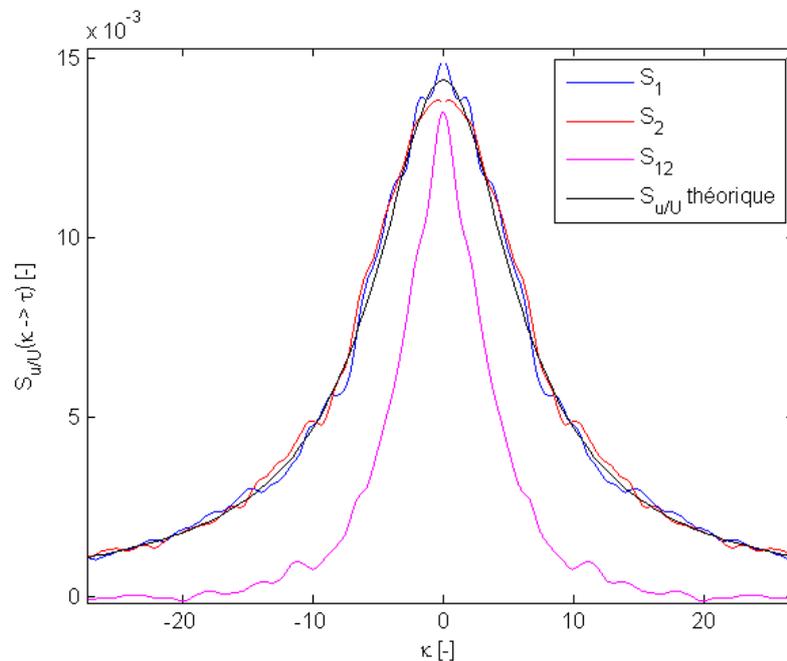


FIGURE 5.1.5 – Densités spectrales de puissance individuelles et conjointe calculées sur base des simulations en deux points espacés de  $s = 1$ , et comparaison avec densité théorique pour  $\delta = 0.02$  et  $I_u = 0.6$ .

On observe une allure régulière de la courbe et une bonne correspondance entre les courbes de  $S_1$  et  $S_2$  et la courbe théorique.

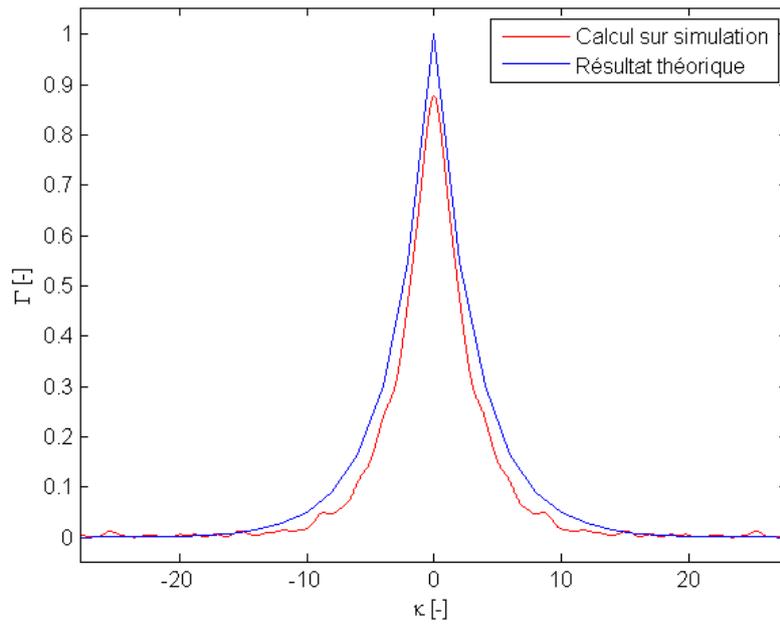
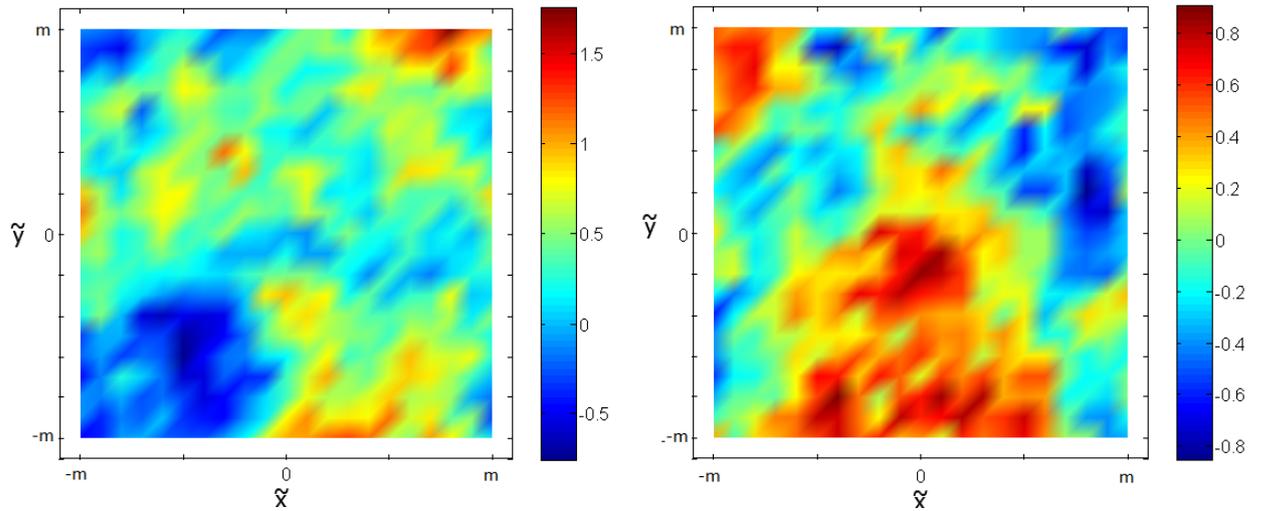


FIGURE 5.1.6 – Fonction de cohérence en deux points espacés de  $s = 1$  pour  $\gamma = 0.02$ .

La Figure 5.1.6 présente la cohérence entre deux points espacés de  $s = 1$ , d'une part calculée à partir des simulations numériques, et d'autre part sur base théorique. La correspondance entre les deux courbes est satisfaisante. Il est évident que plus le nombre de points de calcul temporels  $N$  sera important, plus la courbe calculée sur base des simulations se rapprochera de la courbe théorique. Le calcul est ici fait pour 16004 points.

À titre d'illustration, les Figures 5.1.7a et 5.1.7b présentent le champ de vitesse turbulente dans la direction moyenne et perpendiculairement à celle-ci en un instant donné.



(a) Champ de vitesse  $u/U$ .

(b) Champ de vitesse  $v/U$ .

FIGURE 5.1.7 – Exemple de champ de vitesse en un instant donné pour  $\delta = \gamma = 0.02$ ,  $m = 10$  et  $I_u = 0.6$ .

Le champ présenté ci-dessus mène au champ de vitesse totale présenté à la Figure 5.1.8.

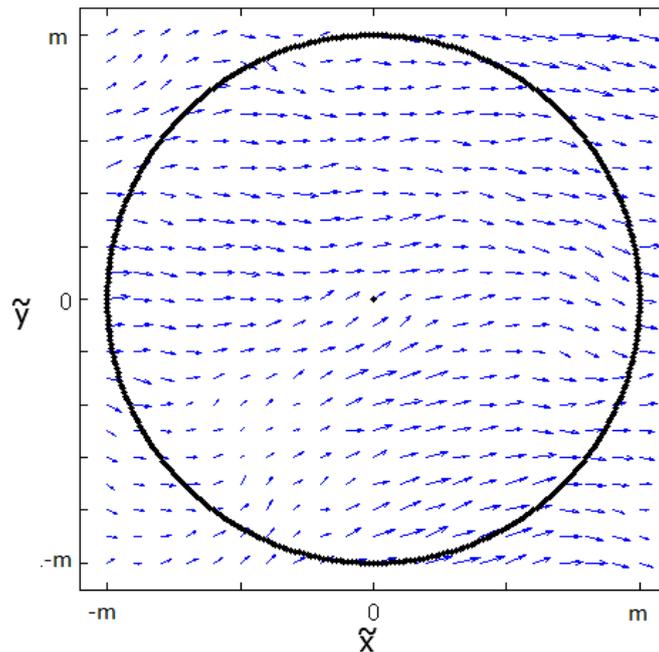


FIGURE 5.1.8 – Champ de vitesse adimensionnelle pour  $\delta = \gamma = 0.02$ ,  $m = 10$  et  $I_u = 0.6$ .

## 5.2 Étude du comportement de la grue via le modèle complet

Dans la section précédente, nous avons caractérisé le champ de vitesse généré. Sur base de ce champ de vitesse, le mouvement de la grue peut être calculé. Nous caractérisons maintenant le mouvement de la grue en fonction des paramètres.

Dans un premier temps, l'influence des paramètres du vent  $\gamma$  et  $\delta$  est étudiée pour des paramètres géométriques de la grue constants :  $m = 0.3$  et  $n = 3.33$ . Ensuite, les paramètres du vent sont fixés à  $\gamma = \delta = 0.02$  et l'influence des paramètres géométriques de la grue est étudiée. Le paramètre lié au couple de frottement reste inchangé :  $\beta = 0.01$ .

Dans l'ensemble de cette partie, les processus aléatoires sont supposés stationnaires. Dans un premier temps, cette hypothèse est admise pour l'étude approfondie des paramètres. Elle sera vérifiée a posteriori lors de l'étude du problème à proprement parler.

### 5.2.1 Influence des paramètres du vent $\gamma$ et $\delta$

Dans cette section, la géométrie de la grue est fixée grâce aux paramètres  $m = 0.3$  et  $n = 3.33$ , et l'influence des paramètres caractérisant la vitesse du vent est observée. Notons que l'influence de l'intensité de turbulence  $I_u$  est similaire à celle de  $\delta$  puisqu'elle se situe également au numérateur de la densité spectrale de la vitesse du vent. Ce paramètre fait également l'objet d'une étude à plus grande échelle dans une section ultérieure.

Tout d'abord, la densité spectrale du moment appliqué sur la grue peut être calculée. Celle-ci dépend du contenu fréquentiel du vent, puisque la vitesse du vent est intégrée sur la longueur de la grue. Elle dépend également du contenu fréquentiel de la position angulaire, et de la vitesse angulaire, puisque le coefficient de pression  $C_{\perp}$  et l'amortissement aérodynamique dépendent de la position et de la vitesse angulaires. La Figure 5.2.1 présente la densité spectrale du moment total adimensionnel  $\alpha$  pour trois valeurs du paramètre  $\delta$ .

Le paramètre  $\delta$  apparaît dans la densité spectrale de la vitesse du vent en un point donné.

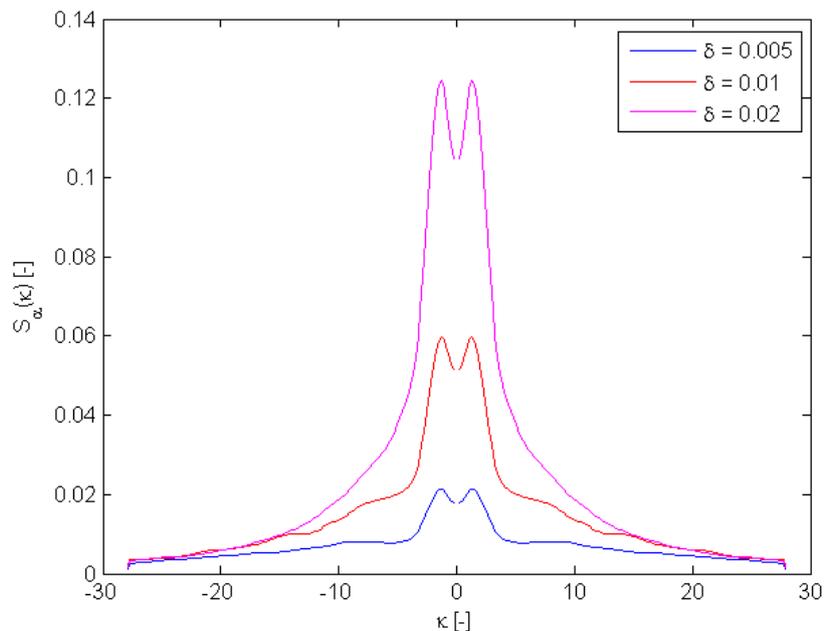


FIGURE 5.2.1 – Densité spectrale de puissance du moment appliqué sur la grue pour trois valeurs de  $\delta$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\gamma = 0.02$  et  $I_u = 0.6$ .

L'influence du paramètre  $\delta$  sur la densité spectrale de  $\alpha$  est fortement similaire à son influence sur la densité spectrale de la vitesse, présentée à la Figure 5.1.2. En effet, lorsque la valeur de  $\delta$  augmente, le contenu basse fréquence augmente. Une fois de plus, nous pouvons supposer que l'influence de  $\delta$  sur le contenu haute fréquence est très faible puisque ce contenu devient rapidement négligeable par rapport au contenu basse fréquence. L'allure de la courbe par contre est différente de celle de la densité spectrale de la vitesse. Un pic peut être observé pour une valeur de  $\kappa$  non nulle. Plus la valeur de  $\delta$  est importante, plus le pic est marqué et plus on s'approche d'un processus en bande étroite.

Les Figures 5.2.2 à 5.2.4 présentent les densités spectrales de la position angulaire, de la vitesse angulaire, et du signe de celle-ci pour les trois valeurs du paramètres  $\delta$ .

La Figure 5.2.2 présente le contenu fréquentiel de la position angulaire. La densité spectrale de  $\theta$  est décroissante avec la pulsation  $\kappa$ . Le contenu fréquentiel de l'angle  $\theta$  est principalement du contenu basse fréquence. L'évolution avec le paramètre  $\delta$  est similaire aux observations précédentes : Plus le paramètre  $\delta$  est important, plus le contenu fréquentiel basse fréquence augmente.

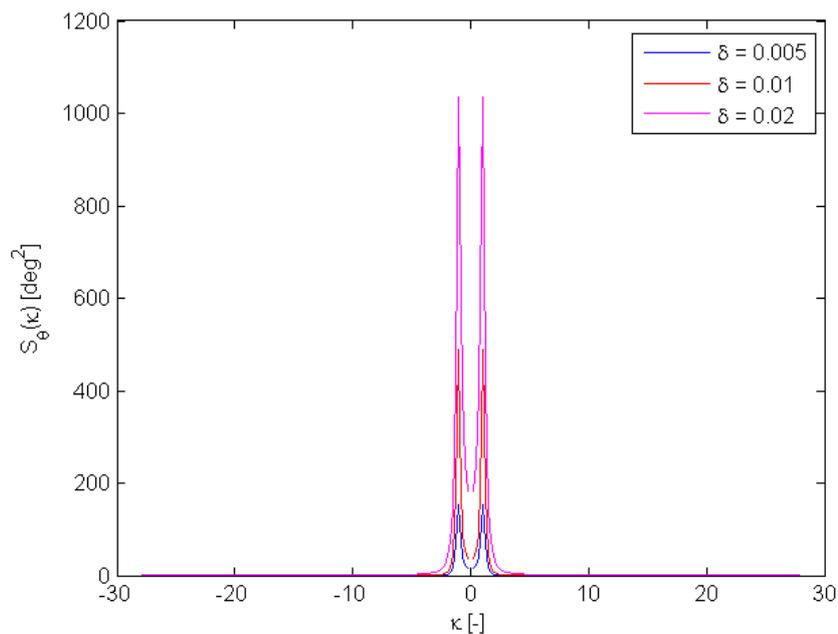


FIGURE 5.2.2 – Densité spectrale de puissance de la position angulaire  $\theta$  pour trois valeurs de  $\delta$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\gamma = 0.02$  et  $I_u = 0.6$ .

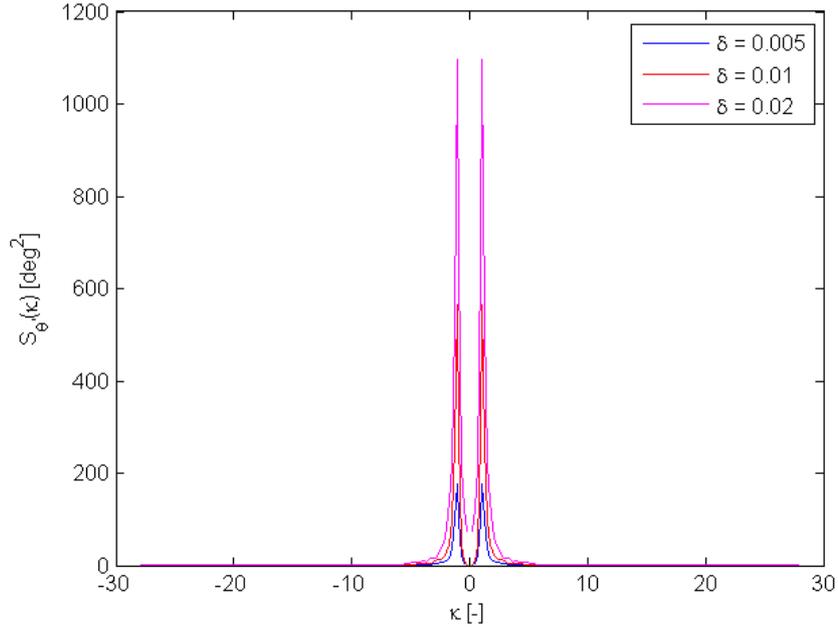


FIGURE 5.2.3 – Densité spectrale de puissance de la vitesse angulaire  $\theta'$  pour trois valeurs de  $\delta$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\gamma = 0.02$  et  $I_u = 0.6$ .

La Figure 5.2.3 présente le contenu fréquentiel de la vitesse angulaire. L'influence du paramètre  $\delta$  reste identique aux observations précédentes. Nous observons ici la présence d'un pic d'intensité pour de faibles valeurs de  $\kappa$ , ce qui signifie que le contenu fréquentiel très basse fréquence tend vers une valeur nulle et qu'un intervalle de fréquence préférentiel peut être déterminé aux alentours de  $\kappa = [0.2 ; 0.25]$ . Notons que la position du pic est identique quelle que soit la valeur de  $\delta$ .

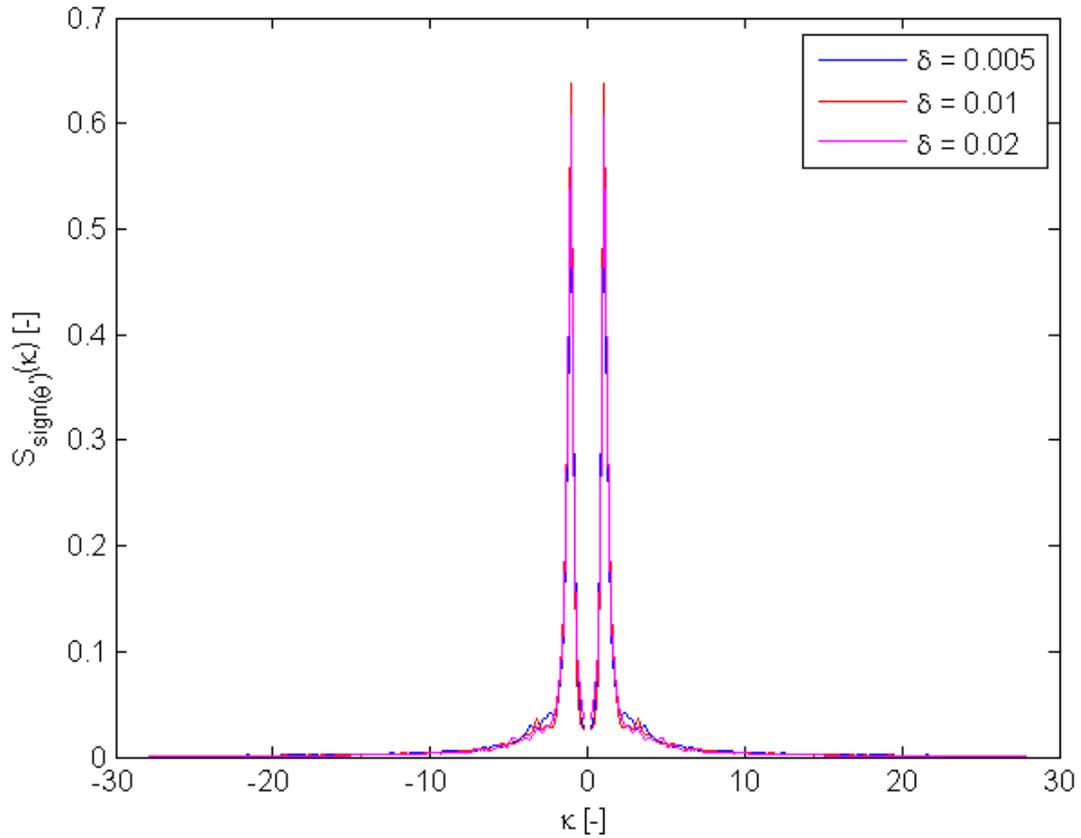


FIGURE 5.2.4 – Densité spectrale de puissance du signe de la vitesse angulaire  $sign(\theta')$  pour trois valeurs de  $\delta$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\gamma = 0.02$  et  $I_u = 0.6$ .

La densité spectrale du signe de la vitesse angulaire est représentée à la Figure 5.2.4. Nous observons que les trois courbes tendent vers une seule et unique courbe (pour rappel, les légères oscillations sont liées à la discrétisation du phénomène). Cette Figure est à mettre en parallèle avec la Figure 5.2.3. En effet, la fonction  $sign(\theta')$  constitue une mise à l'échelle de la variable  $\theta'$ . Le contenu fréquentiel est maintenu identique alors que l'intensité de la vitesse est modifiée. Le fait que les trois courbes du signe de la vitesse sont superposées implique que les trois densités spectrales de la vitesse ont le même contenu fréquentiel à l'intensité près, c'est-à-dire que les trois courbes ne sont que des multiples les unes des autres. Ceci peut s'expliquer à l'aide de la formule de la densité spectrale de puissance (2.3.7) :

- La présence du paramètre  $\delta$  au numérateur entraîne une dépendance linéaire de la densité spectrale de la vitesse. Si le système était linéaire, la densité spectrale de la réponse serait donc également proportionnelle à ce paramètre et le contenu fréquentiel de la vitesse serait bien identique à l'intensité près. Il est donc légitime de supposer que les non-linéarités du problème comme les grandes oscillations par exemple sont de faible influence pour l'ensemble de paramètres fixés.
- La présence du paramètre  $\delta$  au dénominateur quant à elle génère un étirement horizontal de la densité spectrale de puissance du vent. Cependant, seules les faibles fréquences

important dans la résolution de ce problème et la densité spectrale de puissance du vent a une allure peu variable dans cette partie du domaine. L'étirement horizontal a donc un faible effet sur la réponse du système.

Les 4 graphiques ci-dessus sont maintenant reproduits pour une valeur de  $\delta = 0.02$  et trois valeurs de  $\gamma$  différentes. Ce paramètre a plusieurs contributions dans le calcul du mouvement de la grue :

- Le paramètre  $\gamma$  intervient dans la fonction de cohérence spatiale. Plus  $\gamma$  est petit, plus la cohérence entre deux points est importante, et inversement.
- L'amortissement aérodynamique est directement proportionnel à la valeur de  $\gamma$ . Plus celui-ci prend une faible valeur, plus l'amortissement sera faible également.

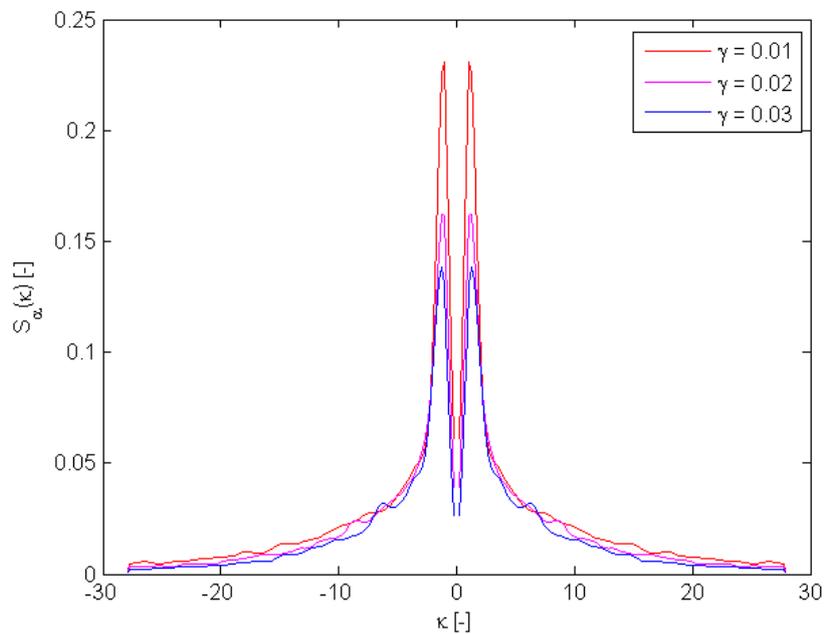


FIGURE 5.2.5 – Densité spectrale de puissance du moment appliqué sur la grue pour trois valeurs de  $\gamma$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\delta = 0.02$  et  $I_u = 0.6$ .

La Figure 5.2.5 présente la densité spectrale de puissance du moment adimensionné pour trois valeurs de  $\gamma$ . Une faible valeur de  $\gamma$  entraîne une augmentation de l'intensité du moment. De plus, la position du pic de la densité spectrale de puissance se rapproche de  $\kappa = 0$ . Ceci s'explique par le fait que lorsque  $\gamma$  diminue, la cohérence augmente et les tourbillons sont de plus grande dimension et de plus basse fréquence.

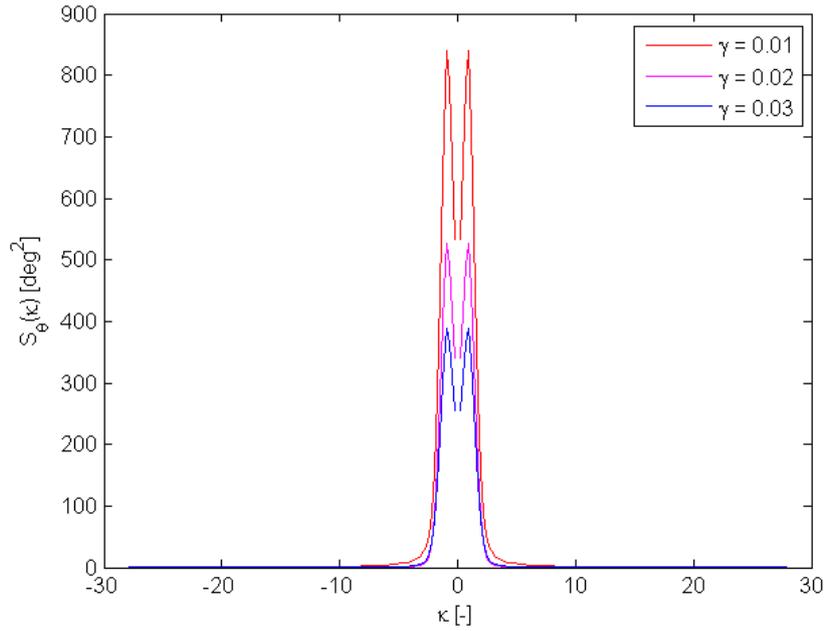


FIGURE 5.2.6 – Densité spectrale de puissance de la position angulaire  $\theta$  pour trois valeurs de  $\gamma$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\delta = 0.02$  et  $I_u = 0.6$ .

Nous observons aux Figures 5.2.6 à 5.2.8 qu’une diminution du facteur  $\gamma$  entraîne une augmentation des intensités des densités spectrales de la position et de la vitesse angulaire. De plus, on observe également l’apparition d’un pic dans la densité spectrale de la position angulaire. Ce pic signifie l’apparition d’un phénomène d’oscillations en bande étroite, c’est-à-dire avec une fourchette de fréquence bien déterminée.

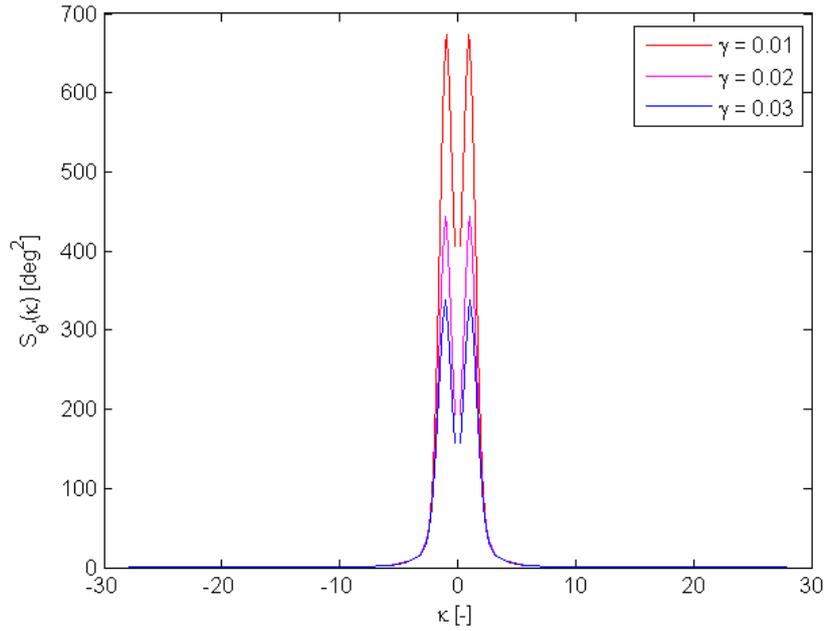


FIGURE 5.2.7 – Densité spectrale de puissance de la vitesse angulaire  $\theta'$  pour trois valeurs de  $\gamma$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\delta = 0.02$  et  $I_u = 0.6$ .

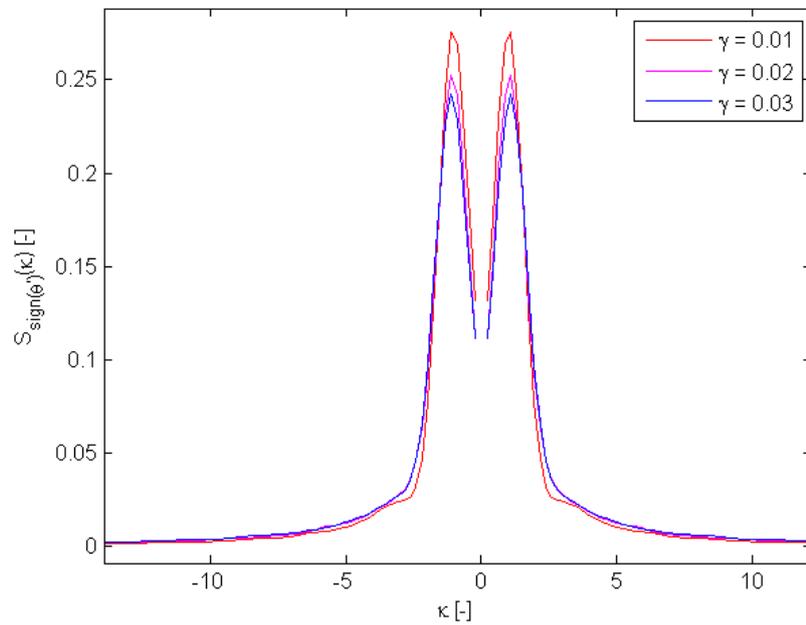


FIGURE 5.2.8 – Densité spectrale de puissance du signe de la vitesse angulaire  $sign(\theta')$  pour trois valeurs de  $\gamma$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\delta = 0.02$  et  $I_u = 0.6$ .

Nous observons ici que le paramètre  $\gamma$  a une influence sur la densité spectrale du signe de la vitesse angulaire. Ceci implique que le paramètre  $\gamma$  a un impact sur le contenu fréquentiel de la réponse.

### 5.2.2 Influence des paramètres géométriques de la grue $m$ et $n$

Maintenant que l'influence des paramètres du vent  $\gamma$  et  $\delta$  est bien appréhendée, nous étudions l'influence de la géométrie de la grue en fixant  $\gamma = \delta = 0.02$ .

Le paramètre  $m$  caractérise le rapport de longueur entre la flèche et la contreflèche, à savoir  $l_1/l_2 \leq 1$ . Le paramètre  $n$  quant à lui caractérise le rapport de hauteur entre la flèche et la contreflèche, c'est-à-dire  $b_1/b_2$ . En pratique, la contreflèche a généralement une prise au vent plus importante que la flèche suite à la présence d'un contrepoids ou d'une affiche publicitaire, et nous supposons donc que  $n \geq 1$ . Cela présente peu d'intérêt de faire varier ce paramètre. C'est pourquoi nous le fixerons à  $10/3$ . Le rapport de longueur par contre peut varier d'une valeur nulle (pas de contreflèche) à une valeur unitaire (flèche de longueur identique à la contreflèche).

L'influence de la contreflèche est complexe. Lorsque les tourbillons sont de grande taille, les forces sur la flèche et la contreflèche sont de même direction et entraînent donc deux moments qui s'opposent. Un tourbillon de grande taille correspond à une basse fréquence et peut donc avoir une influence sur une durée considérable par rapport au temps caractéristique de la grue. Au contraire, si la longueur de turbulence diminue, les forces sur la flèche et la contreflèche peuvent être de signe opposé et entraînent donc deux moments de même signe. Les tourbillons de plus faible dimension ont également une période plus courte et sont susceptibles de varier rapidement lors du temps caractéristique de la grue. Notons également qu'en fonction des position et vitesse angulaires, le moment est stabilisant ou non et que l'augmentation ou la diminution de son amplitude peut avoir un effet bénéfique ou défavorable sur le mouvement.

L'influence de la contreflèche peut donc être aussi bien positive que négative. C'est également la conclusion qui ressort des Figures 5.2.9 à 5.2.12 où les courbes ne présentent pas toujours le même ordre en intensité et qu'aucune correspondance entre cet ordre et la valeur de  $m$  ne peut être distinguée au premier regard.

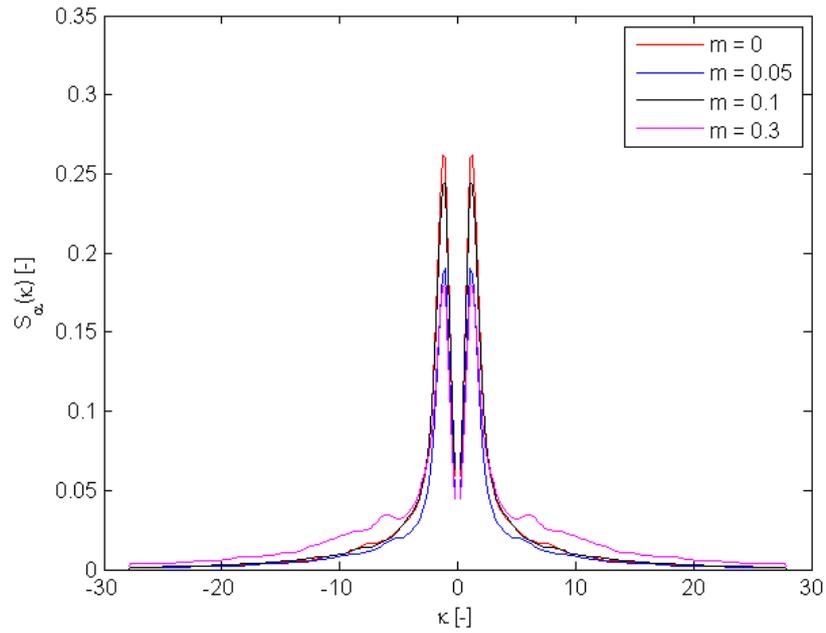


FIGURE 5.2.9 – Densité spectrale de puissance du moment appliqué sur la grue pour quatre valeurs de  $m$ ,  $\beta = 0.01$  et  $I_u = 0.6$ .

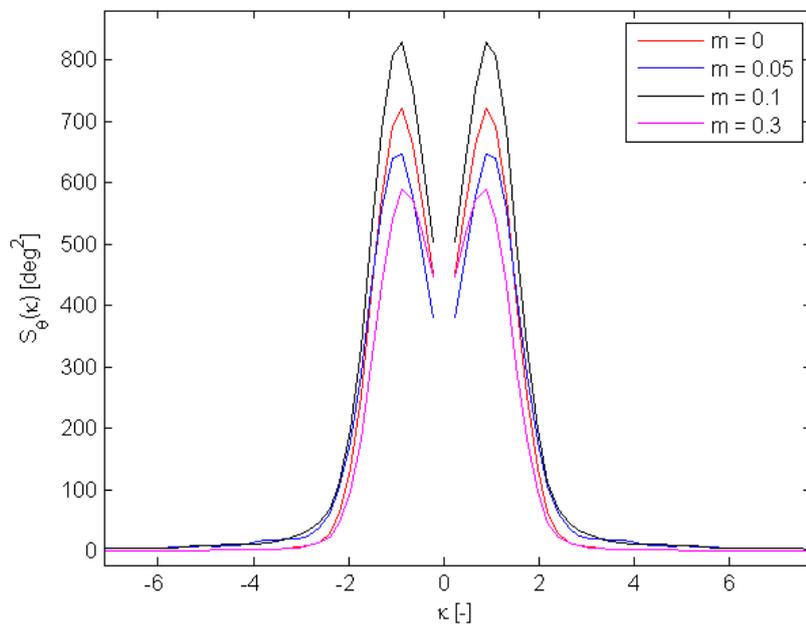


FIGURE 5.2.10 – Densité spectrale de puissance de la position angulaire  $\theta$  pour quatre valeurs de  $m$ ,  $\beta = 0.01$  et  $I_u = 0.6$ .

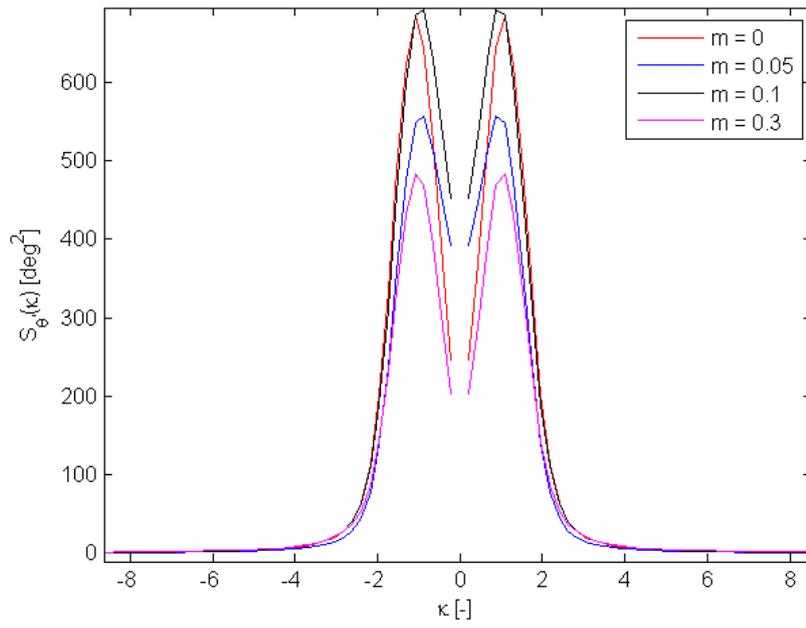


FIGURE 5.2.11 – Densité spectrale de puissance de la vitesse angulaire  $\theta'$  pour quatre valeurs de  $m$ ,  $\beta = 0.01$  et  $I_u = 0.6$ .

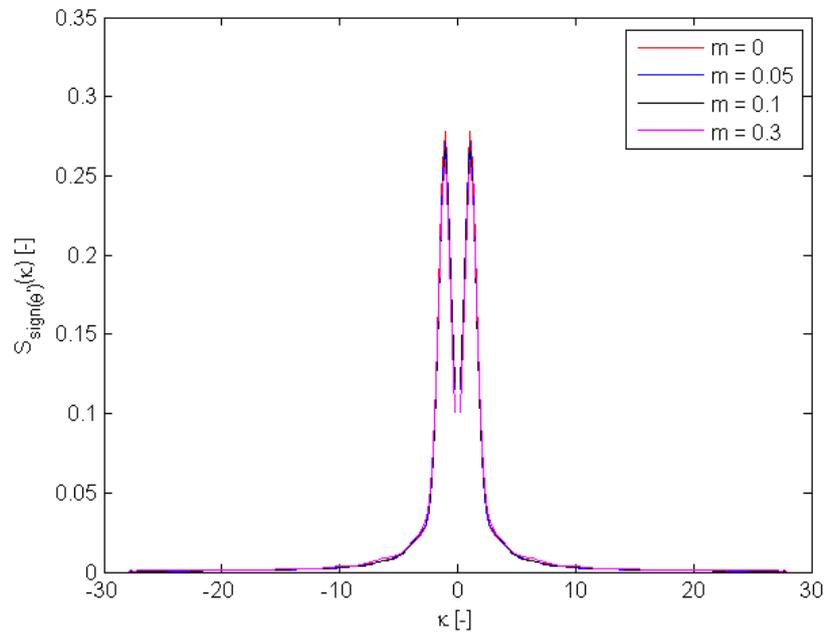


FIGURE 5.2.12 – Densité spectrale de puissance du signe de la vitesse angulaire  $sign(\theta')$  pour quatre valeurs de  $m$ ,  $\beta = 0.01$  et  $I_u = 0.6$ .

### 5.2.3 Caractérisation du mouvement pour un ensemble de paramètres fixés

Maintenant que l'influence de chacun des paramètres a pu être appréhendée correctement, plusieurs ensembles de paramètres sont fixés et ces configurations sont étudiées plus en détail. Dans un premier temps, le comportement de la grue est observé pour une simulation unique de champ de vitesse du vent. Ensuite, nous observons les caractéristiques stochastiques de la réponse de la structure par simulations de Monte-Carlo. Finalement, l'influence de l'intensité de turbulence est étudiée à partir de simulations de Monte-Carlo également.

Deux sets de paramètres réalistes sont choisis. Le premier est un cas présentant uniquement des oscillations alors que le second présente également de l'autorotation. Le premier cas est décrit complètement alors que le second permet la comparaison des phénomènes d'oscillations et d'autorotations.

$\beta$ [-]	0.01	$\gamma$ [-]	0.01	$m$ [-]	0.3
$I_u$ [-]	0.6 ou 0.8	$\delta$ [-]	0.02	$n$ [-]	3.33

TABLEAU 5.2.1 – Paramètres adimensionnels des cas de référence 1 et 2.

Les Figures 5.2.13 et 5.2.17 présentent l'évolution des position  $\theta$  et vitesse  $\theta'$  angulaires au cours du temps.

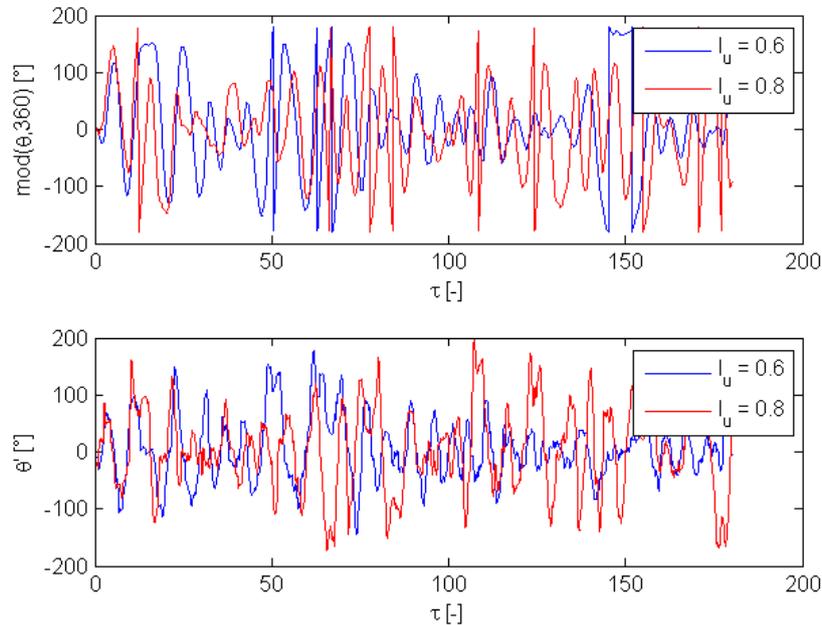


FIGURE 5.2.13 – Évolution des position et vitesse angulaires avec le temps  $\tau$  pour les paramètres de référence.

Il peut être observé que la position angulaire oscille entre  $20^\circ$  et  $50^\circ$  environ. Aucune autorotation n'est observée pour  $I_u = 0.6$  alors que plusieurs cycles d'autorotations sont

observés pour  $I_u = 0.8$ . La vitesse quant à elle oscille également. La présence de changements de signe de la vitesse confirme la présence d'oscillations.

La Figure 5.2.14 présente l'évolution de la moyenne  $\mu$ , de la variance  $\sigma^2$ , du coefficient de dissymétrie (*skewness*)  $\gamma_1$  et le coefficient d'aplatissement (*kurtosis*)  $\gamma_e$  en fonction de la durée de l'échantillon. Pour ce faire, l'échantillon connu est divisé en une série de sous-échantillons plus petits et de durée croissante. Tous les sous-échantillons démarrent au même instant  $t_0$  et le temps final  $t_{final,ss-ech}$  du sous échantillon est variable. L'abscisse de la Figure 5.2.14 est cet instant final et l'ordonnée est la variable statistique du sous échantillon allant de  $t_0$  à  $t_{final,ss-ech}$ . Si les caractéristiques statistiques tendent vers une valeur constante pour une grande durée d'échantillon, alors le processus a bien atteint l'état stationnaire. Nous observons ainsi que c'est bien le cas pour les 4 premières variables statistiques et on peut considérer que le processus est stationnaire. Cette hypothèse vérifiée a posteriori valide bien l'utilisation de la densité spectrale de puissance pour la caractérisation des phénomènes aléatoires.

Dans le cas où le processus est stationnaire, le théorème d'ergodicité est d'application. Celui-ci affirme que les caractéristiques statistiques d'un échantillon au cours du temps sont identiques à celles d'un grand nombre d'échantillons en un instant donné. Ceci revient à égaliser les densités de probabilité des Figures 5.2.18 et 5.2.19 à celles des Figures 5.2.20 et 5.2.22.

Pour rappel, la définition de ces caractéristiques est la suivante :

$$\begin{aligned}\mu_x &= E[x] \\ \sigma_x^2 &= E[(x - \nu)^2] \\ \gamma_{1,x} &= E\left[\left(\frac{x - \nu}{\sigma}\right)^3\right] \\ \gamma_{e,x} &= E\left[\left(\frac{x - \nu}{\sigma}\right)^4\right]\end{aligned}$$

Ces quatre moments statistiques ne suffisent pas à définir la densité de probabilité de la position et la vitesse angulaires mais nous nous limitons cependant à ceux-ci.

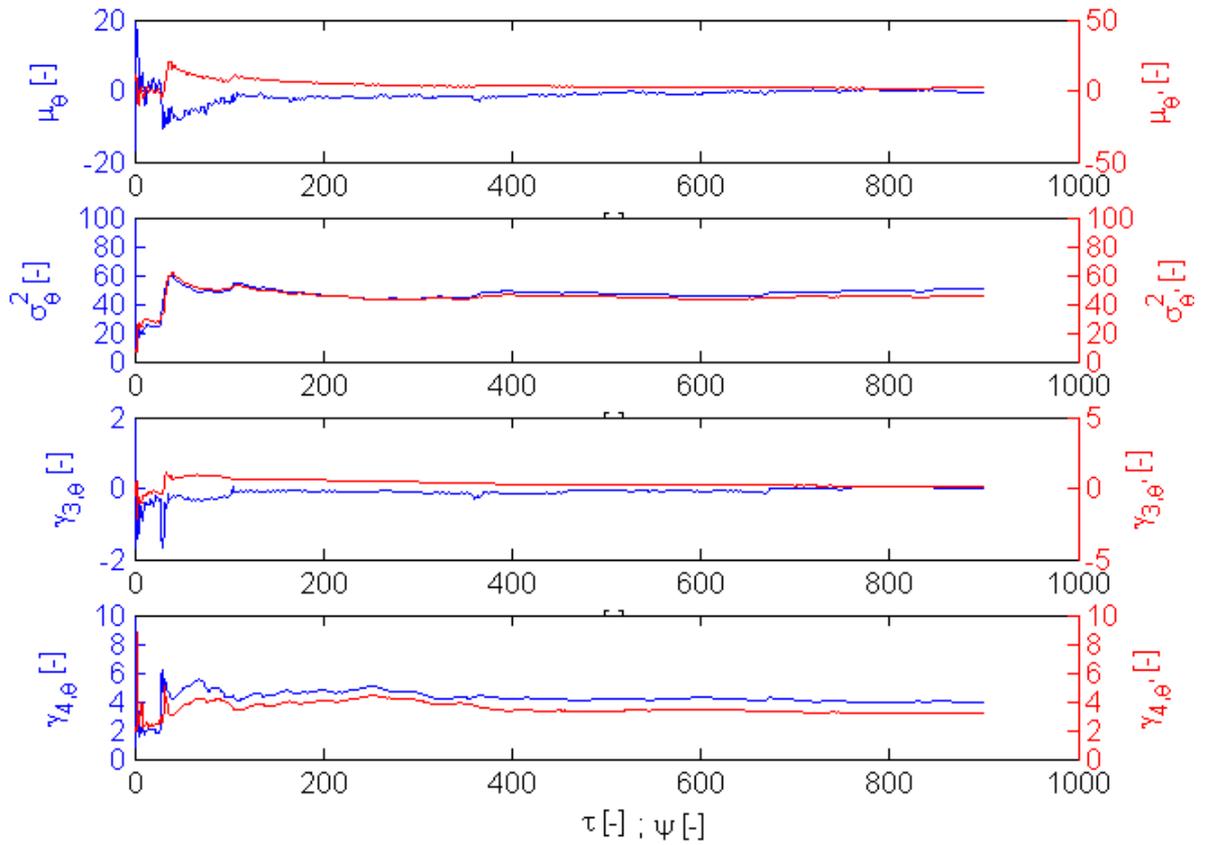


FIGURE 5.2.14 – Évolution des caractéristiques statistiques de la position et la vitesse angulaire d'ordre un à quatre pour  $I_u = 0.6$ .

À la Figure 5.2.14, il peut être observé que l'état stationnaire est atteint après environ  $\tau = 400$  alors que pour une intensité de turbulence plus importante, à la Figure 5.2.15, l'état stationnaire est atteint plus rapidement après environ  $\tau = 100$ . De plus, nous observons également que la position et la vitesse angulaires sont des variables de moyenne nulle et de répartition symétrique ( $\mu = \gamma_3 = 0$ ).

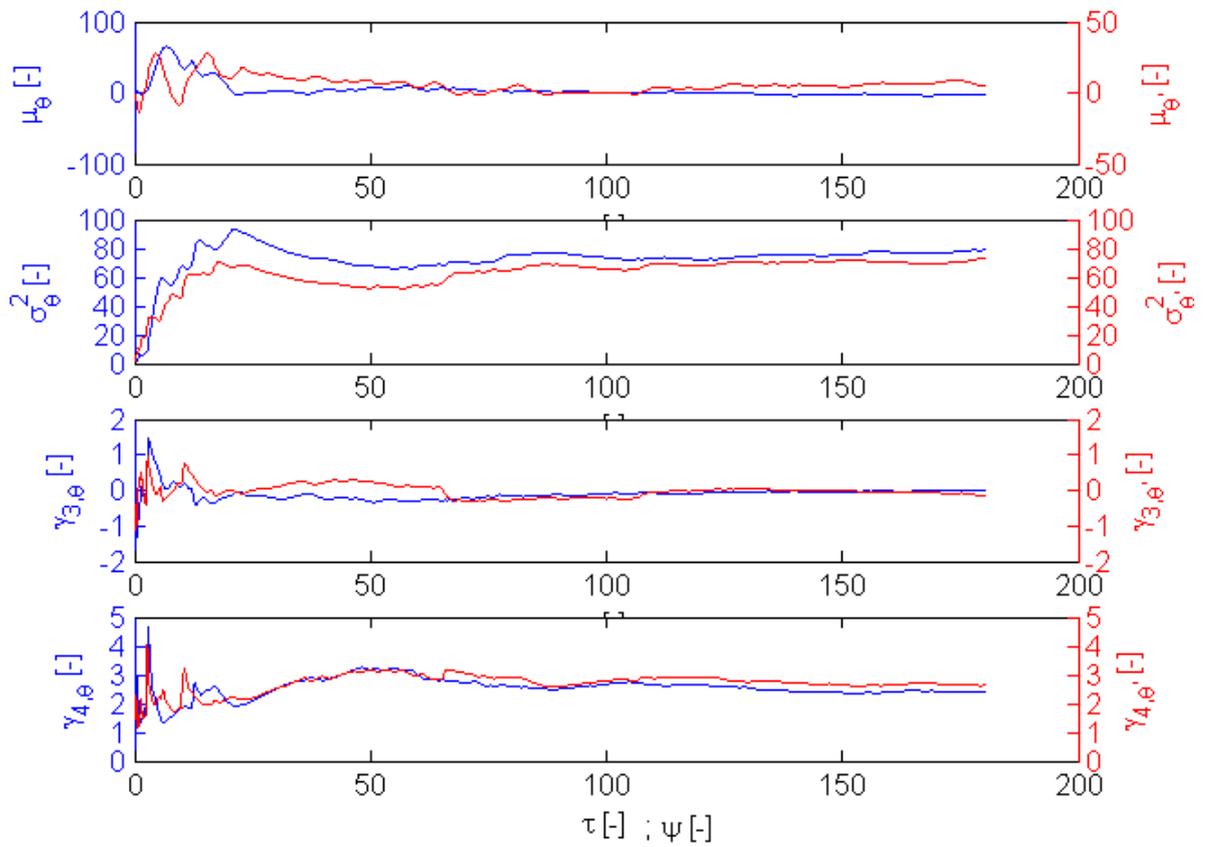
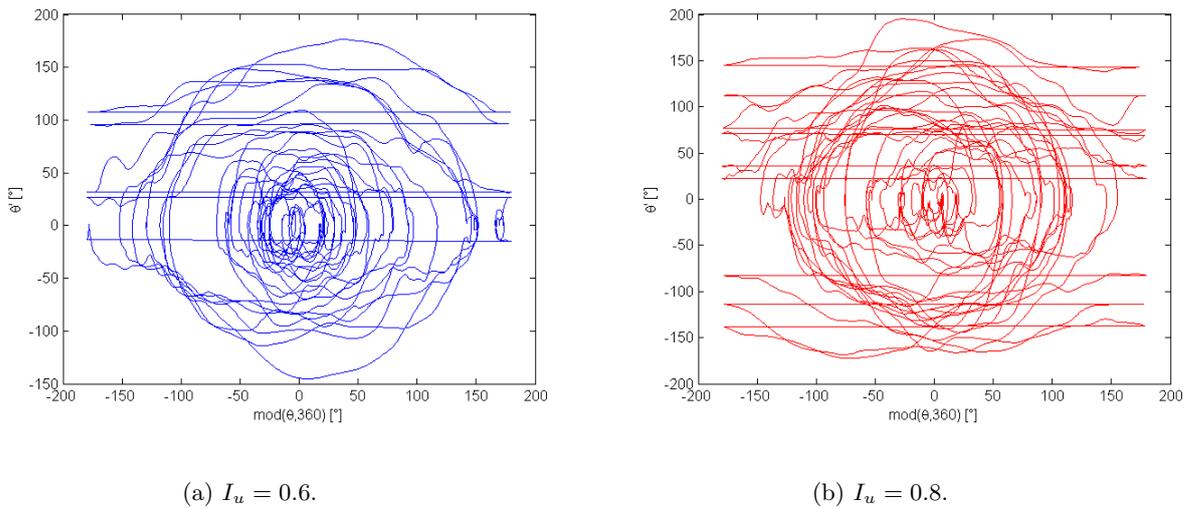


FIGURE 5.2.15 – Évolution des caractéristiques statistiques de la position et la vitesse angulaire d'ordre un à quatre pour  $I_u = 0.8$ .



(a)  $I_u = 0.6$ .

(b)  $I_u = 0.8$ .

FIGURE 5.2.16 – Plan de phase du mouvement de la grue pour les paramètres de référence.

La Figure 5.2.16a présente le plan de phase  $(\theta - \theta')$  du mouvement de la grue. L'allure rotative de la courbe présente le mouvement oscillatoire de la grue alors que les tronçons hori-

zontaux caractérisent l'auto-rotation et le passage de  $\theta = +180^\circ$  à  $\theta = -180^\circ$  ou inversement.

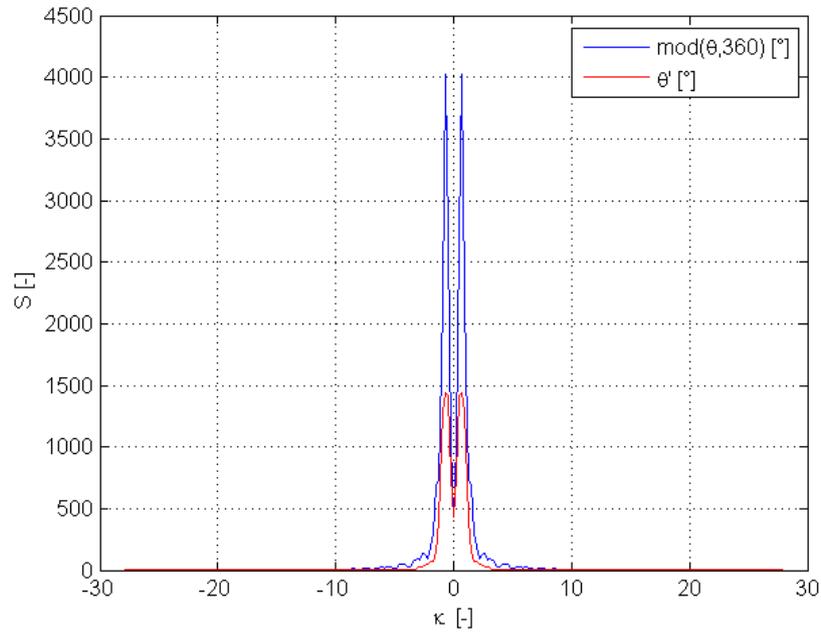


FIGURE 5.2.17 – Densité spectrale de puissance des position et vitesse angulaires pour les paramètres de référence pour  $I_u = 0.6$ .

La Figure 5.2.17 présente la densité spectrale de puissance de la position et de la vitesse angulaires. La présence de pics pour une valeur non nulle de  $\kappa$  signifie que les oscillations se produisent dans une bande de fréquence préférentielle. Le processus se rapproche donc d'un processus en bande étroite.

La Figure 5.2.18 présente la fonction de densité de probabilité de la position angulaire. Il peut être observé que la probabilité de la position tend vers une valeur nulle pour de grandes et petites valeurs d'angles lorsque la grue présente uniquement des oscillations (en bleu) alors qu'elle tend vers une valeur uniforme lorsqu'elle présente des auto-rotations (en rouge). Notons également que la position angulaire est bornée entre  $-180^\circ$  et  $180^\circ$ . La densité de probabilité en rouge pourrait être séparée en une composante uniforme liée à l'auto-rotation et une composante d'allure similaire à la courbe bleue liée aux oscillations. La somme des deux présente évidemment toujours une intégrale unitaire.

La Figure 5.2.19 présente la fonction de densité de probabilité de la vitesse angulaire. En présence d'auto-rotations, la vitesse atteint des valeurs plus importantes et la densité spectrale présente donc une allure plus étalée.

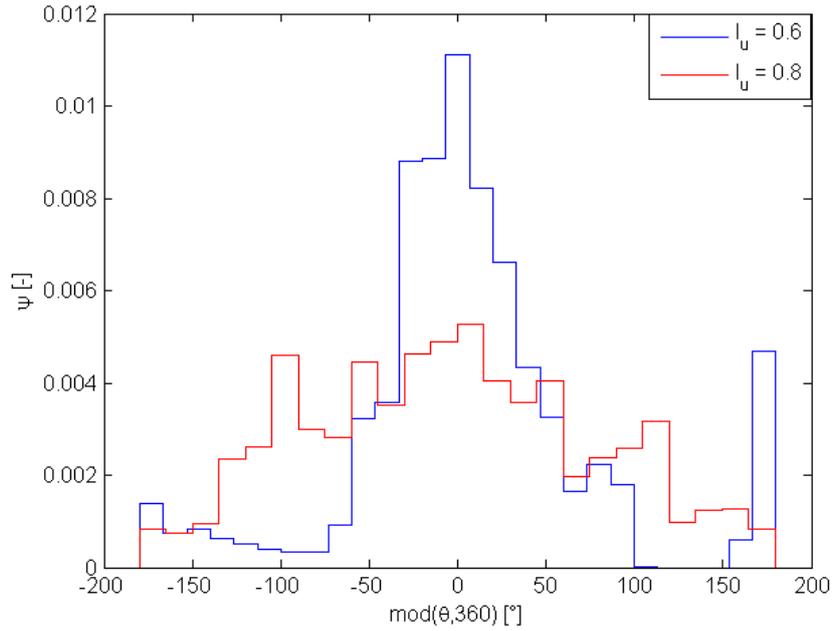


FIGURE 5.2.18 – Densité de probabilité de la position angulaire pour les paramètres de référence.

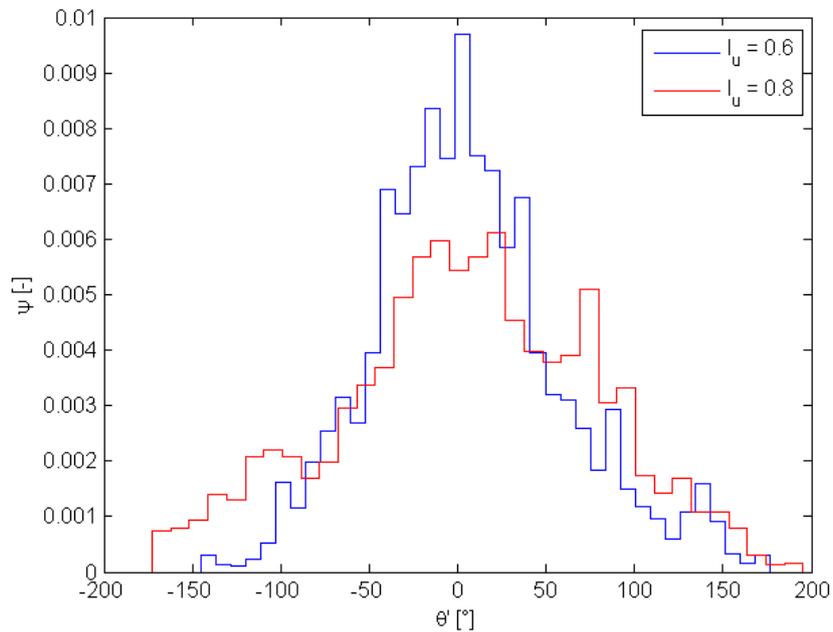


FIGURE 5.2.19 – Densité de probabilité de la vitesse angulaire pour les paramètres de référence.

Maintenant que le comportement de la grue a pu être étudié sous une simulation de champ de vent, les caractéristiques statistiques de la structure sont déterminées par simulations de Monte-Carlo. Un grand nombre de simulations sont faites pour l'ensemble de paramètres fixés.

Pour chacun de ces sets de données, la réponse de la grue est déterminée et les caractéristiques de la réponse sont étudiées grâce à l'ensemble des réponses obtenues.

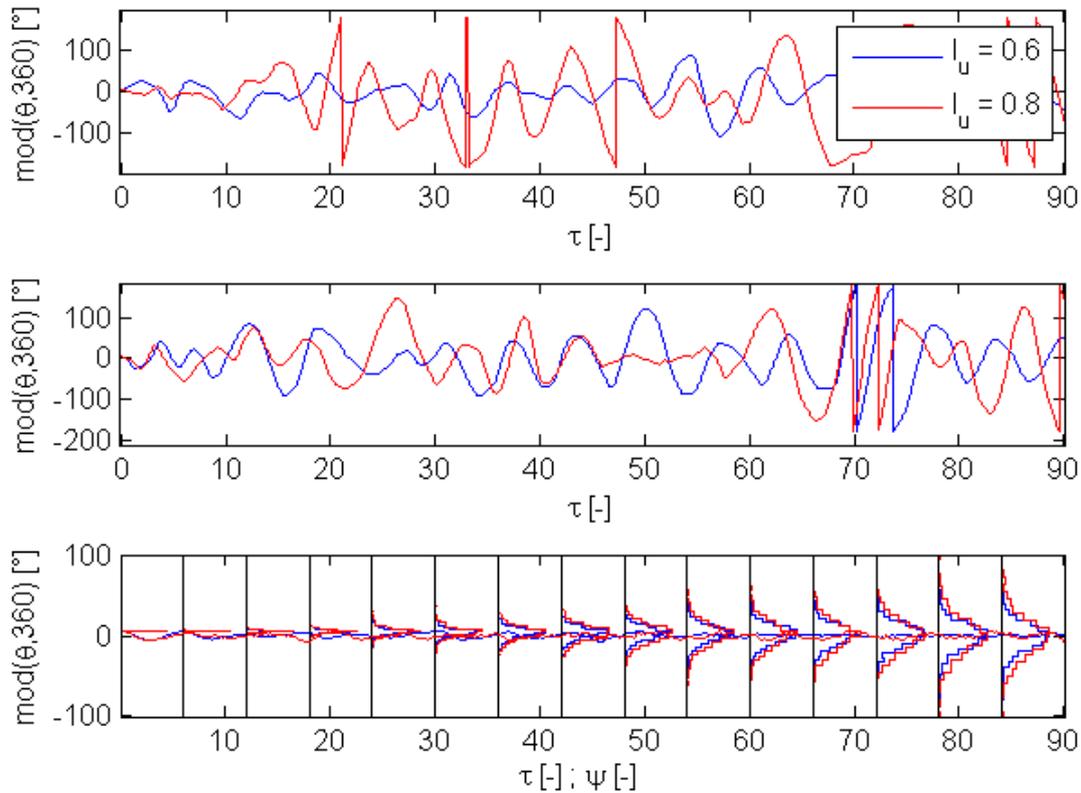


FIGURE 5.2.20 – Position angulaire (haut) et évolution de la densité de probabilité de  $\theta$  (bas) au cours du temps via le modèle complet pour les paramètres de référence.

Selon le théorème d'ergodicité, la densité de probabilité calculée à l'état stationnaire sur l'ensemble des échantillons à la Figure 5.2.20 est identique à celle calculée sur un échantillon temporel à l'état stationnaire à la Figure 5.2.18. Les deux courbes sont superposées à la Figure 5.2.21. Il en est de même pour la vitesse angulaire à la Figure 5.2.23.

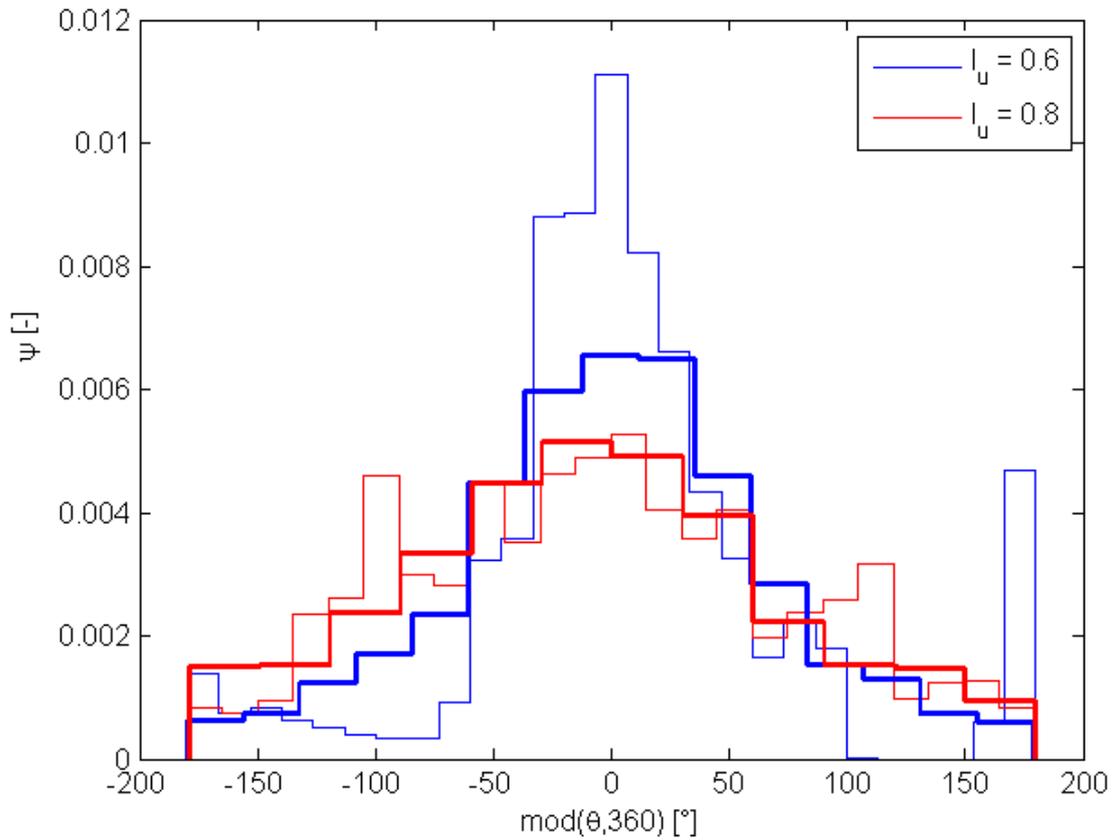


FIGURE 5.2.21 – Densité de probabilité de la position angulaire via le modèle complet pour les paramètres de référence : Calcul sur un échantillon au cours du temps (en trait fin) ou à l'état stationnaire sur 10000 échantillons (en gras).

Comme déjà annoncé, la position angulaire n'est pas une variable gaussienne. La densité de probabilité ne peut donc pas être définie à partir de la moyenne et de la variance. On observe à la Figure 5.2.20 que l'état stationnaire est atteint après environ  $\tau = 60$ .

Les mêmes observations peuvent être faites aux Figures 5.2.22 et 5.2.23.

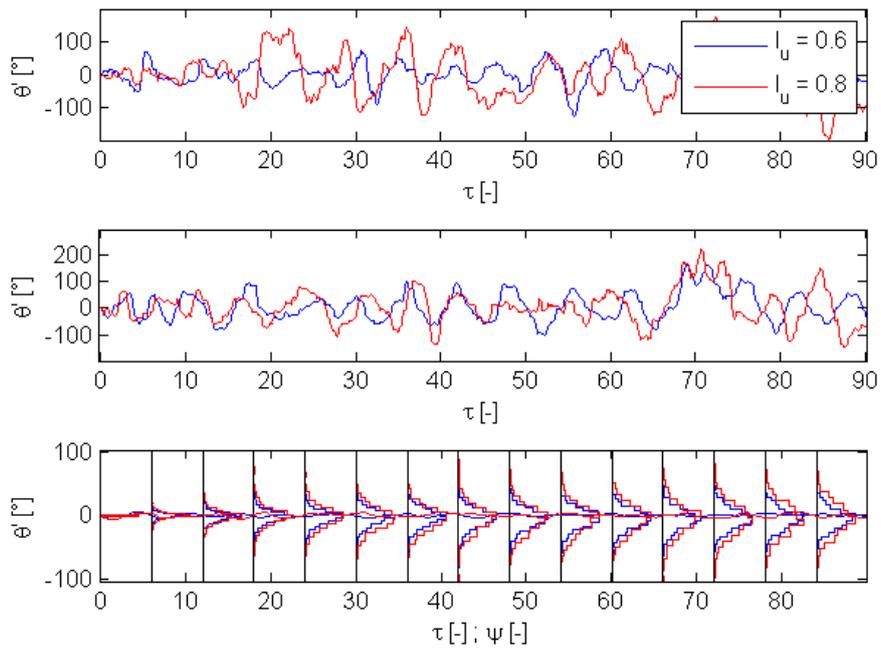


FIGURE 5.2.22 – Vitesse angulaire (haut) et évolution de la densité de probabilité de  $\theta'$  (bas) au cours du temps via le modèle complet pour les paramètres de référence.

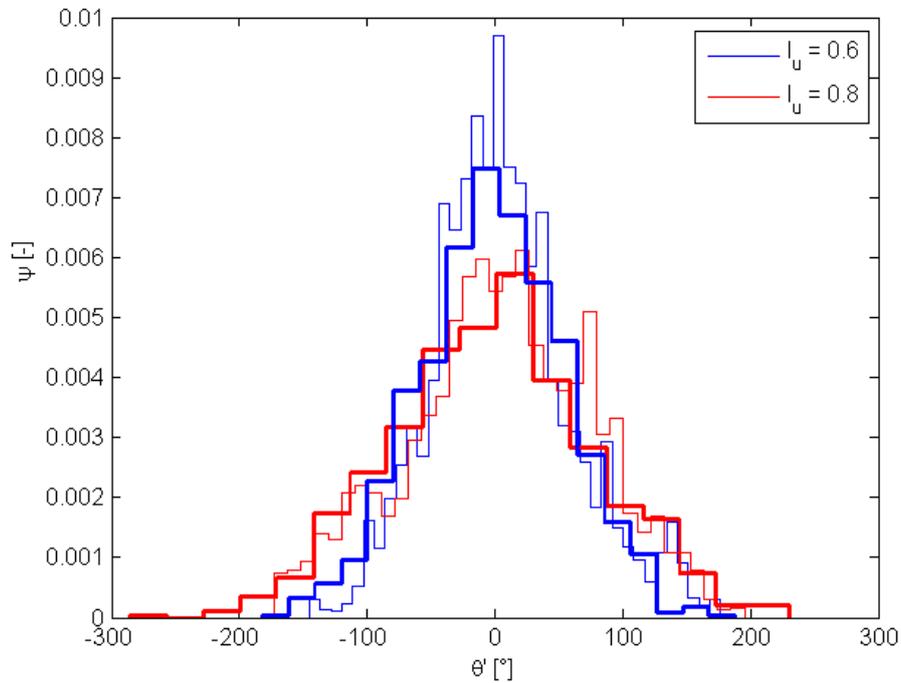


FIGURE 5.2.23 – Densité de probabilité de la vitesse angulaire via le modèle complet pour les paramètres de référence : Calcul sur un échantillon au cours du temps (en trait fin) ou à l'état stationnaire sur 10000 échantillons (en gras).

Les Figures 5.2.24 et 5.2.25 présentent la densité de probabilité conjointe de  $\theta$  et  $\theta'$ . Pour une intensité  $I_u = 0.6$ , aucune autorotation n'a lieu et on observe bien que la densité de probabilité tend vers zéro pour de grandes amplitudes d'angle, alors que pour une intensité de turbulence de 0.8, la grue présente quelques cycles d'autorotations et l'on observe une probabilité non nulle au voisinage de  $\theta = -180^\circ$  et  $\theta = 180^\circ$ . Les pics à proximité de  $\theta = 0$  dans la direction de  $\theta$  représentent les oscillations. La vitesse angulaire, quant à elle, est non bornée par la physique du phénomène et l'on observe que la probabilité d'observer de grandes vitesses tend vers zéro.

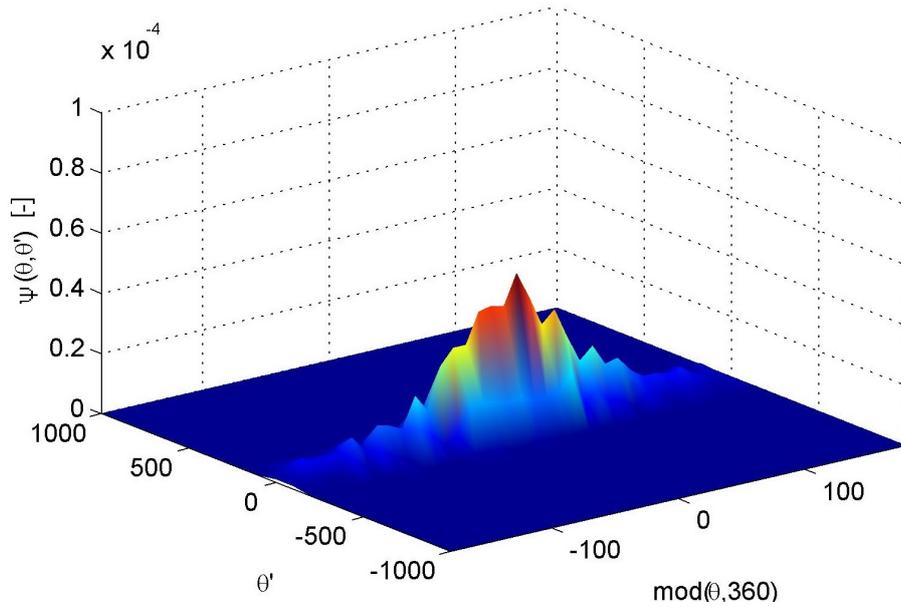


FIGURE 5.2.24 – Logarithme de la densité de probabilité conjointe de la position et de la vitesse angulaires à l'état stationnaire via le modèle complet pour les paramètres de référence et  $I_u = 0.6$ .

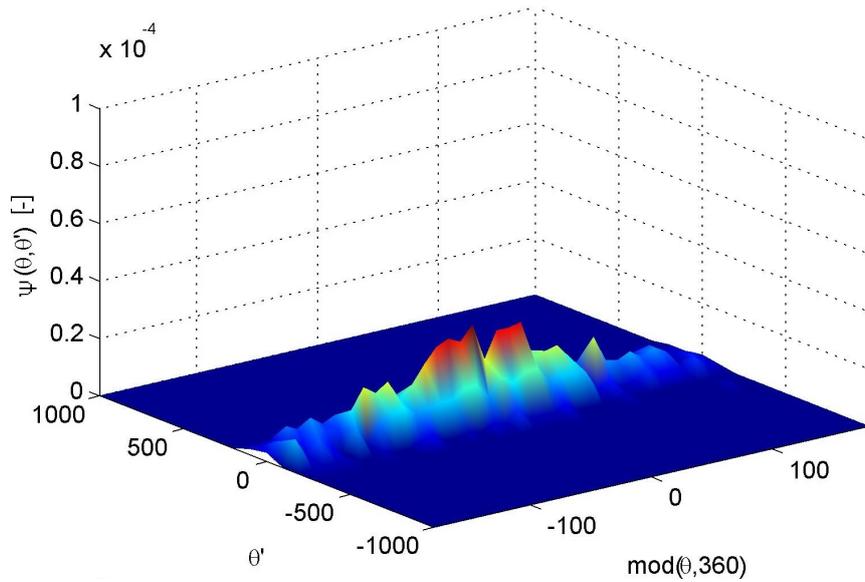


FIGURE 5.2.25 – Logarithme de la densité de probabilité conjointe de la position et de la vitesse angulaires à l'état stationnaire via le modèle complet pour les paramètres de référence et  $I_u = 0.8$ .

La Figure 5.2.26 présente la densité de probabilité de l'énergie contenue respectivement dans la position et la vitesse angulaires. Il peut être observé que la densité de probabilité de la position angulaire est plus étalée que celle de la vitesse.

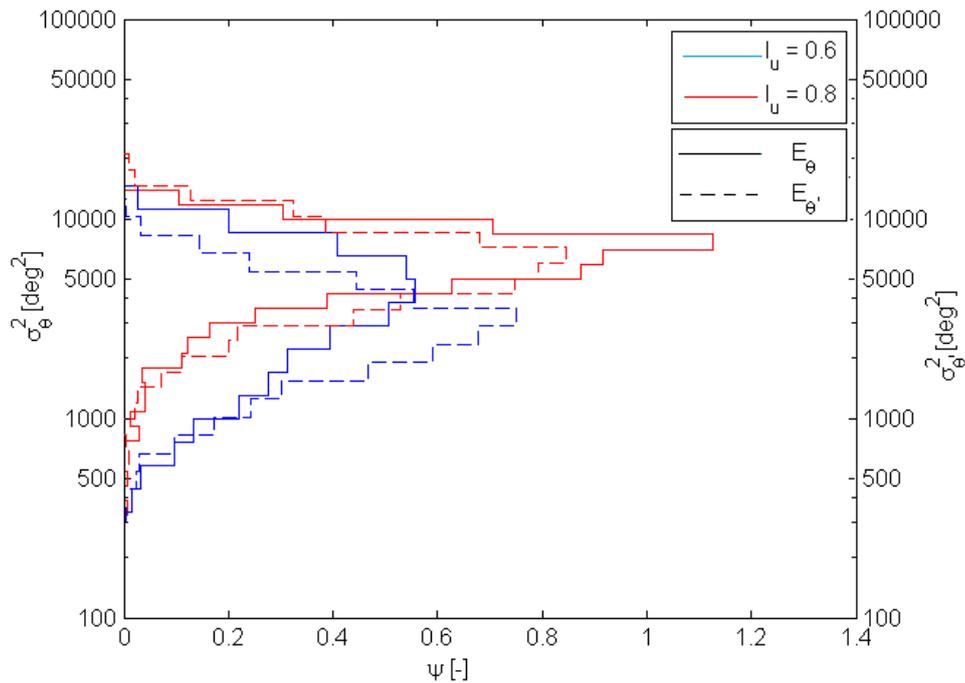


FIGURE 5.2.26 – Densité de probabilité de l'énergie selon  $\theta$  (en trait continu) et  $\theta'$  (en pointillés) via le modèle complet pour les paramètres de référence et  $I_u = 0.6$ .

La Figure 5.2.27 présente la densité de probabilité du pourcentage d'auto-rotations. Conformément à notre intuition, la probabilité d'obtenir un grand pourcentage d'auto-rotations augmente avec l'intensité de turbulence, et par conséquent la probabilité d'obtenir un faible pourcentage d'auto-rotations diminue. Il peut également être observé que la densité de probabilité est plus étalée pour une plus grande intensité de turbulence.

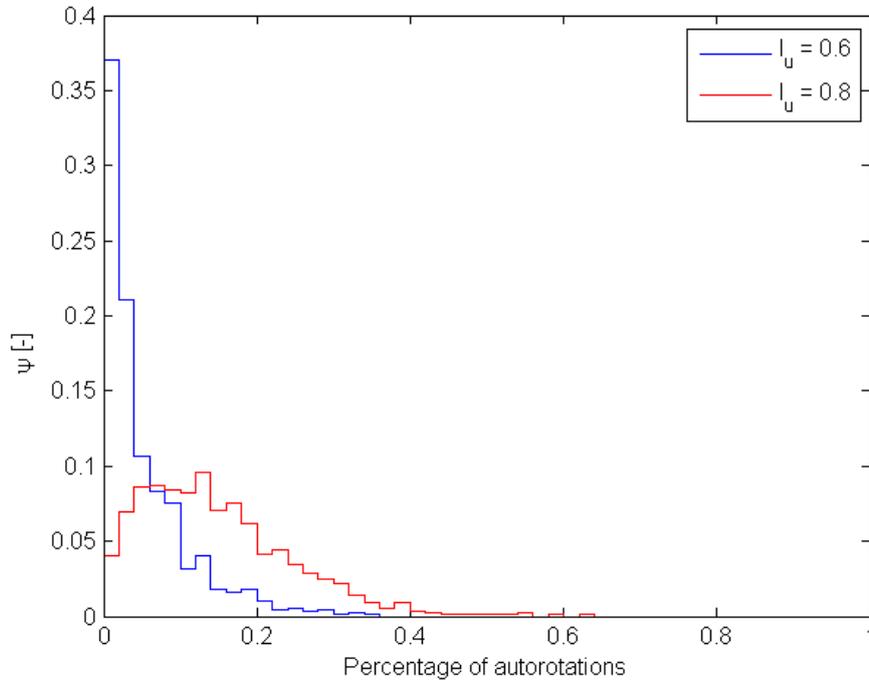


FIGURE 5.2.27 – Densité de probabilité du pourcentage d'auto-rotations via le modèle complet pour les paramètres de référence.

#### 5.2.4 Comparaison des densités spectrales de la vitesse turbulente de Von Karman et Davenport

Dans cette dernière partie, les résultats précédents développés à l'aide d'une formulation de Von Karman pour la densité spectrale de puissance de la turbulence du vent sont comparés à ceux obtenus à l'aide d'une formulation de Davenport (Equation 2.3.9). Pour ce faire, il est nécessaire de traduire la formulation de Davenport en adimensionnel. De manière à conserver une formulation en fonction du paramètre  $\gamma$  identique à celui de utilisé plus haut, nous supposons que  $L_u = 30m$  et décomposons ainsi la longueur caractéristique de Davenport  $1200m = 40 \times L_u$ .

$$\begin{aligned}
S_{u/U}^*(\omega \rightarrow t) &= \frac{S_u^*(\omega \rightarrow t)}{U^2} \\
&= \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{1200}{U}\right)^2 \frac{\omega}{2\pi} I_u^2}{\left(1 + \left(\frac{1200\omega}{2\pi U}\right)^2\right)^{4/3}} \\
&= \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{1200}{2\pi U}\right)^2 2\pi\omega I_u^2}{\left(1 + \left(\frac{1200\omega}{2\pi U}\right)^2\right)^{4/3}} \\
&= \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{40 \times L_u}{2\pi U}\right)^2 2\pi\omega I_u^2}{\left(1 + \left(\frac{40 \times L_u \omega}{2\pi U}\right)^2\right)^{4/3}} \\
&= \frac{\frac{2}{3} \left(40 \frac{\Omega^*}{\Omega_{L_u}}\right)^2 2\pi \frac{\omega}{\Omega^{*2}} I_u^2}{\left(1 + \left(40 \frac{\omega}{\Omega^*} \frac{\Omega^*}{\Omega_{L_u}}\right)^2\right)^{4/3}} \\
&\Downarrow \\
S_{u/U}^*(\kappa \rightarrow \tau) &= \Omega^* S_{u/U}^*(\omega \rightarrow t) \\
&= \frac{\frac{2}{3} (40\delta)^2 2\pi\kappa I_u^2}{\left(1 + (40\delta\kappa)^2\right)^{4/3}} \tag{5.2.1}
\end{aligned}$$

La Figure 5.2.28 présente la densité spectrale du moment calculée sur base de la formulation de Von Karman et de Davenport. Les deux ont une forme relativement semblable. La formulation de Davenport présente un pic de plus grande intensité et une bande de basses fréquences plus large alors que le contenu haute fréquence est moins important.

La Figure 5.2.29 présente la densité spectrale de puissance de la position angulaire selon les deux formulations. Le contenu fréquentiel de la position angulaire est plus important avec la formulation de Davenport également. Ceci se répercute sur la densité de probabilité de  $\theta$  où l'on observe une quantité d'autorotations plus importante avec la formulation de Davenport.

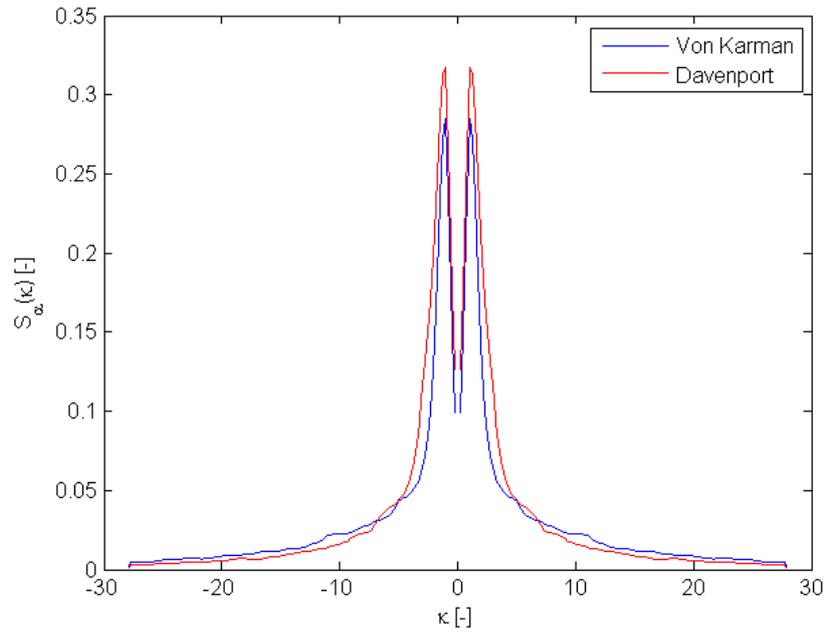


FIGURE 5.2.28 – Densité spectrale de puissance du moment adimensionnel  $\alpha$  selon Von Karman et Davenport.

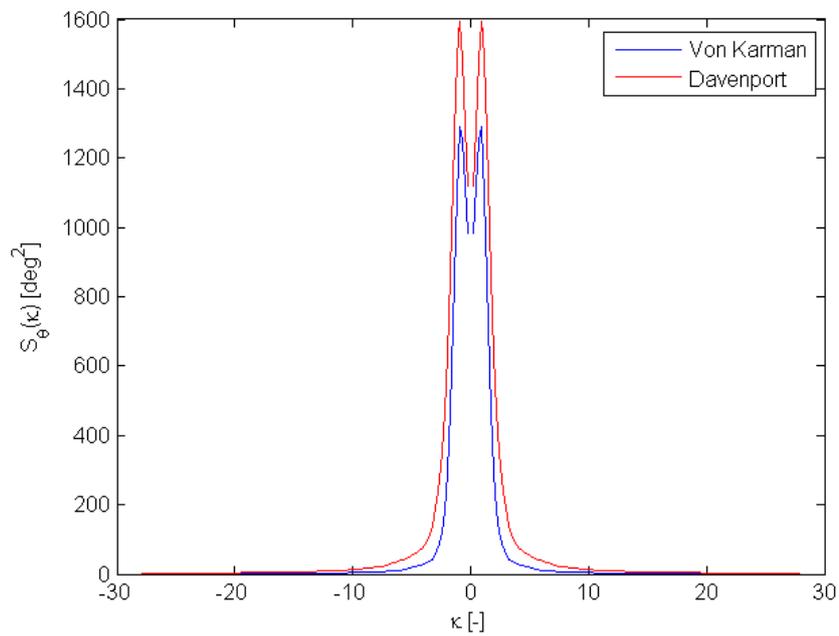


FIGURE 5.2.29 – Densité spectrale de puissance de la position angulaire selon Von Karman et Davenport.

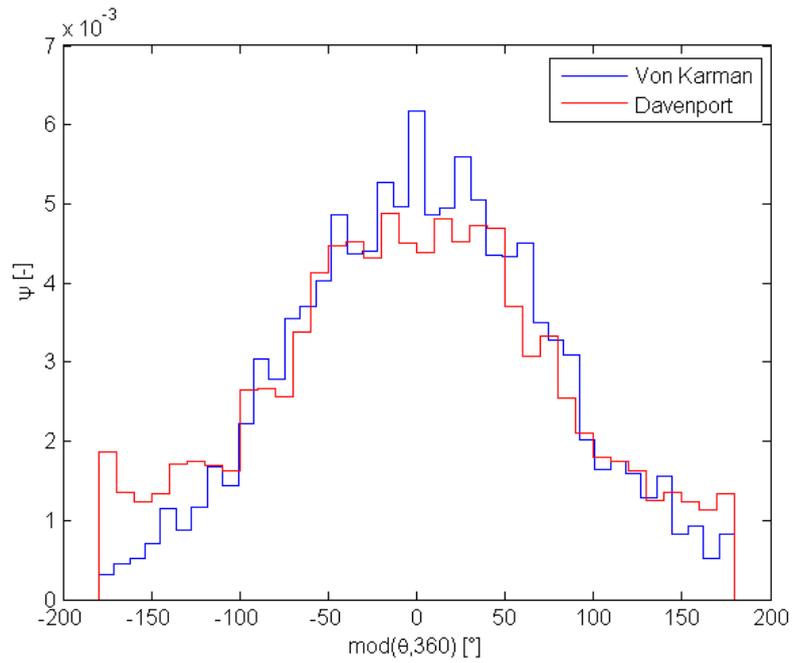


FIGURE 5.2.30 – Densité de probabilité de la position angulaire selon Von Karman et Davenport.

Les mêmes conclusions peuvent être tirées aux Figures 5.2.31 et 5.2.32 où l'on observe une intensité plus importante de la densité spectrale de puissance et des vitesses d'amplitude plus importante également.

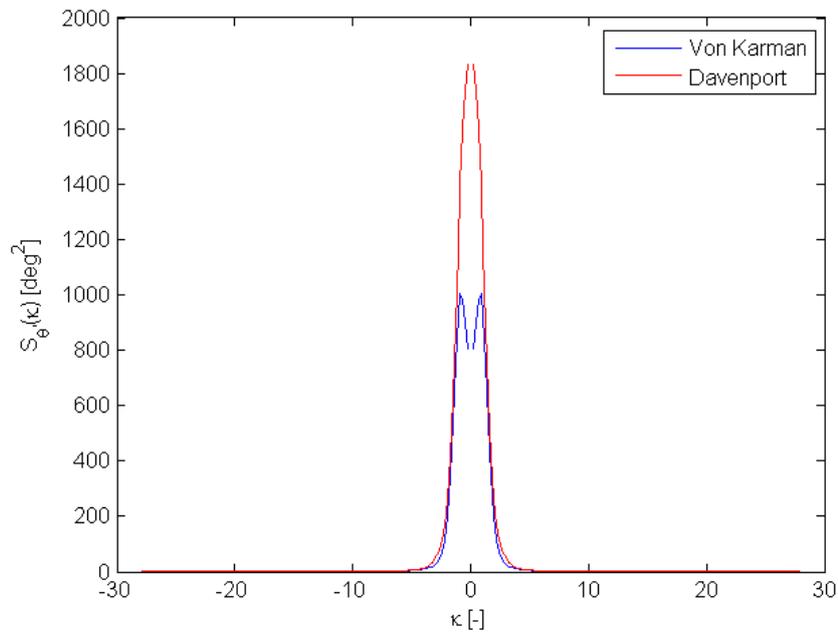


FIGURE 5.2.31 – Densité spectrale de puissance de la vitesse angulaire selon Von Karman et Davenport.

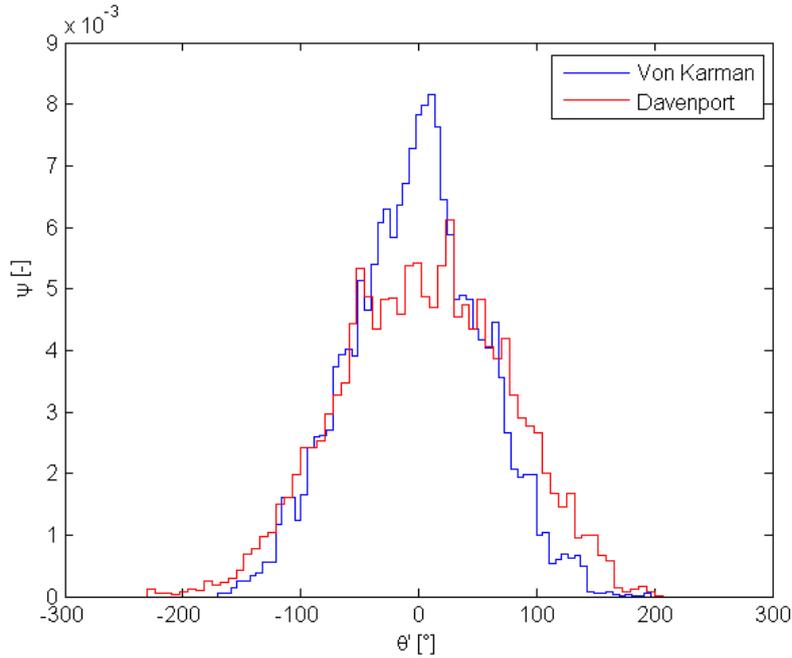


FIGURE 5.2.32 – Densité de probabilité de la position angulaire selon Von Karman et Davenport.

### 5.2.5 Caractérisation du mouvement en fonction de l'intensité de turbulence

Dans cette dernière section, l'influence de l'intensité de turbulence est étudiée en conservant la formulation de Von Karman. Les paramètres de référence sont conservés identiques à ceux de la section précédente et son repris à la Table 5.2.2.

$\beta$ [-]	0.01	$\gamma$ [-]	0.01	$m$ [-]	0.3
$I_u$ [-]	[0; 1]	$\delta$ [-]	0.02	$n$ [-]	3.33

TABEAU 5.2.2 – Paramètres adimensionnels des cas de référence 1 et 2.

Pour chaque valeur de l'intensité de turbulence, 200 échantillons sont simulés.

Les Figures 5.2.33 et 5.2.34 présentent l'évolution du logarithme de l'énergie selon  $\theta$  et  $\theta'$  avec l'intensité de turbulence. Les deux courbes présentent une allure similaire. Nous observons que la courbe est croissante et concave. Cette allure est différente de celle observée avec le modèle simplifié lorsque la turbulence du vent est idéalisée par un bruit blanc (Figures 3.6.13 et 3.6.14). Les valeurs sont également différentes. En effet, le modèle complet fournit une énergie plus faible pour les petites intensités de turbulence, et similaire pour les grandes intensités de turbulence. Enfin, nous observons que la variance de l'énergie est limitée et régulière par rapport au modèle simplifié.

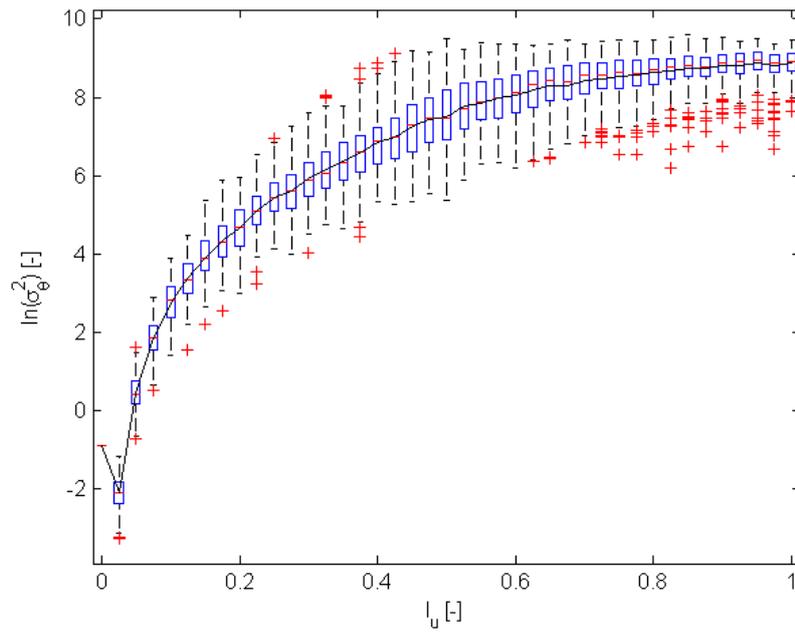


FIGURE 5.2.33 – Logarithme de l'énergie selon  $\theta$  selon le modèle complet et pour les paramètres de référence.

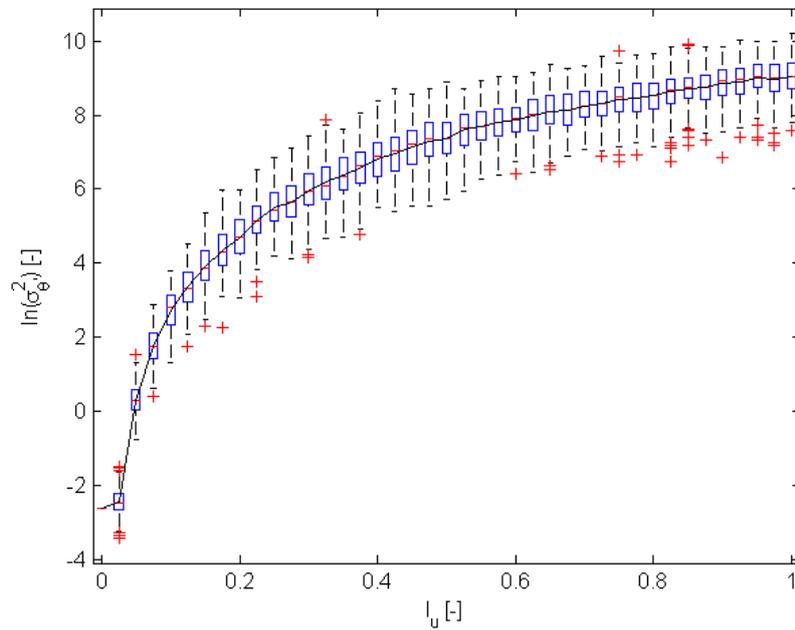


FIGURE 5.2.34 – Logarithme de l'énergie selon  $\theta'$  en fonction de  $I_u$  selon le modèle complet et pour les paramètres de référence.

De manière à observer la corrélation entre  $\sigma_\theta$  et  $\sigma_{\theta'}$ , la Figure 5.2.35 présente les points des Figures 5.2.33 et 5.2.34 dans le plan  $(\ln(\sigma_\theta^2), \ln(\sigma_{\theta'}^2))$  et en fonction de l'intensité de turbulence. Il peut être observé que la corrélation entre les deux variables est non seulement

très forte, mais que la droite calée sur les points est la droite  $\ln(\sigma_\theta^2) = \ln(\sigma_{\theta'}^2)$ . Le coefficient de corrélation des deux variables vaut 0.89. De plus, un ordonnancement clair apparaît en fonction de la turbulence, contrairement à la Figure 3.6.15 où le même graphe était observé avec le modèle simplifié et pour une vitesse de vent définie un bruit blanc. Cet ordonnancement signifie que les échantillons individuels présentent une énergie selon  $\theta$  et  $\theta'$  croissante et pas seulement une moyenne croissante pour un grand nombre d'échantillons. Une fois de plus, l'énergie liée à la position angulaire est bornée, tout comme la position angulaire elle-même.

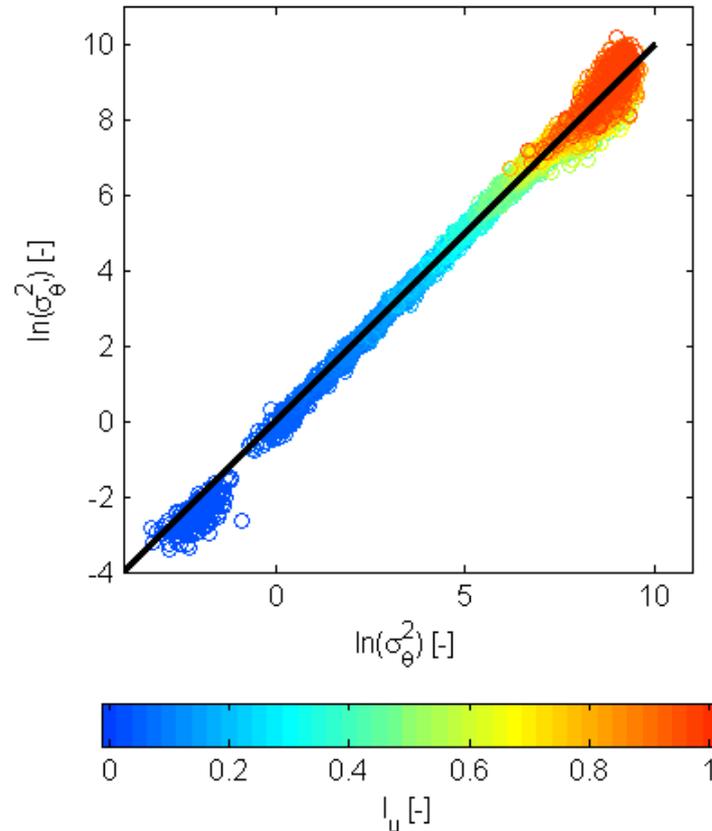


FIGURE 5.2.35 – Corrélation de  $\sigma_\theta^2$  et  $\sigma_{\theta'}^2$  pour le modèle complet.

Finalement, la Figure 5.2.36 présente l'évolution du pourcentage d'autorotations avec l'intensité de turbulence. La première présence d'autorotation apparaît pour  $I_u = 0.375$ . Il est ensuite croissant. Plus l'intensité de turbulence augmente, plus l'écart-type du pourcentage d'autorotation augmente. Dans la plage d'intensités de turbulence observées, qui est estimée comme suffisamment large tout en restant plausible d'un point de vue physique, le pourcentage maximal d'autorotation atteint est de 82%, ce qui correspond à un mouvement proche de l'autorotation pure.

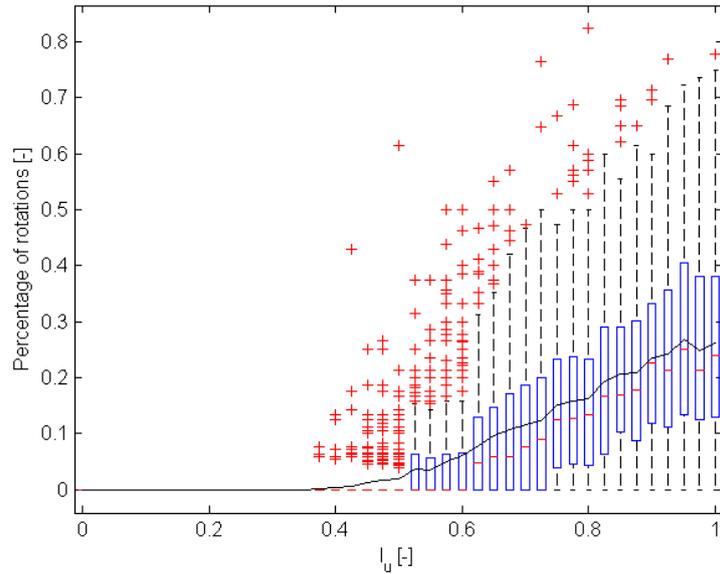


FIGURE 5.2.36 – Pourcentage d’auto-rotations en fonction de  $I_u$  selon le modèle complet et pour les paramètres de référence.

### 5.3 Conclusion

Dans cette dernière partie, un champ de vitesse turbulente réaliste a été intégré au modèle intermédiaire. Cette étape nécessite la prise en compte d’une densité spectrale de puissance de la vitesse ainsi que d’une fonction de cohérence spatiale. La sollicitation ainsi que la réponse de la grue sont donc des processus aléatoires. La densité spectrale utilisée est celle proposée par Von Karman mais une brève comparaison est également réalisée avec la formulation de Davenport.

Une étude de chacun des paramètres du modèle est réalisée de manière à correctement appréhender leur influence. La distinction est ainsi faite entre, d’une part, les paramètres du vent intervenant dans la densité spectrale de la vitesse, la fonction de cohérence et l’amortissement aérodynamique et, d’autre part, les paramètres géométriques intervenant dans le calcul du moment. Une étude fréquentielle est ici réalisée et l’on observe l’importance primordiale des temps caractéristiques du vent et leur interaction.

Pour un ensemble de paramètres choisis, la réponse de la grue est étudiée par simulations de Monte-Carlo et l’on arrive ainsi à valider l’hypothèse de stationnarité du phénomène ainsi que l’utilisation du théorème d’ergodicité.

Finalement, l’influence de l’intensité de turbulence est étudiée plus en détail par simulations de Monte-Carlo également. L’ensemble des simulations sont représentées dans un espace paramétrique constitué de la variance de la position et de la vitesse angulaires. Il peut être observé que les deux grandeurs sont fortement corrélées et tendent à prendre une valeur identique. De plus, la dispersion des résultats est faible et l’énergie croît de manière régulière avec l’intensité de turbulence.

## Chapitre 6

# Conclusion générale

Ce travail a pour objectif d'étudier le comportement des grues placées en girouette dans un champ de vent turbulent. Un phénomène auquel on s'intéresse est l'autorotation, susceptible d'entraîner la ruine partielle ou totale de la structure. C'est ce comportement en particulier que l'on cherche à appréhender dans le but de prédire et ainsi éviter son apparition.

La grue est idéalisée par un système à un degré de liberté en considérant une flèche parfaitement rigide pivotant autour d'un point fixe représentant la connexion flèche-mât. La pression sur la grue s'exprime en fonction de la vitesse relative entre le vent et la grue ainsi que d'un coefficient  $C_{\perp}$  dépendant de l'inclinaison de la grue par rapport à la vitesse du vent. La forme de ce coefficient est étudiée sur base de données expérimentales et une forme analytique lui est affectée. La grue est donc un mécanisme en rotation soumis à un couple d'inertie, un couple lié à la pression du vent et un couple de frottement sec à l'interface flèche-mât.

Dans le cas particulier où la structure se situe dans un champ de vitesse unidirectionnel et constant dans l'espace, celle-ci montre une forte analogie avec un pendule excité verticalement par son support. Suite à cette constatation, un premier modèle est développé, *le modèle simplifié*.

Il repose sur un certain nombre d'hypothèses permettant d'appréhender le comportement global de la grue en le comparant à celui du pendule paramétrique. Tout d'abord, l'amortissement aérodynamique est négligé. Ensuite, seul le terme de vitesse fluctuante parallèle à la direction moyenne et au premier ordre est pris en compte, alors que la vitesse perpendiculaire à la vitesse moyenne et les termes du second ordre sont négligés. De plus, le champ de vitesse fluctuante est choisi uniforme dans l'espace et parallèle à la vitesse moyenne. Finalement, le coefficient  $C_{\perp}$  prend une forme simplifiée de manière à se rapprocher du cas du pendule paramétrique. Sous ces hypothèses, l'équation régissant le comportement de la grue est adimensionnalisée. L'équation du mouvement est une équation différentielle non linéaire et discontinue nécessitant le développement d'une routine de résolution consistant à diviser l'équation en deux équations continues valables pour une vitesse angulaire respectivement positive et négative et alterner leur utilisation.

Sur base de ce modèle, deux formulations de la vitesse fluctuante sont étudiées. Le pre-

mier cas considère une vitesse fluctuante variant périodiquement au cours du temps. Les différents régimes de la grue (petites oscillations, grandes oscillations et autorotations) sont mis en évidence dans cette configuration. De plus, l'influence du modèle de frottement (sec, visqueux ou absence de frottement) sur le comportement de la flèche est observé. Finalement, le mouvement est caractérisé par la variance de la position et de la vitesse angulaires ainsi que par le pourcentage d'autorotations dans l'espace paramétrique constitué par la fréquence d'oscillations et l'amplitude de la vitesse fluctuante. Le diagramme de stabilité ainsi formé permet la mise en évidence de lobes d'instabilité pour certaines fréquences de sollicitations.

Dans le deuxième cas étudié, la vitesse fluctuante du vent est modélisée par un bruit blanc. La composante fluctuante de la vitesse est donc une variable aléatoire. Ce deuxième cas étudié permet la caractérisation statistique de la réponse, à savoir la position et la vitesse angulaires ainsi que l'apparition d'autorotations, par simulations de Monte-Carlo. Une intensité de turbulence plus importante donne lieu à un mouvement globalement moins stable, mais le caractère décorréolé du bruit blanc entraîne une dispersion importante des résultats.

Dans un second temps, un modèle plus complexe appelé *modèle intermédiaire* est développé en levant l'ensemble des hypothèses du modèle simplifié. Celui-ci prend donc en compte la turbulence bi-dimensionnelle, l'amortissement aérodynamique lié à la vitesse de la grue et les termes de vitesse fluctuante au second ordre. Ce modèle permet principalement l'appréhension de l'influence de chacune des hypothèses sur le mouvement de la grue. Une nouvelle équation différentielle avec de nouveaux paramètres régit désormais le comportement de la flèche. Le mouvement de la grue est étudié en considérant une vitesse périodique comme dans le modèle simplifié. Il est ainsi montré que la turbulence bi-dimensionnelle a une influence importante sur le comportement de la structure et exclut la possibilité d'une position d'équilibre de la grue alignée avec la vitesse moyenne du vent. L'influence des termes de vitesse fluctuante au second ordre et de l'amortissement aérodynamique est moins importante.

Finalement, un dernier modèle appelé *modèle complet* est développé. Ce modèle prend non seulement en compte la levée des différentes hypothèses du modèle simplifié, mais également une forme de la vitesse turbulente du vent plus réaliste. Celle-ci est désormais caractérisée par une densité spectrale de puissance de Von Karman et une cohérence spatiale exponentielle. Une étude approfondie de tous les éléments de l'équation du mouvement est réalisée sur base de ce modèle complet.

Dans cette dernière partie, l'influence de chacun des paramètres du problème sur le mouvement de la grue est étudiée. La distinction est faite entre les paramètres liés à la modélisation du vent comme l'intensité de turbulence, la longueur de turbulence, la fonction de cohérence, etc. et les paramètres liés à la géométrie de la grue comme le rapport de longueur entre la flèche et la contreflèche, la fréquence propre de la grue, etc. L'interaction entre le vent et la structure est déterminante pour le mouvement de la flèche.

Pour une configuration fixée, le caractère stationnaire et ergodique du processus a été démontré, ce qui valide l'utilisation d'un grand nombre d'outils comme la densité spectrale de puissance, le théorème d'ergodicité, etc. Finalement, l'évolution des variances de la position et de la vitesse angulaires en fonction de l'intensité de turbulence montre que non seulement les deux variables sont fortement corrélées mais également qu'elles sont corrélées selon la

relation  $\sigma_\theta = \sigma_{\theta'}$ .

Le comportement global de la grue dans un espace ouvert a été étudié et le mouvement a pu être caractérisé grâce aux différents modèles. Lors d'une étude plus approfondie de ce problème, il pourrait être intéressant de placer la grue dans un environnement urbain, et non plus dans un environnement ouvert comme réalisé dans le cadre de ce travail. En effet, les grues sont le plus souvent installées en ville. Dans cet environnement, le sillage d'un bâtiment par exemple est susceptible de générer un décollement tourbillonnaire et une sollicitation différente sur la grue. Le modèle pourrait également être complexifié en considérant la flexibilité de la flèche et de la mâture ainsi que, par conséquent, leur déformation dynamique sous l'action du vent.

# Chapitre 7

## Bibliographie

- Panagiotis Alevras, Daniil Yurchenko, and Arvid Naess. Numerical investigation of the parametric pendulum under filtered random phase excitation, 2013.
- craneaccidents.com. Crane accidents, 2012. <http://www.craneaccidents.com/2012/11/report/update/one57s-crane-problem/>.
- V. Denoël. Analyse de structures soumises au vent turbulent, 2003.
- M. Di Paola. Digital simulation of wind field velocity. *Journal Of Wind Engineering And Industrial Aerodynamics*, 74-6 :91–109, 1998. Times Cited : 25 2nd European and African Conference on Wind Engineering JUN 22-26, 1997 GENOA, ITALY.
- C. Dyrbye and S. O. Hansen. *Wind loads on structures*. John Wiley and Sons, 1997.
- J. F. Eden, A. J. Butler, and J. Patient. Wind tunnel tests on model crane structures. *Engineering Structures*, 5(4) :289–298, 1983. Cited By (since 1996) :3 Export Date : 20 February 2014 Source : Scopus.
- M. Gitterman. Spring pendulum : Parametric excitation vs an external force. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 389(16) :3101–3108, 2010a. Cited By (since 1996) :1 Export Date : 18 March 2014 Source : Scopus.
- Moshe Gitterman. *The Chaotic Pendulum*. World Scientific Publishing, 2010b.
- J. L. Lilien and A. P. Dacosta. Vibration amplitudes caused by parametric-excitation of cable-stayed structures. *Journal Of Sound And Vibration*, 174(1) :69–90, 1994. Times Cited : 24.
- T. Mara. Effects of a construction tower crane on the wind loading of a high-rise building. *Journal of Structural Engineering*, 136(11) :1453–1460, 2010.
- Anna Najdecka and Marian Wiercigroch. Rotation of a parametric pendulum subjected to a stochastic wave excitation, 2007.
- K. Nandakumar, M. Wiercigroch, and A. Chatterjee. Optimum energy extraction from rotational motion in a parametrically excited pendulum. *Mechanics Research Communications*, 43 :7–14, 2012. Cited By (since 1996) :1 Export Date : 18 March 2014 Source : Scopus.

- Potain, 2014. <https://www.potain.fr/products/index.cfm>.
- M. Shinozuka and G. Deodatis. Simulation of multi-dimensional gaussian stochastic fields by spectral representation. *Applied Mechanics Reviews*, 49(1) :29–53, 1996. Cited By (since 1996) :158 Export Date : 20 February 2014 Source : Scopus.
- G. Solari and G. Piccardo. Probabilistic 3-d turbulence modeling for gust buffeting of structures. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16(1) :73–86, 2001. doi : DOI : 10.1016/S0266-8920(00)00010-2.
- Arthur Stinner, Colin F. Gauld, and Michael R. Matthews. *The Pendulum*. Springer-Verlag, 2005.
- B. H. Suits. Long pendulums in gravitational gradients. *European Journal of Physics*, 27(2) : L7–L11, 2006. European Journal of Physics, 2006, Vol.27(2), pp.L7-L11.
- Z. Sun, N. Hou, and H. Xiang. Safety and serviceability assessment for high-rise tower crane to turbulent winds. *Frontiers of Architecture and Civil Engineering in China*, 3(1) :18–24, 2009. Cited By (since 1996) :2 Export Date : 20 February 2014 Source : Scopus.
- Armin W. Troesch, Jeffrey M. Falzarano, and Steven W. Shaw. Application of global methods for analyzing dynamical systems to ship rolling motion and capsizing. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 02(01) :101–115, 1992.
- D. Voisin. *Etudes des effets du vent sur les grues à tour*. PhD thesis, ECOLE POLYTECHIQUE DE L’UNIVERSITE DE NANTES, 2003.
- youtube.com. Youtube - crane spinning out of control, 2008. <http://www.youtube.com/watch?v=6h5p9WC6Y7s>.
- D. Yurchenko, A. Naess, and P. Alevras. Pendulum’s rotational motion governed by a stochastic mathieu equation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 31(0) :12–18, 2013.