

Une ingénierie pour l'étude de la proportionnalité par confrontation à la non-proportionnalité via des manipulations

Engineering for the proportionality's study by confrontation with non-proportionality using handlings

Valérie HENRY, UNamur (Belgique)
Pauline LAMBRECHT*, UNamur et CREM (Belgique)

6 août 2014

Summary

Pauline LAMBRECHT's thesis is based on a sequence intended to encourage proportionality's learning and this, by the introduction of manipulations and comparison to non-proportionality. Thus, the observation of the volume's variation of a cylinder as a function of its height in a first time and according to its diameter in a second time leads students to build the characteristics of proportional phenomenon compared with a phenomenon which is not. The research framework and some elements of the internal validation (*a priori* and *a posteriori* analysis) are discussed in this text.

Résumé

La thèse de Pauline LAMBRECHT se base sur une séquence destinée à favoriser l'apprentissage de la proportionnalité et ce, par l'introduction de manipulations et la confrontation à la non-proportionnalité. Ainsi, l'observation de la variation du volume d'un cylindre en fonction de sa hauteur dans un premier temps et en fonction de son diamètre dans un second temps amène les élèves à construire les caractéristiques d'un phénomène proportionnel par comparaison avec un phénomène qui ne l'est pas. Le cadre de la recherche ainsi que quelques éléments de la validation interne (analyses *a priori* et *a posteriori*) sont abordés dans ce texte.

1 Présentation du problème

Cet article présente un travail de thèse en cours à l'UNamur en Belgique. L'ingénierie développée dans ce cadre est en lien avec une recherche menée au Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) de Nivelles en Belgique. Ces trois dernières années, une équipe de chercheurs a mis au point

*Pauline.Lambrecht@crem.be

des activités, appelées *Math & Manips*, intégrant des manipulations destinées à diverses tranches d'âge de l'enseignement (2 ans et demi à 18 ans) [9]. L'intérêt de cette recherche est de présenter aux enseignants l'apport d'une activité expérimentale dans le processus de construction des savoirs mathématiques.

Ces séquences d'apprentissage présentent une forte composante a-didactique et visent à provoquer chez les élèves de la curiosité par des expérimentations dont les résultats semblent en contradiction avec leurs connaissances antérieures. Elles doivent amener les élèves à entrer dans un processus de questionnement visant à faire émerger un modèle qui correspond au mieux à la réalité de la situation.

La séquence présentée dans cet article est l'une de ces activités. Elle est destinée aux élèves du début du secondaire (12-13 ans) et propose de confronter une situation de proportionnalité à une autre qui ne l'est pas.

Dans cette séquence, le passage de l'expérimental aux modèles mathématiques se fait dans différents contextes afin de favoriser le passage d'un registre de représentation sémiotique à un autre. En effet, l'activité expérimentale débouche nécessairement sur un relevé d'informations qui doivent être traitées de diverses manières. Les résultats sont décrits dans le langage courant, intégrés dans des tableaux de nombres et interprétés sous forme de graphiques.

2 Articles publiés sur le sujet

De nombreux documents ayant trait à l'apprentissage de la proportionnalité ont été écrits ces dernières années et ont nourri notre réflexion. Ainsi, l'ouvrage de BOISNARD, HOUEBINE, JULO, KERBŒUF et MERRI [2] décrit la difficulté de cette notion et présente notamment une classification des problèmes de proportionnalité. Dans la publication de NOWAK, TRAN et ZUCCHETTA [13], on retrouve également différentes procédures liées à la proportionnalité. HERSANT étudie dans sa thèse [10] les problèmes de proportionnalité ainsi que l'utilisation d'un logiciel pour aider à l'apprentissage de la proportionnalité. Une étude belge menée par GÉRON, STEGEN & DARO [8] s'attache à l'enseignement de la proportionnalité. Les auteurs ont rassemblé dans ce document des données de diverses recherches en didactique des mathématiques et classent également les problèmes de proportionnalité suivant une typologie proposée par VERGNAUD (proportionnalité simple et directe, proportionnalité simple composée et proportionnalité multiple).

Plusieurs articles de revues ont également traité la proportionnalité. Citons entre autres ceux de COMIN [4] et de DUPUIS et PLUVINAGE [6] dans *Recherches en Didactique des Mathématiques* et celui de HOYLES, NOSS et POZZI [11] dans *Journal for Research in Mathematics Education* par exemple. Notons qu'un groupe international de la Psychology of Mathematics Education s'intéresse à l'étude de la proportionnalité (voir notamment [12]).

La plupart de ces textes soulèvent la difficulté de l'apprentissage de cette notion, souvent liée à la multiplicité des catégories de problèmes. Notre angle de travail a fortement été inspiré par la lecture de travaux relatifs à la prégnance du modèle linéaire (DE BOCK, VAN DOOREN, JANSSENS & VERSCHAFFEL [5]) dont voici un exemple : « Mama put 3 towels on the clothesline. After 12 hours they were dry. Grandma put 6 towels on the clothesline. How long did it take them to get dry? ¹ ».

La séquence élaborée vise ainsi principalement à ébranler les conceptions initiales des apprenants par rapport à la rémanence du modèle linéaire.

3 Objectifs du travail et questions de recherche

Dès le début de ce travail, deux axes nous ont intéressés. D'un côté, l'insertion de situations de non-proportionnalité dans l'étude de la proportionnalité et de l'autre, l'intégration de manipulations pour les

1. Maman a placé 3 serviettes sur la corde à linge. Après 12 heures elles étaient sèches. Grand-mère a placé 6 serviettes sur la corde à linge. Combien de temps ont-elles pris pour sécher ?

apprentissages liés à la proportionnalité. Cela nous a menés aux questions de recherches suivantes.

- Une séquence intégrant une situation de non-proportionnalité permettant la confrontation à une situation de proportionnalité est-elle un apport pour les apprentissages liés à la proportionnalité ?
- Une séquence intégrant des manipulations permettant la confrontation aux perceptions initiales des élèves est-elle un apport pour les apprentissages liés à la proportionnalité ?
- Une séquence intégrant situation de non-proportionnalité et manipulations permet-elle d'améliorer l'aptitude des élèves à choisir un modèle adéquat pour traiter les diverses situations rencontrées ? Et à long terme ?

Nous sommes effectivement convaincus que tant les manipulations que la confrontation de la proportionnalité à la non-proportionnalité peuvent amener les élèves à un meilleur apprentissage de cette notion. C'est pourquoi la séquence d'apprentissage brièvement présentée à la section 5 a été mise au point.

4 Cadre théorique

Notre ingénierie a été élaborée dans le cadre de la théorie des situations didactiques de BROUSSEAU [3] et en utilisant la méthodologie décrite par ARTIGUE [1] comme précisé dans la section ci-dessous. De plus, notre travail s'appuie sur la conversion de registre de représentation au sens de DUVAL [7].

5 Méthodologie et description du dispositif expérimental

Pour construire l'ingénierie dont il est question dans ce papier, nous avons suivi le processus présenté par ARTIGUE [1] pour lequel elle distingue quatre phases.

La première concerne les analyses préalables. Comme nous l'avons souligné dans la section 2, de nombreux travaux ont déjà été menés quant à l'apprentissage de la proportionnalité mais la lecture des travaux de DE BOCK, VAN DOOREN, JANSSENS & VERSCHAFFEL [5] sur l'illusion de linéarité ainsi que le regard sur le contenu de différents manuels belges nous ont amenés à préciser notre approche.

La deuxième phase reprend la conception et l'analyse *a priori*. La théorie des situations didactiques de BROUSSEAU [3] a guidé l'écriture de la séquence d'apprentissage. Nous souhaitons notamment créer un milieu qui permette de dévoluer la situation aux élèves en étant confrontés à leurs préconceptions erronées. Quelques composantes de l'analyse *a priori* sont exposées dans la section suivante.

Les troisième et quatrième phases sont respectivement celle de l'expérimentation et celle de l'analyse *a posteriori* et de l'évaluation (validation). Dans notre cas, ces deux phases se sont répétées car, afin de mettre au point cette séquence, nous l'avons testée de nombreuses fois en l'adaptant au fur et à mesure des expérimentations. Des éléments de l'analyse *a posteriori* sont également présentés par la suite.

Comme présenté à la section 3, l'une des questions de recherche de la thèse porte sur l'apport d'une situation de non-proportionnalité dans l'étude de la proportionnalité. Pour traiter cette question, nous avons notamment mis en place un protocole d'expérimentation basé sur l'introduction de la séquence dans certaines classes (*classes-expérimentales*) tandis que d'autres classes (*classes-témoins*) poursuivaient leur enseignement. Les enseignants de deux écoles ont accepté de nous accueillir dans leurs locaux, ce qui a donné l'occasion de mener de nombreuses autres expérimentations.

L'activité proposée amène les élèves à étudier la variation du volume d'un cylindre en fonction de sa hauteur dans un premier temps et en fonction de son diamètre dans un second temps. Cela permet d'observer et de construire avec les élèves les caractéristiques d'un phénomène proportionnel par comparaison avec un phénomène qui ne l'est pas. Un enjeu important de l'activité est en effet d'établir le lien entre phénomène linéaire, tableau de proportionnalité et graphique en ligne droite d'une part et phénomènes non linéaires, tableaux de non-proportionnalité et graphiques de fonctions non linéaires d'autre part.

Une situation d'introduction permet aux élèves de se familiariser avec le matériel et de mettre en évidence des points essentiels d'une démarche scientifique : placement des repères, précision, utilisation d'un matériel adéquat, etc. Ensuite, dans une première partie, on demande de remplir un cylindre jusqu'à certaines hauteurs après avoir estimé, pour chaque cas, le nombre de mesurètes nécessaires à cette opération. Les élèves écrivent leurs résultats dans un tableau et il leur est demandé de repérer et d'écrire les différents liens qu'ils observent entre les valeurs du tableau, en les symbolisant par des flèches.

Dans une deuxième partie, on propose de remplir des cylindres de diamètres simple, double et triple jusqu'à une même hauteur après avoir demandé, dans chacun des cas, une estimation du nombre de mesurètes nécessaires. L'importance de la démarche qui consiste à ne faire varier qu'une seule grandeur à la fois est explicitée. De nombreux élèves s'attendent à obtenir des rapports simple, double et triple comme lorsqu'ils font varier la hauteur.

À nouveau, il est demandé de placer les résultats obtenus pour la variation du diamètre dans un tableau. Les liens découverts entre ces différentes valeurs doivent être mis en évidence afin d'en dégager les valeurs correspondant à des diamètres par exemple quatre ou cinq fois plus grands de celui de départ.

Pour chacune des deux situations, les élèves placent les résultats dans un graphique. Sur base des tableaux et graphiques construits au cours de l'activité, l'enseignant institutionnalise les savoirs visés, au sens de Brousseau [3], en réalisant une synthèse qui met en évidence les caractéristiques permettant de distinguer les phénomènes proportionnels des autres.

La description complète de cette séquence d'apprentissage se trouve dans le rapport de la recherche « *Math & Manips* » du CREM [9].

6 Analyse *a priori*

Une analyse approfondie de la séquence d'apprentissage a été menée avant de l'expérimenter dans les classes. Comme il n'est pas possible de faire état de l'entièreté de cette analyse ici, nous avons choisi d'en présenter deux points importants.

Lors des deux phases adidactiques de la séquence, la dévolution de la situation est prévue grâce aux composantes spécifiques du milieu : les fiches de travail, le matériel reçu et les différents registres utilisés doivent permettre aux élèves d'accepter le problème comme leur. L'intention d'enseigner du professeur disparaît ainsi, du moins en apparence.

Au terme de la séquence, l'enseignant institutionnalise les savoirs en considérant trois facteurs. Il doit mener les élèves des manipulations à la conceptualisation, leur faire différencier les deux modèles issus des deux situations et amener le vocabulaire adéquat lors de la synthèse.

7 Analyse *a posteriori*

Les nombreuses expérimentations ont permis de dégager divers éléments lors de l'analyse *a posteriori*, trois en ressortent.

Le premier concerne les fiches de travail. Leur clarté ainsi que le choix du vocabulaire ont dû être modifiés afin de permettre une meilleure dévolution de la situation.

Le deuxième élément touche aux différents liens repérés par les élèves dans leurs tableaux de résultats. Dans celui issu de la variation de la hauteur du cylindre, certains remarquent des liens de type multiplicatif et d'autres les écarts constants. Lors des premières expérimentations, les élèves adoptaient implicitement ces écarts constants comme une propriété de la proportionnalité. Pour éviter cette erreur, il a donc été nécessaire d'intégrer dans la séquence une discussion au cours de laquelle les élèves conviennent avec l'enseignant que la multiplication est plus générale en ce sens que les additions dépendent des valeurs initiales tandis que les liens multiplicatifs internes sont les mêmes pour tous les groupes, quelles que soient les valeurs de départ.

De plus, les liens de type multiplicatif permettent de trouver la réponse pour n'importe quelle hauteur sans recourir aux étapes intermédiaires.

Le troisième élément se rapporte aux estimations lors de la variation du diamètre d'un cylindre. Au cours des premières expérimentations, il n'était pas explicitement demandé aux élèves d'écrire leurs estimations. Ils avaient alors tendance à occulter leurs idées premières, ce qui réduisait l'effet positif du conflit cognitif induit par le milieu. L'introduction d'un tableau dans les fiches de travail permettant aux élèves d'écrire leurs estimations leur donne l'occasion de se confronter à la non-concordance des résultats avec leurs prévisions. Cela les incite à se poser davantage de questions et à chercher des justifications aux résultats obtenus.

Références

- [1] ARTIGUE M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9 (3), 281-308.
- [2] BOISNARD D., HOUDEBINE J., JULO J., KERBCEUF M.-P., MERRI M. (1994). *La proportionnalité et ses problèmes*. Paris : Hachette Éducation.
- [3] BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- [4] COMIN E. (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.22/2.3, La Pensée Sauvage éditions, pp.135-182.
- [5] DE BOCK D., VAN DOOREN W., JANSSENS D. & VERSCHAFFEL L. (2007). *The illusion of linearity. From Analysis to improvement*. New York : Springer.
- [6] DUPUIS C., PLUVINAGE F. (2003). La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.2/2, La Pensée Sauvage éditions, pp.165-212.
- [7] DUVAL R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.16/3, La Pensée Sauvage éditions, pp.349-382.
- [8] GÉRON C., STEGEN P. & DARO S. (2007). *L'enseignement de la proportionnalité : liaison primaire-secondaire*. http://www.enseignement.be/download.php?do_id=2712&do_check= (HYPOThèse)
- [9] GUISSARD M.-F., HENRY V., LAMBRECHT P., VAN GEET P., VANSIMPSEN S. & WETTENDORFF I. (2013). *Math & Manips - Des manipulations pour favoriser la construction des apprentissages en mathématiques*, rapport de recherche téléchargeable sur www.crem.be
- [10] HERSANT M. (2001). *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*. Thèse, Paris : Université Paris 7 - Denis Diderot.
- [11] HOYLES C., NOSS R. & POZZI S. (2001). Proportional reasoning in nursing practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, pp.4-27.
- [12] POST T., CRAMER K., HAREL G., KIEREN T. & LESH R. (1998). Research on rational number, ratio and proportionality. *Proceedings of the twentieth annual meeting of the north american chapter of the international group for the Psychology of Mathematics Education PME-NA XX*, Vol.1, Raleigh NC, pp.89-93.
- [13] NOWAK M.-TH., TRAN D., ZUCCHETTA J.-F. (2001). *La proportionnalité dans tous ces États*. Lyon : IREM de Lyon.