# De l'importance des échelles dyadiques dans les espaces $S^\nu$

Thomas Kleyntssens
tkleyntssens@ulg.ac.be

En collaboration avec S. Nicolay

Université de Liège

Journées du GDR Analyse Multifractale
Domaine de Chalès, 21–24 septembre 2014

# Plan

1. **Introduction**
2. **Une généralisation des espaces $S^\nu$**
   - Introduction
   - Robustesse
   - Lien avec les espaces de Besov généralisés
3. **Et en pratique ?**
   - Explication de la méthode
   - Exemple basique avec $S^\nu$
   - Complément d'informations avec $S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}}$
4. **Conclusion**

# Plan

### Définition (Continuité au sens de Hölder)

Fixons $t \in \mathbb{R}$ et $s > 0$. Si $f \in L^\infty_{loc}$ alors nous disons que $f \in C^s(t)$ s'il existe un polynôme $P$ de degré strictement inférieur à $s$, une constante $C > 0$ et un voisinage $\Omega$ de 0 tels que

$$|f(t+l) - P(l)| \leq C|l|^s$$

pour tout $l \in \Omega$. Si $s \in ]0;1]$, la condition peut se réécrire

$$|f(t+l) - f(t)| \leq C|l|^s.$$

### Définition (Continuité au sens de Hölder)

Fixons $t \in \mathbb{R}$ et $s > 0$. Si $f \in L^\infty_{loc}$ alors nous disons que $f \in C^s(t)$ s'il existe un polynôme $P$ de degré strictement inférieur à $s$, une constante $C > 0$ et un voisinage $\Omega$ de $0$ tels que

$$|f(t+l) - P(l)| \leq C|l|^s$$

pour tout $l \in \Omega$. Si $s \in ]0;1]$, la condition peut se réécrire

$$|f(t+l) - f(t)| \leq C|l|^s.$$

### Définition

Soient $t \in \mathbb{R}$ et $f \in L^\infty_{loc}$ ; l'**exposant de Hölder** de $f$ en $t$ est défini par

$$h_f(t) = \sup\{s > 0 : f \in C^s(t)\}.$$

## Definition

Le **spectre de Hölder** d'une fonction $f \in L^\infty_{loc}$ est défini par

$$d_f : h \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\} \mapsto \dim_{\mathcal{H}}(\{t : h_f(t) = h\}) \in [0;1] \cup \{-\infty\}$$

où $\dim_{\mathcal{H}}$ est la dimension de Hausdorff.
Convention : $\dim_{\mathcal{H}}(\emptyset) = -\infty$.

La fonction est dite **monofractale** s'il n'existe qu'un seul $h$ fini tel que $d_f(h) \neq -\infty$.

# Les ondelettes

Il existe des fonctions $\phi$ et $\psi$ ayant de bonnes hypothèses telles que

$$\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi(2^j \cdot - k) : j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}\}$$

forment une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$, i.e. que si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k \phi(x-k) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{jk} \psi(2^j x - k)$$

où $C_k = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x-k)dx$ et $c_{jk} = 2^j \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(2^j x - k)$.

On peut en déduire une base sur $L^2([0;1])$ en introduisant l'opérateur de périodisation

$$per[f] = \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(x+l).$$

Les ondelettes correspondantes sont

$$\{per[\psi(2^j \cdot - k)] : j \in \mathbb{N},\ k \in \{0, \ldots, 2^j - 1\}\}.$$

# Notation

Notons $\lambda_{jk}$ le cube dyadique

$$\lambda_{jk} = \frac{k}{2^j} + [0, \frac{1}{2^j}[,$$

et le coefficient d'ondelette correspondant

$$c_{\lambda_{jk}} \text{ ou } c_\lambda.$$

Notons $\Lambda_j$ l'ensemble des cubes dyadiques à l'échelle $j$ et $\vec{c} = (c_\lambda)_\lambda$.

# Plan

# Plan

## Definition

Le **profil d'ondelette** d'une fonction $f \in L^2([0;1])$ est défini par

$$\nu_f : \alpha \in \mathbb{R} \mapsto \lim_{\epsilon \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \# E_j(1, \alpha + \epsilon)(f)}{\log 2^j}$$

où $E_j(C, \alpha)(f) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C 2^{-\alpha j}\}$.

## Definition

Le **profil d'ondelette** d'une fonction $f \in L^2([0;1])$ est défini par

$$\nu_f : \alpha \in \mathbb{R} \mapsto \lim_{\epsilon \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \# E_j(1, \alpha + \epsilon)(f)}{\log 2^j}$$

où $E_j(C, \alpha)(f) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C 2^{-\alpha j}\}$.

Cette fonction est croissante, continue à droite et il existe $\alpha_{\min} > 0$ tel que $\nu_f(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_{\min}$ et $\nu_f(\alpha) \in [0;1]$ pour tout $\alpha \geq \alpha_{\min}$.
De plus, la constante strictement positive 1 apparaissant dans la définition de $\nu_f$ est arbitraire (Kleyntssens, Esser, Nicolay, 2014 [7]).

## Definition

Le **profil d'ondelette** d'une fonction $f \in L^2([0;1])$ est défini par

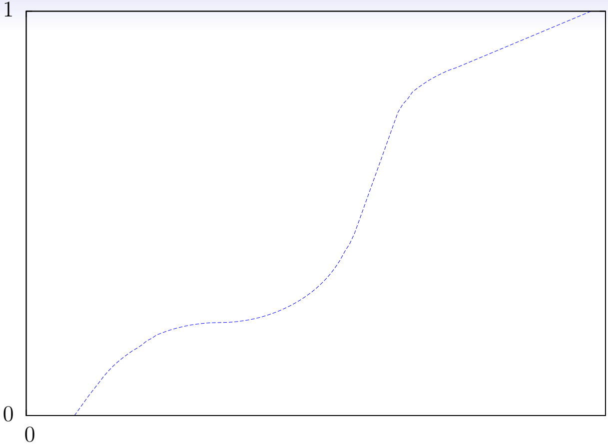
$$\nu_f : \alpha \in \mathbb{R} \mapsto \lim_{\epsilon \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \# E_j(1, \alpha + \epsilon)(f)}{\log 2^j}$$

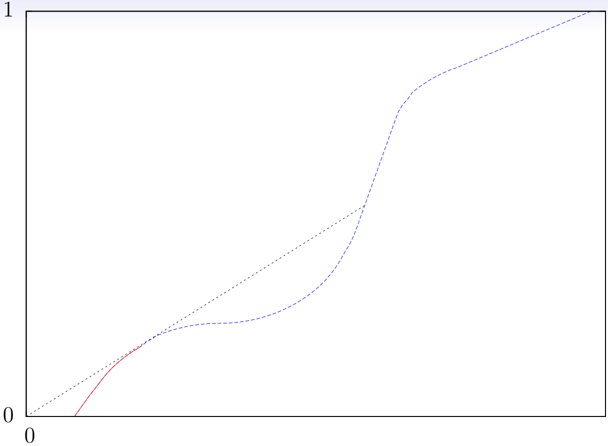
où $E_j(C, \alpha)(f) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C 2^{-\alpha j}\}$.

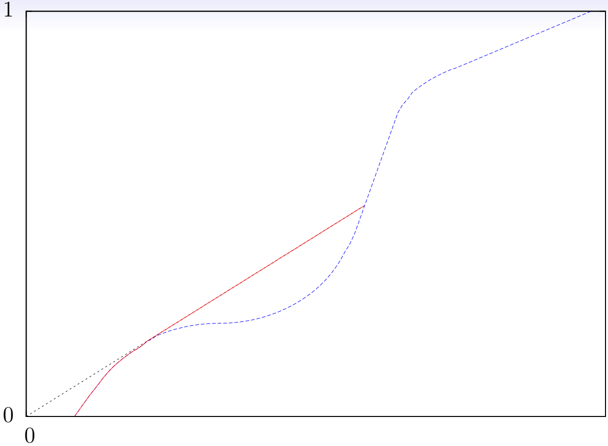
Cette fonction est croissante, continue à droite et il existe $\alpha_{\min} > 0$ tel que $\nu_f(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_{\min}$ et $\nu_f(\alpha) \in [0;1]$ pour tout $\alpha \geq \alpha_{\min}$.
De plus, la constante strictement positive 1 apparaissant dans la définition de $\nu_f$ est arbitraire (Kleyntssens, Esser, Nicolay, 2014 [7]).

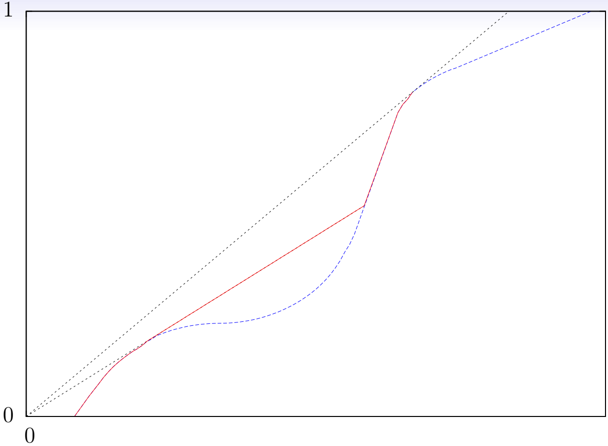
## Utilité

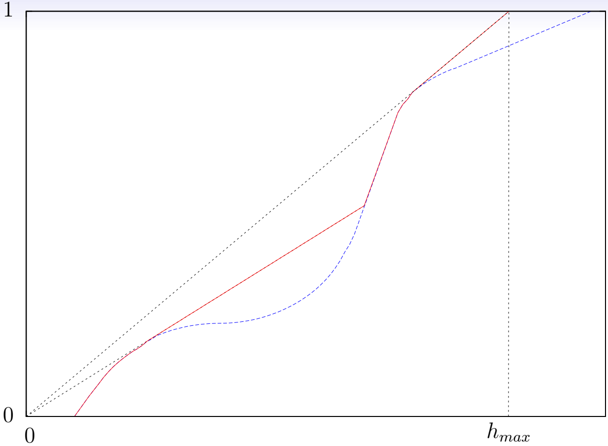
L'enveloppe visiblement croissante $d_f^{\nu_f}$ de la fonction $\nu_f$ est une « approximation » du spectre de $f$.


1
0
0


1
0
0


1
0
0


1
0
0


1
0
0
$h_{max}$

Soit une fonction $\nu$ croissante, continue à droite et supposons qu'il existe $\alpha_{\min} > 0$ tel que $\nu(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_{\min}$ et $\nu(\alpha) \in [0;1]$ pour tout $\alpha \geq \alpha_{\min}$.

**Définition**

L'espace $S^\nu$ est défini par

$$S^\nu = \{f \in L^2([0;1]) : \nu_f(\alpha) \leq \nu(\alpha) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Soit une fonction $\nu$ croissante, continue à droite et supposons qu'il existe $\alpha_{\min} > 0$ tel que $\nu(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_{\min}$ et $\nu(\alpha) \in [0;1]$ pour tout $\alpha \geq \alpha_{\min}$.

## Définition

L'espace $S^\nu$ est défini par

$$S^\nu = \{f \in L^2([0;1]) : \nu_f(\alpha) \leq \nu(\alpha) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

## Théorème (Aubry, Bastin, Dispa, 2007 [2])

Les ensembles

$$\{f \in S^\nu : \nu(\alpha) = \nu_f(\alpha) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}\}$$

et

$$\left\{ f \in S^\nu : d_f(h) = \begin{cases} d_f^\nu(h) & \text{si } h \leq h_{max} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \right\}$$

sont prévalents dans $S^\nu$.

Si $f \in S^\nu$ alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\epsilon' \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \# E_j(1, \alpha + \epsilon')(f)}{\log 2^j} \leq \nu(\alpha)$$

Si $f \in S^\nu$ alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\epsilon' \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \# E_j(1, \alpha + \epsilon')(f)}{\log 2^j} \leq \nu(\alpha)$$

i.e. pour tout $\epsilon > 0$, si $\epsilon'$ est suffisamment petit,

$$\limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \# E_j(1, \alpha + \epsilon')(f)}{\log 2^j} \leq \nu(\alpha) + \frac{\epsilon}{2}$$

Si $f \in S^\nu$ alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\epsilon' \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \# E_j(1, \alpha + \epsilon')(f)}{\log 2^j} \leq \nu(\alpha)$$

i.e. pour tout $\epsilon > 0$, si $\epsilon'$ est suffisamment petit,

$$\limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \# E_j(1, \alpha + \epsilon')(f)}{\log 2^j} \leq \nu(\alpha) + \frac{\epsilon}{2}$$

i.e. pour tout $C > 0$, il existe $J > 0$ tel que pour tout $j \geq J$,

$$\frac{\log \# E_j(1, \alpha + \epsilon')(f)}{\log 2^j} \leq \nu(\alpha) + \epsilon$$

et

$$\begin{aligned} \# E_j(1, \alpha + \epsilon')(f) &= \# \{ \lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq 2^{-(\alpha + \epsilon')j} \} \\ &\geq \# \{ \lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C 2^{-\alpha j} \} \end{aligned}$$

Si $f \in S^\nu$ alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\epsilon' \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \# E_j(1, \alpha + \epsilon')(f)}{\log 2^j} \leq \nu(\alpha)$$

i.e. pour tout $\epsilon > 0$, si $\epsilon'$ est suffisamment petit,

$$\limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \# E_j(1, \alpha + \epsilon')(f)}{\log 2^j} \leq \nu(\alpha) + \frac{\epsilon}{2}$$

i.e. pour tout $C > 0$, il existe $J > 0$ tel que pour tout $j \geq J$,

$$\frac{\log \# E_j(1, \alpha + \epsilon')(f)}{\log 2^j} \leq \nu(\alpha) + \epsilon$$

et

$$\begin{aligned} \# E_j(1, \alpha + \epsilon')(f) &= \# \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq 2^{-(\alpha + \epsilon')j}\} \\ &\geq \# \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C 2^{-\alpha j}\} \end{aligned}$$

i.e

$$\# E_j(C, \alpha)(f) \leq 2^{(\nu(\alpha) + \epsilon)j}.$$

Rappel : la fonction $\nu$ est croissante, continue à droite et il existe $\alpha_{\min} > 0$ tel que $\nu(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_{\min}$ et $\nu(\alpha) \in [0;1]$ pour tout $\alpha \geq \alpha_{\min}$.

**Proposition (Aubry, Bastin, Dispa, Jaffard, 2006 [3])**

On a

$$\begin{aligned} S^\nu = \{f \in L^2([0;1]) : \forall \alpha > 0 \ \forall \epsilon > 0 \ \forall C > 0 \\ \exists J > 0 \ \forall j \geq J, \ \#E_j(C,\alpha)(f) \leq 2^{(\nu(\alpha)+\epsilon)j}\}. \end{aligned}$$

où $E_j(C,\alpha)(f) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C2^{-\alpha j}\}$.

Rappel : la fonction $\nu$ est croissante, continue à droite et il existe $\alpha_{\min} > 0$ tel que $\nu(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_{\min}$ et $\nu(\alpha) \in [0;1]$ pour tout $\alpha \geq \alpha_{\min}$.

**Proposition (Aubry, Bastin, Dispa, Jaffard, 2006 [3] - Jaffard, 2004 [5])**

On a

$$\begin{aligned} S^\nu = \{\vec{c} : \forall \alpha > 0\ \forall \epsilon > 0\ \forall C > 0 \\ \exists J > 0\ \forall j \geq J,\ \# E_j(C,\alpha)(\vec{c}) \leq 2^{(\nu(\alpha)+\epsilon)j}\}. \end{aligned}$$

où $E_j(C,\alpha)(\vec{c}) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C 2^{-\alpha j}\}$.

Rappel : la fonction $\nu$ est croissante, continue à droite et il existe $\alpha_{\min} > 0$ tel que $\nu(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_{\min}$ et $\nu(\alpha) \in [0;1]$ pour tout $\alpha \geq \alpha_{\min}$.

## Définition

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, notons $\sigma^{(\alpha)}$ une suite tel que $\sigma_j^{(\alpha)} > 0$ et définissons

$$S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}} = \{\vec{c} : \forall \alpha > 0\ \forall \epsilon > 0\ \forall C > 0 \\ \exists J > 0\ \forall j \geq J,\ \#E_j(C,\alpha)(\vec{c}) \leq 2^{(\nu(\alpha)+\epsilon)j}\}.$$

où $E_j(C,\sigma^{(\alpha)})(\vec{c}) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C\sigma_j^{(\alpha)}\}$.

Soit une fonction $\nu$ croissante, continue à droite et il existe $\alpha_{\min} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que $\nu(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_{\min}$ et $\nu(\alpha) \in [0,1]$ pour tout $\alpha > \alpha_{\min}$.

## Définition

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, notons $\sigma^{(\alpha)}$ une suite tel que $\sigma_j^{(\alpha)} > 0$ et définissons

$$S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}} = \{\vec{c} : \forall \alpha > 0 \ \forall \epsilon > 0 \ \forall C > 0 \\ \exists J > 0 \ \forall j \geq J, \ \# E_j(C,\alpha)(\vec{c}) \leq 2^{(\nu(\alpha)+\epsilon)j}\}.$$

où $E_j(C,\sigma^{(\alpha)})(\vec{c}) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C\sigma_j^{(\alpha)}\}$.

Soit une fonction $\nu$ croissante, continue à droite et il existe $\alpha_{\min} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que $\nu(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_{\min}$ et $\nu(\alpha) \in [0,1]$ pour tout $\alpha > \alpha_{\min}$.

## Définition

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, notons $\sigma^{(\alpha)}$ une suite tel que $\sigma_j^{(\alpha)} > 0$ et définissons

$$S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}} = \{\vec{c} : \forall \alpha > 0 \ \forall \epsilon > 0 \ \forall C > 0 \ \# E_j(C,\alpha)(\vec{c}) \preceq 2^{(\nu(\alpha)+\epsilon)j}\}.$$

où $E_j(C,\sigma^{(\alpha)})(\vec{c}) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C\sigma_j^{(\alpha)}\}$.

Notation : $x_j \preceq_J y_j \equiv \forall j \geq J \ x_j \leq y_j$ et $x_j \preceq y_j \equiv \exists J > 0 \ x_j \preceq_J y_j$ deux préordres dans l'espace des suites réelles.

Soit une fonction $\nu$ croissante, continue à droite et il existe $\alpha_{\min} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que $\nu(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_{\min}$ et $\nu(\alpha) \in [0,1]$ pour tout $\alpha > \alpha_{\min}$.

## Définition

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, notons $\sigma^{(\alpha)}$ une suite tel que $\sigma_j^{(\alpha)} > 0$ et définissons

$$S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}} = \{\vec{c} : \forall \alpha > 0\ \forall \epsilon > 0\ \forall C > 0\ \# E_j(C,\alpha)(\vec{c}) \preceq 2^{(\nu(\alpha)+\epsilon)j}\}.$$

où $E_j(C, \sigma^{(\alpha)})(\vec{c}) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C\sigma_j^{(\alpha)}\}$.

Notation : $x_j \preceq_J y_j \equiv \forall j \geq J\ x_j \leq y_j$ et $x_j \preceq y_j \equiv \exists J > 0\ x_j \preceq_J y_j$ deux préordres dans l'espace des suites réelles.
Remarque : la suite $2^{(\nu(\alpha)+\epsilon)j}$ ? ? ?

## Definition

Supposons que pour tout $\alpha < \alpha'$, nous avons $\sigma_j^{(\alpha')} \preceq \sigma_j^{(\alpha)}$. Le **profil généralisé** de $\vec{c}$ est défini par

$$\nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}} : \alpha \in \mathbb{R} \mapsto \lim_{\epsilon \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \# E_j(1, \sigma^{(\alpha+\epsilon)})(\vec{c})}{\log 2^j}.$$

Cette fonction est croissante, continue à droite et il existe $\alpha_{\min} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que $\nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_{\min}$ et $\nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(\alpha) \in [0,1]$ pour tout $\alpha > \alpha_{\min}$.

## Definition

Supposons que pour tout $\alpha < \alpha'$, nous avons $\sigma_j^{(\alpha')} \preceq \sigma_j^{(\alpha)}$. Le **profil généralisé** de $\vec{c}$ est défini par

$$\nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}} : \alpha \in \mathbb{R} \mapsto \lim_{\epsilon \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \# E_j(1, \sigma^{(\alpha+\epsilon)})(\vec{c})}{\log 2^j}.$$

Cette fonction est croissante, continue à droite et il existe $\alpha_{\min} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que $\nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_{\min}$ et $\nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(\alpha) \in [0,1]$ pour tout $\alpha > \alpha_{\min}$.

## Proposition

Si pour tout $\alpha < \alpha'$, nous avons $\sigma_j^{(\alpha')}/\sigma_j^{(\alpha)} \to 0$ si $j \to +\infty$ alors la constante strictement positive 1 apparaissant dans la définition de $\nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}$ est arbitraire.

## Proposition

Si pour tout $\alpha < \alpha'$, nous avons $\sigma_j^{(\alpha')}/\sigma_j^{(\alpha)} \to 0$ si $j \to +\infty$ alors l'espace $S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}}$ est un espace vectoriel topologique métrique et

$$S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}} = \{\vec{c} : \nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(\alpha) \leq \nu(\alpha) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

# Plan

Pour tout $\gamma > 0$, posons

$$w_\gamma(\lambda;\lambda') = \frac{2^{-(\gamma+d+1)|j-j'|}}{(1+2^{\inf\{j,j'\}}|2^{-j}k - 2^{-j'}k'|)^{\gamma+d+1}}.$$

Une matrice $A := (A(\lambda;\lambda'))_{\lambda;\lambda'}$ appartient à l'espace $\mathscr{A}_\gamma$ s'il existe $C \geq 0$ tel que

$$|A(\lambda;\lambda')| \leq C w_\gamma(\lambda;\lambda').$$

La borne inférieure de ces constantes est notée $\|A\|_\gamma$.

### Définition

La matrice $A$ est dite **presque-diagonal** (resp. **quasi-diagonal**) si $A \in \mathscr{A}_\gamma$ pour tout $\gamma > 0$ (resp. $A$ est inversible et $A, A^{-1} \in \mathscr{A}_\gamma$ pour tout $\gamma > 0$).

La matrice de l'opérateur bijectif qui envoie une base d'ondelettes orthonormal $C^\infty$ sur une autre est quasi-diagonal (Meyer, 1990 [8]).

## Définition

Une suite $\sigma$ de nombres réels positifs est dite **admissible** s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C^{-1}\sigma_j \leq \sigma_{j+1} \leq C\sigma_j.$$

## Définition

Une suite $\sigma$ de nombres réels positifs est dite **admissible** s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C^{-1}\sigma_j \leq \sigma_{j+1} \leq C\sigma_j.$$

Posons

$$\underline{\Theta}_j = \inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k} \text{ and } \overline{\Theta}_j = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k}$$

Les indices de Boyd sont définis par

$$\underline{s}(\sigma) = \lim_{j\to+\infty} \frac{\log \underline{\Theta}_j}{\log 2^j} \text{ and } \overline{s}(\sigma) = \lim_{j\to+\infty} \frac{\log \overline{\Theta}_j}{\log 2^j}.$$

Dans ce cas, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C > 0$ tel que

$$C^{-1}2^{j(\underline{s}(\sigma)-\epsilon)} \leq \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k} \leq C2^{j(\overline{s}(\sigma)+\epsilon)}.$$

**Théorème (Meyer, 1990 [8])**

Si $\gamma > |\alpha|$ et $A \in \mathscr{A}_\gamma$ alors il existe une constante $C'$ (dépendant de la dimension) telle que

$$|c_\lambda| \leq C2^{-\alpha j} \text{ pour tout } \lambda \Rightarrow |(A\vec{c})_\lambda| \leq C'\|A\|_\gamma C2^{-\alpha j} \text{ pour tout } \lambda$$

**Théorème (Meyer, 1990 [8])**

Si $\gamma > |\alpha|$ et $A \in \mathscr{A}_\gamma$ alors il existe une constante $C'$ (dépendant de la dimension) telle que

$$|c_\lambda| \leq C2^{-\alpha j} \text{ pour tout } \lambda \Rightarrow |(A\vec{c})_\lambda| \leq C'\|A\|_\gamma C2^{-\alpha j} \text{ pour tout } \lambda$$

**Théorème**

Soit une suite admissible $\sigma$. Si $\gamma > \max\{-\underline{s}(\sigma) - 1, \overline{s}(\sigma)\}$ et $A \in \mathscr{A}_\gamma$ alors il existe une constante $C'$ (dépendant de la dimension), une constante $C''$ (dépendant de la suite $\sigma$ et de $\gamma$) telles que

$$|c_\lambda| \leq C\sigma_j \text{ pour tout } \lambda \Rightarrow |(A\vec{c})_\lambda| \leq C'C''\|A\|_\gamma C\sigma_j \text{ pour tout } \lambda$$

## Théorème

Supposons que $\alpha_{\min} \in \mathbb{R}$ et que

- pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $\sigma^{(\alpha)}$ est admissible ;
- si $\alpha < \alpha'$ alors $\sigma_j^{(\alpha')}/\sigma_j^{(\alpha)} \to 0$ si $j \to +\infty$ ;
- si $\alpha < \alpha_{\min} \leq \alpha'$, il existe $s > 0$ tel que $\sigma^{(\alpha)} \preceq 2^{sj}\sigma_j^{(\alpha')}$ ;

alors si $\vec{c} \in S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}}$ alors $A\vec{c} \in S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}}$ pour toute matrice $A$ presque-diagonal. De plus, nous avons que $\nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}} = \nu_{A\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}$ pour toute matrice $A$ quasi-diagonal.

Donc,

$$S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}} = \{f \in L^2([0;1]) : \forall \alpha > 0 \ \forall \epsilon > 0 \ \forall C > 0 \\ \#E_j(C,\alpha)(f) \preceq 2^{(\nu(\alpha)+\epsilon)j}\}$$

# Plan

$$\begin{tikzcd}
S^{\nu} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{Aubry, Bastin, Dispa, Jaffard, 2006 [3]}"] \arrow[d, dashed] & & \text{Espace de Besov} \arrow[d, dashed, "\text{Almeida, 2005 [1]}"] \\
S^{\nu,\sigma(\cdot)} \arrow[rr, leftrightarrow, "???"'] & & \text{Espace de Besov généralisé}
\end{tikzcd}$$

$$S^{\nu} \subseteq \bigcap_{p>0} \bigcap_{\epsilon>0} b_{p,\infty}^{\frac{\eta(p)-\epsilon}{p}}$$

$=$ si $\nu$ est concave

## Définition

Une suite $\vec{c}$ appartient à l'espace $b^s_{p,\infty}$ si et seulement si

$$\sup_j 2^{(s-d/p)j} \left( \sum_k |c_{\lambda_{jk}}|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

## Définition

Une suite $\vec{c}$ appartient à l'espace $b^s_{p,\infty}$ si et seulement si

$$\sup_j 2^{(s-d/p)j} \left( \sum_k |c_{\lambda_{jk}}|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

## Définition

Soit $\sigma$ une suite admissible. Une suite $\vec{c}$ appartient à l'espace $b^\sigma_{p,\infty}$ si et seulement si

$$\sup_j \sigma_j 2^{-jd/p} \left( \sum_k |c_{\lambda_{jk}}|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

**Théorème**

Sous les hypothèses habituelles, si pour tout $p, \epsilon > 0$, il existe une suite admissible $\theta^{(p,\epsilon)}$ et $C > 0$ tels que

$$\theta_j^{(p,\epsilon)} \preceq C2^{-j(\nu(\alpha)+\epsilon)/p}(\sigma_j^{(\alpha)}2^{-jd/p})^{-1}$$

pour tout $\alpha \geq \alpha_{\min}$ alors

$$S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}} \subseteq \bigcap_{p>0} \bigcap_{\epsilon>0} b_{p,\infty}^{\theta^{(p,\epsilon)}}.$$

Remarque : si $\theta_j \preceq \theta'_j$ alors $b_{p,\infty}^{\theta'} \subset b_{p,\infty}^{\theta}$.

$$(\theta_j^{(p,\epsilon)})^p \preceq C' 2^{-(\nu(\alpha+\epsilon/2)+\epsilon)j}(\sigma_j^{(\alpha+\epsilon/2)})^{-p} 2^{jd}$$
$$\Leftrightarrow 2^{(\nu(\alpha+\epsilon/2)+\epsilon)j} \preceq C' 2^{jd}(\sigma_j^{(\alpha+\epsilon/2)}\theta_j^{(p,\epsilon)})^{-p}$$

$$(\theta_j^{(p,\epsilon)})^p \preceq C' 2^{-(\nu(\alpha+\epsilon/2)+\epsilon)j} (\sigma_j^{(\alpha+\epsilon/2)})^{-p} 2^{jd}$$
$$\Leftrightarrow 2^{(\nu(\alpha+\epsilon/2)+\epsilon)j} \preceq C' 2^{jd} (\sigma_j^{(\alpha+\epsilon/2)} \theta_j^{(p,\epsilon)})^{-p}$$

Donc,

$$2^{(\nu(\alpha+\epsilon/2)+\epsilon)j} \preceq 2^{jd} (\sigma_j^{(\alpha+\epsilon)} \theta_j^{(p,\epsilon)})^{-p}$$

$$(\theta_j^{(p,\epsilon)})^p \preceq C' 2^{-(\nu(\alpha+\epsilon/2)+\epsilon)j} (\sigma_j^{(\alpha+\epsilon/2)})^{-p} 2^{jd}$$
$$\Leftrightarrow 2^{(\nu(\alpha+\epsilon/2)+\epsilon)j} \preceq C' 2^{jd} (\sigma_j^{(\alpha+\epsilon/2)} \theta_j^{(p,\epsilon)})^{-p}$$

Donc,

$$2^{(\nu(\alpha+\epsilon/2)+\epsilon)j} \preceq 2^{jd} (\sigma_j^{(\alpha+\epsilon)} \theta_j^{(p,\epsilon)})^{-p}$$

Donc,

$$(\nu(\alpha+\epsilon/2)+\epsilon) \leq \frac{\log 2^{dj} (\sigma_j^{(\alpha+\epsilon)} \theta_j^{(p,\epsilon)})^{-p}}{log 2^j},$$

$$
\begin{aligned}
(\theta_j^{(p,\epsilon)})^p &\preceq C' 2^{-(\nu(\alpha+\epsilon/2)+\epsilon)j} (\sigma_j^{(\alpha+\epsilon/2)})^{-p} 2^{jd} \\
\Leftrightarrow 2^{(\nu(\alpha+\epsilon/2)+\epsilon)j} &\preceq C' 2^{jd} (\sigma_j^{(\alpha+\epsilon/2)} \theta_j^{(p,\epsilon)})^{-p}
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
2^{(\nu(\alpha+\epsilon/2)+\epsilon)j} \preceq 2^{jd} (\sigma_j^{(\alpha+\epsilon)} \theta_j^{(p,\epsilon)})^{-p}
$$

Donc,

$$
(\nu(\alpha+\epsilon/2)+\epsilon) \leq \frac{\log 2^{dj} (\sigma_j^{(\alpha+\epsilon)} \theta_j^{(p,\epsilon)})^{-p}}{log 2^j},
$$

i.e.

$$
\nu(\alpha) \leq d - \inf_{p>0} \lim_{\epsilon \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} p \frac{\log \sigma_j^{(\alpha+\epsilon)} \theta_j^{(p,\epsilon)}}{\log 2^j} := \tilde{\nu}(\alpha)
$$

pour tout $\alpha \geq \alpha_{min}$. Nous posons $\tilde{\nu}(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_{min}$.

Dans le cas de $S^\nu$, si nous posons
$\eta(p) = \inf_{\alpha \geq \alpha_{\min}} \{\alpha p - \nu(\alpha) + d\}$ alors

$$\sigma_j^{(\alpha)} = 2^{-\alpha j} \text{ et } \theta_j^{(p,\epsilon)} = 2^{(\eta(p)/p - \epsilon)j}.$$

Donc, $\tilde{\nu}(\alpha) = \inf_{p>0}\{d + \alpha p - \eta(p)\}$ pour tout $\alpha \geq \alpha_{\min}$.

## Théorème

Sous les hypothèses du théorème précédent, si nous supposons que pour tout $\alpha < \alpha_{\min}$, il existe $p, \epsilon > 0$ tels que $2^{-jd/p}\sigma_j^{(\alpha)}\theta_j^{(p,\epsilon)} \to +\infty$ si $j \to +\infty$ et si $\nu = \tilde{\nu}$ alors

$$S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}} = \bigcap_{p>0} \bigcap_{\epsilon>0} b_{p,\infty}^{\theta^{(p,\epsilon)}}.$$

Supposons qu'il existe $\alpha < \alpha_{\min}$ tel que pour tout $p, \epsilon > 0$, nous avons

$$2^{-jd/p}\sigma_j^{(\alpha)}\theta_j^{(p,\epsilon)} \to C_{p,\epsilon}.$$

Posons, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $c_\lambda = \sigma_j^{(\alpha)}$ pour un seul $k$ et $c_\lambda = 0$ pour les autres $k$.

- $\vec{c} \notin S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}}$ car

$$\nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(\alpha) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq \sigma_j^{(\alpha+\epsilon)}\}}{\log 2^j} = 0 \not\leq \nu(\alpha) = -\infty$$

- $\vec{c} \in \bigcap_{p>0} \bigcap_{\epsilon>0} b_{p,\infty}^{\theta^{(p,\epsilon)}}$ car, pour tout $p, \epsilon > 0$,

$$\sup_j \theta_j^{(p,\epsilon)} 2^{-jd/p} \left( \sum_k |c_{\lambda_{jk}}|^p \right)^{1/p} = \sup_j \theta_j^{(p,\epsilon)} 2^{-jd/p} \sigma_j^{(\alpha)} < \infty.$$

# Plan

# Plan

# Kleyntssens, Esser, Nicolay, 2014 [7]

- Nous ne connaissons qu'un nombre fini de points du signal ;

## Kleyntssens, Esser, Nicolay, 2014 [7]

- Nous ne connaissons qu'un nombre fini de points du signal ;
- Nous utilisons les ondelettes de Daubechies et l'algorithme de Mallat pour calculer un nombre fini de coefficients d'ondelettes $(c_\lambda)_\lambda$ (Daubechies, 1992 [4]) ;

Kleyntssens, Esser, Nicolay, 2014 [7]

- Nous ne connaissons qu'un nombre fini de points du signal ;
- Nous utilisons les ondelettes de Daubechies et l'algorithme de Mallat pour calculer un nombre fini de coefficients d'ondelettes $(c_\lambda)_\lambda$ (Daubechies, 1992 [4]) ;
- Nous devons approximer

$$\nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(\alpha) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \limsup_{j\to+\infty} \frac{\log \# E_j(1,\sigma^{(\alpha+\epsilon)})(\vec{c})}{\log 2^j}$$

où $E_j(C,\sigma^{(\alpha)})(\vec{c}) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C\sigma_j^{(\alpha)}\}$.

## Kleyntssens, Esser, Nicolay, 2014 [7]

- Nous ne connaissons qu'un nombre fini de points du signal ;
- Nous utilisons les ondelettes de Daubechies et l'algorithme de Mallat pour calculer un nombre fini de coefficients d'ondelettes $(c_\lambda)_\lambda$ (Daubechies, 1992 [4]) ;
- Nous devons approximer

$$\nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(\alpha) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \# E_j(C, \sigma^{(\alpha+\epsilon)})(\vec{c})}{\log 2^j}$$

où $E_j(C, \sigma^{(\alpha)})(\vec{c}) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C\sigma_j^{(\alpha)}\}$.

Kleyntssens, Esser, Nicolay, 2014 [7]

- Nous ne connaissons qu'un nombre fini de points du signal ;
- Nous utilisons les ondelettes de Daubechies et l'algorithme de Mallat pour calculer un nombre fini de coefficients d'ondelettes $(c_\lambda)_\lambda$ (Daubechies, 1992 [4]) ;
- Nous devons approximer

$$\nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(\alpha) = \cancel{\lim_{\epsilon \to 0^+}} \limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \# E_j(C, \sigma^{(\alpha + \cancel{\epsilon})})(\vec{c})}{\log 2^j}$$

où $E_j(C, \sigma^{(\alpha)})(\vec{c}) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C\sigma_j^{(\alpha)}\}$.

## Kleyntssens, Esser, Nicolay, 2014 [7]

- Nous ne connaissons qu'un nombre fini de points du signal ;
- Nous utilisons les ondelettes de Daubechies et l'algorithme de Mallat pour calculer un nombre fini de coefficients d'ondelettes $(c_\lambda)_\lambda$ (Daubechies, 1992 [4]) ;
- Nous devons approximer

$$\nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(\alpha) = \cancel{\lim_{\epsilon \to 0^+}} \limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \# E_j(C, \sigma^{(\alpha + \cancel{\epsilon})})(\vec{c})}{\log 2^j}$$

où $E_j(C, \sigma^{(\alpha)})(\vec{c}) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C\sigma_j^{(\alpha)}\}$.
Ce qui signifie que, pour $j$ suffisamment grand,

$$\# E_j(C, \sigma^{(\alpha)})(\vec{c}) \sim 2^{-\nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(\alpha) j}.$$

Donc, nous pouvons approximer $\nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(\alpha)$ par la pente de

$$j \in \mathbb{N} \mapsto \frac{\log \# E_j(C, \sigma^{(\alpha)})(\vec{c})}{\log 2}$$

pour $j$ suffisamment grand. Cette pente est notée $\nu^C_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(\alpha)$.

Fixons $\alpha$ ; le principal problème est de déterminer une constante $C$ adéquate parce qu'en pratique, nous n'avons qu'un nombre fini de coefficients d'ondelettes :

- Si $C$ est trop petit, $\nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(\alpha)$ sera égale à 1 ;
- Si $C$ est trop grand, $\nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(\alpha)$ sera égale à $-\infty$.

Fixons $\alpha$ ; le principal problème est de déterminer une constante $C$ adéquate parce qu'en pratique, nous n'avons qu'un nombre fini de coefficients d'ondelettes :

- Si $C$ est trop petit, $\nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(\alpha)$ sera égale à 1 ;
- Si $C$ est trop grand, $\nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(\alpha)$ sera égale à $-\infty$.

Nous construisons la fonction

$$C \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(\alpha).$$

Vu qu'en théorie la constante est arbitraire, en pratique cette fonction devrait se stabiliser si $\alpha \geq \alpha_{min}$.

# Plan

# Mouvement Brownien

$\sigma_j^{(\alpha)} = 2^{-\alpha j}$.

$$j \in \mathbb{N} \mapsto \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C\sigma_j^{(\alpha)}\}}{\log 2}$$

# Mouvement Brownien

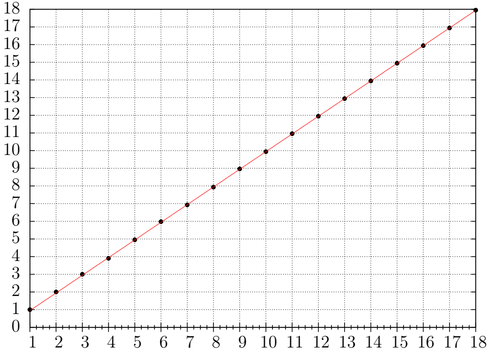
$\sigma_j^{(\alpha)} = 2^{-\alpha j}$.

$$j \in \mathbb{N} \mapsto \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C\sigma_j^{(0.45)}\}}{\log 2}$$

# Mouvement Brownien

$\sigma_j^{(\alpha)} = 2^{-\alpha j}$.

$$j \in \mathbb{N} \mapsto \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq 5\sigma_j^{(0.45)}\}}{\log 2}$$

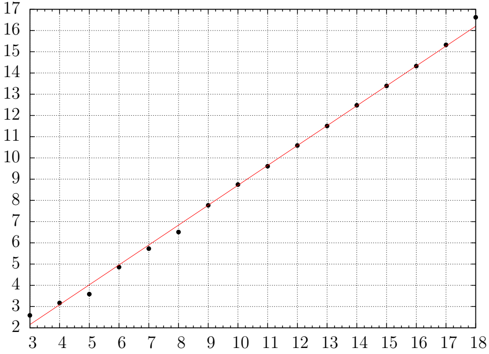



$$\text{pente}=\nu^5_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(\alpha) = 0.999681$$

# Mouvement Brownien

$\sigma_j^{(\alpha)} = 2^{-\alpha j}$.

$$j \in \mathbb{N} \mapsto \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq 100\sigma_j^{(0.45)}\}}{\log 2}$$

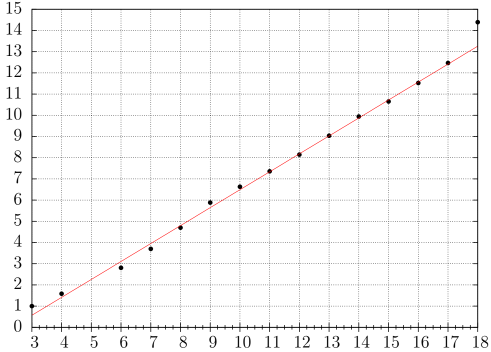



$$\text{pente}=\nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}^{100}(\alpha) = 0.937016$$

# Mouvement Brownien

$\sigma_j^{(\alpha)} = 2^{-\alpha j}$.

$$j \in \mathbb{N} \mapsto \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq 200\sigma_j^{(0.45)}\}}{\log 2}$$

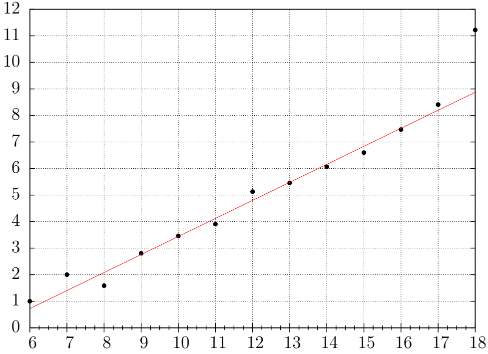



$$\text{pente}=\nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}^{200}(\alpha) = 0.846159$$

# Mouvement Brownien

$\sigma_j^{(\alpha)} = 2^{-\alpha j}$.

$$j \in \mathbb{N} \mapsto \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq 300\sigma_j^{(0.45)}\}}{\log 2}$$

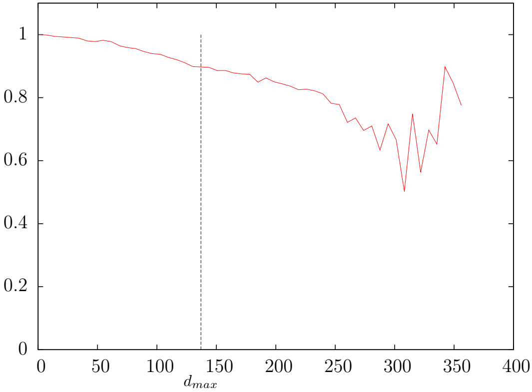



pente$=\nu^{300}_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(\alpha) = 0.679259$

# Mouvement Brownien

$\sigma_j^{(\alpha)} = 2^{-\alpha j}$.

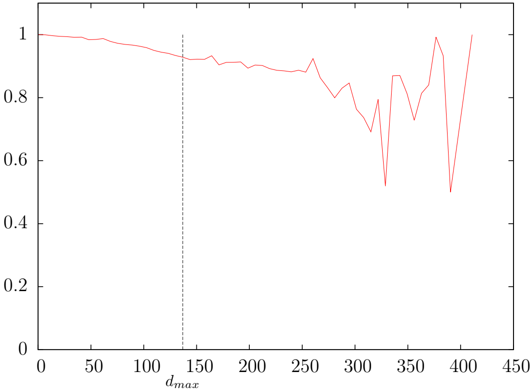
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(0.45)$.



# Mouvement Brownien

$\sigma_j^{(\alpha)} = 2^{-\alpha j}$.

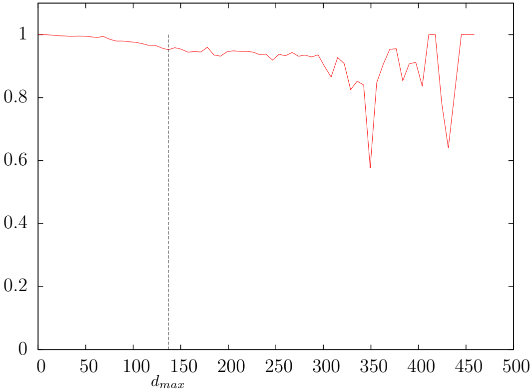
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^C_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(0.46)$.



# Mouvement Brownien

$\sigma_j^{(\alpha)} = 2^{-\alpha j}$.

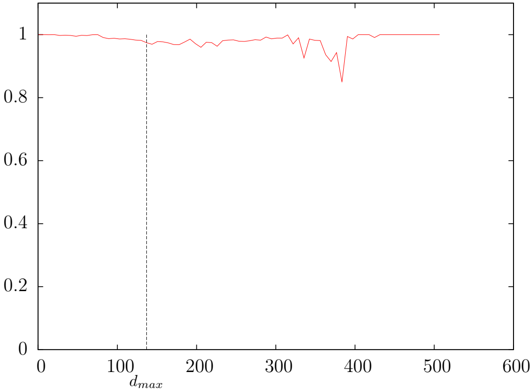
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(0.47)$.



# Mouvement Brownien

$\sigma_j^{(\alpha)} = 2^{-\alpha j}$.

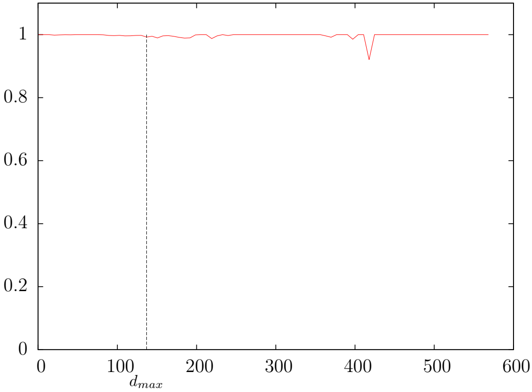
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(0.48)$.



# Mouvement Brownien

$\sigma_j^{(\alpha)} = 2^{-\alpha j}$.

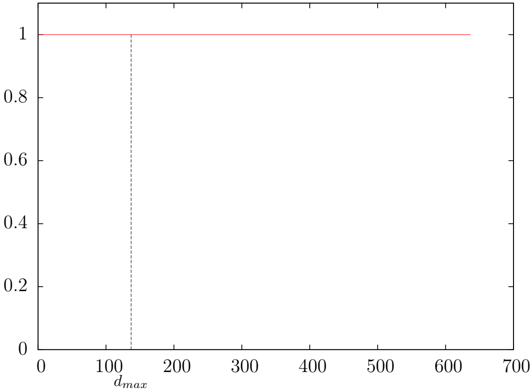
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(0.49)$.



# Mouvement Brownien

$\sigma_j^{(\alpha)} = 2^{-\alpha j}$.

Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(0.50)$.



# Mouvement Brownien

Test sur 100 mouvements Browniens fractionnaires de taille $2^{20}$.

| | $S^\nu$ | WLM |
|---|---|---|
| Erreur moyenne | 0.012246 | 0.017091 |
| Ecart-type de l'erreur | 0.013238 | 0.020617 |

# Plan

# Explication du problème

- Lorsque nous avons deux signaux monofractals d'exposant $H$, ils appartiennent tous les deux à l'espace $S^{\nu}$ où $\nu = \nu_{\vec{c_1}} = \nu_{\vec{c_2}}$, i.e. la fonction égale à 1 sur $[H; +\infty[$ et $-\infty$ sinon. Il est donc impossible de les distinguer via le calcul de leurs profils d'ondelettes respectifs.
- Qu'apporte la nouvelle théorie des espaces $S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}}$ par rapport à ce problème ?

Khintchine, 1924 [6] a montré que les coefficients d'ondelettes $\vec{c_1}$ d'un mouvement Brownien se comportent comme du

$$(2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{1/2}.$$

Khintchine, 1924 [6] a montré que les coefficients d'ondelettes $\vec{c_1}$ d'un mouvement Brownien se comportent comme du

$$(2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{1/2}.$$

Posons $\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}$ et

$$\nu(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \geq H \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} .$$

- Le mouvement Brownien appartient à l'espace $S^{\nu} \subset S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}}$ où $\nu = \nu_{\vec{c_1}} = \nu_{\vec{c_1},\sigma^{(\cdot)}}$.

Khintchine, 1924 [6] a montré que les coefficients d'ondelettes $\vec{c_1}$ d'un mouvement Brownien se comportent comme du

$$(2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{1/2}.$$

Posons $\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}$ et

$$\nu(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \geq H \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} .$$

- Le mouvement Brownien appartient à l'espace $S^{\nu} \subset S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}}$ où $\nu = \nu_{\vec{c_1}} = \nu_{\vec{c_1},\sigma^{(\cdot)}}$.
- Si $\vec{c_2}$ sont des coefficients d'ondelettes d'un signal, alors nous avons toujours $\nu_{\vec{c_2},\sigma^{(\cdot)}} \leq \nu_{\vec{c_2}}$ car $S^{\nu_{c_2}} \subset S^{\nu_{c_2},\sigma^{(\cdot)}}$.

Khintchine, 1924 [6] a montré que les coefficients d'ondelettes $\vec{c_1}$ d'un mouvement Brownien se comportent comme du

$$(2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{1/2}.$$

Posons $\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}$ et

$$\nu(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \geq H \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} .$$

- Le mouvement Brownien appartient à l'espace $S^{\nu} \subset S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}}$ où $\nu = \nu_{\vec{c_1}} = \nu_{\vec{c_1},\sigma^{(\cdot)}}$.
- Si $\vec{c_2}$ sont des coefficients d'ondelettes d'un signal, alors nous avons toujours $\nu_{\vec{c_2},\sigma^{(\cdot)}} \leq \nu_{\vec{c_2}}$ car $S^{\nu_{c_2}} \subset S^{\nu_{c_2},\sigma^{(\cdot)}}$.
- Donc, s'il existe $\alpha$ tel que $\nu_{\vec{c_2},\sigma^{(\cdot)}}(\alpha) < \nu_{\vec{c_2}}(\alpha)$, nous pouvons conclure que le signal étudié n'est pas un signal Brownien.

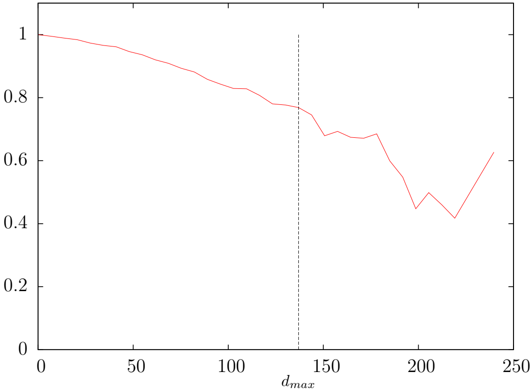
# Mouvement Brownien

$$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^\alpha.$$

# Mouvement Brownien

$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j} |\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}$.

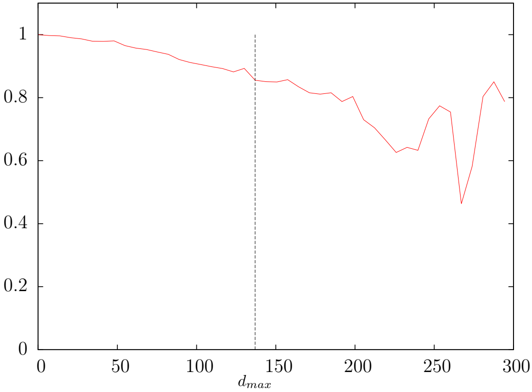
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(0.45)$.



# Mouvement Brownien

$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}$.

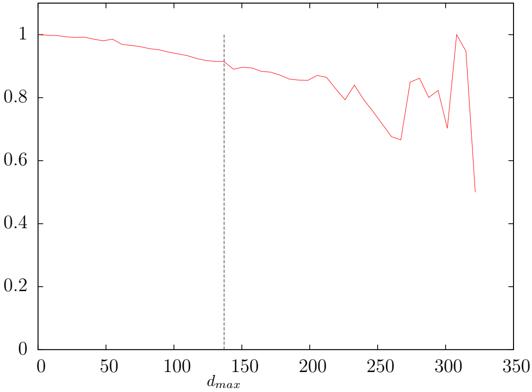
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c},\sigma(\cdot)}^{C}(0.46)$.



# Mouvement Brownien

$$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}.$$

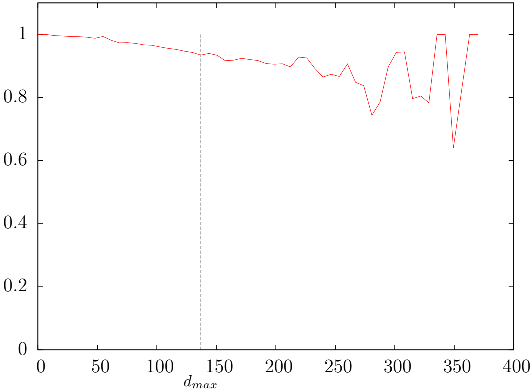
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(0.47)$.



# Mouvement Brownien

$$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}.$$

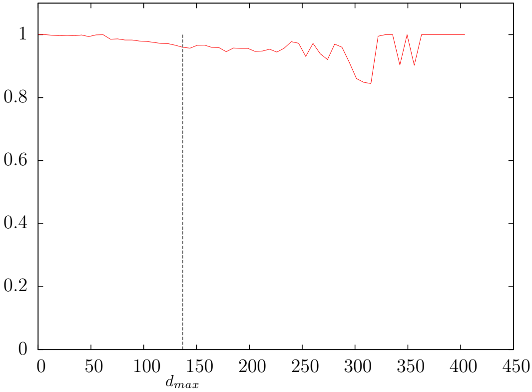
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(0.48)$.



# Mouvement Brownien

$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}$.

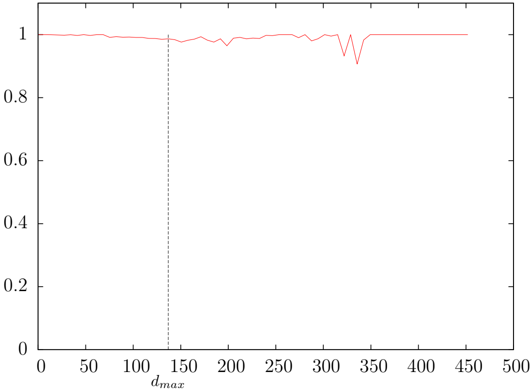
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(0.49)$.



# Mouvement Brownien

$$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}.$$

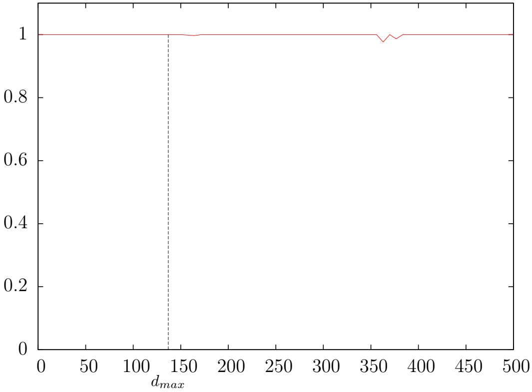
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c},\sigma(\cdot)}^{C}(0.50)$.



# Mouvement Brownien

$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}$.

Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}^{C}(0.51)$.



# Mouvement Brownien

Sur 100 mouvements Browniens fractionnaires de taille $2^{20}$, la « différence » moyenne entre $\nu_{\vec{c}}$ et $\nu_{\vec{c},\sigma(\cdot)}$ est de 0.021566.

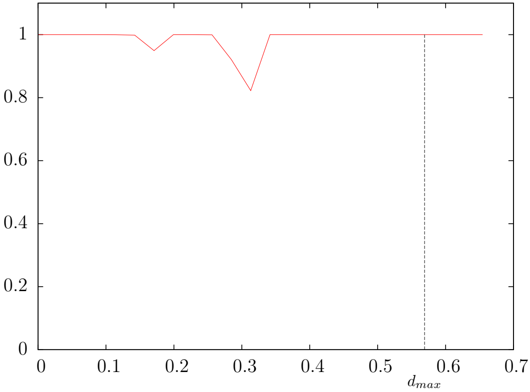
# Fonction de Weierstrass

$$\sigma_j^{(\alpha)} = 2^{-j\alpha}.$$

# Fonction de Weierstrass

$\sigma_j^{(\alpha)} = 2^{-j\alpha}$.

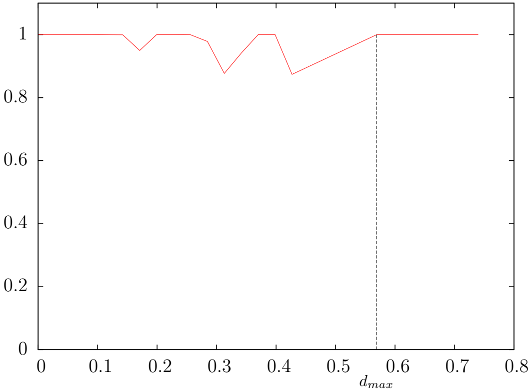
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(0.47)$.



# Fonction de Weierstrass

$\sigma_j^{(\alpha)} = 2^{-j\alpha}$.

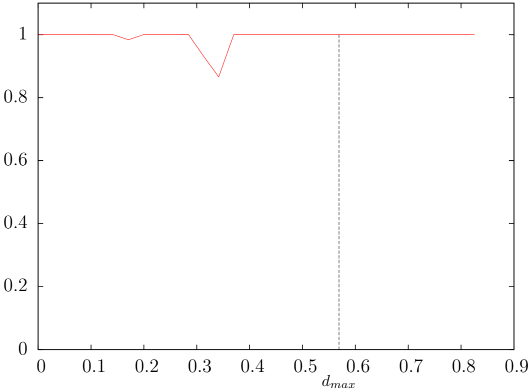
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(0.48)$.



# Fonction de Weierstrass

$\sigma_j^{(\alpha)} = 2^{-j\alpha}$.

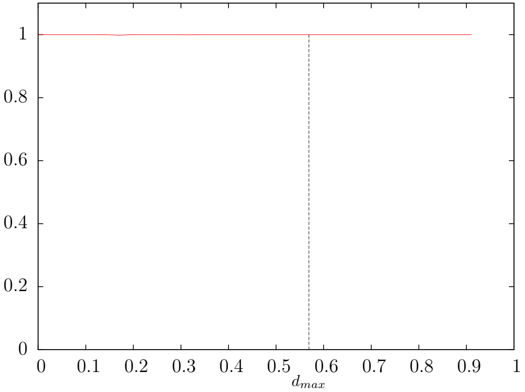
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)}}(0.49)$.



# Fonction de Weierstrass

$\sigma_j^{(\alpha)} = 2^{-j\alpha}$.

Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(0.5)$.



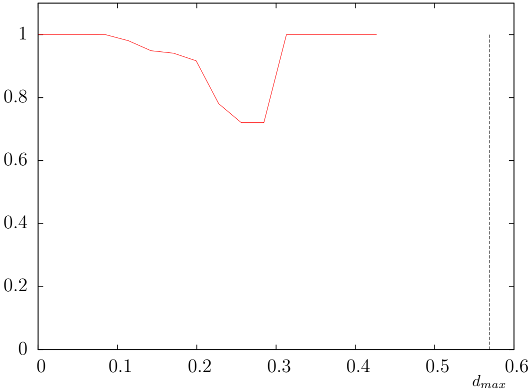
# Fonction de Weierstrass

$$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}.$$

# Fonction de Weierstrass

$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}$.

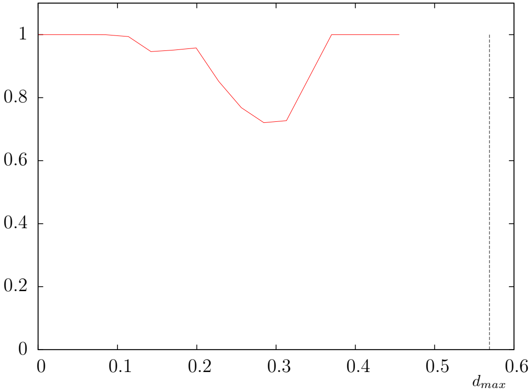
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(0.47)$.



# Fonction de Weierstrass

$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}$.

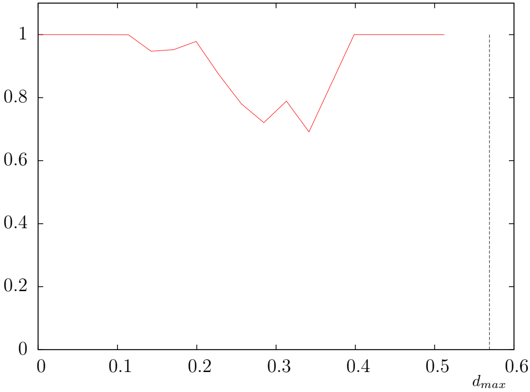
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c},\sigma(\cdot)}^{C}(0.48)$.



# Fonction de Weierstrass

$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}$.

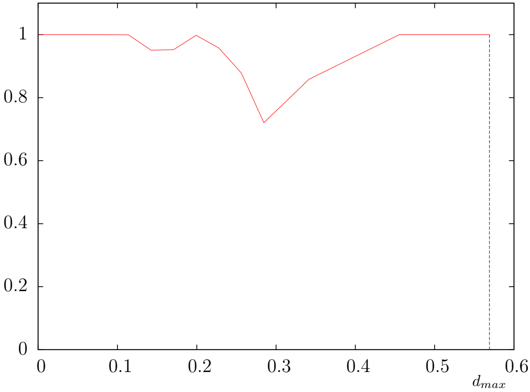
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(0.49)$.



# Fonction de Weierstrass

$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}$.

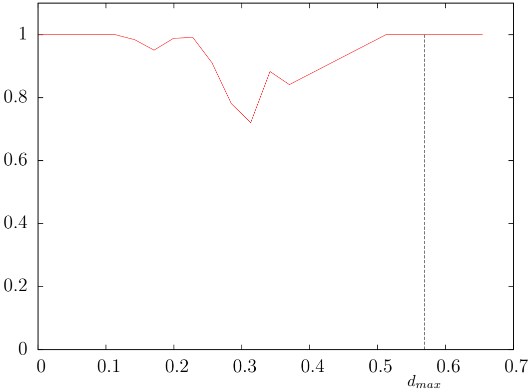
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(0.5)$.



# Fonction de Weierstrass

$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j} |\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}$.

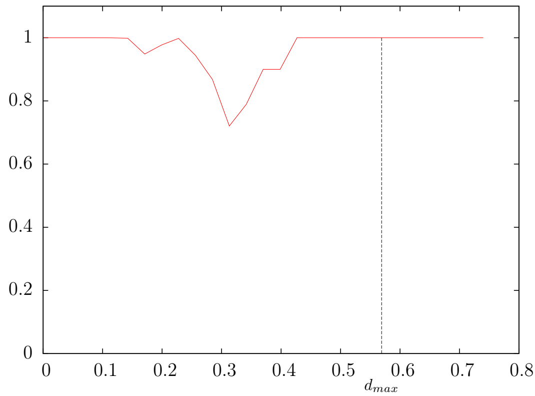
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(0.51)$.



# Fonction de Weierstrass

$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}$.

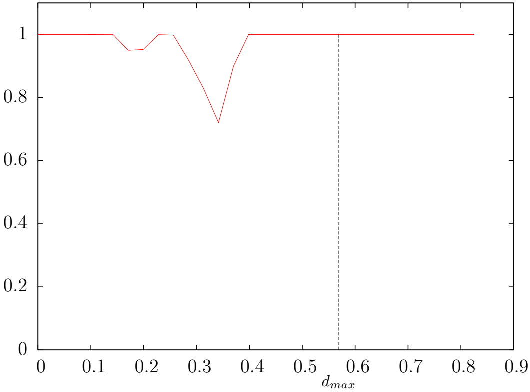
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c},\sigma(\cdot)}^{C}(0.52)$.



# Fonction de Weierstrass

$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}$.

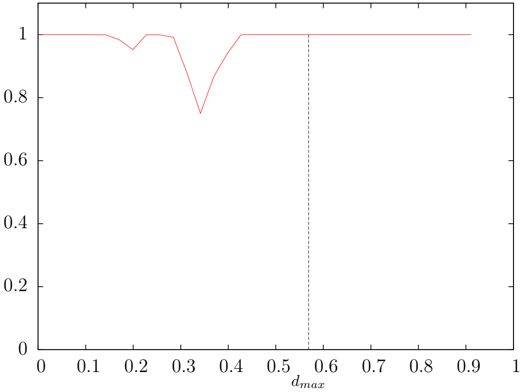
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c},\sigma(\cdot)}^{C}(0.53)$.



# Fonction de Weierstrass

$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^\alpha.$

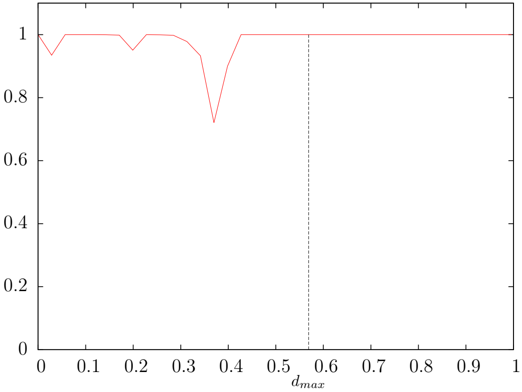
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^C_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(0.54)$.



# Fonction de Weierstrass

$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j} |\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}$.

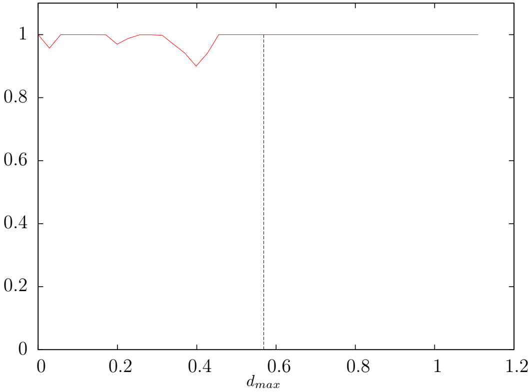
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c},\sigma(\cdot)}^{C}(0.55)$.



# Fonction de Weierstrass

$$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}.$$

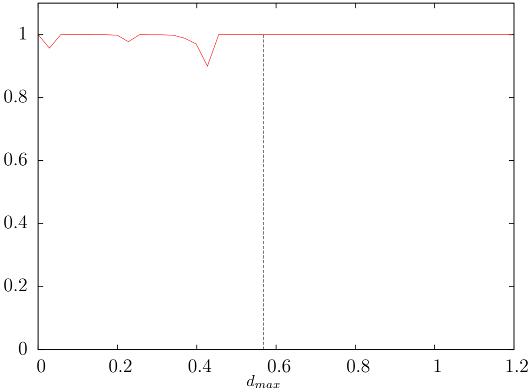
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(0.56)$.



# Fonction de Weierstrass

$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}$.

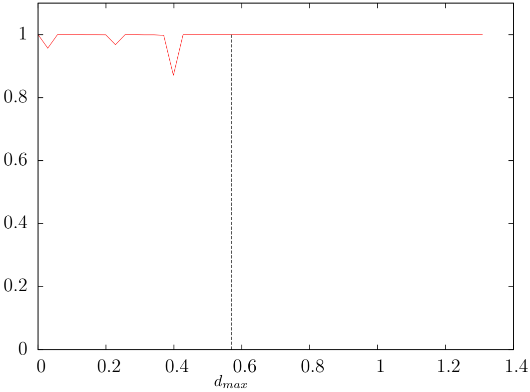
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c},\sigma(\cdot)}^{C}(0.57)$.



# Fonction de Weierstrass

$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}$.

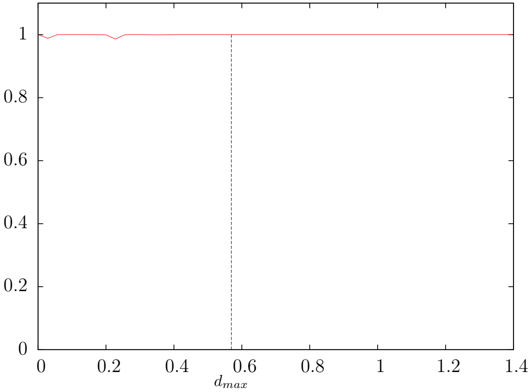
Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(0.58)$.



# Fonction de Weierstrass

$$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}.$$

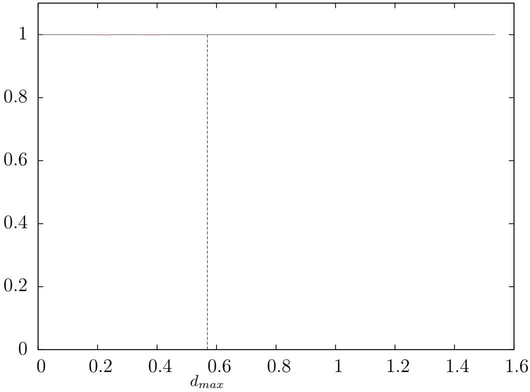
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c},\sigma(\cdot)}^{C}(0.59)$.



# Fonction de Weierstrass

$$\sigma_j^{(\alpha)} = (2^{-j}|\log|\log 2^{-j}||)^{\alpha}.$$

Fonction $C > 0 \mapsto \nu^{C}_{\vec{c},\sigma(\cdot)}(0.60)$.



# Fonction de Weierstrass

Donc,

$$\nu_{\vec{c}}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \geq 0.5 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\nu_{\vec{c},\sigma^{(\cdot)},\Sigma^{(\cdot)}}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \geq 0.59 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} .$$

# Fonction de Weierstrass

| | $S^\nu$ | WLM |
|---|---|---|
| Erreur moyenne | 0.016128 | 0.026221 |
| Ecart-type de l'erreur | 0.026977 | 0.024958 |

Sur 100 fonctions de Weierstrass de taille $2^{20}$, la « différence » moyenne entre $\nu_{\vec{c}}$ et $\nu_{\vec{c},\sigma(\cdot)}$ est de 0.078999.

# Plan

# Conclusion

- En mettant des hypothèses adéquates sur les suites $\sigma^{(\alpha)}$, les nouveaux espaces $S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}}$ ont des propriétés similaires aux espaces $S^{\nu}$ ;

# Conclusion

- En mettant des hypothèses adéquates sur les suites $\sigma^{(\alpha)}$, les nouveaux espaces $S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}}$ ont des propriétés similaires aux espaces $S^\nu$ ;
- Ces espaces sont robustes ;

# Conclusion

- En mettant des hypothèses adéquates sur les suites $\sigma^{(\alpha)}$, les nouveaux espaces $S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}}$ ont des propriétés similaires aux espaces $S^\nu$ ;
- Ces espaces sont robustes ;
- Ces espaces peuvent être mis en relation avec les espaces de Besov généralisés.

# Conclusion

- En mettant des hypothèses adéquates sur les suites $\sigma^{(\alpha)}$, les nouveaux espaces $S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}}$ ont des propriétés similaires aux espaces $S^{\nu}$ ;
- Ces espaces sont robustes ;
- Ces espaces peuvent être mis en relation avec les espaces de Besov généralisés.
- Ces espaces donnent une information complémentaire sur la nature fractale des signaux.

# Conclusion

- En mettant des hypothèses adéquates sur les suites $\sigma^{(\alpha)}$, les nouveaux espaces $S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}}$ ont des propriétés similaires aux espaces $S^{\nu}$ ;
- Ces espaces sont robustes ;
- Ces espaces peuvent être mis en relation avec les espaces de Besov généralisés.
- Ces espaces donnent une information complémentaire sur la nature fractale des signaux.

Dans le futur,

- Approfondir théoriquement les nouvelles informations disponibles grâce à ces espaces ;

# Conclusion

- En mettant des hypothèses adéquates sur les suites $\sigma^{(\alpha)}$, les nouveaux espaces $S^{\nu,\sigma^{(\cdot)}}$ ont des propriétés similaires aux espaces $S^{\nu}$ ;
- Ces espaces sont robustes ;
- Ces espaces peuvent être mis en relation avec les espaces de Besov généralisés.
- Ces espaces donnent une information complémentaire sur la nature fractale des signaux.

Dans le futur,

- Approfondir théoriquement les nouvelles informations disponibles grâce à ces espaces ;
- Tester sur des exemples pratiques (issus du domaine de l'économie, de la biologie, du climat, ...).

Merci pour votre attention

[1] **A. Almeida,**

*Wavelet bases in generalized Besov spaces*,
J. Math. Anal. Appl. 304, 198-211, 2005.

[2] **J.-M. Aubry, F. Bastin, S. Dispa**

*Prevalence of multifractal functions in $S^\nu$ spaces*,
The Journal of Fourier Analysis and Applications, 2007.

[3] **J.-M. Aubry, F. Bastin, S. Dispa and S. Jaffard,**

*Topological properties of the sequence spaces $S^\nu$*,
J. Math. Anal. Applic., 2006.

[4] **I. Daubechies,**

*Ten lextures on wavelets*,
CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 1992.

[5] **S. Jaffard,**

*Beyond Besov Spaces, part I : Distribution of wavelets coefficients*,
J. Fourier Anal. Appl. **10**, 3, 221-246, 2004.

[6] **A. Khintchine,**
*Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung*,
Funf. Math **6**, 9-20, 1924.

[7] **T. Kleyntssens, C. Esser and S. Nicolay,**
*A multifractal formalism based on the $S^{\nu}$ spaces : from theory to practice*,
Submit.

[8] **Y. Meyer,**
*Ondelettes et opérateurs II*,
Hermann, 1990.