Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Sur les quantifications équivariantes en supergéométrie de contact

Thèse présentée par Aboubacar Nibirantiza
en vue de l'obtention du grade de
Docteur en Sciences
Année académique 2013-2014

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer en premier lieu toute ma gratitude à Monsieur Pierre Mathonet qui m'a proposé ce sujet et toutes les personnes qui ont contribué à sa réalisation.

J'adresse mes remerciements à toute l'équipe de géométrie différentielle et particulièrement à Fabian Radoux et à Jean-Philippe Michel qui m'ont constamment guidé de leurs conseils. Leurs disponibilités et leurs compétences m'ont été d'un très précieux secours dans la réalisation de cette thèse. Qu'ils trouvent ici le fruit de leurs efforts.

Je remercie également le gouvernement du Burundi pour avoir financé mes recherches à l'Université de Liège. J'ai également pu bénéficier du soutien ponctuel du programme PAI (pôles d'attraction interuniversitaires) accordé par la politique scientifique fédérale belge (Belspo).

Aboubacar NIBIRANTIZA.

Introduction générale

La notion de quantification apparaît en de nombreux endroits dans la littérature et peut prendre de nombreux sens tant en physique qu'en mathématique. Si on se réfère aux travaux initiaux sur ce sujet, il s'agit d'établir une association entre les observables classiques et les observables quantiques pouvant décrire un système physique. Cette association doit satisfaire de plus les conditions de Dirac. Les observables classiques sont des fonctions des coordonnées de position (q_i) et d'impulsion (p_i) décrivant le système classique, le plus souvent polynomiales en les impulsions. Les observables quantiques sont quant à elles des opérateurs différentiels agissant sur des fonctions d'ondes.

Du point de vue mathématique, les coordonnées (q_i, p_i) d'un point dans l'espace des phase de la mécanique hamiltonienne peuvent assimilées aux coordonnées canoniques d'un point appartenant au fibré cotangent T^*M d'une variété M décrivant l'espace de configuration du système mécanique. Les observables classiques sur une variété M peuvent donc être considérées comme des fonctions sur T^*M polynomiales en les fibres. Cet espace de fonctions est également appelé espace des symboles et est noté $\mathcal{S}$. De même, les observables quantiques peuvent être assimilées à des opérateurs différentiels agissant entre espaces de densités de poids $\frac{1}{2}$ sur la variété M, l'espace de tels opérateurs étant noté $\mathcal{D}$. Les exemples de quantifications telle que Dirac les a définies existent mais elles ne se comportent pas bien lors de changements de coordonnées de position q_i. En des termes plus modernes, il n'existe pas de quantification qui échange l'action des difféomorphismes locaux sur les espaces de symboles et d'opérateurs différentiels.

Les auteurs C. Duval, P. Lecomte et V. Ovsienko ont introduit dans [17, 38] la notion de quantification équivariante. Quand un groupe de Lie G agit (localement) sur une variété M, on peut relever son action sur les espaces de symboles et d'opérateurs différentiels. On cherche alors une quantification Q, qui soit une bijection de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{D}$ et qui échange les actions de G sur ces deux espaces.

Du point de vue infinitésimal, l'action du groupe de Lie G permet de définir une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de l'algèbre de Lie $\mathrm{Vect}(M)$ des champs de vecteurs sur M, par le biais des champs fondamentaux associés à l'action de G. Une quantification $\mathfrak{g}$-équivariante est alors un isomorphisme de représentations de $\mathfrak{g}$ entre les espaces de symboles et les espaces d'opérateurs différentiels satisfaisant une condition de normalisation.

Les auteurs P. Lecomte et V. Ovsienko ont considéré dans [17] le groupe projectif $G = PGL(n+1, \mathbb{R})$ agissant localement sur $\mathbb{R}^n$ par transformations projectives. Au niveau infinitésimal, cette action induit un isomorphisme entre l'algèbre de Lie matricielle $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$ et une sous-algèbre de Lie de champs de vecteurs polynomiaux sur $\mathbb{R}^n$. P. Lecomte et V. Ovsienko ont étudié la quantification entre l'espace des symboles $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et les espaces $\mathcal{D}_\lambda(\mathbb{R}^n)$ des opérateurs différentiels agissant entre espaces de densités de poids λ.

Les auteurs C. Duval, P. Lecomte et V. Ovsienko ont considéré ensuite dans [38] la sous-algèbre de Lie maximale $\mathfrak{so}(p+1, q+1, \mathbb{R})$ de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs polynomiaux sur $\mathbb{R}^{p+q}$. Ils ont étudié le problème de la quantification $\mathfrak{so}(p+1, q+1, \mathbb{R})$-équivariante dans le cas où l'espace filtré des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\lambda\mu}$ est constitué d'opérateurs différentiels agissant entre λ-densités et μ-densités et où l'espace des symboles est l'espace gradué associé $\mathcal{S}_{\mu-\lambda}$.

Ces travaux initiaux ont été généralisés dans de nombreuses directions ces dernières années :

- La quantification équivariante a été considérée pour une famille de sous-algèbres de champs de vecteurs à coefficients polynomiaux au dessus d'espaces vectoriels. Dans tous ces cas, le résultat générique est l'existence d'une quantification équivariante unique pour autant que le paramètre $\delta = \mu - \lambda$ ne soit pas dans un ensemble de valeurs dites critiques.
- Cette construction s'est révélée utile pour l'étude d'espaces d'opérateurs différentiels agissant sur des objets plus généraux que les densités. Dans tous les cas, on a considéré, au dessus d'un espace vectoriel, un espace d'opérateurs différentiels, filtré par l'ordre naturel des opérateurs différentiels, et l'espace gradué associé à cette filtration, qui s'identifie à un espace de tenseurs. On se pose alors la question de l'existence d'une bijection, échangeant les actions naturelles d'une algèbre de Lie des champs de vecteurs sur les espaces considérés et qui satisfait une condition de normalisation.
- Citons encore le cadre plus général des quantifications naturelles et invariantes, où l'on considère des quantifications au sens précédent, mais définies sur des variétés en général et dépendant en plus d'une structure géométrique définie sur la variété. Ces types de quantifications ont été étudiées notamment par P.Mathonet et F.Radoux par exemple dans [26, 24, 27, 25]. Nous référons à ces travaux en parlant du cas courbe.

A ce stade, toutes ces constructions avaient cependant trait à la géométrie classique. On pouvait se poser naturellement la question de leur extension à la supergéométrie. Dans ce contexte, la quantification conformément invariante des fibrés supercotangents a alors été considérée par Jean-Philippe Michel dans [31] et la quantification projectivement équivariante sur le superespace $\mathbb{R}^{p|q}$ a été étudiée par P. Mathonet et F. Radoux dans [28].

Ils ont considéré la sous-superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^{p|q})$, définie par analogie à l'algèbre projective de la géométrie classique. Ils ont démontré l'existence d'une quantification $\mathfrak{g}$-équivariante sur $\mathbb{R}^{p|q}$, c'est à dire une application linéaire

$$Q : \mathcal{S}_\delta(\mathbb{R}^{p|q}) \to \mathcal{D}_{\lambda\mu}(\mathbb{R}^{p|q}) \tag{1}$$

telle que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on a $\mathcal{L}_X \circ Q = Q \circ L_X$ et qui vérifie la condition de normalisation habituelle.

La quantification projectivement équivariante a finalement été étudiée dans le cadre de la supergéométrie et dans le cas courbe par J. George dans [32] et par T. Leuther et F. Radoux dans [23].

Un autre type de quantification équivariante a été étudiée sur le supercercle par H. Gargoubi, N. Mellouli et V. Ovsienko dans [10] et [11]. L'algèbre définissant l'équivariance dans la cas du supercercle $S^{1|1}$ correspond à la superalgèbre orthosymplectique $\mathfrak{spo}(2|1)$, et provient de l'existence sur le supercercle de deux structures géométriques, à savoir une structure projective et une structure de contact. Dans l'article [10], ainsi que dans la thèse [11], l'existence d'une quantification équivariante dans ce cadre a été démontrée et des formules explicites pour la quantification ont pu être dégagées grâce à un calcul direct. La généralisation au supercercle $S^{1|2}$ a également été étudiée par N. Mellouli dans [30]. L'algèbre d'équivariance est encore une superalgèbre orthosymplectique $\mathfrak{spo}(2|2)$. Le calcul direct n'a cependant pas suffi pour mener à bien le théorème d'existence en toute généralité et les résultats sont limités dans [30] aux symboles de degré 2 au plus.

L'originalité de ces travaux provient de l'algèbre d'équivariance utilisée, mais également du fait que la filtration des opérateurs différentiels et l'espace gradué qui en résulte ne sont pas définis par l'ordre naturel des opérateurs différentiels, mais par un ordre lié à la structure de contact.

Pour ce qui nous concerne, nous avons abordé dans le même sens d'extension de la quantification équivariante dans le contexte de la supergéométrie de contact. Nous avons étudié quelques questions laissées ouvertes dans ces travaux. En premier lieu, nous avons commencé à établir les résultats connus sur $S^{1|1}$ et qu'on peut trouver dans [10] et dans la thèse de Najla Mellouli [11]. Nous avons en fait traité le problème en utilisant une méthode différente de celle utilisée dans [10] : *la méthode des opérateurs de Casimir.*

Nous avons ensuite étendu à tout ordre les résultats de la quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante sur $S^{1|2}$ qui, jusqu'alors, étaient connus jusqu'à l'ordre deux dans [30]. On peut trouver par ailleurs les résultats de cette extension dans [29].

Nous avons ensuite généralisé en dimension quelconque les résultats obtenus sur $S^{1|1}$ et $S^{1|2}$. En effet, nous avons considéré la supervariété de contact $\mathbb{R}^{2l+1|n}$ munie de sa structure de contact standard. Les quantifications que nous avons construites échangent les actions des superalgèbres de Lie des champs de vecteurs projectifs de contact, notées $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$. La superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ est l'intersection de la superalgèbre de Lie des champs de vecteurs de contact sur $\mathbb{R}^{2l+1|n}$ et de la superalgèbre de Lie projective $\mathfrak{pgl}(2l+2|n)$. Grâce à la structure de contact standard considérée sur $\mathbb{R}^{2l+1|n}$, les espaces d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(\mathbb{R}^{2l+1|n})$ sont munis d'une filtration plus fine que la filtration canonique. Les espaces des symboles fins $\mathcal{P}_\delta(\mathbb{R}^{2l+1|n})$ sont quant à eux les espaces gradués associés à cette filtration fine. Notre méthode s'inspire des techniques utilisées, dans le cas purement pair, par Charles H. Conley et Valentin Ovsienko dans [5]. Quand la superdimension est différente de -1, nous pouvons utiliser la quantification $\mathfrak{pgl}(p+1|q)$-équivariante construite par P. Mathonet et F. Radoux. En supergéométrie de contact, on peut définir une notion de densité de poids contact. L'espace des densités de poids contact $\mathcal{F}_\lambda$ constitue une représentation de l'algèbre des champs de vecteurs de contact $K(2l+1|n)$.

Le cas de $S^{1|2}$ est un cas spécial qui a été traité explicitement à part parce que la généralisation que nous avons donnée dans cette thèse n'est valable qu'en superdimension différente de -1. En particulier, tous les champs de vecteurs de contact considérés sur $S^{1|2}$ sont de divergence nuls. Quand la superdimension est égale à -1 la quantification $\mathfrak{pgl}(p+1|q)$-équivariante n'induit pas une quantification $\mathfrak{spo}(p+1|q)$-équivariante.

Nous avons utilisé deux formalismes : d'une part, nous avons utilisé la méthode des opérateurs de Casimir pour traiter, l'existence et l'unicité de la quantification équivariante sur $S^{1|1}$ et sur $S^{1|2}$ et d'autre part, pour traiter l'unicité de la quantification $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante sur $\mathbb{R}^{2l+1|n}$.

1. Le premier formalisme utilisé pour étudier les quantifications équivariantes sur $S^{1|1}$ et sur $S^{1|2}$ s'inspire de celle de N.Mellouli, H. Gargoubi et V.Ovsienko dans [10] et de N. Mellouli dans [30] où nous considérons les identifications suivantes :
   - Sur $S^{1|1}$ les espaces $\mathcal{S}^k_\delta(S^{1|1})$ des symboles de degré k sont identifiables en tant qu'espaces vectoriels aux espaces $\mathcal{F}_{\delta'}(S^{1|1})$ des densités de poids δ'. Si $\delta'=\delta-k$, on a toujours un isomorphisme entre $\mathcal{S}^k_\delta(S^{1|1})$ et $\mathcal{F}_{\delta'}(S^{1|1})$ en tant que modules sur la superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2|1)$ des champs de vecteurs projectifs de contact sur $S^{1|1}$.

   - Les espaces $\mathcal{S}^k_\delta(S^{1|2})$ des symboles de degré k sont isomorphes en tant que représentations de $\mathfrak{spo}(2|2)$ aux espaces $\mathcal{F}_{\delta'}(S^{1|2})\times\mathcal{F}_{\delta'}(S^{1|2})$ munis d'une structure de module sur $\mathfrak{spo}(2|2)$. Plus précisément, si $k\in\mathbb{N}$, on a la structure de module canonique sur $\mathcal{F}_{\delta-k} \times \mathcal{F}_{\delta-k}$ tandis que si $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$, cette structure de module n'est pas canonique.

2. Ce premier formalisme devient plus compliqué quand on traite le problème sur le supercercle $S^{1|n}$ si $n > 2$ et nous avons changé de formalisme pour traiter tous les cas. En effet, le deuxième formalisme s'inspire des techniques utilisées, dans le cas purement pair, par Charles H. Conley et Valentin Ovsienko dans [5]. Nous avons considéré les symboles représentés par des polynômes et les dérivées de Lie représentées par des opérateurs différentiels.

Notre thèse est répartie en quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré aux définitions et notions fondamentales indispensables à la présentation du travail. Il s'agit en premier lieu des notions du calcul différentiel sur les supervariétés, les notions de structure de contact sur les supervariétés, les notions de densités, espaces des opérateurs différentiels et espaces des symboles sur les supervariétés. Nous avons aussi réalisé matriciellement la superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ et nous avons enfin présenté les outils nécessaires pour étudier les quantifications équivariantes.
Dans les chapitres deux et trois, nous avons construit, par la méthode des opérateurs de Casimir utilisée dans [28] par P. Mathonet et F. Radoux, la quantification $\mathfrak{spo}(2|1)$-équivariante sur le supercercle $S^{1|1}$ et la quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante sur le supercercle $S^{1|2}$ pour les symboles d'ordre arbitraire $k \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Nous avons en plus donné les formules explicites de ces quantifications équivariantes. Pour mener les calculs nous avons utilisé le formalisme 1.
Dans le chapitre quatre, nous avons généralisé les résultats obtenus sur $S^{1|1}$ et sur $S^{1|2}$. Pour généraliser, en dimension quelconque, le problème de quantification équivariante étudié sur les supercercles $S^{1|1}$ et $S^{1|2}$, nous avons considéré l'action de la sous-superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ des champs de vecteurs de contact X_f sur $\mathbb{R}^{2l+1|n}$ dont les superfonctions f associées sont polynomiales de degré au plus égal deux en les variables z, x_i, y_i, θ_i.
Quand $2l+2 \neq n$, l'existence de la quantification $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante peut-être prouvée en se servant de la quantification $\mathfrak{sl}(2l+2|n)$-équivariante construite par P. Mathonet et F. Radoux dans [28]. En effet, quand $2l+2 \neq n$, cette quantification équivariante induit une quantification $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante entre $\mathcal{S}_\delta$ et $\mathcal{D}_{\lambda\mu}$ et la preuve de l'existence d'une quantification $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante se réduit alors à la recherche d'une application $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante entre $\mathcal{P}_\delta$ et $\mathcal{S}_\delta$. Nous considérons l'espace $\mathcal{S}_\delta(\mathbb{R}^{2l+1|n})$ (resp. $\mathcal{P}_\delta(\mathbb{R}^{2l+1|n})$) des symboles associés à l'espace $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(\mathbb{R}^{2l+1|n})$ des opérateurs différentiels muni de la filtration canonique(resp. muni de la filtration d'Heisenberg). Nous avons considéré ensuite l'espace $\Sigma_\delta^{k,d}(\mathbb{R}^{2l+1|n})$ des symboles fins associés

à l'espace $\mathcal{D}^{k,d}_{\lambda\mu}(\mathbb{R}^{2l+1|n})$ des opérateurs différentiels muni d'une bifiltration induite par la filtration canonique et la filtration d'Heisenberg. L'espace des symboles $\mathcal{P}_\delta(\mathbb{R}^{2l+1|n})$ s'écrit comme somme directe des espaces des symboles fins $\Sigma^{k,d}_\delta(\mathbb{R}^{2l+1|n})$ de la manière suivante

$$\mathcal{P}_\delta(\mathbb{R}^{2l+1|n}) = \bigoplus_{d\in\frac{1}{2}\mathbb{N}} \bigoplus_{k=\lceil d\rceil}^{2d} \Sigma^{k,d}_\delta(\mathbb{R}^{2l+1|n}).$$

Nous avons donné la formule explicite de cette quantification $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante et la preuve de l'unicité de cette quantification $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante est faite à l'aide d'opérateurs de Casimir. Pour mener les calculs, nous avons utilisé le formalisme 2.

Chapitre 1

Notions de base

Dans ce chapitre, nous fixons les définitions et propriétés nécessaires de la théorie générale pour l'ensemble de notre travail. Nous commençons par un rappel de la définition des supervariétés en termes de faisceaux de superalgèbres associatives et nous rappelons dans ce cadre général les définitions des champs de vecteurs. Pour ne pas alourdir l'exposé et puisque nous sommes intéressés par des considérations locales, nous nous plaçons dans le cadre d'un superdomaine et nous définissons les notions de densités, d'opérateurs différentiels, de symboles et de structure de contact sur une supervariété. Notre objectif n'est pas de décrire explicitement ces notions mais plutôt de donner des définitions sous forme de rappels. Nous nous appuyons sur les références [14, 1, 19, 20, 21, 40, 33, 34, 35]. Nous rappelons aussi la définition des superalgèbres $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$. Enfin, nous posons en général le problème de la quantification équivariante et nous rappelons les outils qui ont permis d'étudier ce problème dans d'autres contextes.

1.1 Notion de superalgèbre

Tout au long de notre travail nous noterons $\{0,1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$. Le préfixe "super" signifiera un objet gradué sur $\mathbb{Z}_2$. Nous ne considérerons que des espaces vectoriels sur le corps des réels.

1.1.1 Superespace vectoriel

Définition 1.1.1. *On appelle superespace vectoriel V tout espace vectoriel muni d'une $\mathbb{Z}_2$-graduation et on le note $V = V_0 \oplus V_1$. Les éléments de V_0 sont les éléments pairs et ceux de V_1 sont les éléments impairs. On appelle homogène tout élément de V_0 ou de V_1.*

Si a est homogène, on note $|a|$ ou $\tilde{a}$ la parité de a définie par

$$V_k = \{x \in V : |x| = k\},$$

pour $k \in \{0, 1\}$.

Si la dimension de V_0 est p et celle de V_1 est égale à q alors la dimension du superespace vectoriel est notée $p|q$.

Exemple 1.1.2. *Soit $\mathbb{R}^{p+q}$ l'espace vectoriel de dimension $p+q$. Si on considère une base canonique e_i de $\mathbb{R}^{p+q}$ telle que e_i soit défini pair(resp. défini impair) pour $1 \leq i \leq p$ (resp. $p+1 \leq i \leq p+q$) alors tout élément de $v \in \mathbb{R}^{p+q}$ peut s'écrire comme suit*

$$v = \sum_{i=1}^{p} e_i v^i + \sum_{i=p+1}^{p+q} e_i v^i.$$

Nous obtenons un superespace vectoriel de dimension $p|q$ noté $\mathbb{R}^{p|q}$.

Définition 1.1.3. *Soient V et W deux superespaces sur un corps $\mathbb{K}$. Une application linéaire $\varphi : V \to W$ définie sur V à valeurs dans W est dite homogène de degré γ où $\gamma \in \mathbb{Z}_2$ si $\varphi(V_\alpha) \subset W_{\alpha+\gamma}$. On note $\mathrm{Hom}(V, W)_0$ l'ensemble des applications de degré 0 et $\mathrm{Hom}(V, W)_1$ l'ensemble des applications de degré 1.*

On a exactement

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \mathrm{Hom}(V, W)_0 \oplus \mathrm{Hom}(V, W)_1.$$

Il suffit de comprendre que

$$\mathrm{Hom}(V, W)_0 = \{\varphi : V \to W : \varphi(V_0) \subset W_0, \quad \varphi(V_1) \subset W_1\}$$

et

$$\mathrm{Hom}(V, W)_1 = \{\varphi : V \to W : \varphi(V_0) \subset W_1, \quad \varphi(V_1) \subset W_0\}$$

et que chaque application linéaire φ se décompose de manière unique en

$$\varphi = \varphi_{00} + \varphi_{01} + \varphi_{10} + \varphi_{11}$$

où φ_{kl} applique V_k sur W_l pour tous k, l. La partie paire de φ est $\varphi_{00} + \varphi_{11}$ tandis que la partie impaire est $\varphi_{01} + \varphi_{10}$.

Exemple 1.1.4. *Soit $\mathbb{R}^{p|q}$ le superespace vectoriel de dimension $p|q$. Si nous considérons sa base canonique alors l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^{p|q}$*

$$\mathrm{End}(\mathbb{R}^{p|q}) = \mathrm{End}(\mathbb{R}^{p|q})_0 \oplus \mathrm{End}(\mathbb{R}^{p|q})_1$$

peut être représenté par des matrices en blocs de la forme suivante $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, *où A, B, C et D sont respectivement des matrices $p \times p$, $p \times q$, $q \times p$ et $q \times q$. Les parties paires et impaires sont respectivement* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$.

1.1.2 Superalgèbre

Définition 1.1.5. *On appelle superalgèbre tout superespace vectoriel $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ muni d'une application bilinéaire telle que pour tous $a \in \mathcal{A}_\alpha$ et $b \in \mathcal{A}_\beta$ avec $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$, on a $ab \in \mathcal{A}_{\alpha+\beta}$.*

Les notions suivantes sont particulièrement importantes.

(i) La notion d'associativité est définie comme dans le cas classique. Par exemple le superespace vectoriel $\mathrm{End}(\mathbb{R}^{p|q})$ muni de la composition de ses éléments est une superalgèbre associative.

(ii) Les superalgèbres de Lie constituent des cas particuliers des superalgèbres. Le crochet est alors une application $[-,-]$ qui satisfait les propriétés suivantes :

– l'antisymétrie graduée, i.e : $[X, Y] = -(-1)^{\tilde{X}\tilde{Y}}[Y, X]$,

– l'identité de Jacobi graduée, i.e :

$$(-1)^{\tilde{X}\tilde{Z}}[X, [Y, Z]] + (-1)^{\tilde{Y}\tilde{X}}[Y, [Z, X]] + (-1)^{\tilde{Z}\tilde{Y}}[Z, [X, Y]].$$

Par exemple, la superalgèbre associative $\mathrm{End}(\mathbb{R}^{p|q})$ munie du supercommutateur est une superalgèbre de Lie notée

$$\mathfrak{gl}(p|q) = \mathfrak{gl}(p|q)_0 \oplus \mathfrak{gl}(p|q)_1.$$

(iii) Une superalgèbre $\mathcal{A}$ associative est dite supercommutative si pour tous éléments homogènes a et b dans $\mathcal{A}$

$$ab = (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}ba.$$

Donc dans une superalgèbre associative supercommutative $\mathcal{A}$, les éléments impairs anticommutent et sont nilpotents. C'est-à-dire $ab = -ba$ et $a^2 = 0$ pour tous éléments impairs a et b.

Exemple 1.1.6. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie. On note que l'ensemble des tenseurs antisymétriques sur V définit une superalgèbre associative supercommutative. En effet, si on note $\wedge^p(V)$ l'espace des p-tenseurs antisymétriques, on a la décomposition suivante*

$$\wedge V = \bigoplus_{p=0}^{dimV} \wedge^p(V) = (\wedge V)_0 \oplus (\wedge V)_1$$

où $(\wedge V)_0$ est le sous-espace des p-tenseurs antisymétriques avec p pair et $(\wedge V)_1$ est le sous-espace des p-tenseurs antisymétriques avec p impair. On peut voir que si on considère une base $(e_1, \cdots, e_q)$ de V alors les éléments de $\wedge V$ prennent la forme suivante

$$\sum_{p=0}^{q} \sum_{i_1 < \cdots < i_p} T^{i_1 \cdots i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p},$$

où $T^{i_1 \cdots i_p}$ sont des nombres.
Si u est de degré p et v de degré q alors $u \wedge v$ est un $(p+q)$-tenseur antisymétrique et on a la relation suivante

$$v \wedge u = (-1)^{pq} u \wedge v.$$

1.1.3 Stucture de $\mathcal{A}$-modules

Définition 1.1.7. *Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ une superalgèbre. On appelle $\mathcal{A}$-module à gauche un module $M = M_0 \oplus M_1$ sur $\mathcal{A}$, tel que pour tout élément homogène $a \in \mathcal{A}_\alpha$ et pour tout $m \in M_\beta$ on a*

$$a.m \in M_{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2, \quad et \quad \widetilde{(a.m)} = \tilde{a} + \tilde{m}.$$

A toute structure de $\mathcal{A}$-module à gauche, on peut associer une structure de $\mathcal{A}$-module à droite par la formule suivante :

$$m.a := (-1)^{\tilde{a}\tilde{m}} a.m.$$

Définition 1.1.8. *Si E et F sont des $\mathcal{A}$-modules, on appelle homomorphisme entre E et F un élément de l'espace* $\mathrm{Hom}(E, F)_0$*, qui échange les actions de $\mathcal{A}$ sur les deux espaces.*

Définition 1.1.9. *Soit M un $\mathcal{A}$-module. On dit que M est libre de rang $p|q$ s'il existe une base de M sur $\mathcal{A}$ constituée d'éléments homogènes et qui ait p éléments pairs et q éléments impairs.*

1.2 Notion de préfaisceau et faisceau sur un espace topologique

Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique alors nous notons $Ouv(X)$ la catégorie de l'ensemble des ouverts sur X. Les objets de cette catégorie sont les éléments de $\mathcal{T}$ et les morphismes sont des inclusions, c'est-à-dire

$$Hom(U, V) := \begin{cases} \{e\} & \text{si} \quad U \subset V \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

Ici $''e''$ désigne l'inclusion de U dans V.

Définition 1.2.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie d'ensembles et $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On appelle préfaisceau sur $(X, \mathcal{T})$ à valeurs dans $\mathcal{C}$, un foncteur contravariant de la catégorie $Ouv(X)$ dans $\mathcal{C}$.*

En d'autres termes, un préfaisceau est la donnée d'une application

$$\mathcal{O} : \mathcal{T} \to \mathcal{C} : U \mapsto \mathcal{O}(U)$$

telle que pour tout $U, V \in \mathcal{T}$ vérifiant $U \subset V$, il existe une application de restriction

$$\rho_U^V : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$$

vérifiant les conditions suivantes :

- $\rho_U^W = \rho_U^V \rho_V^W$ si $U \subset V \subset W$ pour tous $U, V, W \in \mathcal{T}$.
- ρ_U^U est l'identité sur $\mathcal{O}(U)$ quel que soit $U \in \mathcal{T}$.

En effet, dans la catégorie $Ouv(X)$, on a $Hom(U, V) = \{e\}$ si et seulement si $U \subset V$. On a alors

$$\rho_U^V = \mathcal{O}(e) \in Hom(\mathcal{O}(V), \mathcal{O}(U)).$$

Les conditions sur les applications de restrictions ρ_U^V découlent de la définition des foncteurs contravariants. Les éléments de $\mathcal{O}(U)$ sont appelés sections locales de $\mathcal{O}$ au dessus de U tandis que ceux de $\mathcal{O}(X)$ sont appelés sections globales.

Exemple 1.2.2. *1. L'ensemble des fonctions continues sur un espace topologique M définit de façon naturelle un préfaisceau $\mathcal{C}_M$ sur M. Les éléments des ensembles $\mathcal{C}_M(U)$ sont des fonctions continues de U dans $\mathbb{R}$. Les homomorphismes de restrictions sont les restrictions naturelles des fonctions.*

2. *Sur $\mathbb{R}^m$, la donnée sur tout ouvert U de l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur U définit un préfaisceau sur $\mathbb{R}^m$. Les applications de restrictions sont précisement les restrictions au sens usuel.*

Si on note $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux préfaisceaux sur $(X, \mathcal{T})$ à valeurs dans une catégorie $\mathcal{C}$ alors on définit un morphisme de préfaisceaux $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ comme la donnée pour tout $U \in Ouv(X)$ d'un morphisme de foncteurs contravariants

$$\theta(U) : \mathcal{O}_1(U) \to \mathcal{O}_2(U)$$

tel que pour tout $U \subset V$, le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_1(V) \arrow[r, "\theta(V)"] \arrow[d, "\rho_U^V"'] & \mathcal{O}_2(V) \arrow[d, "\rho_U^V"] \\ \mathcal{O}_1(U) \arrow[r, "\theta(U)"'] & \mathcal{O}_2(U) \end{tikzcd} .$$

Définition 1.2.3. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{O}$ un préfaisceau sur $(X, \mathcal{T})$ à valeurs dans $\mathcal{C}$. On dit que $\mathcal{O}$ est un faisceau sur $(X, \mathcal{T})$ à valeurs dans $\mathcal{C}$ lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :*

A.1 Soient $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts dans $(X, \mathcal{T})$, U la réunion des ouverts U_i et $S_1, S_2 \in \mathcal{O}(U)$. Si les restrictions de S_1 et S_2 à chaque U_i sont égales, alors on a $S_1 = S_2$ (Unicité)

A.2 Soient $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts dans $(X, \mathcal{T})$, de réunion U et supposons données des sections $S_i \in \mathcal{O}(U_i)$ de telle sorte que, quels que soient $i, j \in I$ on a

$$S_i|_{U_i \cap U_j} = S_j|_{U_i \cap U_j},$$

alors il existe une section S de $\mathcal{O}(U)$ telle que $S|_{U_i} = S_i$ pour tout $i \in I$.(Recollement)

Les morphismes des faisceaux sont définis exactement comme pour les préfaisceaux.

Si on a un faisceau $\mathcal{O}$ sur un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, on peut le restreindre sur un ouvert de ce dernier. Ainsi on prend un ouvert $U \subset X$ et on le considère comme un espace topologique muni de la topologie induite par celle de X.

Définition 1.2.4. *On appelle une restriction de $\mathcal{O}$ à U le faisceau obtenu en posant, pour un ouvert V de X, la condition suivante*

$$\mathcal{O}|_U(V) := \mathcal{O}(U \cap V).$$

1.2.1 Faisceau de $\mathbb{R}$-superalgèbres de superfonctions sur $\mathbb{R}^{p|q}$

Nous décrivons le faisceau particulier sur $\mathbb{R}^{p|q}$ permettant de définir la notion de superdomaine.

Définition 1.2.5. *On appelle superalgèbre des superfonctions sur $\mathbb{R}^{p|q}$ et on note $C^\infty(\mathbb{R}^{p|q})$ la $\mathbb{R}$-superalgèbre associative commutative $C^\infty(\mathbb{R}^p) \otimes \wedge(\mathbb{R}^q)$. En coordonnées $(x_i, \theta_j) = (x_1, ..., x_p, \theta_1, ..., \theta_q)$, une superfonction sur $\mathbb{R}^{p|q}$ s'écrit :*

$$\begin{aligned} f(x,\theta) &= \sum_{0\leqslant|I|\leqslant q} f_I(x)\theta_I \\ &= f_0(x) + f_1(x)\theta_1 + ... + f_q(x)\theta_q + f_{12}(x)\theta_1\theta_2 + ... \\ &+ f_{1...q}(x)\theta_1...\theta_q \end{aligned}$$

où $f_0, f_1, ..., f_q, f_{12}, ..., f_{1...q} \in C^\infty(\mathbb{R}^p)$ et où (x_i) est un système de coordonnées sur $\mathbb{R}^p$ et $(\theta_i), i \in \{1, ..., q\}$ une base de $\wedge(\mathbb{R}^q)$, i.e : $\theta_i^2 = 0, \theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i$.

Nous pouvons expliciter cette définition comme suit. C'est une $\mathbb{R}$-superalgèbre commutative des superfonctions polynomiales en θ_i à coefficients dans la $\mathbb{R}$-algèbre $C^\infty(\mathbb{R}^p)$ des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^p$. On la note également

$$C^\infty(\mathbb{R}^{p|q}) := C^\infty(\mathbb{R}^p)[\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q]$$

où les variables $\theta_1, ..., \theta_q$ anticommutent. De même si $U \subset \mathbb{R}^p$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, on définit

$$C^\infty(\mathcal{U}) := C^\infty(U)[\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q].$$

On note encore cette superalgèbre $C^{\infty,p|q}(U)$.

Vu l'expression d'une superfonction f en coordonnées, on peut encore la décomposer, avec des notations un peu différentes, comme suit

$$f = \sum_{|I|\,\text{pair}} f_I(x)\theta_I + \sum_{|J|\,\text{impair}} f_J(x)\theta_J$$

où

$$I = (i_1, \ldots, i_q) \in \mathbb{Z}_2^q, \theta_I = \theta_1^{i_1} \ldots \theta_q^{i_q}, |I| = i_1 + \ldots + i_q.$$

Alors on peut écrire que

$$C^\infty(\mathcal{U}) = C^\infty(\mathcal{U})_0 \oplus C^\infty(\mathcal{U})_1.$$

Nous donnons la définition standard d'une application de restriction comme suit :

Définition 1.2.6. *Soit M est une variété différentielle et U, V des ouverts dans M tel que $V \subset U$. Une application de restriction naturelle de f sur V et on note $\tilde{\rho}_V^U$ est définie par*

$$\tilde{\rho}_V^U : C^\infty(\mathcal{U}) \to C^\infty(\mathcal{V}) : f \mapsto f'$$

avec $f'(x) = f(x)$, $x \in V$.

Il est clair que la restriction de f à V est un élément de $C^\infty(\mathcal{V})$. L'application suivante $\tilde{\rho}_V^U : C^\infty(\mathcal{U}) \to C^\infty(\mathcal{V})$ qui à un élément $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ associe sa restriction sur V est un homomorphisme de superalgèbres ; c'est-à-dire

$$\tilde{\rho}_V^U(af + bg) = a\tilde{\rho}_V^U(f) + b\tilde{\rho}_V^U(g), \quad \tilde{\rho}_V^U(fg) = \tilde{\rho}_V^U(f).\tilde{\rho}_V^U(g)$$

pour a et b des nombres réels.

Proposition 1.2.7. *L'application $U \to C^{\infty, p|q}(U)$ qui à tout ouvert U de $\mathbb{R}^p$ associe la $\mathbb{R}$-superalgèbre associative commutative unitaire $C^\infty(\mathcal{U})$ est un faisceau. Les applications de restriction ρ_U^V pour $U \subset V \subset M$ sont définies de manière naturelle. Nous noterons par $C^{\infty, p|q}$ ce faisceau.*

Nous définissons la notion de germes sur un faisceau quelconque $\mathcal{O}$ sur un espace topologique X.

D'une manière générale, on considère une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'ensembles, indicée par un ensemble ordonné I et muni d'une famille d'applications $f_i^j : A_i \to A_j$ pour tout $i \leq j$ vérifiant les conditions de compatibilité suivantes :

1. pour tout $i \in I$, f_i^i est l'identité sur A_i,
2. pour tous $i \leq j \leq k$, $f_i^k = f_j^k \circ f_i^j$.

Le triplet (I, A_i, f_i^j) est appelé système inductif d'ensembles. On définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par

$$\{x_i \mathcal{R} x_j \text{ ssi } \exists k \geq i, j \text{ tel que } f_i^k(x_i) = f_j^k(x_j)\}.$$

Définition 1.2.8. *Ces conditions étant satisfaites, on appelle limite inductive et on note $A = \varinjlim A_i$ le quotient de l'union disjointe des ensembles A_i par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.*

On en déduit des applications naturelles $\varphi_i : A_i \to A$, envoyant chaque élément sur sa classe d'équivalence. Dans le cas des faisceaux, on peut noter le lemme suivant :

Lemme 1.2.9. *Soit $\mathcal{O}$ un faisceau sur un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. Si la famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts contenant x est ordonné par l'inclusion, alors le triplet $(I, \mathcal{O}(U_i), \rho_{U_j}^{U_i})$ est un système inductif pour les applications de restriction $\rho_{U_j}^{U_i}$ avec $(U_i \leq U_j$ si $U_i \supset U_j)$.*

On peut donc définir la notion de germes comme suit :

Définition 1.2.10. *Etant donné un faisceau $\mathcal{O}$ sur un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ et $x \in X$, on note $\mathcal{O}_x$ ou $\mathcal{O}_{X,x}$ et on appelle ensemble des germes en x ou fibre en x la limite inductive $\varinjlim_{x\in U_i} \mathcal{O}(U_i)$ défini par le lemme précédent.*

1.3 Notion de superdomaine

La notion de superdomaine est le modèle local d'un superespace localement annelé, c'est pourquoi nous commençons par définir la notion de superespace annélé d'une manière générale.

Définition 1.3.1. *On appelle superespace annelé, la donnée d'un couple $(X, \mathcal{O}_X)$, X étant un espace topologique tel que $\mathcal{O}_X$ est un faisceau de $\mathbb{R}$-superalgèbres associatives commutatives unitaires. Toutes les applications de restriction préservent la graduation sur $\mathbb{Z}_2$.*

En particulier, si on considère $X = \mathbb{R}^p$, le couple $(\mathbb{R}^p, C^{\infty,p|q})$ est un superespace annelé. Celui-ci constitue notre exemple fondamental de supervariété.

Pour définir la notion de supervariété, on a besoin de définir la notion de superespace localement annelé. La notion d'algèbre locale est indispensable dans ce contexte.

Définition 1.3.2. *Une $\mathbb{R}$-superalgèbre commutative est dite locale si elle possède un unique idéal gradué maximal.*

Définition 1.3.3. *Un superespace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ est appelé localement annelé si $\mathcal{O}_X$ est un faisceau de $\mathbb{R}$-superalgèbres commutatives dont les fibres $\mathcal{O}_{X,x}$ en tout point $x \in X$ sont des $\mathbb{R}$-superalgèbres commutatives locales.*

Un exemple important de superespace localement annelé est donné par un superdomaine $\mathcal{U}^{p|q}$ où p, q sont des entiers naturels. Nous commençons par donner sa définition.

Définition 1.3.4. *On appelle superdomaine un superespace localement annelé de la forme $(U, C^{\infty,p|q}|_U)$, avec U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On note $\mathcal{U}$ ou $\mathcal{U}^{p|q}$ un tel superdomaine.*

On notera parfois simplement $C^\infty(\mathcal{U})$ la superalgèbre $C^{\infty,p|q}(U)$.

Les morphismes de superdomaines sont des cas particuliers de morphismes de superespaces annelés, eux mêmes cas particuliers de morphismes de faisceaux.

Définition 1.3.5. *Un morphisme $\Phi : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ entre deux superdomaines est un couple (φ, φ^*) où $\varphi : U_1 \to U_2$ est une application C^∞ entre les ouverts U_1 et U_2 et φ^* une collection d'applications $\{\varphi_V^* : V \subset U\}$ telles que :*

1. *pour tout ouvert V, on a*

$$\varphi_V^* : C^{\infty,m|n}(V) \to C^{\infty,p|q}(\varphi^{-1}(V))$$

est un homomorphisme de superalgèbres associatives commutatives avec unité,

2. *les homomorphismes φ_V^* sont compatibles avec les applications de restrictions*

Dans des coordonnées locales $(x^1, \dots, x^m, \xi^1, \dots, \xi^n)$ et $(y^1, \dots, y^p, \eta^1, \dots, \eta^q)$ sur les superdomaines $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ définis au-dessus des ouverts respectifs U_1 et U_2, puisque les morphismes respectent la parité, on a

$$\varphi^*(y^j) \in C^\infty(\mathcal{U}_1)_0 \,\text{et}\, \varphi^*(\eta^j) \in C^\infty(\mathcal{U}_1)_1,$$

c'est à dire

$$\varphi^*(y^j) = \varphi_0^j(x) + \sum_{2r\leq n} \sum_{i_1<\ldots<i_{2r}} \varphi^j_{i_1\ldots i_{2r}}(x)\xi^{i_1}\ldots\xi^{i_{2r}},$$

et

$$\varphi^*(\eta^j) = \sum_{2r+1\leq n} \sum_{j_1<\ldots<j_{2r+1}} \varphi^j_{j_1\ldots j_{2r+1}}(x)\xi^{i_1}\ldots\xi^{i_{2r+1}}.$$

En fait, on peut montrer qu'un morphisme est complètement déterminé par ces formules.

Nous introduisons la notion de morphismes de superespaces localement annelés

Définition 1.3.6. *Si $(M, \mathcal{O}_M)$ et $(N, \mathcal{O}_N)$ sont des superespaces localement annelés, alors le couple (ψ, ψ^*) est appelé morphisme de superespaces localement annelés si tous les ψ_x^* sont des morphismes locaux, i.e : $\psi_x^*(m_{\psi(x)}) \subseteq m_x$ pour tout point $x \in M$.*

1.4 Supervariétés

Nous avons maintenant les éléments nécessaires pour définir une supervariété.

Définition 1.4.1. *Soit M_0 un espace de Hausdorff à base dénombrable. On appelle supervariété et on note $M = (M_0, \mathcal{O}_M)$ un superespace localement annelé tel que pour tout point $u \in M_o$ il existe un voisinage ouvert $U \ni u$ tel que $\mathcal{O}_M(U)$ soit localement isomorphe à un superdomaine*

En d'autres termes, une supervariété est un superespace localement annelé localement isomorphe à $(U', C^{\infty,p|q}|_{U'})$, où U' est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Si $U \subset M_0$ vérifie

$$\mathcal{O}_M(U) \cong C^{\infty,p|q}|_{U'}(U)$$

alors le couple $(U, \mathcal{O}_M(U))$ s'appelle carte locale de M.

Remarque 1.4.2. *Pour une supervariété $M = (M_0, \mathcal{O}_M)$ quelconque, l'espace M_0 a une structure de variété différentiable et est appelée variété sous-jacente de M.*

Les morphismes entre les supervariétés sont évidemment les morphismes entre les superespaces localement annelés correspondants définis par la définition 1.3.6.

Exemple 1.4.3. *Le superespace $\mathbb{R}^{p|q}$ muni de son faisceau $C^{\infty,p|q}$ est une supervariété de dimension $p|q$.*

1.5 Faisceau supertangent et champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^{p|q}$

Nous considérons le faisceau de $\mathbb{R}$-superalgèbres associatives de superfonctions $\mathcal{O}_M = C^{\infty,p|q}$ sur $\mathbb{R}^{p|q}$. Dans toute la suite nous noterons M la supervariété $(\mathbb{R}^p, C^{\infty,p|q})$.

1.5.1 Superdérivations

Définition 1.5.1. *On appelle superdérivation homogène de degré γ de $\mathcal{O}_M(U)$, $U \subset M_0$, une application $\mathbb{R}$-linéaire $D \in \mathrm{End}_\gamma \mathcal{O}_M(U)$ de degré γ, qui vérifie la relation de Leibniz suivante*

$$D(st) = (Ds)t + (-1)^{\gamma\alpha} s(Dt), \quad \forall s \in \mathcal{O}_M(U)_\alpha, \quad t \in \mathcal{O}_M(U).$$

Nous notons $\mathcal{D}er_\gamma(\mathcal{O}_M)(U)$ l'ensemble de toutes les superdérivations de $\mathcal{O}_M(U)$ de parité γ.

Il est clair que $\mathrm{Der}_\gamma(\mathcal{O}_M)(U)$ est un espace vectoriel pour $\gamma = 0$ et $\gamma = 1$. On pose

$$\mathcal{D}er(\mathcal{O}_M)(U) := \mathcal{D}er_0(\mathcal{O}_M)(U) \oplus \mathcal{D}er_1(\mathcal{O}_M)(U)$$

l'ensemble de toutes les superdérivations de $\mathcal{O}_M(U)$.
Si nous considérons un système de coordonnées $(x, \theta) = (x_1, \cdots, x_p, \theta_1, \cdots, \theta_q)$ sur un ouvert $U \in M_0$ nous avons les définitions suivantes.

Définition 1.5.2. *Pour tout $j \leq p$, on définit l'application linéaire*

$$\partial_{x_j} : \mathcal{O}_M(U) \to \mathcal{O}_M(U)$$

sur un monôme quelconque par

$$\partial_{x_j}(f(x)(\theta_1)^{\nu_1} \dots (\theta_q)^{\nu_q}) = (\partial_{x_j} f(x))(\theta_1)^{\nu_1} \dots (\theta_q)^{\nu_q}.$$

De même on définit pour tout $j \leq q$ l'application linéaire

$$\partial_{\theta_j} : \mathcal{O}_M(U) \to \mathcal{O}_M(U)$$

par

$$\partial_{\theta_j}(f(x)(\theta_1)^{\nu_1} \dots (\theta_q)^{\nu_q}) = \nu_j (-1)^{\nu_1 + \dots + \nu_{j-1}} f(x)(\theta_1)^{\nu_1} \dots (\theta_j)^{\nu_j - 1} \dots (\theta_q)^{\nu_q}.$$

On a alors les propriétés suivantes :

Proposition 1.5.3. *Les applications ∂_{x_j} sont des superdérivations de degré 0 de $\mathcal{O}_M(U)$, tandis que les applications ∂_{θ_j} sont des superdérivations de degré 1 de $\mathcal{O}_M(U)$.*

Démonstration. C'est une simple vérification. On voit en effet directement que les premières applications linéaires proposées sont de degré 0 (elles ne changent pas le degré des monômes) et les secondes de degré 1 (elles diminuent le degré du monôme d'une unité). De plus, elles sont des superdérivations, c'est-à-dire que si f et g sont homogènes dans $\mathcal{O}_M(U)$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x^i} g + f \frac{\partial g}{\partial x^i},$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \theta^j}(fg) = \frac{\partial f}{\partial \theta^j} g + (-1)^{|f|} f \frac{\partial g}{\partial \theta_j}.$$

Par linéarité des applications concernées, il suffit de se limiter au cas où f et g sont des monômes. La preuve devient élémentaire si on remarque que pour un monôme g quelconque, on a

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(\theta_k g) = \theta_k \frac{\partial g}{\partial x^j}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j}(\theta_k g) = \delta_j^k g - \theta_k \frac{\partial g}{\partial \theta_j}.$$

□

1.5.2 Champs de vecteurs sur M

Rappelons maintenant la définitions des champs de vecteurs sur une supervariété. Nous serons plus particulièrement intéressés par la structure de superalgèbre de Lie des champs de vecteurs et par leur expression locale.

Définition 1.5.4. *Soit U un ouvert de M_0. L'application $U \to TU := \mathcal{D}er(\mathcal{O}_M)(U)$ définit un faisceau sur M_0, noté $\mathcal{D}er(\mathcal{O}_M)$ et appelé faisceau supertangent de M. Les sections de $\mathcal{D}er(\mathcal{O}_M)(U)$ sont appelées des champs de vecteurs sur $M = (M_0, \mathcal{O}_M)$. L'espace de toutes les sections globales $\mathcal{D}er(\mathcal{O}_M)(M)$ est noté* $\mathrm{Vect}(M)$.

L'espace $\mathrm{Vect}(M)$ est muni d'une structure de superalgèbre de Lie.

Définition 1.5.5. *On appelle superalgèbre de Lie des champs de vecteurs sur M l'ensemble des sections* $\mathrm{Vect}(M)$ *muni du supercommutateur suivant*

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - (-1)^{\gamma\beta} D_2 \circ D_1,$$

pour tous $D_1 \in \mathcal{D}er_\alpha(\mathcal{O}_M)(U)$ et $D_2 \in \mathcal{D}er_\beta(\mathcal{O}_M)(U)$ tels que $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$.

L'espace TM est un $\mathcal{O}_M$- module à gauche : En effet, on a

$$(fD)(g) = f(D(g)) \quad \text{où} \quad f, g \in \mathcal{O}_M, D \in TU.$$

On peut voir que

$$[D_1, fD_2] = D_1(f)D_2 + (-1)^{\tilde{f}\tilde{D}_1} f[D_1, D_2] \quad \forall f \in \mathcal{O}_M(U), D_1, D_2 \in TU.$$

Les champs de vecteurs sur la supervariété M admettent la description suivante.

Proposition 1.5.6. *Si (x, θ) est un système de coordonnées sur $U \subset M_0$, alors un champ de vecteurs X sur $M = (M_0, \mathcal{O}_M)$ s'écrit de la manière suivante :*

$$X = \sum_{i=1}^{p} X^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{q} Y^j \frac{\partial}{\partial \theta_j}, \tag{1.1}$$

où $X^i = X^i(x_1, \dots, x_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$ et $Y^j = Y^j(x_1, \dots, x_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$ appartiennent à $\mathcal{O}_M(U)$.

On peut aussi l'écrire sous forme condensée comme suit

$$X = \sum_{i=1}^{p+q} X^i \frac{\partial}{\partial z_i},$$

où $z_i = x_i$ pour $i \in \{1, \dots, p\}$ et $z_i = \theta_{i-p}$ pour $i \in \{p+1, \dots, p+q\}$.

1.6 1-Formes différentielles sur M

Nous commençons par définir sur la supervariété $M = (M_0, \mathcal{O}_M)$ le $\mathcal{O}_M$-module noté $\Omega^1 M$.

Définition 1.6.1. *On appelle faisceau supercotangent sur M le dual du faisceau supertangent, c'est-à-dire le faisceau de $\mathcal{O}_M$-modules suivant*

$$T^*M := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_M}(TM, \mathcal{O}_M).$$

Les sections de T^*M sont appelées formes différentielles d'ordre un ou 1-forme différentielles. L'ensemble des sections globales du faisceau T^*M est noté $\Omega^1 M$.

Remarque 1.6.2. *Soit $\mathcal{B} = (\partial_{x_i}, \partial_{\theta_i})$ une base de* Vect(M)*. La base $\mathcal{B}' = (dx^i, d\theta^i)$ de $\Omega^1 M$ telle que*

$$\langle \partial_{x_j}, dx^i \rangle = \delta^i_j, \quad \langle \partial_{x_j}, d\theta^i \rangle = 0 \quad et \quad \langle \partial_{\theta_j}, d\theta_i \rangle = -\delta^i_j,$$

est la base duale de $\mathcal{B}$ où la notation $\langle ., . \rangle$ désigne le produit de dualité.

En coordonnées $x = (x_i, \theta_i)$ sur un ouvert U , une 1-forme α s'écrit

$$\alpha = \sum_{i=1}^{p} dx^i f_i(x_i, \theta_i) + \sum_{i=1}^{q} d\theta^i g_i(x_i, \theta_i)$$

avec f_i, g_i des éléments de $\mathcal{O}_M(U)$. Nous considérons tout au long de notre travail la convention suivante sur les parités

$$\tilde{x}_i = \widetilde{\partial_{x_i}} = \widetilde{dx^i} = 0, \quad \text{et} \quad \tilde{\theta}_i = \widetilde{\partial_{\theta_i}} = \widetilde{d\theta_i} = 1.$$

De même, rappelons que les coefficients f_i et g_i peuvent au besoin être indiqués à gauche en faisant appel à la convention de signes habituelle en supergéométrie.

Dans le même ordre d'idée, on peut définir, avec la convention habituelle, l'évaluation d'une 1-forme sur un champ de vecteurs, ou le produit intérieur d'un champ dans une 1-forme par les formules suivantes :

$$\alpha(X) = (-1)^{\tilde{X}\tilde{\alpha}}\langle X, \alpha\rangle, \quad \text{et} \quad i(X)\alpha = \langle X, \alpha\rangle.$$

En toute généralité et de manière explicite, si $X = \sum_{i=1}^{p+q} X^i \partial_{z_i}$ et $\alpha = \sum_{j=1}^{p+q} \alpha_j dz_j$, on a, via la règle des signes :

$$\langle X, \alpha\rangle = \langle\sum_{i=1}^{p+q} X^i\partial_{z_i}, \sum_{j=1}^{p+q}\alpha_j dz_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{p+q} X^i\alpha_j(-1)^{\tilde{i}\tilde{\alpha}_j}\langle\partial_{z_i}, dz_j\rangle = \sum_{i=1}^{p+q}(-1)^{\tilde{i}(\tilde{\alpha}_i+\tilde{i})}X^i\alpha_i. \tag{1.2}$$

Enfin, on peut bien sûr généraliser les définitions des formes différentielles en général. On a aussi une version de la différentielle de de Rham adaptée au cadre de la supergéométrie et cela permet d'introduire la dérivée de Lie des formes différentielles. Ces opérateurs ont des propriétés analogues à celles qui sont bien connues dans le cadre de la géométrie classique. Nous n'en aurons cependant pas besoin dans notre travail.

1.7 Structure de contact sur M

Nous considérons dans notre travail la structure de contact standard sur $M = \mathbb{R}^{2l+1|n}$. Le lecteur intéressé par la géométrie de contact sur une supervariété quelconque de dimension $m|n$ pourrait consulter la référence [43].

Définition 1.7.1. *La structure de contact standard sur M est définie par le noyau de la $1-$ forme différentielle α sur M définie dans un système de coordonnées (de Darboux) (z, x_i, y_i, θ_j), $\quad i = 1, \cdots, l$ et $j = 1, \cdots, n$ par*

$$\alpha = dz + \sum_{i=1}^{l}(x_i dy_i - y_i dx_i) + \sum_{i=1}^{n}\theta_i d\theta_i. \tag{1.3}$$

Cette forme différentielle α s'appelle forme de contact sur M. Nous noterons par $\mathrm{Tan}M$ *l'espace constitué par les éléments du noyau de la forme de contact α.*

Si on note $q^A = (z, q^r)$ la coordonnée généralisée où

$$q^A = \begin{cases} z \quad \text{si} \quad A = 0 \\ x_A \quad \text{si} \quad 1 \leqslant A \leqslant l, \\ y_{A-l} \quad \text{si} \quad l+1 \leqslant A \leqslant 2l \\ \theta_{A-2l} \quad \text{si} \quad 2l+1 \leqslant A \leqslant 2l+n \end{cases} \tag{1.4}$$

alors on peut écrire α d'une manière unifiée comme suit

$$\alpha = dz + \omega_{rs} q^r dq^s, \quad (\omega_{rs}) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \mathrm{id}_l & 0 \\ -\mathrm{id}_l & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{id}_n \end{array} \right).$$

Remarque 1.7.2. *Nous noterons par (ω^{sk}) la matrice telle que $(\omega_{rs})(\omega^{sk}) = (\delta_r^k)$. Nous avons donc*

$$(\omega^{rs}) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -\mathrm{id}_l & 0 \\ \mathrm{id}_l & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{id}_n \end{array} \right).$$

Nous avons

$$(\omega^{rs}) = -(-1)^{\tilde{r}\tilde{s}} (\omega^{sr}).$$

Définition 1.7.3. *Le champ de Reeb sur M est le champ de vecteurs $T_0 \in \mathrm{Vect}(M)$ défini en coordonnées de Darboux par $T_0 = \partial_z$.* [1]

Il est facile de déterminer des éléments de Tan$M$ dans un système de coordonnées de Darboux. En effet, si on note T_r le champ

$$T_r = \partial_{q^r} - \langle \partial_{q^r}, \alpha \rangle \partial_z,$$

on a, puisque α est paire

$$\alpha(T_r) = \langle T_r, \alpha \rangle = \langle \partial_{q^r}, \alpha \rangle - \langle \langle \partial_{q^r}, \alpha \rangle \partial_z, \alpha \rangle = \langle \partial_{q^r}, \alpha \rangle - \langle \partial_{q^r}, \alpha \rangle = 0.$$

On peut de plus montrer que tout champ X de Tan$M$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire (à coefficients dans C^∞) des champs de vecteurs T_r. Il est utile de calculer les champs T_r en fonction de la matrice ω. On a directement, par (1.2)

$$T_r = \partial_{q^r} - \alpha_r \partial_z = \partial_{q^r} - \omega_{kr} q^k \partial_z.$$

Si $1 \leqslant r \leqslant 2l + n$, nous obtenons explicitement les champs de vecteurs suivants

$$T_r = \left\{ \begin{array}{lll} A_r & := & \partial_{x_r} + y_r \partial_z \quad \text{si} \quad 1 \leqslant r \leqslant l \\ -B_{r-l} & := & \partial_{y_{r-l}} - x_{r-l} \partial_z \quad \text{si} \quad l+1 \leqslant r \leqslant 2l \\ \overline{D}_{r-2l} & := & \partial_{\theta_{r-2l}} - \theta_{r-2l} \partial_z \quad \text{si} \quad 2l+1 \leqslant r \leqslant 2l+n \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Les formules suivantes sont immédiates.

$$T_r(q^k) = \delta_r^k, \quad T_r(z) = -\omega_{kr} q^k, \quad [T_r, T_j] = -2\omega_{rj} \partial_z, \quad T_r(z^2) = -2z\omega_{kr} q^k. \tag{1.6}$$

1. On peut montrer que le champ de Reeb est l'unique champ de vecteurs sur M tel que $i(T_0)\alpha = 1$ et $i(T_0)d\alpha = 0$.

1.7.1 Champs de vecteurs de contact

Définition 1.7.4. *On appelle champ de vecteurs de contact un champ de vecteurs X qui préserve la structure de contact, c'est-à-dire, un champ de vecteurs X vérifiant la condition suivante : $[X, T] \in \mathrm{Tan}M$ pour tout $T \in \mathrm{Tan}M$.*

La proposition suivante est bien connue dans le cas classique [5]. Elle apparaît dans la littérature avec des conventions de signes diverses et variées. En supergéométrie, elle a par exemple été prouvé sur les supercercles $S^{1|1}$ et $S^{1|2}$ dans les références [10, 30, 11]. Il nous a donc paru utile d'en faire la preuve en utilisant nos conventions.

Proposition 1.7.5. *Un champ de vecteurs X sur M est de contact si et seulement si il existe une superfonction f telle $X = X_f$ où X_f est donné par la formule suivante*

$$X_f = f\partial_z - \frac{1}{2}(-1)^{\tilde{f}\tilde{T}_r}\omega^{rs}T_r(f)T_s, \tag{1.7}$$

On notera $K(2l+1|n)$ l'espace de tous les champs de vecteurs de contact sur M.

Démonstration. Vu la définition des champs T_r, tout champ de vecteur X sur M peut s'écrire $X = f\partial_z + \sum_{i=1}^{2l+n} g_iT_i$. Le champ de vecteurs X est alors de contact si et seulement si

$$[f\partial_z + \sum_{i=1}^{2l+n} g_iT_i, T_j] \in < T_1, \cdots, T_{2l+n} >, \quad \forall j \in \{1, \cdots, 2l+n\}.$$

Cette expression s'écrit

$$\begin{aligned}
[f\partial_z + \sum_{i=1}^{2l+n} g_iT_i, T_j] &= -(-1)^{\tilde{f}\tilde{T}_j}[T_j, f\partial_z] - (-1)^{(\tilde{g}_i+\tilde{T}_i)\tilde{T}_j}\sum_{i=1}^{2l+n}[T_j, g_iT_i] \\
&= -(-1)^{\tilde{f}\tilde{T}_j}T_j(f)\partial_z + (-1)^{\tilde{T}_i\tilde{T}_j}2\sum_{i=1}^{2l+n} g_i\omega_{ji}\partial_z - (-1)^{(\tilde{g}_i+\tilde{T}_i)\tilde{T}_j}\sum_{i=1}^{2l+n} T_j(g_i)T_i.
\end{aligned}$$

Ce champ est dans le noyau de α si et seulement si

$$-(-1)^{\tilde{f}\tilde{T}_j}T_j(f) - 2\sum_{i=1}^{2l+n} g_i\omega_{ij} = 0,$$

pour tout $j \in \{1, \cdots, 2l+n\}$. Cette équation montre que tous les champs X_f proposés sont de contact. D'autre part, cette équation implique aussi

$$-(-1)^{\tilde{f}\tilde{T}_j}T_j(f)\omega^{jk} - 2\sum_{i=1}^{2l+n} g_i\omega_{ij}\omega^{jk} = 0, \quad \forall j \in \{1, \cdots, 2l+n\},$$

ou encore, en sommant sur j :

$$-(-1)^{\tilde{f}\tilde{T}_j}\omega^{jk}T_j(f) = 2\sum_{i=1}^{2l+n} g_i\omega_{ij}\omega^{jk} = 2\sum_{i=1}^{2l+n} g_i\delta_i^k.$$

On obtient alors directement

$$g_k = -\frac{1}{2}(-1)^{\tilde{f}\tilde{T}_j}\omega^{jk}T_j(f).$$

Donc tout champ de vecteurs de contact X prend la forme annoncée

$$X = f\partial_z - \frac{1}{2}(-1)^{\tilde{f}\tilde{T}_j}\omega^{ji}T_j(f)T_i.$$

□

Définition 1.7.6. *Soit* $X = X^r\partial_{q^r} + X^0\partial_z = X^A\partial_{q^A}$ *un champ de vecteurs arbitraire. On appelle divergence de* X *et on note* $\operatorname{div}(X)$*, l'expression suivante*

$$\operatorname{div}(X) = \sum_A (-1)^{\tilde{X^A}\tilde{q^A}}\partial_{q^A}X^A. \tag{1.8}$$

La divergence est linéaire et possède la propriété importante suivante

$$div(fX) = f div(X) + (-1)^{\tilde{f}\tilde{X}}X(f). \tag{1.9}$$

On a directement la proposition qui suit

Proposition 1.7.7. *La divergence d'un champ de vecteurs de contact* X_f *est donnée par*

$$\operatorname{div}(X_f) = \frac{2l+2-n}{2}\partial_z(f). \tag{1.10}$$

Démonstration. Il suffit de voir que la formule (1.7) de X_f s'écrit explicitement comme suit

$$X_f = f\partial_z - \frac{1}{2}A_r(f)B_r + \frac{1}{2}B_r(f)A_r - \frac{1}{2}(-1)^{\tilde{f}}\overline{D}_r(f)\overline{D}_r. \tag{1.11}$$

où les champs de vecteurs A_r, B_r et $\overline{D}_r$ sont définis par la formule (1.5). En utilisant la définition 1.7.6 et la propriété (1.9) et le fait que $\sum_{r=1}^{l}[A_r, B_r] = 2l\partial_z$ et $\sum_{r=1}^{n}\overline{D}_r^2 = -n\partial_z$, le résultat s'ensuit. □

La proposition suivante donne la formule de la dérivée de Lie de la forme de contact α dans la direction de X_f.

Proposition 1.7.8. *La dérivée de Lie de α dans la direction de X_f est donnée par*

$$L_{X_f}\alpha = (\partial_z f)\alpha \tag{1.12}$$

pour toute superfonction f.

Démonstration. La preuve consiste à calculer $L_{X_f}\alpha = (d \circ i(X_f) + i(X_f) \circ d)\,\alpha$. □

Si on note $d = 2l + 1 - n$ la superdimension et si on exprime la relation (1.12) en fonction de (1.10), alors la dérivée de Lie de α dans la direction de X_f s'écrit

$$L_{X_f}\alpha = \frac{2\mathrm{Div}(X_f)}{d+1}\alpha \tag{1.13}$$

pour tout $d \neq -1$.

Proposition 1.7.9. *L'ensemble $K(2l{+}1|n)$ est une sous-superalgèbre de Lie de* $\mathrm{Vect}(M)$*. Plus précisement si X_f et X_g sont des éléments de $K(2l+1|n)$ alors*

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}} \tag{1.14}$$

où la superfonction $\{f,g\}$ est donnée par

$$\{f,g\} := fg' - f'g - \frac{1}{2}(-1)^{\tilde{T}_r\tilde{f}}\omega^{rs}T_r(f)T_s(g), \tag{1.15}$$

et h' indique $\partial_z(h)$.
Cette dernière application s'appelle le crochet de Lagrange de f et g.

Démonstration. Le crochet de Lie $[X_f, X_g]$ de deux champs de vecteurs de contact X_f et X_g est un champ de vecteurs de contact. En effet, le crochet de Lie

$$[X_f, X_g] = [f\partial_z - \frac{1}{2}(-1)^{\tilde{T}_r\tilde{f}}\omega^{rs}T_r(f)T_s, g\partial_z - \frac{1}{2}(-1)^{\tilde{T}_k\tilde{g}}\omega^{kl}T_k(g)T_l]$$

s'écrit

$$\begin{aligned}[f\partial_z, g\partial_z] - \frac{1}{2}(-1)^{\tilde{T}_k\tilde{g}}\omega^{kl}[f\partial_z, T_k(g)T_l] - \frac{1}{2}(-1)^{\tilde{T}_r\tilde{f}}\omega^{rs}[T_r(g)T_s, g\partial_z]& \\ + \frac{1}{4}\omega^{rs}\omega^{kl}[T_r(f)T_s, T_k(g)T_l].&\end{aligned}$$

La somme des trois premiers crochets de Lie est égale à

$$(fg' - f'g)\partial_z + \frac{1}{2}(-1)^{\tilde{g}(\tilde{T}_k+\tilde{f})}\omega^{kl}T_k(g)T_l(f)\partial_z - \frac{1}{2}(-1)^{\tilde{f}\tilde{T}_r}\omega^{rs}T_r(f)T_s(g)\partial_z$$
$$- \frac{1}{2}(-1)^{\tilde{g}\tilde{T}_k}\omega^{kl}fT_k(g')T_s + \frac{1}{2}(-1)^{\tilde{f}\tilde{T}_r+\tilde{f}\tilde{g}}\omega^{rs}gT_r(f')T_s$$

et le quatrième crochet de Lie est égal à

$$\frac{1}{4}(-1)^{\tilde{f}\tilde{T}_r+\tilde{g}\tilde{T}_k}\omega^{rs}\omega^{kl}\Big(T_r(f)T_sT_k(g)T_l - (-1)^{\tilde{f}\tilde{g}}T_k(g)T_lT_r(f)T_s\Big) - \frac{1}{2}(-1)^{(\tilde{T}_r+\tilde{f})\tilde{g}}\omega^{kr}T_k(g)T_r(f)\partial_z.$$

Puisque le crochet de Lie de deux champs de vecteurs de contact est un champ de vecteur de contact et que $X_{\{f,g\}}$ s'écrit, par définition, de la manière suivante

$$(\{f,g\})\partial_z - \frac{1}{2}(-1)^{(\tilde{f}+\tilde{g})\tilde{T}_r}\omega^{rs}T_r(\{f,g\})T_s,$$

alors on peut voir que la somme des coefficients de ∂_z donne la formule du crochet de Lagrange. On a donc

$$\{f,g\} = fg' - f'g - (-1)^{\tilde{f}\tilde{T}_r}\frac{1}{2}\omega^{rs}T_r(f)T_s(g).$$

□

Via la formule de Lagrange (1.14) le crochet de Lie des champs de vecteurs de contact définissant une structure de superalgèbre de Lie sur $K(2l+1|n)$ induit sur le superespace $C^\infty(M)$ une structure de superalgèbre de Lie par la loi bilinéaire donnée par (1.15).

La remarque suivante est importante :

Remarque 1.7.10. *Le crochet de Lagrange des superfonctions f et g de degré au plus quadratique est toujours une superfonction au plus quadratique.*

Cette remarque permet de définir la superalgèbre de Lie des champs de vecteurs de contact qu'on utilise dans la suite : *c'est la superalgèbre de Lie des champs de vecteurs X_f dont les superfonctions f associées sont polynomiales de degré au plus égal deux en les variables z, x_i, y_i, θ_i.*

1.8 La réalisation matricielle de $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$

Dans cette section, nous décrivons une sous-superalgèbre de Lie matricielle de $\mathfrak{gl}(2l+2|n)$ que nous plongeons dans la superalgèbre de Lie $\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^{2l+1|n})$. Nous obtenons la superalgèbre de Lie, notée $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ constituée par des champs de vecteurs projectifs de contact X_f dont les superfonctions f sont au plus quadratiques.

Définition 1.8.1. *Soit G une matrice définie comme suit $G = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_n \end{pmatrix}$ telle que $J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{id}_{l+1} \\ \mathrm{id}_{l+1} & 0 \end{pmatrix}$. On définit sur $\mathbb{R}^{2l+2|n}$ une forme superantisymétrique ω associée à la matrice G comme suit*

$$\omega : \mathbb{R}^{2l+2|n} \times \mathbb{R}^{2l+2|n} \to \mathbb{R} : (U, V) \to V^t G U. \tag{1.16}$$

Définition 1.8.2. *On note par $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ la superalgèbre de Lie constituée des matrices A de $\mathfrak{gl}(2l+2|n)$ qui préservent la forme ω, i.e. telles que*

$$\omega(AU, V) + (-1)^{\tilde{A}\tilde{U}} \omega(U, AV) = 0, \quad \forall U, V \in \mathbb{R}^{2l+2|n}. \tag{1.17}$$

On a directement le résultat suivant

Proposition 1.8.3. *La superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ est l'espace des matrices $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ dont les blocs A_1, A_2, A_3, A_4 satisfont les conditions suivantes :*

1. $A_1^t J + J A_1 = 0, i.e : A_1 \in \mathfrak{sp}(2l+2)$
2. $A_4^t + A_4 = 0, i.e : A_4 \in \mathfrak{o}(n)$
3. $A_3 = -A_2^t J$

Démonstration. Soient les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2l+2|n); \quad \text{avec} \quad A_1 \in \mathfrak{gl}(2l+2), A_2 \in \mathbb{R}^n_{2l+2}, A_3 \in \mathbb{R}^{2l+2}_n, A_4 \in \mathbb{R}^n_n.$$

Pour tous les vecteurs $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^{2l+2|n}$, on cherche les matrices A de $\mathfrak{gl}(2l+2|n)$ qui vérifient l'équation (1.17). Premièrement, le premier terme de l'équation

(1.17) est égal à

$$\begin{aligned}\omega(AU,V) &= V^tGAU\\ &= \begin{pmatrix}V_1^t & V_2^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J & 0\\ 0 & \mathrm{id}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\ U_2\end{pmatrix}\\ &= V_1^tJA_1U_1+V_2^tA_3U_1+V_1^tJA_2U_2+V_2^tA_4U_2\end{aligned}$$

et le deuxième terme est égal à

$$\begin{aligned}(-1)^{\tilde{A}\tilde{U}}\omega(U,AV) &= (-1)^{\tilde{A}\tilde{U}}(AV)^tGU\\ &= (-1)^{\tilde{A}\tilde{U}}\begin{pmatrix}A_1V_1+A_2V_2\\ A_3V_1+A_4V_2\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}JU_1\\ U_2\end{pmatrix}\\ &= (A_1V_1)^tJU_1+(A_2V_2)^tJU_1+(-1)(A_3V_1)^tU_2+(A_4V_2)^tU_2\\ &= V_1^tA_1^tJU_1+V_2^tA_2^tJU_1-V_1^tA_3^tU_2+V_2^tA_4^tU_2.\end{aligned}$$

L'équation (1.17) devient donc

$$\begin{aligned}V_1^tJA_1U_1+V_2^tA_3U_1+V_1^tJA_2U_2+V_2^tA_4U_2+V_1^tA_1^tJU_1&\\ +V_2^tA_2^tJU_1-V_1^tA_3^tU_2+V_2^tA_4^tU_2=0,\quad \forall U,V\in\mathbb{R}^{2l+2|n}.&\quad (1.18)\end{aligned}$$

Il suffit d'étudier cette équation successivement pour ces trois cas : $U_2=0=V_2$, $U_1=0=V_1$ et $U_2=0=V_1$.

Posons $U_2=0,V_2=0$. L'équation (1.18) devient

$$V_1^tJA_1U_1+V_1^tA_1^tJU_1=0,$$

ce qui s'écrit également

$$V_1^t(JA_1+A_1^tJ)U_1=0,$$

d'où la condition $JA_1+A_1^tJ=0$. Cette dernière exprime que les sous-matrices A_1 sont symplectiques.
Posons maintenant $U_1=0,V_1=0$. L'équation (1.17) devient

$$V_2^tA_4^tU_2+V_2^tA_4U_2=0,$$

ce qui s'écrit également

$$V_2^t(A_4^t+A_4)U_2=0, i.e : A_4^t+A_4=0.$$

La condition $A_4^t + A_4 = 0$ exprime que A_4 est une matrice orthogonale. Posons enfin $U_2 = 0, V_1 = 0$. L'équation (1.17) devient

$$V_2^t(A_3 + A_2^t J)U_1 = 0,$$

autrement dit on a $A_3 + A_2^t J = 0$. □

Nous donnons ci-dessous une base de $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$. Elle est constituée de matrices de trois types. Pour les représenter, la notation $a_{i,j}$ signifie qu'on a le nombre réel $a \in \mathbb{R}$ situé à l'intersection de la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne.

I) Le premier type de matrices est associée à l'algèbre symplectique $\mathfrak{sp}(2l+2)$:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1_{i,j} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} & 0 \\ -1_{(l+1+j),(l+1+i)} & \\ 0 & \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n,n} \end{array}\right) ; \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{matrix} 0 & 1_{i,(l+1+j)} \\ 1_{j,(l+1+i)} & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n,n} \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 & 1_{(l+1+i),j} \\ 1_{(l+1+j),i} & 0 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n,n} \end{array}\right) \quad 1 \leq i,j \leq l. \quad (1.19)$$

$II)$Le deuxième type de matrices est :

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1_{(i,(2l+2+j))} \\ \hline -1_{((2l+2+j),i-(l+1))} & 0 \end{array}\right) \quad \text{si} \quad l+1 \leq i \leq 2l+2, \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\text{et} \quad \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1_{(i,(2l+2+j))} \\ \hline 1_{((2l+2+j),(l+1+i))} & 0 \end{array}\right) \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq l+1, \quad 1 \leq j \leq n. \tag{1.20}$$

$III)$ Le troisième type de matrice est associée à l'algèbre orthogonale $\mathfrak{o}(n)$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & 0 & \\ & & 1_{((2l+2+i),(2l+2+j))} \\ 0 & & \\ & -1_{((2l+2+j),(2l+2+i))} & \\ & & 0 \end{array}\right). \tag{1.21}$$

Nous savons par [28] qu'il est possible de réaliser la superalgèbre de Lie $\mathfrak{pgl}(2l+2|n)$ comme sous-algèbre de $\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^{2l+1|n})$. Ainsi puisque $\mathrm{Id} \notin \mathfrak{spo}(2l+2|n)$, alors on peut définir un homomorphisme injectif

$$\iota : \mathfrak{spo}(2l+2|n) \to \mathfrak{pgl}(2l+2|n) : A \mapsto [A]. \tag{1.22}$$

Ensuite le procédé exposé dans [28] nous permet de plonger la superalgèbre de Lie projective $\mathfrak{pgl}(2l+2|n)$ dans $\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^{2l+1|n})$ de la manière suivante :

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \xi \\ v & B \end{pmatrix}\right] \mapsto -\sum_{i=1}^{2l+1+n} v^i \partial_{t^i} - \sum_{i,j=1}^{2l+1+n} (-1)^{\tilde{j}(\tilde{i}+\tilde{j})} B^i_j t^j \partial_{t^i} + \sum_{i,j=1}^{2l+1+n} (-1)^{\tilde{j}} \xi_j t^j t^i \partial_{t^i}, \tag{1.23}$$

où $v \in \mathbb{R}^{2l+1|n}$, $\xi \in (\mathbb{R}^{2l+1|n})^*$, $B \in \mathfrak{gl}(2l+1|n)$ et les coordonnées $t^1, t^2, \cdots, t^{2l+1+n}$ correspondent respectivement à

$$x_1, \cdots, x_l, z, y_1, \cdots, y_l, \theta_1, \cdots, \theta_n.$$

En composant l'application ι avec l'application définie par la formule (1.23) et en utilisant la formule (1.7), on obtient des champs de vecteurs projectifs de contact X_f pour un certain $f \in C^\infty(M)$. Nous déterminons pour chaque matrice de la base de $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$, introduite ci-dessus, la fonction f correspondante.

I) Nous étudions d'abord les matrices du premier type, données en (1.19). Pour la première matrice en (1.19), on a les cas suivants, fonction de $1 \leqslant i, j \leqslant l$.

1. si $i = j = 1$, alors on obtient le champ de vecteurs projectif de contact

$$x_i\partial_{x_i} + y_i\partial_{y_i} + \theta_i\partial_{\theta_i} + 2z\partial_z \quad ,\text{soit} \quad 2X_z$$

2. si $i = 1$ et $j \neq 1$, alors on obtient le champ de vecteurs projectif de contact

$$x_{j-1}(x_i\partial_{x_i} + y_i\partial_{y_i} + z\partial_z + \theta_i\partial_{\theta_i}) + z\partial_{y_{j-1}}, \quad \text{soit} \quad 2X_{x_{j-1}z}$$

3. si $i \neq 1$ et $j = 1$, alors on a le champ de vecteurs projectif de contact

$$-\partial_{x_{i-1}} + y_{i-1}\partial_z, \quad \text{soit} \quad 2X_{y_{i-1}}$$

4. si $i \neq 1$ et $j \neq 1$, alors on a le champ de vecteurs projectif de contact

$$y_{i-1}\partial_{y_{j-1}} - x_{j-1}\partial_{x_{i-1}}, \quad \text{soit} \quad 2X_{x_{i-1}y_{i-1}}.$$

Pour la deuxième matrice en (1.19), on a les cas suivants, fonction de $1 \leqslant i, j \leqslant l$.

1. si $i = j = 1$, alors on a le champ de vecteurs projectif de contact

$$z(z\partial_z + x_i\partial_{x_i} + y_i\partial_{y_i} + \theta_j\partial_{\theta_j}), \quad \text{soit} \quad X_{z^2}$$

2. si $i = j$ et $j \neq 1$, alors on a le champ de vecteurs projectif de contact

$$-y_{i-1}\partial_{x_{i-1}}, \quad \text{soit} \quad X_{y_{i-1}^2},$$

3. si $i \neq j$ et $i = 1$, alors on a le champ de vecteurs projectif de contact

$$y_{j-1}(x_i\partial_{x_i} + y_i\partial_{y_i} + z\partial_z + \theta_j\partial_{\theta_j}) - z\partial_{x_{j-1}}, \quad \text{soit} \quad 2X_{y_{j-1}z}$$

4. si $i \neq j$ et $i \neq 1$, alors on a le champ de vecteurs projectif de contact

$$-(y_{j-1}\partial_{x_{i-1}} + y_{i-1}\partial_{x_{j-1}}), \quad \text{soit} \quad 2X_{y_{i-1}y_{j-1}}.$$

Pour la troisième matrice en (1.19), on a les cas suivants, fonction de $1 \leqslant i, j \leqslant l$.

1. si $i = j = 1$, alors on obtient le champ de vecteurs projectif de contact

$$-\partial_z, \quad \text{soit} \quad -X_1$$

2. si $i = j$ et $j \neq 1$, alors on obtient le champ de vecteurs projectif de contact

$$-x_{i-1}\partial_{y_{i-1}}, \quad \text{soit} \quad -X_{x_{i-1}^2}$$

3. si $i \neq j$ et $i = 1$, alors on obtient le champ de vecteurs projectif de contact

$$-(\partial_{y_{j-1}} + x_{j-1}\partial_z), \quad \text{soit} \quad -2X_{x_{j-1}}$$

4. si $i \neq j$ et $i \neq 1$, alors on obtient le champ de vecteurs projectif de contact

$$-(x_{j-1}\partial_{y_{i-1}} + x_{i-1}\partial_{y_{j-1}}), \quad \text{soit} \quad -2X_{x_{j-1}x_{i-1}}.$$

II)Nous étudions ensuite les matrices du deuxième type, données en (1.20). Pour la première matrice en (1.20), on a les cas suivants, fonction de $l+1 \leqslant i \leqslant 2l+2$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

1. si $i = l+2$, alors on obtient le champ de vecteurs projectif de contact

$$\theta_j\partial_z + \partial_{\theta_j}, \quad \text{soit} \quad 2X_{\theta_j}$$

2. si $i \neq l+2$, alors on obtient le champ de vecteurs projectif de contact

$$\theta_j\partial_{y_{i-l-2}} + x_{i-l-2}\partial_{\theta_j}, \quad \text{soit} \quad 2X_{x_{i-l-2}\theta_j}.$$

Pour la deuxième matrice en (1.20), on a les cas suivants, fonction de $1 \leqslant i \leqslant l+1$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

1. si $i = 1$, alors on obtient le champ de vecteurs projectif de contact

$$-\theta_j(x_i\partial_{x_i} + y_i\partial_{y_i} + z\partial_z + \theta_j\partial_{\theta_j}) - z\partial_{\theta_j}, \quad \text{soit} \quad -2X_{z\theta_j}$$

2. si $i \neq 1$, alors on obtient le champ de vecteurs projectif de contact

$$\theta_j \partial_{x_{i-1}} - y_{i-1}\partial_{\theta_j}, \quad \text{soit} \quad -2X_{y_{i-1}\theta_j}.$$

III) Nous étudions enfin la matrice du troisième type donnée en (1.21), fonction de $2l+2 \leqslant i, j \leqslant 2l+2+n$. On obtient le champ de vecteurs projectif de contact

$$\theta_{i-1}\partial_{\theta_{j-1}} - \theta_{j-1}\partial_{\theta_{i-1}}, i < j, \quad \text{soit} \quad 2X_{\theta_{i-1}\theta_{j-1}}.$$

La superalgèbre de Lie des champs de vecteurs de contact X_f mise en évidence à la fin de la section 1.7.1 et dont les superfonctions f associées sont polynomiales de degré au plus quadratique est isomorphe à la superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$. Par abus de notation, on notera également par $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ la superalgèbre de Lie des champs de vecteurs projectifs de contact.

Définition 1.8.4. *Nous définissons un degré, noté* deg*, sur les fonctions polynomiales en les coordonnées de Darboux via* $deg(z) = 2$ *et* $\deg(x) = \deg(y) = \deg(\theta) = 1$. *Si* $i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$*, nous notons* $\mathfrak{g}_i$ *le sous-espace de* $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ *constitué par les champs de vecteurs hamiltoniens de contact* X_f *pour lesquels* $\deg(f) = i+2$. *Si* $i \notin \{-2, \cdots, 2\}$ *alors* $\mathfrak{g}_i = \{0\}$.

En utilisant la définition 1.8.4 et la formule de Lagrange (1.14), on a la formule suivante

$$[\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l] \in \mathfrak{g}_{k+l}, \quad \forall k, l \in \{-2, \cdots, 2\}. \tag{1.24}$$

Donc la superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ est 5-graduée comme suit :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2. \tag{1.25}$$

On peut voir également que les éléments de $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ se répartissent comme suit

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}_{-2} &=& \{X_1\} \\ \mathfrak{g}_{-1} &=& \{X_{x_i}, X_{y_i}, X_{\theta_i}\} \\ \mathfrak{g}_0 &=& \{X_z, X_{x_i y_j}, X_{x_i x_j}, X_{x_i\theta_j}, X_{y_i\theta_j}, X_{y_i y_j}, X_{\theta_i\theta_j}, X_{x_i^2}, X_{y_i^2}\} \\ \mathfrak{g}_1 &=& \{X_{zx_i}, X_{zy_i}, X_{z\theta_i}\} \\ \mathfrak{g}_2 &=& \{X_{z^2}\}. \end{array}$$

On notera $\mathrm{Aff}(2l+2|n) = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$ la sous-superalgèbre de Lie de $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ constituée par des champs de vecteurs de degré un au plus.

Remarque 1.8.5. *Noter que : La superalgèbre de Lie* $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ *est l'intersection de la superalgèbre de Lie des champs de vecteurs de contact* $K(2l+1|n)$ *et la superalgèbre de Lie de champs de vecteurs projectifs* $\mathfrak{pgl}(2l+2|n)$.

1.9 Modules des densités et d'opérateurs différentiels

Nous introduisons les outils nécessaires pour décrire d'une manière standard les espaces d'opérateurs différentiels et symboles associés.

1.9.1 Module des densités sur M

Si $X \in \mathrm{Vect}(M)$, l'endomorphisme $\mathbb{L}_X^\lambda$ de $C^\infty(M)$ est défini de la manière suivante :

$$\mathbb{L}_X^\lambda(g) := X(g) + \lambda \mathrm{div}(X) g, \quad \forall g \in C^\infty(M). \tag{1.26}$$

On peut montrer que l'opérateur $\mathbb{L}_X^\lambda$ est bien défini globalement sur M et est indépendant du choix d'un système de coordonnées (x^i). Par ailleurs, on a pour tous champs de vecteurs $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$

$$[\mathbb{L}_X^\lambda, \mathbb{L}_Y^\lambda] = \mathbb{L}_{[X,Y]}^\lambda.$$

On peut donc introduire la définition suivante.

Définition 1.9.1. *Le module* $\mathrm{Ber}_\lambda(M)$ *des densités tensorielles de poids* $\lambda \in \mathbb{R}$ *est l'espace des superfonctions* $C^\infty(M)$ *muni de l'action* (1.26) *de* $\mathrm{Vect}(M)$. *Formellement, on écrira* $g|Dx|^\lambda$ *les* λ*-densités tensorielles où* g *est une superfonction.*

D'autre part, pour tout champ de vecteurs de contact $X_f \in K(2l+1|n)$, on définit l'endomorphisme $L_{X_f}^\lambda$ de $C^\infty(M)$ de la manière suivante :

$$L_{X_f}^\lambda(g) := X_f(g) + \lambda f' g, \quad \forall g \in C^\infty(M). \tag{1.27}$$

On a alors

$$[L_{X_f}^\lambda, L_{X_g}^\lambda] = L_{[X_f, X_g]}^\lambda = L_{X_{\{f,g\}}}^\lambda.$$

On introduit alors la définition suivante.

Définition 1.9.2. *Le module* $\mathcal{F}_\lambda(M)$ *des* λ*-densités de contact est l'espace des superfonctions* $C^\infty(M)$ *muni de l'action* (1.27) *de* $K(2l+1|n)$. *Formellement, on écrira sous la forme* $g\alpha^\lambda$ *les* λ*-densités de contact où* $\alpha \in \Omega^1(M)$ *est la* 1*-forme de contact sur* M.

On a directement le résultat suivant.

Proposition 1.9.3. *Si* $d \neq -1$, *alors l'application*

$$\varphi : \mathcal{F}_\lambda(M) \to \mathrm{Ber}_{\frac{2\lambda}{d+1}}(M) : g\alpha^\lambda \mapsto g|Dx|^{\frac{2\lambda}{d+1}}$$

est un isomorphisme de $K(2l+1|n)$*-modules.*

Démonstration. Il est clair que φ est bijectif. On doit donc vérifier que l'application φ entrelace l'action de X_f sur les espaces $\mathcal{F}_\lambda(M)$ et $\mathrm{Ber}_{\frac{2\lambda}{d+1}}(M)$, i.e.

$$\varphi(L^\lambda_{X_f}(g\alpha^\lambda)) = \mathbb{L}^{\frac{2\lambda}{d+1}}_{X_f}(\varphi(g\alpha^\lambda)). \tag{1.28}$$

En effet, sur l'espace $\mathcal{F}_\lambda(M)$ l'action de $K(2l+1|n)$ est donnée, en utilisant la proposition 1.7.7, par

$$L^\lambda_{X_f}(g\alpha^\lambda) = (X_f(g) + \lambda f'g)\alpha^\lambda = \left(X_f(g) + \lambda\frac{2\mathrm{Div}X_f}{d+1}g\right)\alpha^\lambda \tag{1.29}$$

où $f' = \partial_z(f)$.

De même le deuxième membre de (1.28) s'écrit

$$\left(X_f(g) + \frac{2\lambda}{d+1}\mathrm{div}(X_f)g\right)|Dx|^{\frac{2\lambda}{d+1}}. \tag{1.30}$$

Si on applique l'isomorphisme φ à la densité donnée par (1.29), alors on obtient (1.30). □

On peut également voir que l'application

$$X. : \mathcal{F}_{-1} \to TM : f\alpha^{-1} \mapsto X_f$$

établit un entrelacement entre les représentations $\mathcal{F}_{-1}$ et TM de $K(2l+1|n)$, qui définit un isomorphisme entre les espaces $\mathcal{F}_{-1}$ et $K(2l+1|n)$.

On peut également montrer que l'espace TM se décompose en la somme directe de deux espaces comme

$$TM = \mathrm{Tan}M \oplus K(2l+1|n).$$

L'espace $\mathrm{Tan}M$ est un $C^\infty(M)-$module mais ce n'est pas une superalgèbre de Lie. Par contre l'espace $K(2l+1|n)$ n'est pas un module mais il possède une structure de superalgèbre de Lie.

1.9.2 Module des opérateurs différentiels sur M

Nous introduisons l'espace des opérateurs différentiels agissant entre les λ-densités et les μ-densités, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Nous allons définir deux types de filtrations : `la filtration canonique et la filtration d'Heisenberg` ainsi que la bifiltration induite sur l'espace d'opérateurs différentiels sur $M = \mathbb{R}^{2l+1|n}$. Nous généralisons le modèle décrit dans [5] par C. H. Conley et V. Ovsienko dans le cas purement pair.

Commençons par les définitions classiques des espaces d'opérateurs différentiels entre espaces de densités.

Définition 1.9.4. *Soit (q^A) un système de coordonnées de Darboux sur M. On appelle opérateur différentiel D d'ordre k sur M, une application opérant de $\mathcal{F}_\lambda$ vers $\mathcal{F}_\mu$ qui en coordonnées, prend la forme suivante :*

$$D : f\alpha^\lambda \mapsto (\sum_{I:|I|\leq k} D_I \partial_{q^I} f)\alpha^\mu,$$

où $I = (i_0, i_1, \dots, i_{2l+n})$ est un multi-indice, $|I| = i_0 + \ldots + i_{2l+n}$ et D_I est une superfonction pour tout I. On note $\mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(M)$ l'espace de tous les opérateurs différentiels d'ordre k sur M.

Plus explicitement, un opérateur différentiel D s'écrit en coordonnées

$$\sum_{I:|I|\leq k} D_I (\partial_z)^{i_0} (\partial_{x_1})^{i_1} \dots (\partial_{x_l})^{i_l} (\partial_{y_1})^{i_{l+1}} \cdots (\partial_{y_l})^{i_{2l}} (\partial_{\theta_1})^{i_{2l+1}} \dots (\partial_{\theta_n})^{i_{2l+n}}. \tag{1.31}$$

Puisque $\partial^2_{\theta_i} = 0$, les exposants $i_{2l+1}, \dots, i_{2l+n}$ dans cette expression sont au plus égaux à 1.

Les opérateurs différentiels d'ordre 0 sont simplement les opérateurs de multiplication par les $(\mu - \lambda)$-densités. On définit l'espace des opérateurs différentiels comme l'union

$$\mathcal{D}_{\lambda\mu}(M) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(M).$$

Si $D \in \mathcal{D}_{\lambda\mu}(M)$ et si $X \in K(2l+1|n)$, alors l'action de X sur $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(M)$ est définie par la dérivée de Lie, notée $\mathcal{L}^{\lambda\mu}_X$ via le supercommutateur suivant

$$\mathcal{L}^{\lambda\mu}_X D = L^\mu_X \circ D - (-1)^{\tilde{X}\tilde{D}} D \circ L^\lambda_X \tag{1.32}$$

où L^λ_X et L^μ_X sont introduites en (1.27). Nous obtenons ainsi une structure de $K(2l+1|n)$-module sur $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(M)$.

Remarque 1.9.5.
1. *La construction donnée ci-dessus peut être faite avec les représentations* $\mathrm{Ber}_\lambda(M)$ *et* $\mathrm{Ber}_\mu(M)$ *de* $\mathrm{Vect}(M)$*. On obtient ainsi une représentation de* $\mathrm{Vect}(M)$ *sur un espace d'opérateurs différentiels, qui induit à son tour une représentation de $K(2l+1|n)$. La proposition 1.9.3 permet alors de montrer l'isomorphisme de ces représentations de $K(2l+1|n)$, modulo un changement de poids adéquat.*
2. *Pour $\lambda = \mu$, $\mathcal{D}_{\lambda\lambda}(M)$ est une superalgèbre associative filtrée pour la composition des opérateurs différentiels et la filtration introduite dans la définition 1.9.4 est une filtration d'algèbre, i.e.*

$$\mathcal{D}^k_{\lambda\lambda}(M).\mathcal{D}^l_{\lambda\lambda}(M) \subseteq \mathcal{D}^{k+l}_{\lambda\lambda}(M).$$

1.9.3 Filtration canonique sur l'espace des opérateurs différentiels sur M

Les sous-espaces $\mathcal{D}^l_{\lambda\mu}(M)$ sont stables par l'action de $K(2l+1|n)$ définie en (1.32).

Proposition 1.9.6. *Si* $D \in \mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(M)$ *et* $X \in K(2l+1|n)$*, alors* $\mathcal{L}^{\lambda\mu}_X(D) \in \mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(M)$.

Démonstration. On calcule les termes d'ordre $k+1$ dans l'expression $\mathcal{L}^{\lambda\mu}_X(D)$. Par définition, on est conduit à évaluer les termes d'ordre $k+1$ de $L^\mu_X \circ D$ et $D \circ L^\lambda_X$. On constate qu'ils sont identiques (au signe adéquat près). Donc $\mathcal{L}^{\lambda\mu}_X(D)$ est un opérateur différentiel d'ordre k. □

Comme nous avons les inclusions suivantes

$$\mathcal{D}^0_{\lambda\mu}(M) \subset \mathcal{D}^1_{\lambda\mu}(M) \subset \mathcal{D}^2_{\lambda\mu}(M) \subset \cdots \subset \mathcal{D}^{l-1}_{\lambda\mu}(M) \subset \mathcal{D}^l_{\lambda\mu}(M) \subset \cdots,$$

nous en déduisons que les sous-espaces $(\mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(M))_{k\in\mathbb{N}}$ définissent une filtration du module des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(M)$. Si $\lambda = \mu$, c'est de plus une filtration d'algèbre.

On définit maintenant l'espace gradué associé à cette filtration de $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(M)$.

Définition 1.9.7. *On appelle* $\mathcal{S}^k_\delta$ *l'espace des symboles principaux d'ordre* k *l'espace défini comme suit*

$$\mathcal{S}^k_\delta := \mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(M)/\mathcal{D}^{k-1}_{\lambda\mu}(M), \quad \delta = \mu - \lambda.$$

On définit sur $\mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(M)$ *l'application surjective* σ_k *suivante*

$$\sigma_k : \mathcal{D}^k_{\lambda\mu} \to \mathcal{S}^k_\delta : D \mapsto [D], \tag{1.33}$$

où la notation $[D]$ *signifie la classe d'équivalence de* D.

L'action de $K(2l+1|n)$ sur $\mathcal{S}^k_\delta(M)$, notée L^δ_X, est alors l'action induite par l'action de $K(2l+1|n)$ sur $\mathcal{D}^k_{\lambda\mu}$, i.e. si $S = [D]$ avec D donné par la formule (1.31), alors

$$L^\delta_X(S) := [\mathcal{L}^{\lambda\mu}_X(D)].$$

Remarque 1.9.8. *Les constructions ci-dessus sont également valables pour des représentations de* $\mathrm{Vect}(M)$ *pour autant que l'on considère les espaces* Ber_λ *à la place des espaces* $\mathcal{F}_\lambda$. *Les représentations de* $K(2l+1|n)$ *induites par ces dernières sont isomorphes à celles présentées ci-dessus, modulo le changement de poids déjà mentionné plus haut.*

1.9.4 Filtration d'Heisenberg sur l'espace des opérateurs différentiels sur M

Soit M muni de la structure de contact standard α. Les superdérivations sont engendrées sur $C^\infty(M)$ par le champ de Reeb ∂_z et les champs de vecteurs $T_1, \cdots, T_{2l+1} \in \mathrm{Tan}(M)$. Cela permet de définir sur l'espace des opérateurs différentiels une filtration différente, qui conduit naturellement à des symboles différents.

Proposition 1.9.9. *Si $K = (i_1, \ldots, i_{2l+n})$ est un multi-indice de longueur $|K| = i_1 + i_2 + \ldots + i_{2l+n}$ et si D est un opérateur différentiel d'ordre k, alors D peut s'écrire d'une manière unique sous la forme suivante :*

$$\sum_{K: c+|K| \leqslant k} D_{cK} \partial_z^c T^K, \tag{1.34}$$

où D_{cK} est une superfonction et $T^K = T_1^{i_1} \cdots T_{2l+n}^{i_{2l+n}}$.

Démonstration. L'existence de cette écriture a lieu grâce à la décomposition $TM = \mathrm{Tan}(M) \oplus K(2l+1|n)$ et l'unicité grâce à l'écriture explicite des champs de vecteurs T_i. □

Définition 1.9.10. *Soit D l'opérateur différentiel de la forme* (1.34). *On dit que D est d'ordre d'Heisenberg égal à d si $c + \frac{1}{2}|K| \leqslant d$ pour tous c, K. Nous noterons $\mathcal{H}^d_{\lambda\mu}(M)$ l'espace de tous les opérateurs différentiels d'ordre d'Heisenberg égal à d sur M.*

L'espace des opérateurs différentiels est filtré par l'ordre d'Heisenberg. En effet, l'espace total $\mathcal{H}_{\lambda\mu}(M)$ est l'union des espaces $\mathcal{H}^d_{\lambda,\mu}(M)$, i.e.

$$\mathcal{H}_{\lambda\mu}(M) = \bigcup_{d \in \frac{1}{2}\mathbb{N}} \mathcal{H}^d_{\lambda\mu}(M).$$

Puisque $\mathcal{H}^d_{\lambda\mu}(M) \subset \mathcal{H}^{d+\frac{1}{2}}_{\lambda\mu}(M)$, nous avons les inclusions suivantes

$$\mathcal{H}^0_{\lambda\mu}(M) \subset \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{\lambda\mu}(M) \subset \mathcal{H}^1_{\lambda\mu}(M) \subset \cdots \subset \mathcal{H}^d_{\lambda\mu}(M) \subset \mathcal{H}^{d+\frac{1}{2}}_{\lambda\mu}(M) \subset \cdots$$

pour tout $d \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$.

Définition 1.9.11. *L'espace gradué associé à l'espace filtré $\mathcal{H}^d_{\lambda\mu}(M)$ sera noté $\mathcal{P}_\delta(M)$. On a donc*

$$\mathcal{P}_\delta(M) := \bigoplus_{d \in \frac{1}{2}\mathbb{N}} \mathcal{P}^d_\delta(M) := \sum_{d \in \frac{1}{2}\mathbb{N}} \mathcal{H}^d_{\lambda\mu}(M)/\mathcal{H}^{d-\frac{1}{2}}_{\lambda\mu}(M), \tag{1.35}$$

où $\delta = \mu - \lambda$.

Nous notons hσ l'application symbole d'Heisenberg de la manière suivante

$$\mathrm{h}\sigma : \mathcal{H}^d_{\lambda\mu}(M) \to \mathcal{P}^d_\delta(M) : D \mapsto [D],$$

où les crochets signifient la classe d'équivalence dans l'espace quotient $\mathcal{H}^d_{\lambda\mu}(M)/\mathcal{H}^{d-\frac{1}{2}}_{\lambda\mu}(M)$.

1.9.5 Bifiltration de l'espace d'opérateurs différentiels sur M

On définit l'espace suivant d'opérateurs différentiels muni d'une filtration particulière induite par la filtration canonique et la filtration d'Heisenberg.

Définition 1.9.12. *On peut définir une bifiltration sur $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(M)$ en posant*

$$\mathcal{D}^{k,d}_{\lambda\mu}(M) := \mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(M) \cap \mathcal{H}^d_{\lambda\mu}(M).$$

L'espace bigradué associé à la bifiltration $\mathcal{D}^{k,d}_{\lambda\mu}(M)$ et noté $\Sigma_\delta(M)$ est défini par

$$\Sigma_\delta(M) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{d\in\frac{1}{2}\mathbb{N}} \Sigma^{k,d}_\delta(M) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{d\in\frac{1}{2}\mathbb{N}} \mathcal{D}^{k,d}_{\lambda\mu}(M)/(\mathcal{D}^{k-1,d}_{\lambda\mu}(M) + \mathcal{D}^{k,d-\frac{1}{2}}_{\lambda\mu}(M)). \tag{1.36}$$

Nous notons par fσ l'application symbole fin comme suit :

$$\mathrm{f}\sigma : \mathcal{D}^{k,d}_{\lambda\mu}(M) \to \Sigma^{k,d}_\delta(M) : D \mapsto [D],$$

où les crochets signifient la classe d'équivalence de D dans $\mathcal{D}^{k,d}_{\lambda\mu}(M)/(\mathcal{D}^{k-1,d}_{\lambda\mu}(M) + \mathcal{D}^{k,d-\frac{1}{2}}_{\lambda\mu}(M))$.

Remarque 1.9.13. *Par définition des actions, les applications $f\sigma$ et σ sont $K(2l{+}1|n)$-équivariantes.*

Proposition 1.9.14. *L'action de $K(2l{+}1|n)$ préserve les filtrations de $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(M)$, $\mathcal{H}_{\lambda\mu}(M)$ et $\mathcal{D}^{k,d}_{\lambda\mu}(M)$.*

Démonstration. Pour montrer cela, il faut vérifier que la forme de l'opérateur différentiel définie par(1.34) n'est pas modifiée par l'action de $K(2l+1|n)$. Pour cela, on considère un opérateur différentiel D d'ordre k et on fait agir sur ce dernier le champ de vecteurs X_f. Autrement dit, on calcule $\mathcal{L}^{\lambda\mu}_{X_f}(D)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\lambda\mu}_{X_f}(D) &= (X_f + \mu f')D - (-1)^{\tilde{f}\tilde{D}} D.(X_f + \lambda f') \\ &= [X_f, D] + D_k, \end{aligned}$$

avec $D_k = \mu f' D - (-1)^{\tilde{f}\tilde{D}} \lambda D.f'$. On voit que le terme D_k est un opérateur différentiel de même ordre que D. Puisque on sait que

$$[X_f, T_I] \in < T_1, \cdots, T_{2l+n} >,$$

le terme $[X_f, D]$ est un opérateur différentiel d'ordre k. Donc les filtrations de $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(M)$, $\mathcal{P}_\delta(M)$ et $\mathcal{D}^{k,d}_{\lambda\mu}(M)$ sont préservées par l'action canonique de X_f. $\square$

L'action de $K(2l+1|n)$ sur l'espace d'opérateurs différentiels $\mathcal{H}^d_{\lambda\mu}(M)$ induit une structure de module sur $\mathcal{P}^d_\delta(M)$. Si $L^{\mathcal{H}}_{X_f}$ désigne l'action de X_f sur $\mathcal{P}^d_\delta(M)$ et si $[D] \in \mathcal{P}^d_\delta(M)$ alors

$$L^{\mathcal{H}}_{X_f}[D] = [\mathcal{L}^{\lambda\mu}_{X_f} D].$$

1.10 Quantification $\mathfrak{g}$-équivariante

La quantification $\mathfrak{g}$-équivariante a été introduite par P. Lecomte, V. Ovsienko et C. Duval dans [38, 17] dans le cas purement pair. Nous adoptons leur définition dans notre cadre de la supergéométrie : il s'agit de chercher une bijection entre les espaces de symboles $\mathcal{S}_\delta(\mathbb{R}^{m|n})$ et les espaces d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(\mathbb{R}^{m|n})$ et qui entrelace les actions d'une sous-superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de la superalgèbre de Lie $\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^{m|n})$ sur les espaces de symboles et d'opérateurs différentiels. Nous présentons ici les outils qui permettent d'analyser l'existence et l'unicité de la quantification $\mathfrak{g}$-équivariante.

Définition 1.10.1. *On appelle quantification $\mathfrak{g}$-équivariante sur $\mathbb{R}^{m|n}$, une application*

$$Q : \mathcal{S}_\delta(\mathbb{R}^{m|n}) \to \mathcal{D}_{\lambda\mu}(\mathbb{R}^{m|n}) \tag{1.37}$$

telle que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on a

$$\mathcal{L}^{\lambda\mu}_X \circ Q = Q \circ L^\delta_X \tag{1.38}$$

et satisfaisant la condition de normalisation suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall S \in \mathcal{S}^k_\delta(\mathbb{R}^{m|n}), \quad \sigma_k(Q(S)) = S.$$

Dans le cas purement pair, on peut trouver dans [17, 18] la preuve de l'existence et l'unicité d'une telle application pour l'action projective de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ et l'action conforme de $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$ sur $\mathbb{R}^{p+q}$. Les preuves d'existence de quantifications équivariantes qui ont été proposées par la suite reposent sur l'utilisation d'un certain nombre d'outils que nous présentons brièvement maintenant.

1.10.1 La quantification affine

Définition 1.10.2. *La sous-superalgèbre de Lie de* $\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^{m|n})$ *constituée par les champs de vecteurs constants et linéaires est appelée superalgèbre de Lie affine. Elle est parfois notée* Aff.

On peut définir de manière simple un symbole total d'un opérateur différentiel. L'application symbole total a la propriété d'être équivariante par rapport à l'action de la superalgèbre de Lie affine. On la définit explicitement de la manière suivante.

Définition 1.10.3. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\sigma_{\mathrm{Aff}} : \mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(\mathbb{R}^{m|n}) \to \oplus_{l=0}^k \mathcal{S}^l_\delta(\mathbb{R}^{m|n}) : D \mapsto \sigma_{\mathrm{Aff}}(D),$$

où, si D *est donné par la formule* (1.31), *alors* $\sigma_{\mathrm{Aff}}(D)$ *est défini par*

$$\sum_{I:|I|\leq k} [D_I(\partial_z)^{i_0}(\partial_{x_1})^{i_1}\dots(\partial_{x_l})^{i_l}(\partial_{y_1})^{i_{l+1}}\cdots(\partial_{y_l})^{i_{2l}}(\partial_{\theta_1})^{i_{2l+1}}\dots(\partial_{\theta_n})^{i_{2l+n}}]_{|I|},$$

où $[\cdot]_r$ *signifie la classe dans* $\mathcal{D}^r_{\lambda\mu}(\mathbb{R}^{m|n})/\mathcal{D}^{r-1}_{\lambda\mu}(\mathbb{R}^{m|n})$.

En d'autres termes, l'application de σ_{Aff} à un opérateur différentiel consiste donc, à considérer chacun de ses termes de degré donné comme un symbole ayant ce degré. L'application σ_{Aff} définit une bijection entre $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(\mathbb{R}^{m|n})$ et $\mathcal{S}_\delta(\mathbb{R}^{m|n})$ et on peut donc poser la définition suivante.

Définition 1.10.4. *La quantification affine* Q_{Aff} *est l'inverse de* σ_{Aff}.

La quantification affine est équivariante pour l'action de la superalgèbre de Lie affine.

1.10.2 L'application γ

L'application γ que nous allons décrire a été introduite dans le cas purement pair par F. Boniver et P. Mathonet dans [39]. Elle est valide en général pour les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ utilisées pour les quantifications équivariantes mais nous l'explicitons dans le cadre de la superalgèbre $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ qui est au centre de notre travail. Cette application permet à l'espace des symboles $\mathcal{S}_\delta$ d'acquérir une structure de représentation de $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ par un transport de structure de $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(\mathbb{R}^{m|n})$ sur $\mathcal{S}_\delta(\mathbb{R}^{m|n})$. Explicitement, nous définissons une dérivée de Lie sur $\mathcal{S}_\delta(\mathbb{R}^{m|n})$ notée également $\mathcal{L}$ de la manière suivante :

$$\mathcal{L}_{X_f} S := Q^{-1}_{\mathrm{Aff}} \circ \mathcal{L}^{\lambda\mu}_{X_f} \circ Q_{\mathrm{Aff}}(S), \quad \forall S \in \mathcal{S}_\delta(\mathbb{R}^{m|n}), X_f \in \mathfrak{spo}(2l+2|n).$$

L'application γ mesure la différence entre les représentations $(\mathcal{S}_\delta, L^\delta)$ et $(\mathcal{S}_\delta, \mathcal{L})$ de $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$. Cette application est définie comme suit

$$\gamma : \mathfrak{spo}(2l+2|n) \to \mathfrak{gl}(\mathcal{S}_\delta, \mathcal{S}_\delta) : X \mapsto \gamma(X_f) = \mathcal{L}_{X_f} - L^\delta_{X_f}. \tag{1.39}$$

Comme conséquence d'un résultat de P.Mathonet et F.Radoux [28], on obtient le résultat suivant.

Proposition 1.10.5. *L'application γ s'annule sur les champs de vecteurs constants et linéaires. En plus, pour tout champ de vecteurs quadratiques X_f et pour tout entier k, l'application γ diminue le degré de son argument et c'est un opérateur différentiel d'ordre zéro à coefficients constants et de parité $\tilde{X_f}$.*

1.10.3 Opérateur de Casimir

Définition 1.10.6. *Soit $\mathfrak{g}$ une superalgèbre de Lie matricielle sur un corps $\mathbb{K}$. On définit sur $\mathfrak{g}$ une forme bilinéaire paire, supersymétrique K par :*

$$K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K} : (A, B) \mapsto K(A, B) = \eta str(AB), \quad \forall A, B \in \mathfrak{g},$$

où η est un nombre non nul.

Définition 1.10.7. *Si $\mathfrak{g}$ est une superalgèbre de Lie matricielle de dimension m telle que la forme bilinéaire K est non-dégénerée, alors pour toute base $(u_1, \ldots, u_m)$ de $\mathfrak{g}$, il existe une base $(u_1^*, \ldots, u_m^*)$ telle que*

$$K(u_i, u_j^*) = \delta_{ij}, \forall i, j \leq m.$$

Ces bases sont appelées bases duales par rapport à K.

Si la forme bilinéaire K est non dégenerée, alors on peut définir l'opérateur de Casimir associé à toute représentation (E, ρ) de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Définition 1.10.8. *Si (E, ρ) est une représentation de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$, l'opérateur de Casimir associé à cette représentation est défini par*

$$C_\rho : E \to E : x \mapsto \sum_{i=1}^{m} (-1)^{\tilde{u_i}} \rho(u_i)\rho(u_i^*)x = \sum_{i=1}^{m} \rho(u_i^*)\rho(u_i)x,$$

où $(u_i : i \leq m)$ et $(u_i^* : i \leq m)$ sont des bases duales de $\mathfrak{g}$ par rapport à K.

On a directement le résultat suivant :

Proposition 1.10.9. *L'opérateur C_ρ ainsi défini ne dépend pas du choix de la base $u_i, (1 \leq i \leq m)$.*

Démonstration. Si on fait un changement de base, on a $u'_j = \sum_l A_{jl} u_l$. On calcule que l'on a

$$u'^*_j = \sum_k C_{jk} u^*_k, \quad \text{avec} \quad C = (A^t)^{-1}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} C'_\rho &= \sum_i \rho(u'^*_i) \circ \rho(u'_i) \\ &= \sum_{ikl} C_{ik} \rho(u^*_k) \circ A_{il} \rho(u_l) \\ &= \sum_{ikl} C_{ik} A_{il} \rho(u^*_k) \circ \rho(u_l) \\ &= \sum_k \rho(u^*_k) \circ \rho(u_k) \end{aligned}$$

car on a que $\sum_k C_{ik} A_{il} = \delta_{kl}$. □

L'opérateur C_ρ a des propriétés fondamentales qui seront utilisées dans la construction d'une quantification équivariante. Ces propriétés sont décrites dans la proposition suivante :

Proposition 1.10.10. *Soit (E, ρ) une réprésentation de $\mathfrak{g}$.*

1. *Si (E', ρ') est une autre représentation de $\mathfrak{g}$ et si $T : (E, \rho) \to (E', \rho')$ est un entrelacement, c'est-à-dire :*

   $$T \circ \rho(x) = \rho'(x) \circ T \quad \forall x \in \mathfrak{g};$$

   alors on a

   $$C_{\rho'} \circ T = T \circ C_\rho; \tag{1.40}$$

2. *Si u est un vecteur propre de C_ρ de valeur propre α, alors $T(u)$ est un vecteur propre de $C_{\rho'}$ de valeur propre α.*

Démonstration. La première propriété résulte de la définition des opérateurs de Casimir. La deuxième est une conséquence de la première : Si u est un vecteur propre de C_ρ de valeur propre α, alors on a :

$$\begin{aligned} C_{\rho'}(T(u)) &= T(C_\rho(u)) \\ &= T(\alpha u) \\ &= \alpha T(u). \end{aligned}$$

□

On peut appliquer la proposition 1.10.10 aux quantifications équivariantes. Puisque nous avons transporté la structure de représentation de $(\mathcal{D}_{\lambda\mu}, \mathcal{L}^{\lambda\mu})$ pour obtenir une représentation $(\mathcal{S}_\delta, \mathcal{L})$, le problème de quantification équivariante revient à déterminer un isomorphisme de représentations de $\mathfrak{g}$ de $(\mathcal{S}_\delta, L^\delta)$ dans $(\mathcal{S}_\delta, \mathcal{L})$, que nous notons également Q. La proposition 1.10.10 conduit alors au résultat suivant, donné dans [38] dans le cas de la quantification conformément équivariante.

Proposition 1.10.11. *Si C(resp. $\mathcal{C}$) est l'opérateur de Casimir correspondant à la représentation $(\mathcal{S}_\delta, L^\delta)$ (resp. $(\mathcal{S}_\delta, \mathcal{L})$) de $\mathfrak{g}$ et si $S \in \mathcal{S}^k_\delta$ est un vecteur propre de C de valeur propre α, alors $Q(S)$*

1. *est un vecteur propre de $\mathcal{C}$ de valeur propre α,*

2. *doit s'écrire $S_k + S_{k-1} + \ldots + S_0$, où S_j est dans $\mathcal{S}^j_\delta$ pour tout $0 \leq j \leq k$;*

3. *doit satisfaire la condition de normalisation $S_k = S$.*

En d'autres termes, la quantification Q doit faire correspondre à tout vecteur propre S de C de degré k, un vecteur propre de $\mathcal{C}$ de même valeur propre dont S est le terme de plus haut degré. Nous verrons que dans beaucoup de cas, l'existence de cette association (unique) entre vecteurs propres est suffisante pour l'existence de la quantification.

Il est donc important de pouvoir construire les opérateurs de Casimir des représentations que nous considérons. Nous particularisons donc les notions de cette section dans le cas de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$, dans le but de calculer des bases duales pour une forme bilinéaire adéquate. On a le lemme suivant.

Lemme 1.10.12. *Soit K la forme bilinéaire définie sur $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ par*

$$K : \mathfrak{spo}(2l+2|n) \times \mathfrak{spo}(2l+2|n) \to \mathbb{R} : (A, B) \to 2str(AB). \tag{1.41}$$

La base K-duale correspondant à la base

$$X_z, \quad X_{x_{j-1}z}, \quad X_{y_{i-1}}, \quad X_{x_{j-1}y_{i-1}}, \quad X_{z^2}, \quad X_{y_{i-1}^2}, \quad X_{y_{j-1}z},$$
$$X_{y_{i-1}y_{j-1}}, \quad X_1, \quad X_{x_{i-1}^2}, \quad X_{x_{j-1}}, \quad X_{x_{j-1}x_{i-1}}, \quad X_{\theta_j}, \quad X_{x_{i-l-2}\theta_j},$$
$$X_{z\theta_j}, \quad X_{y_{i-1}\theta_j}, \quad X_{\theta_{i-1}\theta_{j-1}} \tag{1.42}$$

de $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ *est donnée par*

$$X_z, \quad X_{y_{j-1}}, \quad X_{x_{j-1}z}, \quad X_{x_{i-1}y_{j-1}}, \quad -\frac{1}{2}X_1, \quad -\frac{1}{2}X_{x_{i-1}^2}, \quad -X_{x_{j-1}},$$
$$-X_{x_{j-1}x_{i-1}}, \quad -\frac{1}{2}X_{z^2}, \quad -\frac{1}{2}X_{y_{i-1}^2}, \quad -X_{y_{j-1}z}, \quad -X_{y_{i-1}y_{j-1}}, \quad -X_{z\theta_j}, \quad -X_{y_{i-l-2}\theta_j},$$
$$X_{\theta_j}, \quad X_{x_{i-1}\theta_j}, \quad X_{\theta_{i-1}\theta_{j-1}}. \tag{1.43}$$

Démonstration. Si on considère la base matricielle de $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ donnée par les types de matrices (1.19),(1.20) et (1.21), on voit que ces matrices correspondent aux champs de vecteurs projectifs de contact suivants :

$$2X_z, \quad 2X_{x_{j-1}z}, \quad 2X_{y_{i-1}}, \quad 2X_{x_{j-1}y_{i-1}}, \quad X_{z^2}, \quad X_{y_{i-1}^2}, \quad 2X_{y_{j-1}z},$$
$$2X_{y_{i-1}y_{j-1}}, \quad -X_1, \quad -X_{x_{i-1}^2}, -2X_{x_{j-1}}, \quad -2X_{x_{j-1}x_{i-1}}, \quad 2X_{\theta_j}, \quad 2X_{x_{i-l-2}\theta_j},$$
$$-2X_{z\theta_j}, \quad -2X_{y_{i-1}\theta_j}, \quad 2X_{\theta_{i-1}\theta_{j-1}}. \tag{1.44}$$

De plus, si on utilise la formule (1.41), il est clair que sa base duale est donnée par la famille des matrices suivantes

$$\frac{1}{4}\left(\begin{array}{c|c|c} 1_{1,1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{cc} & 0 \\ -1_{(l+2),(l+2)} & \\ 0 & \end{array} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n,n} \end{array}\right), \quad \frac{1}{4}\left(\begin{array}{c|c|c} 1_{i,1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{cc} & 0 \\ -1_{(l+2),(l+1+i)} & \\ 0 & \end{array} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n,n} \end{array}\right) \quad \text{si} \quad i \neq 1,$$

$$\frac{1}{4}\left(\begin{array}{c|c|c} 1_{1,j} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{ccc} & & 0 \\ & -1_{(l+1+j),(l+2)} & \\ 0 & & \end{array} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n,n} \end{array}\right) \quad \text{si} \quad j \neq 1, \quad \frac{1}{4}\left(\begin{array}{c|c|c} 1_{j,i} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{ccc} & & 0 \\ & -1_{(l+1+i),(l+1+j)} & \\ 0 & & \end{array} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n,n} \end{array}\right)$$

$$\text{si} \quad i \neq j \neq 1$$

$$\frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{cc} 0 & \\ & \\ & 0 \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & \\ & \\ & 0 \end{array} & 0 \\ \hline \begin{array}{cc} 1_{(l+2),1} & \\ & \\ & 0 \end{array} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n,n} \end{array}\right), \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{cc} & \\ 0 & \\ & 0 \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & \\ & \\ & 0 \end{array} & 0 \\ \hline 1_{(l+1+i),i} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n,n} \end{array}\right) \quad \text{si} \quad i \neq 1$$

$$\frac{1}{4}\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{cc} 0 & \\ & \\ & 0 \end{array} & \begin{array}{cc} & \\ & \\ & 0 \end{array} & 0 \\ \hline \begin{array}{cc} & 1_{(l+2),j} \\ 0 & \\ 1_{(l+1+j),1} & 0 \end{array} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n,n} \end{array}\right) \text{si} \quad j \neq 1; \quad \frac{1}{4}\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{cc} 0 & \\ & \\ & 0 \end{array} & \begin{array}{cc} & \\ & \\ & 0 \end{array} & 0 \\ \hline \begin{array}{cc} & 1_{(l+1+i),j} \\ 0 & \\ 1_{(l+1+j),i} & 0 \end{array} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n,n} \end{array}\right) \text{si} \quad i \neq j \neq 1;$$

$$-\frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1_{1,(l+2)} \quad 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n,n} \end{array}\right); \quad -\frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1_{(l+1+i),i} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n,n} \end{array}\right) \text{si} \quad i \neq 1$$

$$-\frac{1}{4}\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{array}{c} 1_{1,(l+1+j)} \\ 1_{j,(l+2)} \end{array} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n,n} \end{array}\right) \quad j \neq 1; \quad -\frac{1}{4}\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{array}{c} 1_{i,(l+1+j)} \\ 1_{j,(l+1+i)} \end{array} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n,n} \end{array}\right) \quad \text{si} \quad i \neq j$$

$$\frac{1}{4}\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1_{1,(2l+2+j)} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1_{(2l+2+j),(l+2)} & 0 & 0 \end{array}\right); \quad \frac{1}{4}\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & & 1_{i-(l+1),(2l+2+j)} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1_{(2l+2+j),i} & 0 & 0_{n,n} \end{array}\right) 1 < i \leqslant l+1;$$

$$\frac{1}{4}\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & & 1_{(l+2),(2l+2+j)} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -1_{(2l+2+j),1} & 0 & 0_{n,n} \end{array}\right), \quad \frac{1}{4}\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & & 1_{i,(2l+2+j)} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -1_{(2l+2+j),i} & 0 & 0_{n,n} \end{array}\right)$$

si $2l+2 \leqslant j \leqslant 2l+2+n$ et $l+2 < i \leqslant 2l+2$.
Enfin, quand $2l+2 \leqslant i, j \leqslant 2l+2+n$, on a

$$\frac{1}{4}\left(\begin{array}{c|cc} 0 & & 0 \\ \hline & 0 & 1_{(2l+2+j),(2l+2+i)} \\ 0 & & \\ & -1_{(2l+2+i),(2l+2+j)} & \\ & & 0 \end{array}\right).$$

La connaissance de la formule (1.23) et de la formule (1.7) permet d'obtenir les champs de vecteurs projectifs de contact correspondant à cette base duale. □

Chapitre 2

Quantification $\mathfrak{spo}(2|1)$−équivariante sur $S^{1|1}$

Dans ce chapitre, nous étudions la quantification équivariante sur le supercercle $S^{1|1}$. Les résultats d'existence et formules explicites données dans ce chapitre sont connus. Ils ont été donnés par N. Mellouli dans sa thèse de doctorat [11] et ont fait l'objet d'une publication [10]. Ces résultats ont été obtenus par calcul direct. Notre but ici est de mettre en oeuvre la technique des opérateurs de Casimir pour récupérer ces résultats. Cela nous permettra d'avoir un exemple d'application simple de cette technique qui nous guidera dans les situations plus complexes de $S^{1|2}$ et de $\mathbb{R}^{2l+1|n}$. Nous allons d'abord particulariser les définitions générales présentées dans le premier chapitre. Nous donnons une formule explicite pour l'opérateur γ et pour les opérateurs de Casimir, qui nous permettent de construire la quantification.

Nous avons cependant conservé à certains endroits, que nous signalerons, les notations de N. Mellouli.

2.1 Superfonctions et champs de vecteurs sur $S^{1|1}$

Nous utilisons la même description que celle de H.Gargoubi, N.Mellouli, V.Ovsienko dans [10]. Il s'agit de la description donnée au chapitre précédent, où il n'y a qu'une variable impaire et une variable paire.

Un élément f de $C^\infty(S^{1|1})$ est donc défini, en coordonnées locales par :

$$f(x,\theta) = f_0(x) + f_1(x)\theta$$

où $f_0, f_1 \in C^\infty(V), V \in Ouv(S^1)$.

La définition générale (1.1) des champs de vecteurs se particularise sur le supercercle $S^{1|1}$ par

$$X = f(x,\theta)\partial_x + g(x,\theta)\partial_\theta$$

où $f(x,\theta), g(x,\theta) \in C^\infty(S^{1|1})$. On note $\mathrm{Vect}(S^{1|1})$ la superalgèbre de Lie des champs de vecteurs sur le supercercle $S^{1|1}$.

2.2 La superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2|1)$

Dans cette section, nous décrivons la superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2|1)$ des champs de vecteurs projectifs de contact sur $S^{1|1}$. Comme nous l'avons souligné dans le premier chapitre, cette superalgèbre de Lie est l'intersection de la superalgèbre de Lie des champs de vecteurs projectifs $\mathfrak{pgl}(2|2)$ et de la superalgèbre de Lie de champs de vecteurs de contact $K(1)$ [1] sur $S^{1|1}$.

2.2.1 La superalgèbre de Lie des champs de vecteurs de contact sur $S^{1|1}$

La structure de contact standard sur le supercercle $S^{1|1}$ est définie par la $1-$ forme différentielle α égale à $dx + \theta d\theta$. Son noyau est engendré par le champ de vecteur impair $\bar{D} = \partial_\theta - \theta\partial_x$. Cela permet de particulariser la définition 1.7.4 sur $S^{1|1}$ pour obtenir la définition des champs de contacts.

Définition 2.2.1. *Un champ de vecteurs $X \in \mathrm{Vect}(S^{1|1})$ préserve la structure de contact sur $S^{1|1}$ si il existe une superfonction $\psi_X \in C^\infty(S^{1|1})$ telle que $[X, \bar{D}] = \psi_X \bar{D}$. L'ensemble de ces champs forme une sous-superalgèbre de Lie de $\mathrm{Vect}(S^{1|1})$, notée $K(1)$.*

D'après la proposition 1.7.5, les champs de vecteurs de contact sur $S^{1|1}$, sont exactement les champs de la forme

$$X_f = f\partial_x - (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\bar{D}(f)\bar{D}$$

pour une superfonction f sur $S^{1|1}$. La superfonction f est appelée le Hamiltonien de contact de X_f.

En considérant des fonctions quadratiques au plus, c'est à dire des combinaisons linéaires de $\{1, x, \theta, x^2, x\theta\}$, nous obtenons via la correspondance $f \mapsto X_f$ une sous-superalgèbre de Lie de $K(1)$ que nous notons par $\mathfrak{spo}(2|1)$. La sous-superalgèbre de Lie

1. La notation classique $K(1)$ est utilisée à la place de la notation $K(1|1)$ donnée au premier chapitre.

engendrée par les champs de vecteurs de contact $\{X_1, X_x, X_\theta\}$ sera appelée *affine* et notée $\mathrm{Aff}(2|1)$.

La superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2|1)$ peut être obtenue également par le plongement projectif (voir section 1.8) dans la superalgèbre de Lie projective $\mathfrak{pgl}(2|1)$. Pour cela on pose $l = 0$ et $n = 1$ dans les formules de la section 1.8.

Ainsi la superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2|1)$ est dans l'intersection de la superalgèbre de Lie de contact $K(1)$ et de la superalgèbre de Lie projective $\mathfrak{pgl}(2|1)$.

Vu la définition de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2|1)$, on obtient directement une base de cette superalgèbre donnée par $\{X_x, X_{x\theta}, X_1, X_{x^2}, X_\theta\}$.

2.3 Module de densités de poids λ sur $S^{1|1}$

D'après la définition 1.9.2, l'espace des λ-densités de contact sur $S^{1|1}$ est donné par

$$\mathcal{F}_\lambda(S^{1|1}) := \{g\alpha^\lambda : g \in C^\infty(S^{1|1})\}$$

et l'action (1.27) de $K(1)$ (et donc de $\mathfrak{spo}(2|1)$) sur $\mathcal{F}_\lambda(S^{1|1})$ s'écrit

$$L^\lambda_{X_f}(g\alpha^\lambda) := (X_f(g) + \lambda f' g)\alpha^\lambda, \tag{2.1}$$

avec $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$.

La formule explicite du crochet de Lagrange sur $C^\infty(S^{1|1})$ devient

$$\{f, g\} = fg' - f'g - (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\bar{D}(f)\bar{D}(g).$$

Remarque 2.3.1. *En tant qu'espaces vectoriels, $\mathcal{F}_\lambda(S^{1|1})$ et $C^\infty(S^{1|1})$ sont bien sûr isomorphes, la correspondance étant donnée par $g\alpha^\lambda \mapsto g$. La présence du facteur α^λ n'est utile que pour rappeler que nous considérons une représentation dépendant du poids λ. Ce facteur sera omis dans nos calculs dès que cela ne risque pas de prêter à confusion.*

2.4 Opérateurs différentiels et symboles associés

L'espace des opérateurs différentiels sur $S^{1|1}$ est défini en particularisant les définitions du premier chapitre. Cependant la remarque suivante concernant les notations est particulièrement importante.

Remarque 2.4.1. *Dans le cas du supercercle $S^{1|1}$, la notation $\mathcal{D}^k$ est fréquemment utilisée dans la littérature pour noter les opérateurs d'ordre k au sens de Heisenberg. Dans ce chapitre, nous n'utiliserons que la filtration de Heisenberg et les symboles associés. Nous noterons donc le filtre $\mathcal{D}^k$ et l'espace des symboles associés $\mathcal{S}^k$, où k peut prendre des valeurs demi-entières.*

On note $\frac{1}{2}+\mathbb{N}$ l'ensemble $\{\frac{1}{2}+n : n \in \mathbb{N}\}$. Un opérateur différentiel A d'ordre $k \in \mathbb{N} \cup \frac{1}{2}+\mathbb{N}$ sur $S^{1|1}$ peut s'écrire (voir [11] et [10]), via la formule (1.34), sous la forme suivante

$$A = \sum_{l+\frac{m}{2} \leq k} a_{l,m} (\partial_x)^l \overline{D}^m \tag{2.2}$$

où $a_{l,m} \in C^\infty(S^{1|1})$ pour tous l, m. Puisque $-\overline{D}^2 = \partial_x$, on peut supposer $m \leq 1$.

Si on note $\mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(S^{1|1})$ l'espace des opérateurs différentiels d'ordre k agissant de $\mathcal{F}_\lambda$ dans $\mathcal{F}_\mu$, alors l'espace total des opérateurs différentiels agissant des λ-densités vers les μ-densités s'écrit

$$\mathcal{D}_{\lambda\mu}(S^{1|1}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \frac{1}{2}+\mathbb{N}} \mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(S^{1|1}).$$

Puisque $\mathcal{D}^l_{\lambda\mu}(S^{1|1}) \subset \mathcal{D}^{l+\frac{1}{2}}_{\lambda\mu}(S^{1|1})$, alors l'espace $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(S^{1|1})$ est muni d'une filtration appelée fine suivante :

$$\mathcal{D}^0_{\lambda\mu}(S^{1|1}) \subset \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{\lambda\mu}(S^{1|1}) \subset \mathcal{D}^1_{\lambda\mu}(S^{1|1}) \subset \ldots \subset \mathcal{D}^{l-\frac{1}{2}}_{\lambda\mu}(S^{1|1}) \subset \mathcal{D}^l_{\lambda\mu}(S^{1|1}) \subset \ldots .$$

L'espace $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(S^{1|1})$ est muni d'une structure de $\mathfrak{spo}(2|1)$-module définie par la dérivée de Lie dans la direction de X_f notée $\mathcal{L}^{\lambda\mu}_{X_f}$ comme suit :

$$\forall A \in \mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(S^{1|1}), \quad \mathcal{L}^{\lambda\mu}_{X_f} A = L^\mu_{X_f} \circ A - (-1)^{\tilde{f}\tilde{A}} A \circ L^\lambda_{X_f}$$

L'action de $\mathfrak{spo}(2|1)$ préserve la filtration fine de $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(S^{1|1})$.

Définition 2.4.2. *On appelle espace des symboles et on note $\mathcal{S}_\delta$ ($\delta = \mu - \lambda$), l'espace gradué associé à l'espace des opérateurs différentiels. On a donc*

$$\mathcal{S}_\delta = \bigoplus_{k \in \mathbb{N} \cup \frac{1}{2}+\mathbb{N}} \mathcal{S}^k_\delta,$$

où $\mathcal{S}^k_\delta := \mathcal{D}^k_{\lambda\mu} / \mathcal{D}^{k-\frac{1}{2}}_{\lambda\mu}$ *pour tout* $k \in \mathbb{N} \cup \frac{1}{2}+\mathbb{N}$.

Les résultats donnés dans les propositions suivantes ont été donnés par N. Mellouli [11] (voir aussi [10]), mais pour faciliter la lecture, nous avons choisi de les reprendre ainsi que leurs démonstrations.

Proposition 2.4.3. *Quel que soit le poids δ' on a toujours un isomorphisme entre les superspaces vectoriels $\mathcal{S}^k(S^{1|1})$ et $\mathcal{F}_{\delta'}(S^{1|1})$ donné par*

$$\mathcal{S}^k_\delta(S^{1|1}) \to \mathcal{F}_{\delta'}(S^{1|1}) : [F\partial_x^k] \mapsto F\alpha^{\delta'}, \tag{2.3}$$

si $k \in \mathbb{N}$ et par

$$\mathcal{S}^k_\delta(S^{1|1}) \to \mathcal{F}_{\delta'}(S^{1|1}) : [F\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}] \mapsto F\alpha^{\delta'} \tag{2.4}$$

si $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$.

Puisque l'action de $\mathfrak{spo}(2|1)$ préserve la filtration sur $\mathcal{D}^k_{\lambda\mu}$, la structure de $\mathfrak{spo}(2|1)$-module induit sur l'espace de symboles $\mathcal{S}^k_\delta$ une structure de module par passage au quotient. Ainsi si on note $L^\delta_{X_f}$ la dérivée de Lie d'un symbole dans la direction de X_f, on a

$$L^\delta_{X_f}[A] := [\mathcal{L}^{\lambda\mu}_{X_f}A].$$

Nous donnons d'abord les formules des commutateurs dans le lemme suivant :

Lemme 2.4.4. *Si $k \in \mathbb{N}$ et $X_f \in \mathfrak{spo}(2|1)$, alors*

$$[X_f, \partial_x^k] = -kf'\partial_x^k + (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}k\bar{D}(f')\partial_x^{k-1}\bar{D} - \frac{k(k-1)}{2}f''\partial_x^{k-1},$$

$$[X_f, \bar{D}] = -\frac{1}{2}f'\bar{D};$$

$$[\partial_x^k, f] = kf'\partial_x^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}f''\partial_x^{k-2}$$

et si $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$ on a

$$[X_f, \partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}] = -kf'\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D} - (-1)^{\tilde{f}}(\frac{(k-\frac{1}{2})}{2})\bar{D}(f')\partial_x^{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})^2 f''\partial_x^{k-\frac{3}{2}}\bar{D}.$$

Démonstration. On démontre la première formule par induction. En effet, si $k = 1$ alors c'est une évidence. Si l'on suppose que la formule est vraie pour k, il vient

$$[X_f, \partial_x^{k+1}] = [X_f, \partial_x\partial_x^k] = [X_f, \partial_x]\partial_x^k + \partial_x[X_f, \partial_x^k]$$
$$= (-f'\partial_x + (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\bar{D}(f')\bar{D})\partial_x^k + \partial_x(-kf'\partial_x^k + (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}k\bar{D}(f')\partial_x^{k-1}\bar{D} - \frac{k(k-1)}{2}f''\partial_x^{k-1}).$$

Il est alors facile de voir que la formule est aussi correcte pour $k+1$. Pour la deuxième et troisième formule, c'est un simple calcul. Pour la quatrième formule, il suffit de calculer

$$[X_f, \partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}] = [X_f, \partial_x^{k-\frac{1}{2}}]\bar{D} + \partial_x^{k-\frac{1}{2}}[X_f, \bar{D}].$$

□

L'action de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2|1)$ sur $\mathcal{S}_\delta(S^{1|1})$ est donnée de la manière suivante :

Proposition 2.4.5. *Si le symbole $S = [F\partial_x^k]$ ou $S = [F\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}]$ et si $\delta' = \delta - k$ alors l'identification dans la proposition 2.4.3 devient un isomorphisme entre les $\mathfrak{spo}(2|1)$-modules $\mathcal{S}_\delta^k(S^{1|1})$ et $\mathcal{F}_{\delta-k}(S^{1|1})$.*

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $S = [F\partial_x^k]$ un symbole homogène de degré k. La dérivée de Lie du symbole S dans la direction de X_f est obtenu en calculant l'expression suivante

$$L_{X_f}^\delta(S) = [L_{X_f}^\mu F\partial_x^k - (-1)^{\tilde{f}\tilde{S}} F\partial_x^k \circ L_{X_f}^\lambda]. \tag{2.5}$$

La somme des termes de plus haut ordre k dans $L_{X_f}^\mu F\partial_x^k$ est égale à

$$f\partial_x F\partial_x^k - (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\bar{D}(f)\bar{D}(F)\partial_x^k + \mu f' F\partial_x^k$$

tandis que la somme des termes de plus haut ordre k dans $-(-1)^{\tilde{f}\tilde{S}} F\partial_x^k \circ L_{X_f}^\lambda$ est égale à

$$-(-1)^{\tilde{f}\tilde{F}} kFf'\partial_x^k - (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}} \lambda Ff'\partial_x^k.$$

La somme de tous les termes qui correspondent au symbole principal dans (2.5) sont les suivants :

$$\left((f\partial_x - (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\bar{D}(f)\bar{D})(F)\right)\partial_x^k + (\delta - k)f'F\partial_x^k.$$

Il est facile de voir que cette expression est égale à

$$\left(L_{X_f}^{\delta-k}(F)\right)\partial_x^k.$$

Donc à l'aide de la proposition 2.4.3, on obtient l'identification annoncée. Si $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$ et si S est un symbole d'ordre k qui s'écrit $[F\partial_x^{k-\frac{1}{2}}]$, on a :

$$L_{X_f}^\delta(S) = [\mathcal{L}_{X_f}^{\lambda\mu}(F\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D})] = [L_{X_f}^\mu \circ (F\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}) - (-1)^{\tilde{f}(\widetilde{F+1})} F\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D} \circ L_{X_f}^\lambda]. \tag{2.6}$$

La somme des termes de plus haut ordre k dans le premier terme est égale à

$$f\partial_x F\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}-(-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\bar{D}(f)\bar{D}(F)\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}+\mu f'F\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}$$

tandis la somme des termes de plus haut ordre k dans le second terme est égale à

$$-(-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}(k-\frac{1}{2})Ff'\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}-(-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}\lambda Ff'\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}-\frac{1}{2}f'F\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}.$$

La somme de tous les termes qui correspondent au symbole principal de la relation (2.6) est égale à

$$\Big((f\partial_x-(-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\bar{D}(f)\bar{D})(F)\Big)\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}+(\delta-k)f'F\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}.$$

Il est immédiat de voir que cette expression est égale à

$$\left(L_{X_f}^{\delta-k}(F)\right)\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}.$$

Donc la proposition 2.4.3 nous permet d'obtenir l'identification annoncée. □

2.5 Outils de la quantification équivariante

Nous utilisons les mêmes outils que ceux utilisés dans [28]. Les premiers outils sont l'application de quantification affine et l'application γ.

2.5.1 Application de quantification affine

L'application de quantification affine que nous allons définir est un cas particulier de la quantification affine introduite dans la définition 1.10.3.

Définition 2.5.1. *On appelle application de quantification affine Q_{Aff}, la bijection linéaire de $\mathcal{S}_\delta(S^{1|1})$ dans $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(S^{1|1})$ définie comme suit, pour $F\in\mathcal{F}_{\delta-k}\cong\mathcal{S}_\delta^k(S^{1|1})$:*

$$Q_{\mathrm{Aff}}(F)=\begin{cases} F\partial_x^k & si \quad k\in\mathbb{N}\\ F\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D} & si \quad k\in\frac{1}{2}+\mathbb{N}\end{cases}$$

L'inverse de la quantification affine se note par σ_{Aff}.

En utilisant cette application Q_{Aff}, nous pouvons transporter la structure de $\mathrm{Vect}(S^{1|1})$-module de $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(S^{1|1})$ sur $\mathcal{S}_\delta(S^{1|1})$ en définissant sur $\mathcal{S}_\delta(S^{1|1})$ la dérivée de Lie notée également $\mathcal{L}_X$ comme suit

$$\mathcal{L}_X = Q_{\mathrm{Aff}}^{-1} \circ \mathcal{L}_X^{\lambda\mu} \circ Q_{\mathrm{Aff}},$$

pour tout $X \in \mathrm{Vect}(S^{1|1})$. La quantification $\mathfrak{spo}(2|1)$-équivariante est alors la donnée d'un isomorphisme entre les réprésentations $(\mathcal{S}_\delta, L_X^\delta)$ et $(\mathcal{S}_\delta, \mathcal{L}_X)$

$$Q : (\mathcal{S}_\delta, L_X^\delta) \to (\mathcal{S}_\delta, \mathcal{L}_X) \tag{2.7}$$

telle que le terme de plus haut ordre de $Q(S)$ est égal à S pour tout $S \in \mathcal{S}_\delta^k(S^{1|1})$.
En effet, $Q_{\mathrm{Aff}} \circ Q$ est invariant si et seulement si Q est invariant car on a

$$\mathcal{L}_X^{\lambda\mu}(Q_{\mathrm{Aff}} \circ Q)(S) = (Q_{\mathrm{Aff}} \circ Q)(L_X^\delta S)$$

si et seulement si

$$Q_{\mathrm{Aff}}^{-1} \circ \mathcal{L}_X^{\lambda\mu} \circ Q_{\mathrm{Aff}} \circ Q(S) = Q(L_X^\delta S).$$

2.5.2 L'application γ et opérateur de Casimir

La différence entre les représentations $(\mathcal{S}_\delta, L_X^\delta)$ et $(\mathcal{S}_\delta, \mathcal{L}_X)$ est mesurée par l'application

$$\gamma : \mathfrak{spo}(2|1) \to \mathfrak{gl}(\mathcal{S}_\delta, \mathcal{S}_\delta) : X_f \mapsto \gamma(X_f) = \mathcal{L}_{X_f} - L_{X_f}^\delta.$$

On peut calculer explicitement son expression en coordonnées locales. Dans ce qui suit si F est un symbole homogène, nous notons par $\tilde{F}$ sa parité.

Proposition 2.5.2. *L'application γ s'annule sur* $\mathrm{Aff}(2|1)$. *Pour tous $f \in \{x^2, x\theta\}$, la restriction de $\gamma(X_f)$ à $\mathcal{S}_\delta^k$ est à valeurs dans $\mathcal{S}_\delta^{k-\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{S}_\delta^{k-1}$. En plus, si $F \in \mathcal{S}_\delta^k$ est un symbole homogène, on a*

$$(Q_{\mathrm{Aff}} \circ \gamma(X_f))(F) = \left(-k(\frac{k-1}{2} + \lambda) f'' F \partial_x^{k-1} + (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}+\tilde{f}} \frac{k}{2} F \bar{D}(f') \partial_x^{k-1} \bar{D}\right) \tag{2.8}$$

si $k \in \mathbb{N}$ *et*

$$
\begin{aligned}
&(Q_{\mathrm{Aff}} \circ \gamma(X_f))(F) = \\
&\qquad\qquad - (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}+\tilde{f}} \frac{1}{2}\left((k+2\lambda-\frac{1}{2}\right) F\bar{D}(f')\partial_x^{k-\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad\qquad - \frac{(k-\frac{1}{2})}{2}\left((k+2\lambda-\frac{1}{2})\right) f''F\partial_x^{k-\frac{3}{2}}\bar{D} \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

si $k \in \frac{1}{2}+\mathbb{N}$.

Démonstration. On a par définition :

$$(Q_{\mathrm{Aff}} \circ \gamma(X_f))(F) = \mathcal{L}_{X_f}^{\lambda\mu} \circ Q_{\mathrm{Aff}}(F) - Q_{\mathrm{Aff}} \circ L_{X_f}^{\delta-k}(F).$$

Si $k \in \mathbb{N}$, le calcul du premier terme du second membre nous donne ce qui suit :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_f}^{\lambda\mu} \circ Q_{\mathrm{Aff}}(F) &= [X_f, F\partial_x^k] + \mu f'F\partial_x^k - (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}\lambda\left(Ff'\partial_x^k + kFf''\partial_x^{k-1}\right) \\
&= X_f(F)\partial_x^k + (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}F[X_f,\partial_x^k] + \delta f'F\partial_x^k - (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}\lambda kFf''\partial_x^{k-1}.
\end{aligned}
$$

Le calcul du second terme donne

$$-Q_{\mathrm{Aff}} \circ L_{X_f}^{\delta-k}(F) = -f\partial_x F\partial_x^k + (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\bar{D}(f)\overline{D}(F)\partial_x^k - (\delta-k)f'F\partial_x^k.$$

En utilisant les résultats du lemme 2.4.4 et le fait que

$$
\begin{aligned}
[X_f, F] = f\partial_x F + fF\partial_x - (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\bar{D}(f)\bar{D}(F) - (-1)^{\tilde{f}+\tilde{F}}\frac{1}{2}\bar{D}(f)F\bar{D} \\
- (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}Ff\partial_x + (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}+\tilde{f}}\frac{1}{2}F\bar{D}(f)\bar{D},
\end{aligned}
$$

on obtient le résultat annoncé.
De même, si $k \in \frac{1}{2}+\mathbb{N}$, on a pour le premier terme du second membre :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_f}^{\lambda\mu} \circ Q_{\mathrm{Aff}}(F) &= [X_f, F\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}] + \mu f'F\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D} \\
&\quad - (-1)^{\tilde{f}(\tilde{F}+1)}\lambda F\partial_x^{k-\frac{1}{2}}.\left(\overline{D}(f') + (-1)^{\tilde{f}}f'\overline{D}\right) \\
&= [X_f, F]\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D} + (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}F[X_f, \partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}] + \mu f'F\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D} \\
&\quad - (-1)^{\tilde{f}(\tilde{F}+1)}\lambda F\partial_x^{k-\frac{1}{2}}.\left(\overline{D}(f') + (-1)^{\tilde{f}}f'\overline{D}\right).
\end{aligned}
$$

Pour le second terme, on obtient

$$-Q_{\mathrm{Aff}} \circ L^{\delta-k}_{X_f}(F) = -f\partial_x F \partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D} + (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\bar{D}(f)\overline{D}(F)\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D} - (\delta - k)f'F\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}.$$

L'utilisation des résultats du lemme 2.4.4 nous donne aussi le résultat annoncé. □

Si $k \in \mathbb{N}$, la composante de $\gamma(X_f)|_{\mathcal{S}^k_\delta}$ selon $\mathcal{S}^{k-\frac{1}{2}}_\delta$ est donnée par

$$(-1)^{\tilde{f}\tilde{F}+\tilde{f}}\frac{k}{2}F\bar{D}(f')$$

tandis que la composante selon $\mathcal{S}^{k-1}_\delta$ est donnée par

$$-\left(k(\frac{k-1}{2} + \lambda)f''F\right).$$

Si $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$, la composante de $\gamma(X_f)|_{\mathcal{S}^k_\delta}$ selon $\mathcal{S}^{k-\frac{1}{2}}_\delta$ est donnée par

$$-(-1)^{\tilde{f}\tilde{F}+\tilde{f}}\frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{2}) + 2\lambda\right)F\bar{D}(f')$$

tandis que la composante selon $\mathcal{S}^{k-1}_\delta$ est donnée par

$$-\frac{(k-\frac{1}{2})}{2}\left((k + 2\lambda - \frac{1}{2})\right)f''F.$$

On peut particulariser les notions de la section 1.10.3 au cas de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2|1)$ et aux représentations $(\mathcal{S}_\delta, L_X)$ et $(\mathcal{S}_\delta, \mathcal{L}_X)$ discutées à la section précédente.

Définition 2.5.3. *On note respectivement C et $\mathcal{C}$ les opérateurs de Casimir associés à $(\mathcal{S}_\delta, L_X)$ et $(\mathcal{S}_\delta, \mathcal{L}_X)$. On a donc pour tout $S \in \mathcal{S}_\delta$,*

$$\begin{cases} C(S) = \sum_{i=1}^5 L_{X_i^*} \circ L_{X_i} S \\ \mathcal{C}(S) = \sum_{i=1}^5 \mathcal{L}_{X_i^*} \circ \mathcal{L}_{X_i} S \end{cases}$$

si $\{X_i\} = \{X_f : f \in \{1, x, \theta, x\theta, x^2\}\}$ et $\{X_i^*\} = \{X_f^* : f \in \{1, x, \theta, x\theta, x^2\}\}$ sont des bases duales de $\mathfrak{spo}(2|1)$ correspondant à la forme bilinéaire K définie par

$$K : \mathfrak{spo}(2|1) \times \mathfrak{spo}(2|1) \to \mathbb{R} : (A, B) \mapsto 2str(AB), \forall A, B \in \mathfrak{spo}(2|1).$$

Lemme 2.5.4. *La base K-duale correspondant à la base*

$$\{X_x, X_{x\theta}, X_1, X_{x^2}, X_\theta\}$$

de $\mathfrak{spo}(2|1)$ est donnée par

$$\{X_x, X_\theta, -\frac{1}{2}X_{x^2}, -\frac{1}{2}X_1, -X_{x\theta}\}.$$

Nous pouvons maintenant calculer l'opérateur de Casimir associé à la représentation $(\mathcal{S}_\delta^k, L_X)$.

Proposition 2.5.5. *L'opérateur de Casimir associé à la représentation $(\mathcal{S}_\delta^k, L_X)$ de $\mathfrak{spo}(2|1)$ est donné par $C|_{\mathcal{S}_\delta^k} = \alpha_{k,\delta}\mathrm{Id}$, où $\alpha_{k,\delta} = \frac{1}{2}(\delta - k)(2\delta - 2k - 1)$ pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \frac{1}{2} + \mathbb{N}$.*

Démonstration. En utilisant la définition 2.5.3 et le lemme 2.5.4, on trouve

$$C = L_{X_x}^{\delta-k} \circ L_{X_x}^{\delta-k} + L_{X_\theta}^{\delta-k} \circ L_{X_{x\theta}}^{\delta-k} - L_{X_{x\theta}}^{\delta-k} \circ L_{X_\theta}^{\delta-k} - \frac{1}{2}L_{X_{x^2}}^{\delta-k} \circ L_{X_1}^{\delta-k} - \frac{1}{2}L_{X_1}^{\delta-k} \circ L_{X_{x^2}}^{\delta-k}.$$

En calculant C sur un symbole F, seuls les termes $L_{X_\theta}^{\delta-k} \circ L_{X_{x\theta}}^{\delta-k}(F)$, $-\frac{1}{2}L_{X_1}^{\delta-k} \circ L_{X_{x^2}}^{\delta-k}(F)$ et $L_{X_x}^{\delta-k} \circ L_{X_x}^{\delta-k}(F)$ donnent une contribution dans $C(F)$ et les autres termes se simplifient. La contribution de $-\frac{1}{2}L_{X_1}^{\delta-k} \circ L_{X_{x^2}}^{\delta-k}$ vaut $-(\delta-k)F$, celle du terme $L_{X_\theta}^{\delta-k} \circ L_{X_{x\theta}}^{\delta-k}(F)$ vaut $\frac{1}{2}(\delta-k)F$ tandis que celle de $L_{X_x}^{\delta-k} \circ L_{X_x}^{\delta-k}(F)$ vaut $(\delta-k)^2F$. En sommant ces termes, on obtient le résultat annoncé. □

Nous définissons maintenant l'opérateur N qui mesure la différence entre les opérateurs de Casimir C et $\mathcal{C}$ comme suit.

Définition 2.5.6. *On peut définir un opérateur N de $\mathcal{S}_\delta$ dans $\mathcal{S}_\delta$ de la façon suivante :*

$$N : \mathcal{S}_\delta \to \mathcal{S}_\delta : S \mapsto \mathcal{C}(S) - C(S). \tag{2.10}$$

La connaissance de l'application γ permet de calculer explicitement l'opérateur N, d'où la proposition qui suit :

Proposition 2.5.7. *La restriction de N à $\mathcal{S}_\delta^k$ est à valeurs dans $\mathcal{S}_\delta^{k-\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{S}_\delta^{k-1}$. Si $k \in \mathbb{N}$, la composante de $N|_{\mathcal{S}_\delta^k}$ selon $\mathcal{S}_\delta^{k-\frac{1}{2}}$ s'écrit :*

$$-(-1)^{\tilde{F}}\frac{k}{2}\overline{D}(F)$$

tandis que celle $N|_{\mathcal{S}_\delta^k}$ suivant $\mathcal{S}_\delta^{k-1}$ s'écrit

$$k(k+2\lambda-1)\partial_x F.$$

Si $k \in \frac{1}{2}+\mathbb{N}$, la composante de $N|_{\mathcal{S}_\delta^k}$ selon $\mathcal{S}_\delta^{k-\frac{1}{2}}$ s'écrit :

$$(-1)^{\tilde{F}}\frac{1}{2}(k+2\lambda-\frac{1}{2})\overline{D}(F)$$

tandis que celle de $N|_{\mathcal{S}_\delta^k}$ selon $\mathcal{S}_\delta^{k-1}$ s'écrit

$$(k-\frac{1}{2})(k+2\lambda-\frac{1}{2})\partial_x F.$$

Démonstration. En utilisant l'expression de $\mathcal{C}$ et de C de la définition 2.5.3 ainsi que la définition de γ et le fait que $\gamma(X_f)$ s'annule sur Aff$(2|1)$, on obtient directement

$$N = L_{X_\theta}\circ\gamma(X_{x\theta}) - \frac{1}{2}L_{X_1}\circ\gamma(X_{x^2}) - \frac{1}{2}\gamma(X_{x^2})\circ L_{X_1} - \gamma(X_{x\theta})\circ L_{X_\theta}.$$

Le résultat s'obtient alors facilement en utilisant le fait que les symboles de degré k s'identifient à des $(\delta-k)$-densités. □

2.6 Construction de la quantification $\mathfrak{spo}(2|1)$-équivariante

Nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la quantification $\mathfrak{spo}(2|1)$-équivariante sur $S^{1|1}$ pour des valeurs de δ dites non critiques. Nous commençons par définir cet ensemble des valeurs de δ pour lesquelles cette quantification $\mathfrak{spo}(2|1)$-équivariante n'existe pas.

2.6.1 Valeurs critiques

Les valeurs critiques sont définies à l'aide des valeurs propres de l'opérateur de Casimir C.

Définition 2.6.1. *Une valeur de δ est appelée critique, s'il existe $k,l \in \mathbb{N}\cup\frac{1}{2}+\mathbb{N}$ où $l<k$ tel que $\alpha_{k,\delta}=\alpha_{l,\delta}$.*

On a directement la proposition qui suit :

Proposition 2.6.2. *L'ensemble des valeurs critiques de δ est donné par*

$$\mathfrak{C}r = \left\{ \frac{2k+2l+1}{4} : k, l \in \frac{1}{2}\mathbb{N}, \quad l < k \right\}.$$

Démonstration. C'est un simple calcul en utilisant la proposition 2.5.5 et la définition 2.6.1 : l'ensemble des valeurs critiques de δ est alors simplement l'ensemble des racines des équations

$$(\delta - k)(2\delta - 2k - 1) = (\delta - l)(2\delta - 2l - 1),$$

avec $k, l \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ et $l < k$. □

Remarque 2.6.3. *La valeur $\delta = 0$ n'est pas critique.*

On peut voir que $2k + 2l + 1$ ne peut jamais s'annuler si $k, l \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ tel que $l < k$.

2.6.2 La construction

Le résultat principal est donné par le théorème qui suit

Théorème 2.6.4. *Si δ n'est pas critique, il existe une unique quantification $\mathfrak{spo}(2|1)$-équivariante de $\mathcal{S}_\delta$ dans $\mathcal{D}_{\lambda\mu}$.*

Démonstration. Premièrement, remarquons que pour tout $S \in \mathcal{S}^k_\delta$, il existe un unique vecteur propre $\hat{S}$ de $\mathcal{C}$ de valeur propre $\alpha_{k,\delta}$ dont la partie homogène de degré k est égale à S. En d'autres termes, il existe un unique symbole $\hat{S}$ tel que : $\mathcal{C}(\hat{S}) = \alpha_{k,\delta}\hat{S}$ et tel que

$$\begin{cases} \hat{S} = S_k + S_{k-\frac{1}{2}} + S_{k-1} + \cdots + S_0, \quad S_k = S \\ S_l \in \mathcal{S}^l_\delta \quad \text{pour tout } l \leqslant k - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

La condition $\mathcal{C}(\hat{S}) = \alpha_{k,\delta}\hat{S}$ est équivalente à l'égalité suivante :

$$(C + N)(S_k + S_{k-\frac{1}{2}} + S_{k-1} + \cdots + S_0) = \alpha_{k,\delta}(S_k + S_{k-\frac{1}{2}} + S_{k-1} + \cdots + S_0).$$

Puisque l'opérateur N diminue le degré de ses arguments d'une unité et d'une demi-unité, cette condition est aussi équivalente au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (C - \alpha_{k,\delta}\mathrm{Id})S_{k-\frac{1}{2}} = -\mathrm{pr}_{k-\frac{1}{2}}(N(S_k)), \\ (C - \alpha_{k,\delta}\mathrm{Id})S_{k-l} = -\Big(\mathrm{pr}_{k-l}(N(S_{k-l+\frac{1}{2}})) + \mathrm{pr}_{k-l}(N(S_{k-l+1}))\Big) \end{cases} \tag{2.11}$$

pour $l = 1, \frac{3}{2}, \ldots, k$, où pr_i est la projection naturelle $\mathcal{S}_\delta \to \mathcal{S}^i_\delta$.

Puisque δ est non critique, les expressions $\alpha_{k,\delta} - \alpha_{l,\delta}$ sont non nulles, ce qui implique que les opérateurs $(C - \alpha_{k,\delta}\mathrm{Id})|_{\mathcal{S}_\delta^{k-l}}$ sont inversibles et ce système d'équations possède une solution unique.

Nous définissons l'application Q par

$$Q|_{\mathcal{S}_\delta^k}(S) = \hat{S}. \tag{2.12}$$

L'unicité de la quantification provient du fait que la solution du système 3.13 est unique et que la quantification doit associer à un vecteur propre S de C un vecteur propre de $\mathcal{C}$ de même valeur propre et dont la composante de plus haut degré est donnée par S(proposition 1.10.11).

Il est clair que c'est une bijection et elle remplit la condition suivante :

$$Q \circ L_X^\delta = \mathcal{L}_X^{\lambda\mu} \circ Q \quad \text{pour tout} \quad X \in \mathfrak{spo}(2|1).$$

En effet, pour tout $S \in \mathcal{S}_\delta^k$, les symboles $Q(L_X^\delta S)$ et $\mathcal{L}_X^{\lambda\mu}(Q(S))$ possèdent tous deux les propriétés suivantes :

- Ils sont tous les deux des vecteurs propres de $\mathcal{C}$ de valeur propre $\alpha_{k,\delta}$ à cause du fait que $\mathcal{C}$ et C commutent respectivement avec $\mathcal{L}^{\lambda\mu}$ et L^δ.

- Le terme $L_{X_f}^\delta S$ est leur terme de degré k.

On peut alors conclure que les termes $Q(L_X^\delta S)$ et $\mathcal{L}_X^{\lambda\mu}(Q(S))$ sont égaux par la première partie de la preuve. Ainsi la quantification $\mathfrak{spo}(2|1)$-équivariante est donc donnée par $Q_{\mathrm{Aff}} \circ Q$. □

2.7 Formules explicites pour la quantification $\mathfrak{spo}(2|1)$-équivariante

Nous donnons maintenant des formules explicites pour la quantification $\mathfrak{spo}(2|1)$-équivariante sur $\mathcal{S}^{1|1}$ dans les cas où $k \in \mathbb{N}$ et où $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$.

Dans ce qui suit, si r est un demi-entier naturel alors la notation $\lfloor r \rfloor$ signifie la partie entière par défaut de r et $\lceil r \rceil$ signifie la partie entière par excès de r.

2.7.1 Le cas des degrés entiers naturels

Proposition 2.7.1. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Si δ est tel que $\alpha_k \neq \alpha_l$ pour tout $l \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ et $l < k$, alors le symbole S_{k-l} dans la preuve du théorème 2.6.4 est donné par :*

$$S_{k-l} = C_l \partial_x^l (S_k), \quad \text{où} \quad C_l = \frac{\prod_{s=0}^{l-1}(2s+1) C_k^l \prod_{i=1}^{l}(k+2\lambda-i)}{2^l \prod_{i=0}^{l-1}(\alpha_k - \alpha_{k-i-\frac{1}{2}})}, \tag{2.13}$$

si l est entier naturel et il est donné par

$$S_{k-l} = (-1)^{\tilde{S}_k+1} E_l \overline{D}^{2l}(S_k), \quad \text{avec} \quad E_l = \frac{(-1)^{\lfloor l \rfloor}(k-l+\frac{1}{2}) C_k^{l-\frac{1}{2}} \prod_{s=0}^{l-\frac{1}{2}}(2s+1) \prod_{i=1}^{l-\frac{1}{2}}(k+2\lambda-i)}{2^{\lceil l \rceil} \prod_{i=0}^{l-\frac{1}{2}}(\alpha_k - \alpha_{k-\frac{1}{2}-i})}, \tag{2.14}$$

pour tout $l \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$ et $l \geqslant \frac{3}{2}$ et où le coefficient $E_{\frac{1}{2}}$ est donné par

$$\frac{k}{2(\alpha_k - \alpha_{k-\frac{1}{2}})}.$$

Démonstration. On procède par récurrence.
Si $l = \frac{1}{2}$ et $l = 1$ les formules (2.13) et (2.14) sont faciles à prouver en utilisant la formule (3.13), la proposition 2.5.7 et la proposition 2.5.5.
On suppose ensuite que la formule est correcte pour $S_{k-l'}$ si $l' \leq l$ et on prouve que la formule est aussi correcte pour $S_{k-l-\frac{1}{2}}$. Pour cela on utilise la formule (3.13) et on trouve l'équation

$$S_{k-l-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\alpha_k - \alpha_{k-l-\frac{1}{2}}} \left[N_{k-l-\frac{1}{2}}^{k-l}(S_{k-l}) + N_{k-l-\frac{1}{2}}^{k-l+\frac{1}{2}}(S_{k-(l-\frac{1}{2})}) \right], \tag{2.15}$$

dans laquelle la composante du symbole de degré $(k-l-i)$ de $N|_{\mathcal{S}_\delta^{k-l}}$ est notée par N_{k-l-i}^{k-l}.
Deux situations peuvent se présenter :
Si l est entier alors $(k-l+\frac{1}{2})$ est demi-entier naturel et $(k-l)$ est entier naturel. Dans ce cas, il suffit d'appliquer les formules de la proposition 2.5.7 et les formules (2.13) et (2.14) pour voir que $S_{k-l-\frac{1}{2}}$ a la forme donnée dans la relation (2.14) et que

$$E_{l+\frac{1}{2}} = \frac{(k-l)\left[(-1)^{\lfloor l+\frac{1}{2} \rfloor} C_l - 2(k+2\lambda-l) E_{l-\frac{1}{2}}\right]}{2(\alpha_k - \alpha_{k-(l+\frac{1}{2})})}.$$

En utilisant les hypothèses d'induction sur les coefficients C_l et $E_{l-\frac{1}{2}}$, on obtient la formule qu'il faut pour $E_{l+\frac{1}{2}}$.
Si l est demi-entier alors $(k-l-\frac{1}{2})$ est entier et $(k-l)$ est demi-entier. Des calculs similaires aux précédents montrent que $S_{k-l-\frac{1}{2}}$ a la même forme que celle décrite par la première partie de la formule (2.13) et que

$$C_{l+\frac{1}{2}} = \frac{(k-l-\frac{1}{2}+2\lambda)\left((-1)^{l+\frac{1}{2}}E_l + 2(k-l+\frac{1}{2})C_{l-\frac{1}{2}}\right)}{2(\alpha_k - \alpha_{k-(l+\frac{1}{2})})}.$$

Les hypothèses d'induction sur les coefficients E_l et $C_{l-\frac{1}{2}}$ montrent qu'on obtient une formule correcte pour $C_{l+\frac{1}{2}}$. □

2.7.2 Le cas des degrés non entiers naturels

La forme de la formule explicite pour le cas de $k \in \frac{1}{2}+\mathbb{N}$ est similaire. Seulement la différence se trouve au niveau des coefficients.

Proposition 2.7.2. *Soit $k \in \frac{1}{2}+\mathbb{N}$. Si δ est tel que $\alpha_k \neq \alpha_l$ pour tout $l \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ et $l < k$, alors le symbole S_{k-l} dans la preuve du théorème 2.6.4 est donné par :*

$$S_{k-l} = C'_l \partial_x^l(S_k), \quad \text{où} \quad C'_l = \frac{\prod_{s=0}^{l-1}(2s+1)\prod_{j=1}^{l}(k+2\lambda+\frac{1}{2}-j)\prod_{i=0}^{l-1}(k-\frac{1}{2}-i)}{2^l l! \prod_{i=0}^{l-1}(\alpha_k - \alpha_{k-\frac{1}{2}-i})}, \tag{2.16}$$

si l est entier naturel et il est donné par

$$S_{k-l} = (-1)^{\tilde{S_k}+1} E'_l \overline{D}^{2l}(S_k), \tag{2.17}$$

où le coefficient E'_l est donné par

$$E'_l = \frac{(-1)^{\lfloor l \rfloor}\prod_{s=0}^{l-\frac{1}{2}}(2s+1)\prod_{j=1}^{l-\frac{1}{2}}(k+\frac{1}{2}-j)\prod_{i=0}^{l-\frac{1}{2}}(k+2\lambda-\frac{1}{2}-i)}{2^{\lceil l \rceil}(l-\frac{1}{2})!\prod_{i=0}^{l-\frac{1}{2}}(\alpha_k - \alpha_{k-i-\frac{1}{2}})},$$

pour tout demi-entier naturel $l \geqslant \frac{3}{2}$ où le coefficient $E'_{\frac{1}{2}}$ est quant à lui donné par

$$\frac{k+2\lambda-\frac{1}{2}}{2(\alpha_k - \alpha_{k-\frac{1}{2}})}.$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la proposition 2.7.1. □

2.8 Quantification $\mathfrak{spo}(2|1)$-équivariantes des symboles d'ordres $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ et 2

Dans cette section, nous présentons des exemples des formules explicites. Ces formules montrent en particulier que la construction à l'aide d'opérateurs de Casimir conduit aux résultats de N. Mellouli dans [11]. Elles seront également utiles comme exemples élémentaires pour la quantification fine équivariante sur $\mathbb{R}^{2l+1|n}$. Pour cela, nous allons nous servir des résultats de la section précédente ainsi que de la formule (2.12).

Les formules explicites de la quantification $\mathfrak{spo}(2|1)$-équivariantes des symboles d'ordre $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ et 2 sont décrites par la proposition qui suit :

Proposition 2.8.1. *1. Si $S \in \mathcal{S}_\delta^{\frac{1}{2}}$ alors,*

$$Q(S) = F\overline{D} + (-1)^{\tilde{F}} \frac{2\lambda}{1-2(\mu-\lambda)} \overline{D}(F), \ \forall \delta \neq \frac{1}{2}.$$

2. Si $S \in \mathcal{S}_\delta^1$ alors,

$$Q(S) = F\partial_x + (-1)^{\tilde{F}} \frac{1}{2(\mu-\lambda)-2} \overline{D}(F)\overline{D} + \frac{2\lambda}{2-2(\mu-\lambda)} \partial_x(F), \ \forall \delta \neq 1.$$

3. Si $S \in \mathcal{S}_\delta^{\frac{3}{2}}$ alors,

$$\begin{aligned} Q(S) = F\partial_x\overline{D} &+ (-1)^{\tilde{F}} \frac{1+2\lambda}{3-2(\mu-\lambda)} \overline{D}(F)\partial_x + \frac{(1+2\lambda)}{3-2(\mu-\lambda)} \partial_x(F)\overline{D} \\ &+ (-1)^{\tilde{F}} \frac{\lambda(1+2\lambda)}{(3-2(\mu-\lambda))(1-(\mu-\lambda))} \partial_x\overline{D}(F), \ \forall \delta \notin \left\{1, \frac{3}{2}\right\}. \end{aligned}$$

4. Si $S \in \mathcal{S}_\delta^2$ alors,

$$\begin{aligned} Q(S) = F\partial_x^2 &- (-1)^{\tilde{F}} \frac{1}{(2-(\mu-\lambda))} \overline{D}(F)\partial_x\overline{D} + \frac{(1+2\lambda)}{(2-(\mu-\lambda))} \partial_x(F)\partial_x \\ &- (-1)^{\tilde{F}} \frac{(1+2\lambda)}{(2-(\mu-\lambda))(3-2(\mu-\lambda))} \partial_x\overline{D}(F)\overline{D} \\ &+ \frac{\lambda(1+2\lambda)}{(2-(\mu-\lambda))(3-2(\mu-\lambda))} \partial_x^2(F), \ \forall \delta \notin \left\{2, \frac{3}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Ces formules s'obtiennent en particularisant les formules données dans la proposition 2.7.1 et 2.7.2.

Chapitre 3

Quantification $\mathfrak{spo}(2|2)-$équivariante sur $S^{1|2}$

Dans ce chapitre, nous allons construire la quantification $\mathfrak{spo}(2|2)-$équivariante sur $S^{1|2}$. Les résultats de cette quantification ont été donnés jusqu'à l'ordre deux dans la thèse de Najla Mellouli [11] et ces résultats ont été l'objet d'une publication dans [30]. Pour ce qui nous concerne, nous allons étendre ces résultats pour les symboles d'ordre arbitraire et les résultats de cette extension ont été également l'objet d'une publication dans [29]. Nous utilisons la même technique comme celle utilisée sur $S^{1|1}$: nous donnons une formule explicite pour l'opérateur γ et pour les opérateurs de Casimir, qui nous permettent de construire la quantification équivariante. Cependant, pour permettre que le texte soit complet, nous reproduisons les résultats connus dans [11, 30]. Nous allons d'abord particulariser les définitions générales présentées dans le premier chapitre et utiliserons également à certains endroits, les notations de N. Mellouli.

3.1 Superfonctions et champs de vecteurs sur $S^{1|2}$

Pour décrire le supercercle $S^{1|2}$, nous utilisons la technique qu'on peut trouver dans [30, 11, 29]. Il s'agit de la description donnée au chapitre premier, où il n'y a qu'une variable paire et deux variables impaires. Un élément de $C^\infty(S^{1|2})$ prend la forme suivante :

$$f(x,\theta_1,\theta_2) = f_0(x) + \theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x) + \theta_1\theta_2 f_{12}(x),$$

où x est la coordonnée habituelle sur S^1, θ_1, θ_2 sont les coordonnées impaires et f_0, f_{12}, f_1, f_2 sont des fonctions C^∞ sur S^1.

On définit la parité d'un élément homogène $f \in C^\infty(S^{1|2})$ qu'on note par $\tilde{f}$ en posant $\tilde{x} = 0$ et $\tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_2 = 1$.

La définition génerale 1.1 des champs de vecteurs se particularise sur $S^{1|2}$ en notant un champ de vecteurs X par

$$X = f\partial_x + g_1\partial_{\theta_1} + g_2\partial_{\theta_2},$$

où $f, g_1, g_2 \in C^\infty(S^{1|2})$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ et $\partial_{\theta_i} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}$, pour $i = 1, 2$. L'espace des champs de vecteurs sur $S^{1|2}$ muni du crochet de Lie est une superalgèbre de Lie qu'on note par $\mathrm{Vect}(S^{1|2})$.

3.2 La superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2|2)$

La superagèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2|2)$ peut être plongée dans la superalgèbre de Lie projective $\mathfrak{pgl}(2|2)$ et se trouve dans l'intersection de la superalgèbre de Lie projective $\mathfrak{pgl}(2|2)$ et la superalgèbre de Lie des champs de vecteurs de contact sur $S^{1|2}$. Dans cette section, nous allons expliquer la superalgèbre de Lie des champs de vecteurs de contact.

3.2.1 La superalgèbre de Lie des champs de vecteurs de contact

La structure de contact standard [30, 11, 29] sur $S^{1|2}$ est définie par le noyau d'une 1-forme de contact

$$\alpha = dx + \theta_1 d\theta_1 + \theta_2 d\theta_2$$

engendrée par les champs de vecteurs impairs suivants :

$$\overline{D}_1 = \partial_{\theta_1} - \theta_1\partial_x, \quad \overline{D}_2 = \partial_{\theta_2} - \theta_2\partial_x.$$

On peut trouver les champs de vecteurs sur $S^{1|2}$ (au sens de la formule (1.7.4)) qui respectent cette structure de contact. Ainsi on a la définition qui suit.

Définition 3.2.1. *Un champs de vecteurs $X \in \mathrm{Vect}(S^{1|2})$ préserve la structure de contact sur $S^{1|2}$ s'il vérifie les relations suivantes :*

$$[X, \overline{D}_1] = \psi_X\overline{D}_1 + \psi'_X\overline{D}_2, \quad [X, \overline{D}_2] = \varphi_X\overline{D}_1 + \varphi'_X\overline{D}_2$$

où $\psi_X, \psi'_X, \varphi_X, \varphi'_X$ sont des superfonctions sur $S^{1|2}$ qui dépendent de X.

Grâce à la proposition 1.7.5 on peut voir que tout champ de vecteurs de contact sur $(S^{1|2})$ prend la forme suivante

$$X_f = f\partial_x - (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\left(\bar{D}_1(f)\bar{D}_1 + \bar{D}_2(f)\bar{D}_2\right).$$

L'espace de tous les champs de vecteurs de contact sur $S^{1|2}$ est muni d'une structure de superalgèbre de Lie qu'on note par $K(2)$ [1].
En considérant des fonctions quadratiques au plus, c'est à dire des combinaisons linéaires de $\{1, x, \theta_1, \theta_2, x^2, x\theta_1, x\theta_2, \theta_1\theta_2\}$, nous obtenons via la correspondance $f \mapsto X_f$ une sous-superalgèbre de Lie de $K(2)$ que nous notons par $\mathfrak{spo}(2|2)$. La sous-superalgèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs de contact $\{X_x, X_1, X_{\theta_1\theta_2}, X_{\theta_1}, X_{\theta_2}\}$ sera appelée *affine* et notée $\mathrm{Aff}(2|2)$.

La superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2|2)$ peut être obtenue également par le plongement projectif (voir section 1.8) dans la superalgèbre de Lie projective $\mathfrak{pgl}(2|2)$. Pour cela on pose $l = 0$ et $n = 2$ dans les formules de la section 1.8.

Ainsi la superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2|2)$ est l'intersection de la superalgèbre de Lie de contact $K(2)$ et de la superalgèbre de Lie projective $\mathfrak{pgl}(2|2)$.
Vu la définition de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2|2)$, on obtient directement une base de cette superalgèbre donnée par $\{X_x, X_{x^2}, X_1, X_{\theta_1\theta_2}, X_{x\theta_1}, X_{x\theta_2}, X_{\theta_1}, X_{\theta_2}\}$.

3.3 Module des densités de poids λ sur $S^{1|2}$

La définition de l'espace $\mathcal{F}_\lambda(S^{1|2})$ des λ-densités de contact sur $S^{1|2}$ est une particularisation de la définition 1.9.2. Nous notons formellement l'espace des λ-densités de contact sur $S^{1|2}$ par

$$\mathcal{F}_\lambda(S^{1|2}) = \{f(x, \theta_1, \theta_2)\alpha^\lambda : f(x, \theta_1, \theta_2) \in C^\infty(S^{1|2})\}.$$

et l'action (1.27) de $\mathfrak{spo}(2|2)$ sur $\mathcal{F}_\lambda(S^{1|2})$ s'écrit

$$L^\lambda_{X_f}(g\alpha^\lambda) := (X_f(g) + \lambda f'g)\alpha^\lambda, \tag{3.1}$$

avec $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$.

1. La notation classique $K(2)$ est utilisée à la place de la notation $K(1|2)$ donnée au premier chapitre.

La formule explicite du crochet de Lagrange sur $C^\infty(S^{1|2})$ devient

$$\{f,g\} = fg' - f'g - (-1)^{\tilde{f}}\,\tfrac{1}{2}\left(\overline{D}_1\,(f)\,\overline{D}_1\,(g) + \overline{D}_2\,(f)\,\overline{D}_2\,(g)\right), \tag{3.2}$$

où $f' = \partial_x(f)$ et $(C^\infty(S^{1|2}), \{-,-\})$ aquiert une structure de superalgèbre de Lie.

Comme nous l'avons signalé sur $S^{1|1}$, les espaces vectoriels $\mathcal{F}_\lambda(S^{1|2})$ et $C^\infty(S^{1|2})$ sont bien sûr isomorphes. La correspondance étant donnée par $g\alpha^\lambda \mapsto g$, la présence du facteur α^λ n'est également utile que pour rappeler que nous considérons une représentation dépendant du poids λ. Ce facteur sera également omis dans nos calculs dès que cela ne risque pas de prêter à confusion.

3.4 Opérateurs différentiels et symboles sur $S^{1|2}$

Nous particularisons également sur $S^{1|2}$, la formule (1.34). Si A est un opérateur différentiel d'ordre k sur $S^{1|2}$ alors il peut s'écrire en coordonnées sous la forme suivante [30, 11, 29] :

$$A = \sum_{l+\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\leq k} a_{l,m,n}\,(\partial_x)^l\,\overline{D}_1^m\overline{D}_2^n, \tag{3.3}$$

où $a_{l,m,n} \in C^\infty(S^{1|2})$ pour tous l,m,n. Comme $\overline{D}_1^2 = \overline{D}_2^2 = -\partial_x$, on peut supposer que $m \leqslant 1, n \leqslant 1$.
Explicitement, on note en coordonnées :

$$\begin{aligned}\forall k\in\mathbb{N},\quad A = {} & a_{k,1}\partial_x^k + a_{k,2}\partial_x^{k-1}\overline{D}_1\overline{D}_2 + a_{k-\frac{1}{2},1}\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_1 + a_{k-\frac{1}{2},2}\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_2 \\ & + \ldots + a_{1,1}\partial_x + a_{1,2}\overline{D}_1\overline{D}_2 + a_{\frac{1}{2},1}\overline{D}_1 + a_{\frac{1}{2},2}\overline{D}_2 + a_{0,1}\mathrm{id}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\forall k\in\frac{1}{2}+\mathbb{N},\quad A = {} & a_{k,1}\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_1 + a_{k,2}\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_2 + a_{k-\frac{1}{2},1}\partial_x^{k-\frac{1}{2}} + a_{k,2}\partial_x^{k-\frac{3}{2}}\overline{D}_1\overline{D}_2 \\ & + \ldots + a_{\frac{1}{2},1}\overline{D}_1 + a_{\frac{1}{2},2}\overline{D}_2 + a_{0,1}\mathrm{id}.\end{aligned}$$

Si on note par $\mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(S^{1|2})$ (ou $\mathcal{D}^k_{\lambda\mu}$ s'il n'y a pas confusion possible) l'espace des opérateurs différentiels d'ordre au plus égal k sur $S^{1|2}$, alors on écrira par $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(S^{1|2})$ l'union de tous les espaces $\mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(S^{1|2})$ et on a :

$$\mathcal{D}_{\lambda\mu}(S^{1|2}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}\cup\frac{1}{2}+\mathbb{N}} \mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(S^{1|2}).$$

Puisque $\mathcal{D}^l_{\lambda\mu}(S^{1|2}) \subset \mathcal{D}^{l+\frac{1}{2}}_{\lambda\mu}(S^{1|2})$, alors l'espace $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(S^{1|2})$ est muni d'une filtration suivante appelée *filtration fine* :

$$\mathcal{D}^0_{\lambda\mu}(S^{1|2}) \subset \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{\lambda\mu}(S^{1|2}) \subset \mathcal{D}^1_{\lambda\mu}(S^{1|2}) \subset \ldots \subset \mathcal{D}^{l-\frac{1}{2}}_{\lambda\mu}(S^{1|2}) \subset \mathcal{D}^l_{\lambda\mu}(S^{1|2}) \subset \ldots.$$

On précise que l'espace $\mathcal{D}^0_{\lambda\mu}(S^{1|2})$ représente les opérateurs qui consistent à multiplier par des $(\mu-\lambda)-$densités.
L'espace $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(S^{1|2})$ est muni d'une structure de $K(2)$-module définie par la dérivée de Lie dans la direction de X_f notée $\mathcal{L}_{X_f}$ comme suit :

$$\forall A \in \mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(S^{1|2}), \quad \mathcal{L}^{\lambda\mu}_{X_f} A = L^\mu_{X_f} \circ A - (-1)^{\tilde{f}\tilde{A}} A \circ L^\lambda_{X_f}.$$

On a vu dans la proposition 1.9.14 que l'action de $K(2)$ préserve la filtration de $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(S^{1|2})$.

On peut maintenant définir l'espace des symboles associés à celui des opérateurs différentiels sur $S^{1|2}$.

Définition 3.4.1. *On appelle espace des symboles associé à l'espace des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(S^{1|2})$ et on note $\mathcal{S}_\delta(S^{1|2})$, $\delta = \mu - \lambda$ l'espace gradué suivant*

$$\mathcal{S}_\delta(S^{1|2}) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}\cup\frac{1}{2}+\mathbb{N}} \mathcal{S}^k_\delta(S^{1|2}),$$

tel que $\mathcal{S}^k_\delta(S^{1|2}) := \mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(S^{1|2})/\mathcal{D}^{k-\frac{1}{2}}_{\lambda\mu}(S^{1|2})$ pour tout $k \in \mathbb{N}\cup\frac{1}{2}+\mathbb{N}$.

L'opération de passage au symbole principal est une application notée σ définie sur l'espace des opérateurs différentiels telle que sa restriction sur $\mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(S^{1|2})$ est donnée par

$$\sigma_k : \mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(S^{1|2}) \to \mathcal{S}^k_\delta(S^{1|2}) : A \mapsto [A].$$

Puisque l'action de $K(2)$ préserve la filtration fine sur $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(S^{1|2})$, la structure de $K(2)$-module sur $\mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(S^{1|2})$ induit une structure de $K(2)$-module sur $\mathcal{S}^k_\delta(S^{1|2})$: la dérivée de Lie $L^\delta_{X_f}$ d'un symbole $[A]$ dans la direction de X_f s'écrit

$$L^\delta_{X_f}[A] := [\mathcal{L}^{\lambda\mu}_{X_f} A].$$

Nous pouvons alors définir des identifications entre les espaces vectoriels $\mathcal{S}^k_\delta$ et $\mathcal{F}_{\delta'} \times \mathcal{F}_{\delta'}$ de la manière suivante :

Proposition 3.4.2 ([11, Chapitre 2] et [30]). *On a un isomorphisme de superespaces vectoriels entre $\mathcal{S}^k_\delta(S^{1|2})$ et $\mathcal{F}_{\delta'} \times \mathcal{F}_{\delta'}$ avec $\delta' = \delta - k$ donné par*

$$[F_1\partial_x^k + F_2\partial_x^{k-1}\bar{D}_1\bar{D}_2] \mapsto (F_1, F_2) \tag{3.4}$$

si $k \in \mathbb{N}$ et par

$$[F_1\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}_1 + F_2\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}_2] \mapsto (F_1, F_2) \tag{3.5}$$

si $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$.

Via l'isomorphisme ci-dessus, la structure de $K(2)$-module sur $\mathcal{S}^k_\delta(S^{1|2})$ induit une structure de $K(2)$-module sur $\mathcal{F}_{\delta'} \times \mathcal{F}_{\delta'}$.

Nous allons d'abord rappeler ces formules dans le lemme suivant.

Lemme 3.4.3. *Si $k \in \mathbb{N}$ et $X_f \in \mathfrak{spo}(2|2)$, alors*

$$[X_f, \partial_x^k] = -kf'\partial_x^k + k\frac{(-1)^{\tilde{f}}}{2}(\bar{D}_1(f')\partial_x^{k-1}\bar{D}_1 + \bar{D}_2(f')\partial_x^{k-1}\bar{D}_2) - \frac{k(k-1)}{2}f''\partial_x^{k-1};$$

$$[X_f, \bar{D}_1] = -\frac{1}{2}f'\bar{D}_1 + \frac{1}{2}\bar{D}_1\bar{D}_2(f)\bar{D}_2;$$

$$[X_f, \bar{D}_2] = -\frac{1}{2}f'\bar{D}_2 - \frac{1}{2}\bar{D}_1\bar{D}_2(f)\bar{D}_1;$$

et

$$[\partial_x^k, f] = kf'\partial_x^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}f''\partial_x^{k-2}.$$

Démonstration. La première formule peut être démontrée par induction. Si $k = 1$, la formule est facile à obtenir : c'est-à-dire à partir de l'expression de X_f

$$[X_f, \partial_x] = -f'\partial_x + \frac{(-1)^{\tilde{f}}}{2}(\bar{D}_1(f')\bar{D}_1 + \bar{D}_2(f')\bar{D}_2).$$

Si de plus on suppose que la formule est vraie pour un certain k et comme l'on a

$$\begin{aligned}[X_f, \partial_x^{k+1}] &= [X_f, \partial_x\partial_x^k] \\ &= [X_f, \partial_x]\partial_x^k + \partial_x[X_f, \partial_x^k],\end{aligned}$$

on obtient

$$[X_f, \partial_x^{k+1}] = \left(-f'\partial_x + \frac{(-1)^{\tilde{f}}}{2}(\bar{D}_1(f')\bar{D}_1 + \bar{D}_2(f')\bar{D}_2)\right)\partial_x^k$$
$$+ \partial_x\left(-kf'\partial_x^k + k\frac{(-1)^{\tilde{f}}}{2}(\bar{D}_1(f')\partial_x^{k-1}\bar{D}_1 + \bar{D}_2(f')\partial_x^{k-1}\bar{D}_2) - \frac{k(k-1)}{2}f''\partial_x^{k-1}\right).$$

Le développement de ces formules montre bien qu'on obtient

$$[X_f, \partial_x^{k+1}] = -(k+1)f'\partial_x^{k+1} + (k+1)\frac{(-1)^{\tilde{f}}}{2}\left(\bar{D}_1(f')\partial_x^k\bar{D}_1 + \bar{D}_2(f')\partial_x^k\bar{D}_2\right) - \frac{k(k+1)}{2}f''\partial_x^k.$$

Donc la formule annoncée est aussi vraie pour $k+1$.
Les formules de $[X_f, \bar{D}_1]$ et $[X_f, \bar{D}_2]$ sont obtenues facilement par calcul.
La dernière formule quant à elle peut être aussi démontrée par induction. Pour $k = 1$, la formule est évidente. On suppose que la formule est vraie pour un certain k. Si la formule est vraie pour k,

$$\begin{aligned} [\partial_x^{k+1}, f] = [\partial_x\partial_x^k, f] &= \partial_x[\partial_x^k, f] + [\partial_x, f]\partial_x^k \\ &= \partial_x\left(kf'\partial_x^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}f''\partial_x^{k-2}\right) + f'\partial_x^k. \end{aligned}$$

Donc on a $[\partial_x^{k+1}, f] = (k+1)f'\partial_x^k + \frac{k(k+1)}{2}f''\partial_x^{k-1}$. La formule annoncée montre qu'elle est aussi vraie pour $k+1$. □

Les résultats donnés dans la proposition suivante sont connus dans la thèse de N. Mellouli [11, Chapitre 2] et dans [30]. Ils sont importants dans le calcul de l'opérateur γ. Nous allons les reproduire ainsi que leurs preuves.

Proposition 3.4.4. *Si un symbole de degré k est représenté par une paire de densités (F_1, F_2), alors l'action de $K(2)$ sur $\mathcal{S}_\delta^k(S^{1|2})$ notée par $L_{X_f}(F_1, F_2)$ correspond*

1. *à la paire*
$$\left(L_{X_f}^{\delta-k}F_1, L_{X_f}^{\delta-k}F_2\right) \quad \textit{pour tout} \quad k \in \mathbb{N};$$

2. *à la paire*
$$\left(L_{X_f}^{\delta-k}F_1 - \frac{1}{2}\bar{D}_1\bar{D}_2(f)F_2, L_{X_f}^{\delta-k}F_2 + \frac{1}{2}\bar{D}_1\bar{D}_2(f)F_1\right) \quad \textit{pour tout} \quad k \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}.$$

Démonstration. On sait que l'action d'un champ de vecteurs de contact sur un symbole S d'ordre k qui s'écrit $[D]$ avec $D \in \mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(S^{1|2})$ est donnée par la formule

$$[\mathcal{L}^{\lambda\mu}_{X_f}(D)] = [L^{\mu}_{X_f} \circ D - (-1)^{\tilde{f}\tilde{D}}(D \circ L^{\lambda}_{X_f})].$$

Si $k \in \mathbb{N}$ et si $S = [D] = [F_1\partial_x^k + F_2\partial_x^{k-1}\overline{D}_1\overline{D}_2]$, nous avons

$$L^{\delta}_{X_f}(S) = [L^{\mu}_{X_f}\circ(F_1\partial_x^k+F_2\partial_x^{k-1}\overline{D}_1\overline{D}_2)-(-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}(F_1\partial_x^k+F_2\partial_x^{k-1}\overline{D}_1\overline{D}_2)\circ L^{\lambda}_{X_f}], \quad \text{où} \quad \tilde{F} = \tilde{F}_1 = \tilde{F}_2. \tag{3.6}$$

Nous ne devons considérer que les termes de degré k de l'expression à l'intérieur du crochet. Cette égalité peut s'écrire également comme :

$$[X_f, F_1\partial_x^k] + [X_f, F_2\partial_x^{k-1}\overline{D}_1\overline{D}_2] + \delta f'(F_1\partial_x^k + F_2\partial_x^{k-1}\overline{D}_1\overline{D}_2), \quad \delta = \mu - \lambda. \tag{3.7}$$

Ici la notation $[-,-]$ représente le supercommutateur. On peut voir que la somme des termes de plus haut degré (c'est-à-dire égal k) du premier terme s'écrit :

$$f\partial_x F_1\partial_x^k - (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\overline{D}_1(f)\overline{D}_1(F_1)\partial_x^k - (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\overline{D}_2(f)\overline{D}_2(F_1)\partial_x^k - (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}kF_1f'\partial_x^k,$$

tandis que la somme des termes de plus haut degré du deuxième terme s'écrit :

$$\begin{aligned} &f\partial_x F_2\partial_x^{k-1}\overline{D}_2\overline{D}_2 - (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\overline{D}_1(f)\overline{D}_1(F_2)\partial_x^{k-1}\overline{D}_1\overline{D}_2 \\ &\qquad - (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\overline{D}_2(f)\overline{D}_2(F_2)\partial_x^{k-1}\overline{D}_1\overline{D}_2 - (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}kF_2f'\partial_x^{k-1}\overline{D}_1\overline{D}_2. \end{aligned}$$

En résumé, la somme de tous les termes de plus haut degré dans (3.6) est égale à

$$\begin{aligned} &\left(f\partial_x F_1 - (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}(\overline{D}_1(f)\overline{D}_1 + \overline{D}_2(f)\overline{D}_2)F_1 + (\delta-k)f'F_1\right)\partial_x^k \\ &\qquad + \left(f\partial_x F_2 - (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}(\overline{D}_1(f)\overline{D}_1 + \overline{D}_2(f)\overline{D}_2)F_2 + (\delta-k)f'F_2\right)\partial_x^{k-1}\overline{D}_1\overline{D}_2 \end{aligned}$$

Donc au symbole

$$[L^{\mu}_{X_f} \circ (F_1\partial_x^k + F_2\partial_x^{k-1}\overline{D}_1\overline{D}_2) - (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}(F_1\partial_x^k + F_2\partial_x^{k-1}\overline{D}_1\overline{D}_2) \circ L^{\lambda}_{X_f}]$$

correspond le couple de $(\delta-k)$-densités suivant

$$((X_f + (\delta-k)f')F_1, (X_f + (\delta-k)f')F_2)\,.$$

Si $k \in \frac{1}{2}+\mathbb{N}$ et si $S=[D]$ avec $D \in \mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(S^{1|2})$ on a le même type de calculs. Nous avons donc

$$[L^\delta_{X_f}(S)] = [L^\mu_{X_f}(F_1\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_1+F_2\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_2)-(-1)^{\tilde{f}\tilde{F}+\tilde{f}}(F_1\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_1+F_2\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_2)L^\lambda_{X_f}], \quad (3.8)$$

où $\tilde{F}=\tilde{F}_1=\tilde{F}_2$. En négligeant les termes d'ordre strictement inférieur à k dans (3.8), nous avons donc

$$L^\delta_{X_f}(S) = [X_f, F_1\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_1] + [X_f, F_2\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_2] + \delta f'(F_1\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_2 + F_2\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_2), \quad \delta = \mu - \lambda. \quad (3.9)$$

La somme des termes de plus haut ordre (c'est-à-dire égale k) du premier terme de l'égalité (3.9) s'écrit :

$$\begin{aligned} &f\partial_x F_1\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_1 - (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\overline{D}_1(f)\overline{D}_1(F_1)\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_1 \\ &- (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\overline{D}_2(f)\overline{D}_2(F_1)\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_1 - (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}kF_1f'\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_1 + (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}\frac{1}{2}F_1\overline{D}_1\overline{D}_2(f)\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_2, \end{aligned}$$

tandis que la somme des termes de plus haut ordre du deuxième terme de (3.9) s'écrit :

$$\begin{aligned} &f\partial_x F_2\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_2 - (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\overline{D}_1(f)\overline{D}_1(F_2)\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_2 \\ &- (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}\overline{D}_2(f)\overline{D}_2(F_1)\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_2 - (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}kF_2f'\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_2 + (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}\frac{1}{2}F_2\overline{D}_2\overline{D}_1(f)\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_1. \end{aligned}$$

La somme de tous les termes de plus haut ordre dans (3.9) est égale à

$$\begin{aligned} &\left(f\partial_x F_1 - (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}(\overline{D}_1(f)\overline{D}_1 + \overline{D}_2(f)\overline{D}_2)F_1 + (\delta-k)f'F_1\right)\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_1 - \frac{1}{2}\overline{D}_1\overline{D}_2(f)F_2\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_1 \\ +&\left(f\partial_x F_2 - (-1)^{\tilde{f}}\frac{1}{2}(\overline{D}_1(f)\overline{D}_1 + \overline{D}_2(f)\overline{D}_2)F_2 + (\delta-k)f'F_2\right)\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_2 + \frac{1}{2}\overline{D}_1\overline{D}_2(f)F_1\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_2, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\{(X_f + (\delta-k)f')F_1\}\,\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_1 - \frac{1}{2}\overline{D}_1\overline{D}_2(f)F_2\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_1 \\ &\qquad + \{(X_f + (\delta-k)f')F_2\}\,\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_2 + \frac{1}{2}\overline{D}_1\overline{D}_2(f)F_1\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\overline{D}_2. \end{aligned}$$

L'isomorphisme (3.5) nous permet de conclure. □

Remarque 3.4.5. *Il est clair que si $k \in \mathbb{N}$ on a la structure de module canonique sur $\mathcal{F}_{\delta'} \times \mathcal{F}_{\delta'}$ tandis qu'elle ne l'est pas si $k \in \frac{1}{2}+\mathbb{N}$.*

3.5 Outils de la quantification équivariante

Nous utilisons comme pour $S^{1|1}$ les mêmes outils (tirés dans [28]) pour étudier la quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante sur $S^{1|2}$. Les concepts sont les mêmes que sur $S^{1|1}$, mais les calculs sont plus délicats à cause de la présence de deux variables impaires.

3.5.1 Application de quantification affine

Nous notons par $\mathrm{Aff}(2|2)$ la sous-superalgèbre de $\mathfrak{spo}(2|2)$ engendrée par les champs de vecteurs de contact constants et linéaires. La définition générale 1.10.3 de la quantification affine se particularise sur $S^{1|2}$ comme suit :

Définition 3.5.1. *On appelle quantification affine et on note Q_{Aff}, la bijection linéaire entre les espaces $\mathcal{S}_\delta(S^{1|2})$ et $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(S^{1|2})$ définie comme suit, pour $(F_1, F_2) \in \mathcal{F}_{\delta-k} \times \mathcal{F}_{\delta-k} \cong \mathcal{S}_\delta^k(S^{1|2})$:*

$$Q_{\mathrm{Aff}}|_{\mathcal{S}_\delta^k}(F_1, F_2) = \begin{cases} F_1 \partial_x^k + F_2 \partial_x^{k-1} \bar{D}_1 \bar{D}_2, & si\ k \in \mathbb{N}, \\ F_1 \partial_x^{k-\frac{1}{2}} \bar{D}_1 + F_2 \partial_x^{k-\frac{1}{2}} \bar{D}_2, & si\ k \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}. \end{cases}$$

L'application Q_{Aff} nous permet de transporter la structure de $\mathrm{Vect}(S^{1|2})$-module de $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(S^{1|2})$ sur l'espace $\mathcal{S}_\delta(S^{1|2})$, en définissant une dérivée de Lie $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{S}_\delta(S^{1|2})$ par :

$$\mathcal{L}_X := Q_{\mathrm{Aff}}^{-1} \circ \mathcal{L}_X^{\lambda\mu} \circ Q_{\mathrm{Aff}}$$

pour tout $X \in \mathrm{Vect}(S^{1|2})$.

Comme dans le cas de $S^{1|1}$, l'existence d'une quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante est alors équivalente à l'existence pour tout $k \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, d'un isomorphisme Q entre les représentations $(\mathcal{S}_\delta, L^\delta)$ et $(\mathcal{S}_\delta, \mathcal{L})$ tel que le terme de degré k de $Q(S)$ est égal à S pour tout $S \in \mathcal{S}_\delta^k(S^{1|2})$. Par conséquent, l'application Q ainsi définie est une quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante si et seulement si $Q_{\mathrm{Aff}} \circ Q$ vérifie les conditions de la définition 1.10.1.

3.5.2 L'application γ

Dans le but de mesurer la différence entre les deux représentations $(\mathcal{S}_\delta, L)$ et $(\mathcal{S}_\delta, \mathcal{L})$ de $\mathfrak{spo}(2|2)$, on introduit un opérateur, noté γ.

Définition 3.5.2. *L'opérateur γ est définie de la manière suivante :*

$$\gamma : \mathfrak{spo}(2|2) \to \mathfrak{gl}(\mathcal{S}_\delta, \mathcal{S}_\delta) : X_f \mapsto \gamma(X_f) = \mathcal{L}_{X_f}^{\lambda\mu} - L_{X_f}.$$

Nous pouvons maintenant calculer explicitement γ. Si (F_1, F_2) est un symbole homogène, alors nous avons $\tilde{F_1} = \tilde{F_2}$. Dans tout ce qui suit, nous allons noter ce nombre par $\tilde{F}$.

Proposition 3.5.3. *L'application γ s'annule sur la sous-superalgèbre de Lie* $\mathrm{Aff}\,(2|2)$. *Pour tout $f \in \{x\theta_1, x\theta_2, x^2\}$, l'opérateur $\gamma(X_f)$ applique l'espace $\mathcal{S}_\delta^k$ dans la somme directe $\mathcal{S}_\delta^{k-\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{S}_\delta^{k-1}$. Plus précisément, si $(F_1, F_2) \in \mathcal{S}_\delta^k$ est un symbole homogène, on a*

$$
\begin{aligned}
(Q_{\mathrm{Aff}} \circ \gamma(X_f))(F_1, F_2) = \\
&(-1)^{\tilde{f}} \left((-1)^{\tilde{F}} \frac{k}{2} \bar{D}_1(f')F_1 + (-1)^{\tilde{F}} \left(\frac{k}{2} + \lambda\right) \bar{D}_2(f')F_2 \right) \partial_x^{k-1} \bar{D}_1 \\
&+ (-1)^{\tilde{f}} \left((-1)^{\tilde{F}} \frac{k}{2} \bar{D}_2(f')F_1 - (-1)^{\tilde{F}} \left(\frac{k}{2} + \lambda\right) \bar{D}_1(f')F_2 \right) \partial_x^{k-1} \bar{D}_2 \\
&- k \left(\frac{k-1}{2} + \lambda\right) f'' F_1 \partial_x^{k-1} \\
&- (k-1) \left(\frac{k}{2} + \lambda\right) f'' F_2 \partial_x^{k-2} \bar{D}_1 \bar{D}_2, \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

si $k \in \mathbb{N}$ et

$$
\begin{aligned}
(Q_{\mathrm{Aff}} \circ \gamma(X_f))(F_1, F_2) = \\
&- (-1)^{\tilde{F}+\tilde{f}} \left(\frac{k-\frac{1}{2}}{2} + \lambda\right) \left(\bar{D}_1(f')F_1 + \bar{D}_2(f')F_2\right) \partial_x^{k-\frac{1}{2}} \\
&+ (-1)^{\tilde{f}} \frac{k-\frac{1}{2}}{2} \left((-1)^{\tilde{F}} \bar{D}_1(f')F_2 - (-1)^{\tilde{F}} \bar{D}_2(f')F_1\right) \partial_x^{k-\frac{3}{2}} \bar{D}_1 \bar{D}_2 \\
&+ \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(\left(\frac{-k+\frac{1}{2}}{2} - \lambda\right) f'' F_1 \right) \partial_x^{k-\frac{3}{2}} \bar{D}_1 \\
&+ \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(\left(\frac{-k+\frac{1}{2}}{2} - \lambda\right) f'' F_2 \right) \partial_x^{k-\frac{3}{2}} \bar{D}_2. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

si $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$.

Démonstration. Par définition de γ, nous avons

$$(Q_{\mathrm{Aff}} \circ \gamma(X_f))(F_1, F_2) = \mathcal{L}_{X_f}^{\lambda\mu}(Q_{\mathrm{Aff}}(F_1, F_2)) - Q_{\mathrm{Aff}}(L_{X_f}^{\delta-k}(F_1, F_2)).$$

Nous pouvons écrire matriciellement $Q_{\mathrm{Aff}}(F_1, F_2)$ comme suit :

$$Q_{\mathrm{Aff}}(F_1, F_2) = (F_1, F_2) \begin{pmatrix} \partial_x^k \\ \partial_x^{k-1} \overline{D}_1 \overline{D}_2 \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, nous appelons D le vecteur colonne suivant

$$D = \begin{pmatrix} \partial_x^k \\ \partial_x^{k-1}\bar{D}_1\bar{D}_2 \end{pmatrix}.$$

L'expression $\mathcal{L}^{\lambda\mu}_{X_f}(Q_{\mathrm{Aff}}(F_1,F_2))$ s'écrit alors

$$(X_f+\mu f')((F_1,F_2)D) - (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}(F_1,F_2)D(X_f+\lambda f'),$$

ou encore

$$(X_f(F_1),X_f(F_2))D + (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}(F_1,F_2)[X_f,D] + (\mu-\lambda)f'(F_1,F_2)D \\ - (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}\lambda(F_1,F_2)[D,f'].$$

Grâce aux formules établies dans le Lemme 3.4.3, on voit que $[X_f,D]$ est égal à

$$\begin{pmatrix} -kf'\partial_x^k + \frac{k}{2}(-1)^{\tilde{f}}(\bar{D}_1(f')\partial_x^{k-1}\bar{D}_1 + \bar{D}_2(f')\partial_x^{k-1}\bar{D}_2) \\ -kf'\partial_x^{k-1}\bar{D}_1\bar{D}_2 + \frac{k}{2}(-1)^{\tilde{f}}(\bar{D}_2(f')\partial_x^{k-1}\bar{D}_1 - \bar{D}_1(f')\partial_x^{k-1}\bar{D}_2) \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} -\frac{k(k-1)}{2}f''\partial_x^{k-1} \\ -\frac{k(k-1)}{2}f''\partial_x^{k-2}\bar{D}_1\bar{D}_2 \end{pmatrix},$$

tandis que $[D,f']$ est égal à

$$\begin{pmatrix} kf''\partial_x^{k-1} \\ (-1)^{\tilde{f}+1}(\bar{D}_2f')\partial_x^{k-1}\bar{D}_1 + (-1)^{\tilde{f}}(\bar{D}_1f')\partial_x^{k-1}\bar{D}_2 + (k-1)f''\partial_x^{k-2}\bar{D}_1\bar{D}_2 \end{pmatrix}.$$

La somme des termes $(X_f(F_1),X_f(F_2))D$, $(\mu-\lambda)f'(F_1,F_2)D$ et

$$(-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}(F_1,F_2)\begin{pmatrix} -kf'\partial_x^k \\ -kf'\partial_x^{k-1}\bar{D}_1\bar{D}_2 \end{pmatrix}$$

est égale à $Q_{\mathrm{Aff}}(L^{\delta-k}_{X_f}(F_1,F_2))$. On obtient facilement l'expression de $Q_{\mathrm{Aff}}(\gamma(X_f)(F_1,F_2))$ en sommant les termes qui restent.

Si $k\in\frac{1}{2}+\mathbb{N}$, on exprime également $Q_{\mathrm{Aff}}(F_1,F_2)$ sous forme matricielle comme suit :

$$Q_{\mathrm{Aff}}(F_1,F_2) = (F_1,F_2)\begin{pmatrix} \partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}_1 \\ \partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}_2 \end{pmatrix}.$$

On note par D le vecteur colonne

$$D = \begin{pmatrix} \partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}_1 \\ \partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}_2 \end{pmatrix}.$$

Par définition, l'expression $\mathcal{L}_{X_f}^{\lambda\mu}(Q_{\mathrm{Aff}}(F_1, F_2))$ est égale à

$$(X_f + \mu f')((F_1, F_2)D) - (-1)^{\tilde{f}(\tilde{F}+1)}(F_1, F_2)D(X_f + \lambda f'),$$

c'est-à-dire

$$(X_f(F_1), X_f(F_2))D + (-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}(F_1, F_2)[X_f, D] + (\mu - \lambda)f'(F_1, F_2)D \\ - (-1)^{\tilde{f}(\tilde{F}+1)}\lambda(F_1, F_2)[D, f'].$$

Grâce aux formules établies dans le Lemme 3.4.3, il vient que $[X_f, D]$ est égal à

$$\begin{pmatrix} -kf'\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}_1 + \frac{1}{2}\bar{D}_1\bar{D}_2(f)\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}_2 \\ -kf'\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}_2 - \frac{1}{2}\bar{D}_1\bar{D}_2(f)\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}_1 \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} \frac{k-\frac{1}{2}}{2}(-1)^{\tilde{f}}(\bar{D}_1(f')\partial_x^{k-\frac{1}{2}} + \bar{D}_2(f')\partial_x^{k-\frac{3}{2}}\bar{D}_1\bar{D}_2) + \frac{(k-\frac{1}{2})^2}{2}f''\partial_x^{k-\frac{3}{2}}\bar{D}_1 \\ -\frac{k-\frac{1}{2}}{2}(-1)^{\tilde{f}}(\bar{D}_1(f')\partial_x^{k-\frac{3}{2}}\bar{D}_1\bar{D}_2 - \bar{D}_2(f')\partial_x^{k-\frac{1}{2}}) + \frac{(k-\frac{1}{2})^2}{2}f''\partial_x^{k-\frac{3}{2}}\bar{D}_2 \end{pmatrix},$$

tandis que $[D, f']$ est égal à

$$\begin{pmatrix} (-1)^{\tilde{f}}(k-\frac{1}{2})f''\partial_x^{k-\frac{3}{2}}\bar{D}_1 + \bar{D}_1(f')\partial_x^{k-\frac{1}{2}} \\ (-1)^{\tilde{f}}(k-\frac{1}{2})f''\partial_x^{k-\frac{3}{2}}\bar{D}_2 + \bar{D}_2(f')\partial_x^{k-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

La somme des termes $(X_f(F_1), X_f(F_2))D$, $(\mu - \lambda)f'(F_1, F_2)D$ et

$$(-1)^{\tilde{f}\tilde{F}}(F_1, F_2)\begin{pmatrix} -kf'\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}_1 + \frac{1}{2}\bar{D}_1\bar{D}_2(f)\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}_2 \\ -kf'\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}_2 - \frac{1}{2}\bar{D}_1\bar{D}_2(f)\partial_x^{k-\frac{1}{2}}\bar{D}_1 \end{pmatrix}$$

est égale à $Q_{\mathrm{Aff}}(L_{X_f}^{\delta-k}(F_1, F_2))$. En sommant enfin les termes qui restent, nous obtenons l'expression de $Q_{\mathrm{Aff}}(\gamma(X_f)(F_1, F_2))$. □

Les résultats établis dans la Proposition 3.5.3 peuvent être écrits sous forme matricielle. Si $k \in \mathbb{N}$, la composante de $\gamma(X_f)|_{\mathcal{S}_\delta^k}$ selon $\mathcal{S}_\delta^{k-\frac{1}{2}}$ s'écrit :

$$(-1)^{\tilde{f}+\tilde{F}} \begin{pmatrix} \frac{k}{2}\bar{D}_1(f') & (\frac{k}{2}+\lambda)\bar{D}_2(f') \\ \frac{k}{2}\bar{D}_2(f') & -(\frac{k}{2}+\lambda)\bar{D}_1(f') \end{pmatrix}$$

tandis que la composante selon $\mathcal{S}_\delta^{k-1}$ s'écrit :

$$-f'' \begin{pmatrix} k(\frac{k-1}{2}+\lambda) & 0 \\ 0 & (k-1)(\frac{k}{2}+\lambda) \end{pmatrix}.$$

Si $k \in \frac{1}{2}+\mathbb{N}$, la composante de $\gamma(X_f)|_{\mathcal{S}_\delta^k}$ dans la direction de $\mathcal{S}_\delta^{k-\frac{1}{2}}$ s'écrit :

$$-(-1)^{\tilde{f}+\tilde{F}} \begin{pmatrix} (\frac{k-\frac{1}{2}}{2}+\lambda)\bar{D}_1(f') & (\frac{k-\frac{1}{2}}{2}+\lambda)\bar{D}_2(f') \\ \frac{k-\frac{1}{2}}{2}\bar{D}_2(f') & -(\frac{k-\frac{1}{2}}{2})\bar{D}_1(f') \end{pmatrix}$$

tandis que celle dans la direction de $\mathcal{S}_\delta^{k-1}$ s'écrit :

$$(k-\frac{1}{2})(\frac{-k+\frac{1}{2}}{2}-\lambda)f''\mathrm{Id}.$$

3.5.3 L'opérateur de Casimir

Pour construire la quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante sur $S^{1|2}$, nous allons utiliser la même méthode que pour construire la quantification $\mathfrak{spo}(2|1)$-équivariante sur $S^{1|1}$. Nous allons en effet comparer les opérateurs de Casimir C et $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{spo}(2|2)$ associés aux représentations $(\mathcal{S}_\delta, L_X)$ et $(\mathcal{S}_\delta, \mathcal{L}_X)$.
Les définitions suivantes : Définition1.10.6, Définition1.10.7 et Définition 1.10.8 avec toutes les propriétés et propositions qui en découlent, sont toutes d'application sur $S^{1|2}$ en considérant les représentations $(\mathcal{S}_\delta, L_X)$ et $(\mathcal{S}_\delta, \mathcal{L}_X)$.

En pratique, pour calculer l'opérateur de Casimir de $\mathfrak{spo}(2|2)$, nous aurons besoin du lemme suivant qui est un cas particulier du lemme 1.10.12.

Lemme 3.5.4. *La base K-duale correspondante à la base*

$$\{X_1, X_{\theta_1}, X_{\theta_2}, X_x, X_{\theta_1\theta_2}, X_{x\theta_1}, X_{x\theta_2}, X_{x^2}\}$$

de $\mathfrak{spo}(2|2)$ est donnée par la base

$$\{-\frac{1}{2}X_{x^2}, -X_{x\theta_1}, -X_{x\theta_2}, X_x, X_{\theta_1\theta_2}, X_{\theta_1}, X_{\theta_2}, -\frac{1}{2}X_1\}.$$

Démonstration. La preuve est donnée en toute généralité dans le lemme 1.10.12. □

Nous pouvons donc maintenant calculer l'opérateur de Casimir associé à la représentation $(\mathcal{S}^k_\delta, L)$.

Proposition 3.5.5. *L'opérateur de Casimir associé à la représentation $(\mathcal{S}_\delta, L)$ de $\mathfrak{spo}(2|2)$ est donné par $C|_{\mathcal{S}^k_\delta} = \alpha_{k,\delta}\mathrm{Id}$, avec*

$$\alpha_{k,\delta} = \begin{cases} (-k+\delta)^2, & si\ k \in \mathbb{N}, \\ (-k+\delta)^2 - \frac{1}{4}, & si\ k \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}. \end{cases}$$

Démonstration. Premièrement, nous utilisons la Definition 1.10.8 et le Lemme 3.5.4, pour voir que l'opérateur de Casimir $C|_{\mathcal{S}^k_\delta}$ est égal à

$$-\frac{1}{2}L_{X_{x^2}}L_{X_1} - L_{X_{x\theta_1}}L_{X_{\theta_1}} - L_{X_{x\theta_2}}L_{X_{\theta_2}} + (L_{X_x})^2 + (L_{X_{\theta_1\theta_2}})^2 + L_{X_{\theta_1}}L_{X_{x\theta_1}} \\ + L_{X_{\theta_2}}L_{X_{x\theta_2}} - \frac{1}{2}L_{X_1}L_{X_{x^2}}.$$

Nous avons deux cas :
Si $k \in \mathbb{N}$, grâce à la forme des champs de vecteurs, on peut voir que cet opérateur de Casimir est un opérateur différentiel qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f_0 + f_1\partial_x + f_2\bar{D}_1 + f_3\bar{D}_2 + f_4\partial_x^2 + f_5\partial_x\bar{D}_1 + f_6\partial_x\bar{D}_2 + f_7\bar{D}_1\bar{D}_2,$$

avec $f_i \in C^\infty(S^{1|2})$ pour tout i. Puisque l'opérateur de Casimir est un opérateur qui commute avec le champs de vecteur $X_1 = \partial_x$ et puisque on sait tout court que ∂_x commute avec les champs de vecteurs $\bar{D}_1$ et $\bar{D}_2$, il est clair que les coefficients f_i de l'opérateur de Casimir sont indépendants de la coordonnée x. Puisque l'opérateur de Casimir commute avec les actions des champs de vecteurs $X_{\theta_1} = \frac{1}{2}(\partial_{\theta_1} + \theta_1\partial_x)$ et $X_{\theta_2} = \frac{1}{2}(\partial_{\theta_2} + \theta_2\partial_x)$ et puisque ces champs de vecteurs commutent avec les champs de vecteurs ∂_x, $\bar{D}_1$ et $\bar{D}_2$, alors les coefficients f_i de l'opérateur de Casimir sont invariants sous les actions de X_{θ_1} et X_{θ_2}. Par conséquent ces coefficients f_i sont indépendants des coordonnées θ_1 et θ_2. En bref, l'opérateur $C|_{\mathcal{S}^k_\delta}$ est à coefficients constants. Vu des expressions de la dérivée de Lie et des champs de vecteurs de contact X_{x^2}, $X_{x\theta_1}$, $X_{x\theta_2}$ et $X_{\theta_1\theta_2}$, on ne considère que les termes manifestement constants, les autres devant s'annuler. La contribution des termes $-\frac{1}{2}L_{X_{x^2}}L_{X_1}$, $L_{X_{x\theta_1}}L_{X_{\theta_1}}$, $L_{X_{x\theta_2}}L_{X_{\theta_2}}$ et $(L_{X_{\theta_1\theta_2}})^2$ à l'opérateur de Casimir $C|_{\mathcal{S}^k_\delta}$ est nulle.

On peut remarquer aussi que le terme $-\frac{1}{2}L_{X_1}L_{X_{x^2}}$ a la même contribution que $-\frac{1}{2}L_{[X_1,X_{x^2}]}$. Ce terme a donc la même contribution que le terme

$$-\frac{1}{2}L_{X_{\{1,x^2\}}} = -L_{X_x}.$$

Cela étant, la contribution du terme $-\frac{1}{2}L_{X_1}L_{X_{x^2}}$ est égale à celle de $-L_{X_x}$ qui est égale $-(\delta-k)\mathrm{Id}$.
La contribution du terme $(L_{X_x})^2$ est égale à $(\delta-k)^2\mathrm{Id}$. Les termes $L_{X_{\theta_1}}L_{X_{x\theta_1}}$ et $L_{X_{\theta_2}}L_{X_{x\theta_2}}$ donnent chacun une contribution égale à $\frac{1}{2}(\delta-k)\mathrm{Id}$.
En conclusion, si $k\in\mathbb{N}$, $C|_{\mathcal{S}^k_\delta} = (\delta-k)^2\mathrm{Id}$.

Si $k\in\frac{1}{2}+\mathbb{N}$, on peut voir que la première (resp. 2ème) composante de $C|_{\mathcal{S}^k_\delta}(F_1,F_2)$ peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}(f_0+f_1\partial_x+f_2\bar{D}_1+f_3\bar{D}_2+f_4\partial_x^2+f_5\partial_x\bar{D}_1+f_6\partial_x\bar{D}_2+f_7\bar{D}_1\bar{D}_2)F_1\\ +(g_0+g_1\partial_x+g_2\bar{D}_1+g_3\bar{D}_2)F_2\\ (\text{resp. } (f_0+f_1\partial_x+f_2\bar{D}_1+f_3\bar{D}_2+f_4\partial_x^2+f_5\partial_x\bar{D}_1+f_6\partial_x\bar{D}_2+f_7\bar{D}_1\bar{D}_2)F_2\\ +(g_0+g_1\partial_x+g_2\bar{D}_1+g_3\bar{D}_2)F_1),\end{aligned}$$

avec $f_i,g_i\in C^\infty(S^{1|2})$ pour tout i. De même que dans le cas précédent, grâce au fait que $C|_{\mathcal{S}^k_\delta}$ commute avec les champs de vecteurs X_1, X_{θ_1} et X_{θ_2}, alors on en tire que les coéfficients f_i et g_i sont constants. On peut voir que seul le terme $(L_{X_{\theta_1\theta_2}})^2$ donne une contribution supplémentaire au cas précédent ; et sa contribution est égale à $-\frac{1}{4}\mathrm{Id}$.
Donc on obtient si $k\in\frac{1}{2}+\mathbb{N}, C|_{\mathcal{S}^k_\delta} = ((\delta-k)^2-\frac{1}{4})\mathrm{Id}$. □

Dans le but de mesurer la différence entre les opérateurs de Casimir $\mathcal{C}$ et C, nous allons utiliser la Définition 2.5.6. Ainsi partant de l'expression de γ donnée dans la proposition 3.5.3, nous pouvons calculer l'expression explicite de l'opérateur N. Donc on a la proposition qui suit :

Proposition 3.5.6. *La restriction de l'opérateur N à $\mathcal{S}^k_\delta$ est à valeurs dans la somme directe $\mathcal{S}^{k-\frac{1}{2}}_\delta\oplus\mathcal{S}^{k-1}_\delta$.*

Si $k\in\mathbb{N}$, la composante de $N|_{\mathcal{S}^k_\delta}$ selon $\mathcal{S}^{k-\frac{1}{2}}_\delta$ peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$-(-1)^{\tilde{F}}\begin{pmatrix}\frac{k}{2}\bar{D}_1 & (\frac{k}{2}+\lambda)\bar{D}_2\\ \frac{k}{2}\bar{D}_2 & -(\frac{k}{2}+\lambda)\bar{D}_1\end{pmatrix}$$

tandis que celle $N|_{\mathcal{S}^k_\delta}$ suivant $\mathcal{S}^{k-1}_\delta$ s'écrit

$$2\begin{pmatrix} k(\frac{k-1}{2}+\lambda)\partial_x & 0 \\ 0 & (k-1)(\frac{k}{2}+\lambda)\partial_x \end{pmatrix}.$$

Si $k \in \frac{1}{2}+\mathbb{N}$, la composante de $N|_{\mathcal{S}^k_\delta}$ selon $\mathcal{S}^{k-\frac{1}{2}}_\delta$ est égale à

$$(-1)^{\tilde{F}}\begin{pmatrix} (\frac{k-\frac{1}{2}}{2}+\lambda)\bar{D}_1 & (\frac{k-\frac{1}{2}}{2}+\lambda)\bar{D}_2 \\ \frac{k-\frac{1}{2}}{2}\bar{D}_2 & -\frac{k-\frac{1}{2}}{2}\bar{D}_1 \end{pmatrix}$$

tandis que celle de $N|_{\mathcal{S}^k_\delta}$ suivant $\mathcal{S}^{k-1}_\delta$ est égale à :

$$2(k-\frac{1}{2})(\frac{k-\frac{1}{2}}{2}+\lambda)\begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix}.$$

Démonstration. En utilisant les expressions des opérateurs de Casimir $\mathcal{C}$ et C, de la définition de γ et en sachant que l'on a

$$\gamma(X_1) = \gamma(X_{\theta_1}) = \gamma(X_{\theta_2}) = \gamma(X_{\theta_1\theta_2}) = \gamma(X_x) = 0,$$

nous obtenons immédiatement que

$$\begin{aligned} N = -\frac{1}{2}\gamma(X_{x^2})L_{X_1} - \gamma(X_{x\theta_1})L_{X_{\theta_1}} - \gamma(X_{x\theta_2})L_{X_{\theta_2}} + L_{X_{\theta_1}}\gamma(X_{x\theta_1}) \\ + L_{X_{\theta_2}}\gamma(X_{x\theta_2}) - \frac{1}{2}L_{X_1}\gamma(X_{x^2}). \end{aligned}$$

Premièrement supposons que $k \in \mathbb{N}$. Si nous écrivons également sous forme matricielle les expressions des dérivées de Lie contenues dans l'écriture de N, nous voyons que la composante de $N|_{\mathcal{S}^k_\delta}$ suivant $\mathcal{S}^{k-\frac{1}{2}}_\delta$ est égale à

$$\begin{aligned} 2(-1)^{\tilde{F}}&\begin{pmatrix} \frac{k}{2}\theta_1 & (\frac{k}{2}+\lambda)\theta_2 \\ \frac{k}{2}\theta_2 & -(\frac{k}{2}+\lambda)\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix} \\ &- (-1)^{\tilde{F}}\begin{pmatrix} \frac{k}{2} & 0 \\ 0 & -(\frac{k}{2}+\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_{\theta_1}+\theta_1\partial_x & 0 \\ 0 & \partial_{\theta_1}+\theta_1\partial_x \end{pmatrix} \\ &- (-1)^{\tilde{F}}\begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2}+\lambda \\ \frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_{\theta_2}+\theta_2\partial_x & 0 \\ 0 & \partial_{\theta_2}+\theta_2\partial_x \end{pmatrix} \\ &= -(-1)^{\tilde{F}}\begin{pmatrix} \frac{k}{2}\bar{D}_1 & (\frac{k}{2}+\lambda)\bar{D}_2 \\ \frac{k}{2}\bar{D}_2 & -(\frac{k}{2}+\lambda)\bar{D}_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ensuite, la composante de $N|_{\mathcal{S}_\delta^k}$ suivant $\mathcal{S}_\delta^{k-1}$ est égale à

$$2\begin{pmatrix} k(\frac{k-1}{2}+\lambda) & 0 \\ 0 & (k-1)(\frac{k}{2}+\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix}.$$

Dans le cas où $k \in \mathbb{N}+\frac{1}{2}$, des calculs similaires montrent que l'expression de $N|_{\mathcal{S}_\delta^k}$ donnée dans l'énoncé de la proposition est également correcte. □

3.6 Construction de la quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante

3.6.1 Valeurs critiques

Nous commençons par définir les valeurs critiques de cette quantification. Il s'agit d'un ensemble de valeurs de δ en dehors duquel cette quantification équivariante existe et est unique.

Définition 3.6.1. *Une valeur de δ est dite* critique *s'il existe $k, l \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ avec $l < k$ telle que $\alpha_{k,\delta} = \alpha_{l,\delta}$.*

On a directement la proposition suivante :

Proposition 3.6.2. *L'ensemble des valeurs critiques de δ est donné par*

$$\mathfrak{C}_{\text{Crit}} = \left\{\frac{k+l}{2} : k,l \in \mathbb{N}, \quad l < k\right\} \cup \left\{\frac{k^2-l^2+\frac{1}{4}}{2(k-l)} : k \in \mathbb{N}, \quad l \in \frac{1}{2}+\mathbb{N}; \quad l < k\right\}$$
$$\cup \left\{\frac{k^2-l^2-\frac{1}{4}}{2(k-l)} : l \in \mathbb{N}, k \in \frac{1}{2}+\mathbb{N}; \quad l < k\right\}. \quad (3.12)$$

Démonstration. L'ensemble des δ vérifiant l'équation de la forme

$$\alpha_{k,\delta} = \alpha_{l,\delta}$$

pour $k, l \in \mathbb{N}$ ou $k, l \in \frac{1}{2}+\mathbb{N}$, est égal à l'ensemble $\mathfrak{C}_{\text{Crit}}$ indiqué dans la proposition. □

3.6.2 La construction

Le résultat principal de ce chapitre est donné par le théorème qui suit.

Théorème 3.6.3. *Si δ est une valeur non critique, alors il existe une unique quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante de $\mathcal{S}_\delta(S^{1|2})$ dans $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(S^{1|2})$.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle que nous avons présentée pour le Théorème 2.6.4 du chapitre précédent.

Premièrement, nous remarquons que pour tout $S \in \mathcal{S}_\delta^k$, il existe un unique vecteur propre $\hat{S}$ de $\mathcal{C}$ de valeur propre $\alpha_{k,\delta}$ tel que

$$\begin{cases} \hat{S} = S_k + S_{k-\frac{1}{2}} + S_{k-1} + \cdots + S_0, \quad S_k = S \\ S_l \in \mathcal{S}_\delta^l \quad \text{pour tout } l \leqslant k - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

En effet, puisque $\hat{S}$ est le vecteur propre de $\mathcal{C}$ de même valeur propre $\alpha_{k,\delta}$, alors on a

$$\begin{cases} (C - \alpha_{k,\delta}\mathrm{Id})S_{k-\frac{1}{2}} = -\mathrm{pr}_{k-\frac{1}{2}}(N(S_k)), \\ (C - \alpha_{k,\delta}\mathrm{Id})S_{k-l} = -\Big(\mathrm{pr}_{k-l}(N(S_{k-l+\frac{1}{2}})) + \mathrm{pr}_{k-l}(N(S_{k-l+1}))\Big) \end{cases} \tag{3.13}$$

pour $l = 1, \frac{3}{2}, \ldots, k$, où pr_i désigne la projection naturelle $\mathcal{S}_\delta \to \mathcal{S}_\delta^i$.

Puisque δ est non critique, les expressions $\alpha_{k,\delta} - \alpha_{l,\delta}$ sont non nulles, donc les opérateurs $(C - \alpha_{k,\delta}\mathrm{Id})|_{\mathcal{S}_\delta^{k-l}}$ sont inversibles et le système d'équations 3.13 possède une solution unique.

Deuxièmement, définissons l'application Q par

$$Q|_{\mathcal{S}_\delta^k}(S) = \hat{S}.$$

Il est clair que c'est une bijection et qu'elle satisfait la relation

$$Q \circ L_{X_f}^\delta = \mathcal{L}_{X_f} \circ Q \quad \text{pour tout } X_f \in \mathfrak{spo}(2|2).$$

En effet, pour tout $S \in \mathcal{S}_\delta^k$, les symboles $Q(L_{X_f}^\delta S)$ et $\mathcal{L}_{X_f}(Q(S))$ sont tels que
- ils sont tous des vecteurs propres de $\mathcal{C}$ de valeur propre $\alpha_{k,\delta}$, parce que d'une part $\mathcal{C}$ commute avec $\mathcal{L}_{X_f}$ pour tout $X_f \in \mathfrak{spo}(2|2)$, et d'autre part C commute avec $L_{X_f}^\delta$ pour tout $X_f \in \mathfrak{spo}(2|2)$.
- $L_{X_f}^\delta S$ est leur terme d'ordre k.

La première partie de la preuve montre montre que les symboles $Q(L_{X_f}^\delta S)$ et $\mathcal{L}_{X_f}(Q(S))$ doivent coïncider. La quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante est donc donnée par $Q_{\text{aff}} \circ Q$.

La quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante Q ci-dessus est unique. En effet, si S est un vecteur propre de C de valeur propre $\alpha_{k,\delta}$, et si Q est la quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante alors $Q(S)$ doit être un vecteur propre de $\mathcal{C}$ de même valeur propre $\alpha_{k,\delta}$ car $\mathcal{C}$

et C sont définis par les dérivées de Lie $\mathcal{L}_{X_f}$ et $L^{\delta}_{X_f}$. L'existence de la solution du système d'équations (3.13) implique alors l'unicité de la quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équiavariante sur $S^{1|2}$.

□

3.7 Formules explicites pour la quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante sur $S^{1|2}$

Nous allons présenter pour les valeurs non critiques de δ, les formules explicites de la quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante dans les cas où $k \in \mathbb{N}$ et $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$.
Les formules que nous allons donner permettent d'étendre les résultats de [11, Chapitre 2] et [30]. Rappelons que N. Mellouli a donné les formules explicites pour la quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante sur $S^{1|2}$ pour les symboles de degré au plus égal deux.

3.7.1 Quantification des symboles homogènes de degré k entier

Proposition 3.7.1. *Soit Q l'application de quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante sur $S^{1|2}$ donnée par*

$$Q|_{\mathcal{S}^k_\delta}(S) = \hat{S}, \quad \text{où} \quad \hat{S} = S_k + S_{k-\frac{1}{2}} + S_{k-1} + \cdots + S_0. \tag{3.14}$$

Si δ est une valeur non critique et l est un entier naturel, alors le symbole S_{k-l} contenu dans la formule (3.14) *est donné par :*

$$C_l \begin{pmatrix} A_k B_{k-l} & 0 \\ 0 & A_{k-l} B_k \end{pmatrix} \partial_x^l (S_k) + D_l \begin{pmatrix} A_k B_{k-l} \partial_x^l & -B_k B_{k-l} \bar{D}_1 \bar{D}_2 \partial_x^{l-1} \\ A_k A_{k-l} \bar{D}_1 \bar{D}_2 \partial_x^{l-1} & A_{k-l} B_k \partial_x^l \end{pmatrix} S_k, \tag{3.15}$$

où les coefficients A_k, B_k, C_l and D_l sont donnés par les formules suivantes :

$$A_k = -k, \quad B_k = -(k + 2\lambda),$$

$$C_l = \frac{\prod_{i=1}^{l-1} A_{k-i} B_{k-i}}{\prod_{i=1}^{l} (\alpha_k - \alpha_{k-i})}, \quad D_l = \frac{-l \prod_{i=1}^{l-1} A_{k-i} B_{k-i}}{2(\alpha_k - \alpha_{k-\frac{1}{2}}) \prod_{i=1}^{l} (\alpha_k - \alpha_{k-i})}.$$

Si l est demi-entier naturel, nous avons :

$$S_{k-l} = (-1)^{\tilde{S}_k + 1} E_l \left[\begin{pmatrix} A_k \bar{D}_1 & B_k \bar{D}_2 \\ A_k \bar{D}_2 & -B_k \bar{D}_1 \end{pmatrix} \partial_x^{\lfloor l \rfloor} \right] S_k, \tag{3.16}$$

où $\lfloor l \rfloor$ est la partie entière de l et E_l est donné par :

$$E_l = \frac{\prod_{i=1}^{l-\frac{1}{2}} A_{k-i}B_{k-i}}{2(\alpha_k - \alpha_{k-\frac{1}{2}})\prod_{i=1}^{l-\frac{1}{2}}(\alpha_k - \alpha_{k-i})}.$$

Les coefficients de C_1, D_1 et $E_{\frac{1}{2}}$ sont donnés par les formules suivantes :

$$C_1 = \frac{1}{\alpha_k - \alpha_{k-1}}; \quad D_1 = -\frac{1}{2(\alpha_k - \alpha_{k-\frac{1}{2}})(\alpha_k - \alpha_{k-1})}; \quad E_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(\alpha_k - \alpha_{k-\frac{1}{2}})}.$$

Démonstration. Les symboles S_{k-l} sont obtenus par induction en utilisant la formule (3.13). Si $l = \frac{1}{2}$ et si $l = 1$, les formules (3.15) et (3.16) sont faciles à obtenir en utilisant la relation (3.13), la proposition 3.5.5 et la proposition 3.5.6.

Supposons maintenant que les formules donnant les symbole $S_{k-l'}$ sont vraies pour $l' \leqslant l$ et prouvons que la formule donnant le symbole $S_{k-l-\frac{1}{2}}$ est aussi vraie. En utilisant la relation (3.13), nous pouvons écrire que

$$S_{k-l-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\alpha_k - \alpha_{k-l-\frac{1}{2}}}\left[N^{k-l}_{k-l-\frac{1}{2}}(S_{k-l}) + N^{k-l+\frac{1}{2}}_{k-l-\frac{1}{2}}(S_{k-(l-\frac{1}{2})})\right], \tag{3.17}$$

où la composante de $N|_{\mathcal{S}^{k-l}_\delta}$ suivant $\mathcal{S}^{k-l-i}_\delta$ est notée par N^{k-l}_{k-l-i}.
Deux situations peuvent se présenter :

1. Si l est un entier naturel, alors $(k-l)$ est un entier naturel tandis que $(k-l+\frac{1}{2})$ est demi-entier naturel. Dans ce cas, en utilisant la proposition 3.5.5, proposition 3.5.6, la relation (3.15) et la relation (3.16) on voit que, $S_{k-l-\frac{1}{2}}$ est égal à

$$(-1)^{\tilde{F}+1}\left(\frac{C_lA_{k-l}B_{k-l} + 2D_lA_{k-l}B_{k-l} + 2A_{k-l}B_{k-l}E_{l-\frac{1}{2}}}{2(\alpha_k - \alpha_{k-(l+\frac{1}{2})})}\right)\begin{pmatrix} A_k\partial_x^l\overline{D}_1 & B_k\partial_x^l\overline{D}_2 \\ A_k\partial_x^l\overline{D}_2 & -B_k\partial_x^l\overline{D}_1\end{pmatrix}S_k,$$

   i.e. égal à

$$(-1)^{\tilde{F}+1}\left(\frac{A_{k-l}B_{k-l}}{2(\alpha_k - \alpha_{k-(l+\frac{1}{2})})}\right)\left(C_l + 2D_l + 2E_{l-\frac{1}{2}}\right)\begin{pmatrix} A_k\partial_x^l\overline{D}_1 & B_k\partial_x^l\overline{D}_2 \\ A_k\partial_x^l\overline{D}_2 & -B_k\partial_x^l\overline{D}_1\end{pmatrix}S_k.$$

   Donc $S_{k-l-\frac{1}{2}}$ a la forme donnée par la relation (3.16) et on en déduit l'expression de $E_{l+\frac{1}{2}}$ qui est égal à

$$E_{l+\frac{1}{2}} = \frac{A_{k-l}B_{k-l}}{2(\alpha_k - \alpha_{k-(l+\frac{1}{2})})}\left(C_l + 2D_l + 2E_{l-\frac{1}{2}}\right).$$

En utilisant les hypothèses d'induction sur les coefficients C_l, D_l et $E_{l-\frac{1}{2}}$, on voit que la formule donnant $E_{l+\frac{1}{2}}$ est aussi correcte.

2. Si $l \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$, alors $(k-l) \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$ tandis que $(k - l + \frac{1}{2})$ est entier naturel. Des raisonnements similaires à ceux menés au point 1 montrent que si les formules donnant les symboles $S_{k-l'}$ sont vraies pour $l' \leqslant l$, alors $S_{k-l-\frac{1}{2}}$ s'écrit

$$\begin{aligned}
&\frac{-E_l}{(\alpha_k - \alpha_{k-(l+\frac{1}{2})})}\begin{pmatrix} A_kB_{k-l-\frac{1}{2}}\partial_x & -B_kB_{k-l-\frac{1}{2}}\overline{D}_1\overline{D}_2 \\ A_{k-l-\frac{1}{2}}A_k\overline{D}_1\overline{D}_2 & A_{k-l-\frac{1}{2}}B_k\partial_x \end{pmatrix}\partial_x^{\lfloor l\rfloor}S_k \\
&\quad + \frac{A_{k-l+\frac{1}{2}}B_{k-l+\frac{1}{2}}}{(\alpha_k - \alpha_{k-(l+\frac{1}{2})})}C_{l-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} A_kB_{k-l-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & A_{k-l-\frac{1}{2}}B_k \end{pmatrix}\partial_x^{l+\frac{1}{2}}(S_k) \\
&+ \frac{A_{k-l+\frac{1}{2}}B_{k-l+\frac{1}{2}}}{(\alpha_k - \alpha_{k-(l+\frac{1}{2})})}D_{l-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} A_kB_{k-l-\frac{1}{2}}\partial_x^{l+\frac{1}{2}} & -B_kB_{k-l-\frac{1}{2}}\overline{D}_1\overline{D}_2\partial_x^{l-\frac{1}{2}} \\ A_{k-l-\frac{1}{2}}A_k\overline{D}_1\overline{D}_2\partial_x^{l-\frac{1}{2}} & A_{k-l-\frac{1}{2}}B_k\partial_x^{l+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}S_k,
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
&\frac{A_{k-l+\frac{1}{2}}B_{k-l+\frac{1}{2}}}{(\alpha_k - \alpha_{k-(l+\frac{1}{2})})}C_{l-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} A_kB_{k-l-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & A_{k-l-\frac{1}{2}}B_k \end{pmatrix}\partial_x^{l+\frac{1}{2}}(S_k) \\
&+\frac{1}{(\alpha_k - \alpha_{k-(l+\frac{1}{2})})}\left(-E_l + A_{k-l+\frac{1}{2}}B_{k-l+\frac{1}{2}}D_{l-\frac{1}{2}}\right)\begin{pmatrix} A_kB_{k-l-\frac{1}{2}}\partial_x & -B_kB_{k-l-\frac{1}{2}}\overline{D}_1\overline{D}_2 \\ A_{k-l-\frac{1}{2}}A_k\overline{D}_1\overline{D}_2 & A_{k-l-\frac{1}{2}}B_k\partial_x \end{pmatrix}\partial_x^{\lfloor l\rfloor}S_k.
\end{aligned}$$

Cette expression montre que le symbole $S_{k-l+\frac{1}{2}}$ a la même forme que la formule (3.15) et on en déduit que les coefficients $C_{l+\frac{1}{2}}$ et $D_{l+\frac{1}{2}}$ sont donnés par les formules suivantes :

$$C_{l+\frac{1}{2}} = \frac{A_{k-l+\frac{1}{2}}B_{k-l+\frac{1}{2}}}{(\alpha_k - \alpha_{k-(l+\frac{1}{2})})}C_{l-\frac{1}{2}},$$

$$D_{l+\frac{1}{2}} = \frac{1}{(\alpha_k - \alpha_{k-(l+\frac{1}{2})})}\left(-E_l + A_{k-l+\frac{1}{2}}B_{k-l+\frac{1}{2}}D_{l-\frac{1}{2}}\right).$$

En utilisant les hypothèses d'induction sur les coefficients $C_{l-\frac{1}{2}}$, E_l et $D_{l-\frac{1}{2}}$, on voit que les formules donnant les coefficients $C_{l+\frac{1}{2}}$ et $D_{l+\frac{1}{2}}$ sont aussi correctes.

□

3.7.2 Quantification des symboles homogènes de degré k non entier

Proposition 3.7.2. *Soit Q l'application de quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante sur $S^{1|2}$ donnée par*

$$Q|_{\mathcal{S}^k_\delta}(S) = \hat{S}, \quad \text{où} \quad \hat{S} = S_k + S_{k-\frac{1}{2}} + S_{k-1} + \cdots + S_0. \tag{3.18}$$

Si δ est une valeur non critique et si l est un entier naturel, alors le symbole S_{k-l} donné dans la formule (3.18) *est donné par :*

$$\left[C'_l \begin{pmatrix} \partial_x^l & 0 \\ 0 & \partial_x^l \end{pmatrix} + D'_l \begin{pmatrix} \partial_x^l & -\bar{D}_1\bar{D}_2\partial_x^{l-1} \\ \bar{D}_1\bar{D}_2\partial_x^{l-1} & \partial_x^l \end{pmatrix}\right] S_k,$$

où les coefficients C'_l et D'_l sont donnés par les formules suivantes :

$$C'_l = \frac{\prod_{i=0}^{l-1}(A_{k-\frac{1}{2}-i}B_{k-\frac{1}{2}-i})}{\prod_{i=1}^{l}(\alpha_k - \alpha_{k-i})},$$

$$D'_l = \frac{-l\prod_{i=0}^{l-1}(A_{k-\frac{1}{2}-i}B_{k-\frac{1}{2}-i})}{2(\alpha_k - \alpha_{k-\frac{1}{2}})\prod_{i=1}^{l}(\alpha_k - \alpha_{k-i})}.$$

Si $l \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$, nous avons :

$$S_{k-l} = (-1)^{\tilde{S}_k+1}E'_l \left[\begin{pmatrix} B_{k-l}\bar{D}_1 & B_{k-l}\bar{D}_2 \\ A_{k-l}\bar{D}_2 & -A_{k-l}\bar{D}_1 \end{pmatrix} \partial_x^{\lfloor l \rfloor}\right] S_k,$$

où $\lfloor l \rfloor$ est la partie entière l et les coefficients E'_l sont donnés par la formule suivante :

$$E'_l = \frac{\prod_{i=0}^{l-\frac{3}{2}}(A_{k-\frac{1}{2}-i}B_{k-\frac{1}{2}-i})}{2(\alpha_k - \alpha_{k-\frac{1}{2}})\prod_{i=1}^{l-\frac{1}{2}}(\alpha_k - \alpha_{k-i})}.$$

Le coefficient $E'_{\frac{1}{2}}$ est définie par la formule suivante :

$$E'_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\left(\alpha_k - \alpha_{k-\frac{1}{2}}\right)}.$$

Démonstration. La preuve est complètement similaire à celle de la Proposition 3.7.1. □

3.7.3 Discussion sur les situations critiques

Il existe certaines valeurs critiques de δ dans l'ensemble donné par la formule (3.12) pour lesquelles les formules explicites données plus haut pour la quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante restent bien définies.

(1) Si $k \in \mathbb{N}$ (resp. $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$) et si $l \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}$ est compris entre $\frac{3}{2}$ et $k - \frac{1}{2}$ (resp. k) et si δ est tel que $\alpha_k - \alpha_{k-l} = 0$, alors la formule explicite de la quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante donnée dans la proposition 3.7.1 (resp. proposition 3.7.2) est bien définie.

(2) Si $k \in \mathbb{N}$ (resp. $k \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}$) et si $\delta = \frac{k^2-l^2+\frac{1}{4}}{2(k-l)}$ (resp. $\frac{k^2-l^2-\frac{1}{4}}{2(k-l)}$), alors la formule explicite de la quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante est définie si $l \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}$ (l est entier naturel) est compris entre $\frac{1}{2}$ (resp. 0) et $k - \frac{3}{2}$.

Dans ces deux cas, un argument de continuité sur le paramètre δ permet de montrer que les formules explicites définissent bien une quantification équivariante.

(3) Si $k \in \mathbb{N}$ et $2 \leqslant l \leqslant k$ et si δ est critique, c'est-à-dire si $\alpha_k - \alpha_{k-l} = 0$ ($\delta = k - \frac{1}{2}l$), alors la quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante donnée par la formule explicite (3.15) dans la proposition 3.7.1 n'est pas définie autant que les nombres $B_{k-1}, \cdots, B_{k-l+1}$ sont non nuls (i.e. si λ n'est pas égal à $-\frac{k-1}{2}, \cdots, -\frac{k-l+1}{2}$). Par contre, si un de ces nombres s'annule alors il existe une infinité de solutions du système d'équations 3.13 et la méthode des opérateurs de Casimir que nous avons utilisé ne nous permet pas de conclure.

(4) De même, si $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$ et $1 \leqslant l \leqslant k$ et si δ est critique, c'est-à-dire si $\alpha_k - \alpha_{k-l} = 0(\delta = k - \frac{1}{2}l)$, alors la formule explicite de la quantification $\mathfrak{spo}(2|2)$-équivariante donnée dans la proposition 3.18 n'est pas définie autant que les nombres $B_{k-\frac{1}{2}}, \cdots, B_{k-l+\frac{1}{2}}$ sont non nuls (i.e. si λ n'est pas égal à $-\frac{k-\frac{1}{2}}{2}, \cdots, -\frac{k-l+\frac{1}{2}}{2}$). Par contre, si un de ces nombres s'annule alors il existe une infinité de solutions du système d'équations 3.13et la méthode des opérateurs de Casimir que nous avons utilisé ne nous permet pas de conclure.

Dans ces deux derniers cas, on peut cependant conjecturer que, pour autant que le paramètre λ prenne une valeur adéquate, il existe une infinité de quantifications équivariantes.

Chapitre 4

Quantifications fines $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariantes sur $\mathbb{R}^{2l+1|n}$

Il s'agit ici de généraliser en dimension quelconque $(2l+1|n)$ le problème de quantification équivariante étudié sur les supercercles $S^{1|1}$ et $S^{1|2}$.
Quand $2l+2 \neq n$, l'existence de la quantification $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante peut-être prouvée en se servant de la quantification $\mathfrak{sl}(2l+2|n)$-équivariante construite par P. Mathonet et F. Radoux dans [28]. En effet, quand $2l+2 \neq n$, cette quantification équivariante induit une quantification $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante entre $\mathcal{S}_\delta$ et $\mathcal{D}_{\lambda\mu}$ et la preuve de l'existence d'une quantification $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante se réduit alors à la recherche d'une application équivariante entre $\mathcal{P}_\delta$ et $\mathcal{S}_\delta$. On donne la formule explicite de la quantification fine $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante et la preuve de l'unicité de cette quantification $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante est faite à l'aide d'opérateurs de Casimir. Pour mener les calculs, on s'inspire des techniques utilisées dans la situation purement paire par C. Conley et V.Ovsienko dans [5]. En particulier, on représente les symboles par des polynômes et les dérivées de Lie par des opérateurs différentiels.

Nous rappelons d'abord la définition de la quantification équivariante et nous donnons également celle de la quantification fine $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante.

Définition 4.0.3. *On appelle quantification de $\mathcal{S}_\delta(M)$ une application linéaire Q de $\mathcal{S}_\delta(M)$ dans $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(M)$ dont la restriction $Q|_{\mathcal{S}^k_\delta} : \mathcal{S}^k_\delta(M) \to \mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(M)$ sur $\mathcal{S}^k_\delta(M)$ est telle que l'application suivante*

$$\sigma^k_{\lambda,\mu} \circ Q|_{\mathcal{S}^k_\delta} : \mathcal{S}^k_\delta(M) \to \mathcal{S}^k_\delta(M)$$

est l'identité.

Si $\mathfrak{g}$ est une sous superalgèbre de Lie de $\mathrm{Vect}(M)$ *alors on dit que Q est $\mathfrak{g}$-équivariante si Q entrelace les actions de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{S}_\delta(M)$ et sur $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(M)$.*

Définition 4.0.4. *On appelle quantification fine de $\mathcal{P}_\delta(M)$ une application linéaire Q de $\mathcal{P}_\delta(M)$ dans $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(M)$ dont la restriction $Q|_{\mathcal{P}_\delta^d} : \mathcal{P}_\delta^d(M) \to \mathcal{D}_{\lambda\mu}^{k,d}(M)$ est telle que l'application suivante*

$$h\sigma_{\lambda,\mu}^d \circ Q|_{\mathcal{P}_\delta^d} : \mathcal{P}_\delta^d(M) \to \mathcal{P}_\delta^d(M)$$

est l'identité.

On dit qu'une quantification fine Q est $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante si elle entrelace les actions de $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ sur $\mathcal{P}_\delta(M)$ et sur $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(M)$.

4.1 Espace de Symboles fins associés à $\mathcal{D}_{\lambda\mu}(M)$

De façon générale, nous allons définir les espaces de symboles $\mathcal{P}_\delta(M)$ et $\mathcal{S}_\delta(M)$. Dans un premier temps, nous allons décrire l'espace $\mathcal{S}_\delta^k(M)$. Si on note par ξ_0 le moment associé au champ de vecteurs ∂_z et par ξ_r le moment associé au champ de vecteurs T_r où la notation ξ_r représente l'écriture unifiée des moments $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ et la notation T_r représente l'écriture unifiée des champs de vecteurs $A_r, B_r, \overline{D}_r$, alors nous obtenons l'isomorphisme suivant

$$\mathcal{S}_\delta^k(M) \cong \langle \alpha^\delta \xi_0^c \xi^I, c + |I| = k \rangle, \tag{4.1}$$

où $I = (i_1, \ldots, i_{2l+n})$ est un multi-indice de longueur $|I| = i_1 + \ldots + i_{2l+n}$ et $\xi^I = \xi_1^{i_1} \ldots \xi_{2l+n}^{i_{2l+n}}$.

Nous rappelons que (voir Proposition 1.9.9) tout opérateur différentiel $D \in \mathcal{D}_{\lambda\mu}(M)$ peut s'écrire sous forme contact comme suit :

$$\sum_{K : c+|K| \leqslant k} D_{cK} \partial_z^c T^K, \tag{4.2}$$

où D_{cK} est une superfonction et $T^K = T_1^{i_1} \cdots T_{2l+n}^{i_{2l+n}}$.

Si nous notons par φ l'isomorphisme donné par la formule (4.1), nous obtenons

$$\varphi : \sum_{\substack{c,I \\ c+|I| \leqslant k}} D_I \partial_z^c T_1^{i_1} \ldots T_{2l+n}^{i_{2l+n}} + \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^{k-1}(M) \mapsto \sum_{\substack{c,I \\ c+|I| = k}} D_I \alpha^\delta \xi_0^c \xi_1^{i_1} \ldots \xi_{2l+n}^{i_{2l+n}}. \tag{4.3}$$

Pour la suite de notre travail nous considérons les notations symboliques suivantes ζ, α_i,β_i et γ_i où ζ est le moment associé au champ de vecteurs ∂_z et α_i,β_i et γ_i les moments associés aux champs de vecteurs A_i, B_i et $\overline{D}_i$ (voir formule (1.5)) suivants

$$A_i = \partial_{x_i} + y_i \partial_z, \quad B_i = -\partial_{y_i} + x_i \partial_z, \quad \bar{D}_i = \partial_{\theta_i} - \theta_i \partial_z. \tag{4.4}$$

Si les multi-indices I, J, T sont donnés respectivement par $I = (i_1, i_2, \cdots, i_l)$, $J = (j_1, j_2, \cdots, j_l)$ et $T = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ alors les quantités $A_1^{i_1} \cdots A_l^{i_l}$, $B_1^{j_1} \cdots B_l^{j_l}$ et $\bar{D}_1^{t_1} \cdots \bar{D}_n^{t_n}$ sont représentées respectivement par A^I, B^J et $\bar{D}^T$. On désignera par K le multi-indice (I, J, T) et on notera respectivement $|K|$, $|I|$, $|J|$ et $|T|$ les longueurs des multi-indices K, I, J et T.

L'espace $\mathcal{P}_\delta^d(M)$ défini par (1.35) est isomorphe à un sous-espace de l'espace $\mathcal{F}_\delta \otimes \mathrm{Pol}(T^*M)$. Plus précisément, nous avons

$$\mathcal{P}_\delta^d(M) \cong \langle D_{c,K} \alpha^\delta \zeta^c \alpha^I \beta^J \gamma^T, \quad c + \frac{1}{2}|K| = d \rangle,$$

pour tous c, I, J, K. L'isomorphisme entre ces deux espaces est donné explicitement par

$$\varphi : \sum_{\substack{c,K \\ c+\frac{1}{2}|K| \leqslant d}} D_{c,K} \partial_z^c A^I B^J \bar{D}^T + \mathcal{H}_{\lambda,\mu}^{d-\frac{1}{2}}(M) \mapsto \sum_{\substack{c,K \\ c+\frac{1}{2}|K| = d}} D_{c,K} \alpha^\delta \zeta^c \alpha^I \beta^J \gamma^T. \tag{4.5}$$

L'espace $\Sigma_\delta^{k,d}(M)$ est isomorphe à un sous-espace de $\mathcal{F}_\delta(M) \otimes \mathrm{Pol}(T^*M)$. Plus précisément, nous avons

$$\Sigma_\delta^{k,d}(M) \cong \langle D_{c,K} \alpha^\delta \zeta^c \alpha^I \beta^J \gamma^T, \quad c + \frac{1}{2}|K| = d, \quad c + |K| = k \rangle.$$

Explicitement, l'isomorphisme entre ces deux espaces est donné par

$$\varphi : \sum_{\substack{c,J \\ c+\frac{1}{2}|K| \leqslant d \\ c+|K| \leqslant k}} D_{c,K} \partial_z^c A^I B^J \bar{D}^T + (\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^{k,d-\frac{1}{2}}(M) + \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^{k-1,d}(M)) \mapsto$$

$$\sum_{\substack{c,K \\ c+\frac{1}{2}|K| = d \\ c+|K| = k}} D_{c,K} \alpha^\delta \zeta^c \alpha^I \beta^J \gamma^T.$$

Donc l'espace des symboles $\mathcal{P}_\delta(M)$ peut s'exprimer à l'aide d'une somme directe des espaces $\Sigma_\delta^{k,d}(M)$:

$$\mathcal{P}_\delta(M) = \bigoplus_{d \in \frac{1}{2}\mathbb{N}} \mathcal{H}^d(M)/\mathcal{H}^{d-\frac{1}{2}}(M) = \bigoplus_{d \in \frac{1}{2}\mathbb{N}} \bigoplus_{k=\lceil d \rceil}^{2d} \Sigma_\delta^{k,d}(M). \tag{4.6}$$

4.1.1 Structure de module sur les espaces de symboles $\mathcal{S}_\delta(M)$,$\mathcal{P}_\delta(M)$ et $\Sigma_\delta(M)$

Nous allons dans cette section, donner des formules explicites pour les actions des champs de vecteurs contact projectifs sur les espaces $\mathcal{S}_\delta(M)$,$\mathcal{P}_\delta(M)$ et $\Sigma_\delta(M)$. Nous rappelons que si $D \in \mathcal{H}^d_{\lambda,\mu}(M)$ et X_f est un champ de vecteurs de contact, alors la dérivée de Lie dans la direction de X_f, noté $L^{\mathcal{H}}_{X_f}D$ et définie par

$$(L^{\mathcal{H}}_{X_f}D)(\psi) := L_{X_f}(D\psi) - (-1)^{\tilde{f}\tilde{D}}D(L_{X_f}\psi),$$

est un élément de $\mathcal{H}^d_{\lambda,\mu}(M)$, puisque (proposition 1.9.14) l'action de X_f préserve $\mathrm{Tan}(M)$. Par conséquent, l'action canonique de X_f préserve aussi l'espace bigradué $\mathcal{D}^{k,d}_{\lambda,\mu}(M)$.

Donc l'action d'un champ de vecteurs de contact sur $\mathcal{H}^d_{\lambda,\mu}$ et sur $\mathcal{D}^{k,d}_{\lambda,\mu}$ induit des actions de la sous-superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ de $K(2l+1|n)$ sur les espaces $\mathcal{P}^d_\delta(M)$ et $\Sigma^{k,d}_\delta(M)$. Nous donnons dans la proposition qui suit les formules explicites de ces actions sur les espaces des symboles $\mathcal{S}_\delta(M)$, $\mathcal{P}_\delta(M)$ et symboles fins $\Sigma_\delta(M)$.

Proposition 4.1.1. *Si X_f est un champ de vecteurs de contact et si nous notons par $L^{\mathcal{P}}_{X_f}$ (resp. $L^{\Sigma}_{X_f}$; resp. $L^{\mathcal{S}}_{X_f}$) les actions de X_f sur $\mathcal{P}_\delta(M)$ (resp. $\Sigma_\delta(M)$; resp. $\mathcal{S}_\delta(M)$), alors nous avons les formules suivantes :*

1.

$$L^{\Sigma}_{X_f} = f\partial_z + \partial_z(f)\,(\delta - \mathcal{E}_\zeta) - \frac{1}{2}(-1)^{\tilde{f}\tilde{T}_r}\omega^{rs}T_r(f)T_s + \frac{1}{2}(-1)^{\tilde{f}(\tilde{T}_i+\tilde{T}_r)}\omega^{rs}T_iT_r(f)\xi_s\partial_{\xi_i}. \quad (4.7)$$

2. $L^{\mathcal{P}}_{X_f} = L^{\Sigma}_{X_f}$,

3.

$$L^{\mathcal{S}}_{X_f} = L^{\Sigma}_{X_f} + \frac{1}{2}(-1)^{\tilde{f}\tilde{T}_r}\omega^{rs}T_r(f')\xi_s\partial_\zeta. \quad (4.8)$$

Dans ces expressions la notation $\mathcal{E}_\zeta$ signifie l'opérateur d'Euler $\zeta\partial_\zeta$ tandis que les notations ∂_z et T_i représentent l'action des champs de vecteurs ∂_z et T_i sur les coefficients du symbole.

Démonstration. Les espaces $\Sigma(M) := \bigcup_{\delta\in\mathbb{R}}\Sigma_\delta(M)$, $\mathcal{P}(M) := \bigcup_{\delta\in\mathbb{R}}\mathcal{P}_\delta(M)$ et $\mathcal{S}(M) := \bigcup_{\delta\in\mathbb{R}}\mathcal{S}_\delta(M)$ sont des algèbres pour le produit canonique des symboles. Nous pouvons considérer les opérateurs $\tilde{L}^{\Sigma}_{X_f}$, $\tilde{L}^{\mathcal{P}}_{X_f}$ et $\tilde{L}^{\mathcal{S}}_{X_f}$ agissant respectivement sur les espaces $\Sigma(M)$,

$\mathcal{P}(M)$ et $\mathcal{S}(M)$ dont les restrictions sur les espaces $\Sigma_\delta(M)$, $\mathcal{P}_\delta(M)$ et $\mathcal{S}_\delta(M)$ sont données par $L^{\Sigma}_{X_f}$, $L^{\mathcal{P}}_{X_f}$ et $L^{\mathcal{S}}_{X_f}$ pour tout $\delta \in \mathbb{R}$.
Les opérateurs $\tilde{L}^{\Sigma}_{X_f}$, $\tilde{L}^{\mathcal{P}}_{X_f}$ et $\tilde{L}^{\mathcal{S}}_{X_f}$ sont donc des dérivations de $\Sigma(M)$, $\mathcal{P}(M)$ et $\mathcal{S}(M)$ respectivement.

Il suffit donc pour vérifier les formules données dans l'énoncé de la proposition, de calculer $L^{\Sigma}_{X_f}$ et $L^{S}_{X_f}$ sur les générateurs ζ, ξ_i et $g\alpha^\delta$ des espaces de symboles $\Sigma_\delta(M)$ et $\mathcal{S}_\delta(M)$. Si le résultat de l'application de $L^{\Sigma}_{X_f}$ et $L^{S}_{X_f}$ à ces générateurs coïncident avec l'application des seconds membres des équations (4.7) et (4.8) à ces mêmes générateurs, les équations (4.7) et (4.8) sont vérifiées puisque les membres de droite de ces équations sont des opérateurs de dérivation.

Grâce à l'isomorphisme φ défini par (4.5), le calcul des opérateurs $L^{\Sigma}_{X_f}$ et $L^{S}_{X_f}$ sur les générateurs ζ, ξ_i et $g\alpha^\delta$ des espaces de symboles $\Sigma_\delta(M)$ et $\mathcal{S}_\delta(M)$ peuvent s'effectuer en calculant respectivement les dérivées de Lie des opérateurs différentiels ∂_z, T_i et $g\alpha^\delta$. Ainsi $L^{\Sigma}_{X_f}$ calculé sur le générateur T_i est égal à

$$\begin{aligned}
L^{\Sigma}_{X_f}(T_i) &= [X_f, T_i] + \delta f' T_i \\
&= [f\partial_z, T_i] + \delta f' T_i - \frac{1}{2}(-1)^{\tilde{f}\tilde{T}_r}\omega^{rs}\left(-(-1)^{\tilde{f}\tilde{T}_i}[T_i, T_r(f)T_s]\right). \\
&= -(-1)^{\tilde{f}\tilde{T}_i}T_i(f)\partial_z + \delta f' T_i \\
&+ \frac{1}{2}(-1)^{(\tilde{T}_r+\tilde{T}_i)\tilde{f}}\omega^{rs}\left(T_iT_r(f)T_s + (-1)^{\tilde{T}_i(\tilde{T}_r+\tilde{f})}T_r(f)[T_i, T_s]\right).
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que le commutateur $[T_i, T_s]$ est égal à $-2\omega_{is}\partial_z$ (voir les formules 1.6) et en utilisant de plus l'isomorphisme φ défini par (4.5), on a :

$$L^{\Sigma}_{X_f}(\xi_i) = \left(\delta f' \mathrm{Id} + \frac{1}{2}(-1)^{\tilde{f}(\tilde{T}_r+\tilde{T}_i)}\omega^{rs}T_iT_r(f)\xi_s\partial_{\xi_i}\right)(\xi_i). \tag{4.9}$$

Si on calcule $L^{\Sigma}_{X_f}(\partial_z)$ et en utilisant en plus l'isomorphisme φ défini par (4.5), on a

$$L^{\Sigma}_{X_f}(\zeta) = (\delta - 1)\, f' \mathrm{Id}(\zeta), \tag{4.10}$$

et enfin en calculant $L^{\Sigma}_{X_f}(g\alpha^\delta)$ et en utilisant en plus l'isomorphisme φ défini par (4.5), on obtient

$$L^{\Sigma}_{X_f}(g\alpha^\delta) = \left(f\partial_z + \delta f' \mathrm{Id} - (-1)^{\tilde{f}\tilde{T}_r}\frac{1}{2}\omega^{rs}T_r(f)T_s\right)(g\alpha^\delta). \tag{4.11}$$

On peut voir que si on restreint la première formule donnée par (4.7) aux générateurs T_i, ∂_z et $g\alpha^\delta$, on obtient respectivement les formules (4.9), (4.10) et (4.11). La preuve de la formule (4.8) est similaire. $\square$

On obtient la remarque suivante :

Remarque 4.1.2. *Les formules* (4.7) *et* (4.8) *coïncident sur la sous-superalgèbre de Lie* $\mathrm{Aff}(2l+2|n)$.

Nous allons présenter dans la section suivante les résultats déjà connus de P. Mathonet et F. Radoux sur la quantification projectivement équivariante sur $\mathbb{R}^{p|q}$.

4.2 Aperçu des résultats connus sur $\mathbb{R}^{p|q}$

Dans cette section nous présentons le résultat principal de la quantification $\mathfrak{pgl}(p+1|q)$-équivariante sur le superespace $\mathbb{R}^{p|q}$. Les auteurs P. Mathonet et F. Radoux ont démontré dans [28] l'existence et l'unicité d'une quantification projectivement équivariante sur $\mathbb{R}^{p|q}$ dans le cas où les espaces d'opérateurs différentiels sont pourvus de la filtration canonique.
Si $p+1 \neq q$, alors la superalgèbre de Lie projective $\mathfrak{pgl}(p+1|q)$ est isomorphe à la superalgèbre de Lie $\mathfrak{sl}(p+1|q)$.
Dans cette section, les poids de densités seront indicés par c s'ils désignent les poids de densités contact, dans le cas contraire les poids de densités représentent les poids de densités tensorielles.

L'ensemble des valeurs critiques de l'application $\mathfrak{sl}(p+1|q)$-équivariante sur $\mathbb{R}^{p|q}$ est donné par

$$\mathfrak{C} = \cup_{k=1}^{\infty}\mathfrak{C}_k, \quad \text{avec} \quad \mathfrak{C}_k = \{\frac{2k-i+p-q}{p-q+1} : i = 1, \cdots, k\}. \tag{4.12}$$

Le résultat principal est le suivant :

Théorème 4.2.1. *Si δ est non critique, alors l'application $Q : \mathcal{S}_\delta \to \mathcal{D}_{\lambda\mu}$ définie par*

$$Q(S)(f) = \sum_{r=0}^{k} C_{k,r} Q_{\mathrm{Aff}}(\mathrm{div}^r S)(f), \quad \forall S \in \mathcal{S}_\delta^k$$

est l'unique application $\mathfrak{sl}(p+1|q)$-équivariante sur $\mathbb{R}^{p|q}$ si

$$C_{k,r} = \frac{\prod_{j=1}^{r}((p-q+1)\lambda + k - j)}{r! \prod_{j=1}^{r}(p-q+2k-j-(p-q+1)\delta)}, \quad \forall r \geqslant 1, \quad C_{k,0} = 1.$$

Dans ce résultat l'application "div" donnée dans la définition 1.7.6 a été étendue aux symboles de degré k comme suit :

$$\mathrm{div} : \mathcal{S}^k_\delta \to \mathcal{S}^{k-1}_\delta : S \mapsto \sum_{j=1}^{p+q} (-1)^{\tilde{y_j}} i(\epsilon^j)\partial_{y^j} S,$$

où ϵ^j est le j-ème vecteur ligne de base de $(\mathbb{R}^{2l+1|n})^* \cong \mathfrak{g}_1$. Ici le symbole S est vu comme un élément de $\mathcal{F}_\delta \otimes \mathrm{Pol}^k(T^*M)$ qu'on a décrit dans la section 4.1.

Si la superdimension m est différente de -1, l'isomorphisme

$$\varphi : \mathcal{F}_\lambda \to \mathrm{Ber}_{\frac{2\lambda}{m+1}} \tag{4.13}$$

entre les espaces des densités contact $\mathcal{F}_\lambda$ et les espaces des densités tensorielles $\mathrm{Ber}_{\frac{2\lambda}{m+1}}$ induit un isomorphisme entre les espaces de symboles $\mathcal{S}^k_{\delta_c}$ et $\mathcal{S}^k_{\frac{2\delta_c}{m+1}}$.
L'isomorphisme (4.13) induit également un isomorphisme entre les espaces d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}^k_{\frac{2\lambda_c}{m+1}\frac{2\mu_c}{m+1}}$ et $\mathcal{D}^k_{\lambda_c\mu_c}$.

La quantification $\mathfrak{sl}(p+1|q)$-équivariante induit une quantification $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante. L'ensemble (4.12) des valeurs critiques pour cette quantification $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante devient alors

$$\mathfrak{C}' = \cup_{k=1}^\infty \mathfrak{C}'_k, \quad \text{avec} \quad \mathfrak{C}'_k = \{\frac{2k-i+m}{2} : i = 1, \cdots, k\} \tag{4.14}$$

et le théorème 4.2.1 se réécrit comme suit :

Théorème 4.2.2. *Si δ est non critique, alors l'application $Q^{\mathfrak{sl}} : \mathcal{S}_{\delta_c} \to \mathcal{D}_{\lambda_c\mu_c}$ définie par*

$$Q^{\mathfrak{sl}}(S)(f) = \sum_{r=0}^{k} C_{k,r} Q_{\mathrm{Aff}}(\mathrm{div}^r S)(f), \quad \forall S \in \mathcal{S}^k_\delta$$

est une quantification $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante sur $\mathbb{R}^{2l+1|n}$ si

$$C_{k,r} = \frac{\prod_{j=1}^r (2\lambda_c + k - j)}{r! \prod_{j=1}^r (m + 2k - j - 2\delta_c)}, \quad \forall r \geqslant 1, \quad C_{k,0} = 1.$$

4.3 Application $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante de $\mathcal{P}_\delta(M)$ dans $\mathcal{S}_\delta(M)$

A partir de maintenant, nous considérons uniquement les poids de densités contact. Nous savons que pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $2l+2-n \neq 0$, la superalgèbre de Lie $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$ est une sous-superalgèbre de Lie de $\mathfrak{sl}(2l+2|n)$ et que cette dernière est isomorphe à la superalgèbre de Lie $\mathfrak{pgl}(2l+2|n)$. On a vu que l'isomorphisme φ entre $\mathcal{F}_\lambda(M)$ et $\mathrm{Ber}_{\frac{2\lambda}{2l+2-n}}(M)$ donné par la définition 1.9.2 entrelace les actions de $K(2l+1|n)$ sur $\mathcal{F}_\lambda(M)$ et sur $\mathrm{Ber}_{\frac{2\lambda}{2l+2-n}}(M)$ pour tout λ.
Pour construire une quantification fine $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante, il suffit donc de trouver une application $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante entre les espaces $\mathcal{P}_\delta(M)$ et $\mathcal{S}_\delta(M)$. Nous commençons par établir des résultats intermédiaires indispensables pour les calculs ultérieurs.

Lemme 4.3.1. *Si* $r \in \{1, \cdots, 2l+n\}$ *alors on a le commutateur suivant*

$$[X_{z^2}, X_{q^r}] = -X_{zq^r}.$$

Démonstration. On obtient le résultat en utilisant la formule de Lagrange(1.14). □

En particularisant la formule (4.7) sur X_{z^2} et X_z, on obtient respectivement les formules suivantes

$$L^{\Sigma}_{X_{z^2}} = z^2\partial_z + 2z(\delta - \mathcal{E}_\zeta) + zq^sT_s + (q^s\xi_s)(\omega_{ji}q^j\partial_{\xi_i}) - z\xi_i\partial_{\xi_i} \tag{4.15}$$

et

$$zL^{\Sigma}_{X_z} = z^2\partial_z + z(\delta - \mathcal{E}_\zeta) + \frac{1}{2}zq^sT_s - \frac{1}{2}z\xi_i\partial_{\xi_i}. \tag{4.16}$$

Les formules (4.15) et (4.16) et le lemme 4.3.4 sont importants dans la suite.

Nous définissons un opérateur Δ qui, comme nous allons le voir dans la section suivante, va mesurer la différence entre l'opérateur de Casimir sur les symboles fins $\mathcal{P}_\delta(M)$ et l'opérateur de Casimir sur les symboles $\mathcal{S}_\delta(M)$.

Définition 4.3.2. *On définit un opérateur sur les symboles fins* $\Sigma^{k,d}_\delta(M)$ *comme suit*

$$\Delta : \Sigma^{k,d}_\delta(M) \to \Sigma^{k,d-\frac{1}{2}}_\delta(M) : S \mapsto -\omega^{rs}T_r\xi_s\partial_\zeta S.$$

On peut aussi l'écrire d'une manière explicite comme suit

$$\Delta := \left(\sum_{r=1}^{l}(\alpha_rB_r - \beta_rA_r) + \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{D}_i\right)\partial_\zeta.$$

Dans la suite, pour alléger les notations, nous allons adopter la convention d'Einstein en sous-entendant les sommes sur les indices répétés. Les commutateurs suivants ont un rôle important dans les calculs ultérieurs.

Lemme 4.3.3. *(i) Le commutateur de* Δ *et* $\mathcal{E}_\zeta$ *vaut* Δ*, c'est-à-dire* $[\Delta, \mathcal{E}_\zeta] = \Delta$

(ii) $[\Delta, z] = q^s \xi_s \partial_\zeta$

(iii) $[\Delta, q^k] = -(-1)^{\tilde{k}\tilde{s}} \omega^{ks} \xi_s \partial_\zeta.$

(iv) L'opérateur Δ *entrelace les actions de la superalgèbre de Lie affine* $\mathrm{Aff}(2l+2|n)$*. En d'autres termes, pour tout* $X_f \in \mathrm{Aff}(2l+2|n)$*, on a* $[\Delta, L_{X_f}] = 0$.

(v) $[\Delta, \xi_i] = 0$

(vi) $[\Delta, \partial_{\xi_i}] = (-1)^{\tilde{i}\tilde{r}} \omega^{ri} T_r \partial_\zeta.$

Ces résultats sont obtenus par un simple calcul. On a en plus les commutateurs suivants :

Lemme 4.3.4. *(i)* $[\Delta, z^2] = 2zq^s \xi_s \partial_\zeta$ *;*
(ii) $[\Delta, q^l \xi_l] = 0$ *;*
(iii) $[\Delta, \omega_{ji} q^j \partial_{\xi_i}] = \xi_s \partial_{\xi_s} \partial_\zeta - q^r T_r \partial_\zeta.$

Il suffit d'utiliser les résultats élémentaires fournis dans le lemme 4.3.3.

On construit dans la proposition suivante l'application équivariante entre $\mathcal{P}_\delta(M)$ et $\mathcal{S}_\delta(M)$ qui permettra de construire une quantification fine $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante.

Proposition 4.3.5. *Si* δ *n'est pas compris dans l'ensemble suivant*

$$I_\delta := \bigcup_{d=0}^{\infty} \{\frac{2c-j}{2}, \quad 0 \leqslant j \leqslant 2d-1, \quad 0 \leqslant c \leqslant d\}$$

alors l'application $\mathcal{S}Q : \mathcal{P}_\delta(M) \to \mathcal{S}_\delta(M)$ *définie par*

$$S \mapsto \left(\sum_{a=0}^{\infty} \Delta^a \frac{1}{2^a a!} \prod_{j=0}^{a-1} \frac{1}{\left(c - \delta - \frac{1}{2}j\right)} \right) S$$

où c *est le degré de* S *en* ζ*, est une application* $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$*-équivariante de* $\mathcal{P}_\delta(M)$ *dans* $\mathcal{S}_\delta(M)$ *si on pose* $\prod_{j=0}^{-1} \frac{1}{\left(c-\delta-\frac{1}{2}j\right)} = 1$.

Démonstration. L'application $\mathcal{SQ}$ entrelace les actions de la superalgèbre de Lie affine $\mathrm{Aff}(2l+2|n)$. Grâce au commutateur de X_{z^2} et X_{q^r} donné dans le lemme 4.3.1, on voit que pour montrer que $\mathcal{SQ}$ est $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante de $\mathcal{P}_\delta(M)$ dans $\mathcal{S}_\delta(M)$, il suffit de prouver que $\mathcal{SQ}$ entrelace l'action de X_{z^2} sur les espaces $\mathcal{P}_\delta(M)$ et $\mathcal{S}_\delta(M)$.
Une application de la forme $\sum_{a=0}^{\infty}\Delta^a C_a$ où C_a est une constante pour tout entier naturel a, est $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante de $\mathcal{P}_\delta(M)$ dans $\mathcal{S}_\delta(M)$ si et seulement si la condition suivante est vérifiée

$$L^S_{X_{z^2}} \circ \sum_{a=0}^{\infty} \Delta^a C_a = \sum_{a=0}^{\infty} \Delta^a C_a \circ L^\Sigma_{X_{z^2}}$$

Cette égalité s'écrit également comme suit

$$(L^S_{X_{z^2}} - L^\Sigma_{X_{z^2}}) \circ \sum_{a=0}^{\infty} \Delta^a C_a + L^\Sigma_{X_{z^2}} \circ \sum_{a=0}^{\infty} \Delta^a C_a = \sum_{a=0}^{\infty} \Delta^a C_a \circ L^\Sigma_{X_{z^2}}.$$

Puisqu'on sait par (4.8) que $L^S_{X_{z^2}} - L^\Sigma_{X_{z^2}} = -q^s\xi_s\partial_\zeta$, alors cette égalité s'écrit encore comme suit

$$q^s\xi_s\partial_\zeta \circ \sum_{a=0}^{\infty} \Delta^a C_a + \sum_{a=0}^{\infty} [L^\Sigma_{X_{z^2}}, \Delta^a] C_a = 0. \tag{4.17}$$

Il suffit de connaître le commutateur $[L^\Sigma_{X_{z^2}}, \Delta^a]$ donné dans le lemme suivant pour conclure.

Lemme 4.3.6. *Pour tout entier naturel non nul a, on a*

$$[L^\Sigma_{X_{z^2}}, \Delta^a] = 2a\Delta^{a-1} q^s\xi_s\partial_\zeta(\mathcal{E}_\zeta - \delta - \frac{1}{2}(a-1)).$$

Démonstration. On prouve cette formule par induction. On montre que cette formule est vraie pour $a=1$. En effet, grâce aux formules (4.15) et (4.16), on peut voir que

$$[\Delta, L^\Sigma_{X_{z^2}}] = [\Delta, 2zL^\Sigma_{X_z}] - [\Delta, N]$$

où $N = z^2\partial_z - (q^s\xi_s)(\omega_{ji}q^j\partial_{\xi_i})$. Puisque Δ est équivariant sous les actions des champs de vecteurs affines, alors il suffit de calculer les commutateurs $[\Delta, z]$ et $[\Delta, N]$ en utilisant les résultats élémentaires donnés dans le lemme 4.3.3 et dans le lemme 4.3.4.
On montre ensuite que la formule du lemme 4.3.6 est vraie pour a quelconque. En effet, on utilise le fait que

$$[L^\Sigma_{X_{z^2}}, \Delta^a] = [L^\Sigma_{X_{z^2}}, \Delta^{a-1}]\Delta + \Delta^{a-1}[L^\Sigma_{X_{z^2}}, \Delta].$$

En supposant que la formule du lemme 4.3.6 est vraie pour $a-1$, le deuxième membre de cette égalité s'écrit également comme suit

$$2(a-1)\Delta^{a-2}q^s\xi_s\partial_\zeta\left(\mathcal{E}_\zeta-\delta-\frac{1}{2}(a-2)\right)\Delta+2\Delta^{a-1}q^s\xi_s\partial_\zeta(\mathcal{E}_\zeta-\delta).$$

En utilisant le fait que $[\Delta,\mathcal{E}_\zeta]=\Delta$ et que Δ commute avec $q^s\xi_s$, le commutateur $[L^\Sigma_{X_{z^2}},\Delta^a]$ devient

$$2\Delta^{a-1}q^s\xi_s\partial_\zeta\left((a-1)(\mathcal{E}_\zeta-\delta)-\frac{1}{2}a(a-1)+(\mathcal{E}_\zeta-\delta)\right).$$

Ainsi la formule du lemme 4.3.6 est prouvée. □

Revenons à la démonstration de la proposition. Grâce à la formule du lemme 4.3.6, l'expression (4.17) s'écrit comme suit

$$-q^s\xi_s\partial_\zeta\circ\sum_{a=0}^{\infty}\Delta^aC_a+2\sum_{a=1}^{\infty}a\Delta^{a-1}q^s\xi_s\partial_\zeta\left(\mathcal{E}_\zeta-\delta-\frac{1}{2}(a-1)\right)C_a=0,$$

ou encore

$$\sum_{a=1}^{\infty}q^s\xi_s\partial_\zeta\Delta^{a-1}\left(-C_{a-1}+2a\left(\mathcal{E}_\zeta-\delta-\frac{1}{2}(a-1)\right)C_a\right)=0.$$

Une application de la forme $\sum_{a=0}^{\infty}\Delta^aC_a$ est $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante si et seulement si les constantes C_a de la proposition 4.3.5 sont données par la formule suivante

$$C_a=\frac{C_{a-1}}{2a\left(c-\delta-\frac{1}{2}(a-1)\right)}$$

pour tout $a\in\mathbb{N}_0$. □

Le résultat principal est donné par le théorème suivant.

Théorème 4.3.7. *Si $\delta\notin I_\delta\cup\mathsf{C}$ où $\mathsf{C}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathfrak{C}'_k$ et si $Q^{\mathfrak{sl}}$ est la quantification $\mathfrak{pgl}(2l+2|n)$-équivariante, alors l'application $Q=Q^{\mathfrak{sl}}\circ\mathcal{S}Q$ est une quantification fine $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante sur*

$$\mathcal{P}_\delta(M)=\bigoplus_{d\in\frac{1}{2}\mathbb{N}}\mathcal{P}^d_\delta(M).$$

Démonstration. On peut voir qu'une condition suffisante d'existence de Q sur $\mathcal{P}^d_\delta(M)$ est simplement l'existence de $\mathcal{S}Q$ sur $\mathcal{P}^d_\delta(M)$ et l'existence de $Q^{\mathfrak{sl}}$ sur $\mathcal{S}Q(\mathcal{P}^d_\delta(M))$. L'existence de $\mathcal{S}Q$ sur $\mathcal{P}^d_\delta(M)$ est assurée par le fait que

$$\delta \notin \{\frac{2c-j}{2}, \quad 0 \leqslant j \leqslant 2d-1, \quad 0 \leqslant c \leqslant d\}$$

tandis que l'existence de $Q^{\mathfrak{sl}}$ sur $\mathcal{S}Q(\mathcal{P}^d_\delta(M))$ est assurée par le fait que $\delta \notin \bigcup_{k=\lceil d\rceil}^{2d} \mathfrak{C}'_k$. L'existence de Q sur $\mathcal{P}_\delta(M)$ est alors assurée par le fait que $\delta \notin I_\delta \cup \mathsf{C}$. □

4.4 Opérateur de Casimir sur les espaces de symboles $\mathcal{S}_\delta(M)$ et $\Sigma_\delta(M)$

La question de l'unicité de la quantification fine $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante sera traitée en comparant l'opérateur de Casimir $C^{\mathcal{P}}$ sur les symboles fins et l'opérateur de Casimir $C^{\mathcal{D}}$ sur les opérateurs différentiels.

Proposition 4.4.1. *Si $m = 2l+1-n$ désigne la superdimension alors*

1. *l'opérateur de Casimir associé à la représentation $(\mathcal{P}_\delta, L^{\mathcal{P}})$ est donné par la formule suivante :*
$$C^{\mathcal{P}}|_{\Sigma^{k,d}_\delta} = \alpha_{k,d}\mathrm{Id} \tag{4.18}$$
avec $\alpha_{k,d}$ une constante qui dépend de deux variables k(degré normal) et d(degré d'Heisenberg) comme suit :
$$\begin{aligned}\alpha_{k,d} = k^2 + 2(d^2 - kd) + (k-d)(m-2\delta)\\ + \frac{1}{2}(2d-k)(m+1-4\delta) + \frac{1}{2}\delta(2\delta - m - 1).\end{aligned} \tag{4.19}$$

2. *l'opérateur de Casimir associé à la représentation $(\mathcal{S}^k_\delta, L^S)$ est donné par la formule suivante :*
$$C^S = C^\Sigma + \frac{1}{2}\Delta, \tag{4.20}$$
avec Δ donné par la définition 4.3.2.

Démonstration. En utilisant la définition 1.10.8 et le lemme 1.10.12, on peut écrire l'opérateur de Casimir C^Σ sur les symboles fins comme suit :

$$-\frac{1}{2}L^\Sigma_{X_{z^2}}L^\Sigma_{X_1}-\sum_{i=1}^{n}L^\Sigma_{X_{z\theta_j}}L^\Sigma_{X_{\theta_j}}+(L^\Sigma_{X_z})^2+\sum_{i,j}^{n}\sum_{i<j}(L^\Sigma_{X_{\theta_{i-1}\theta_{j-1}}})^2+\sum_{j=1}^{n}L^\Sigma_{X_{\theta_j}}L^\Sigma_{X_{z\theta_j}}$$
$$-\frac{1}{2}L^\Sigma_{X_1}L^\Sigma_{X_{z^2}}-\frac{1}{2}\sum_i L^\Sigma_{X_{y^2_{i-1}}}L^\Sigma_{X_{x^2_{i-1}}}-\frac{1}{2}\sum_j L^\Sigma_{X_{y_{j-1}z}}L^\Sigma_{X_{x_{j-1}}}-\sum_{i,j}L^\Sigma_{X_{y_{i-1}y_{j-1}}}L^\Sigma_{X_{x_{j-1}x_{i-1}}}$$
$$-\sum_j L^\Sigma_{X_{x_{j-1}}}L^\Sigma_{X_{y_{j-1}z}}-\frac{1}{2}\sum_i L^\Sigma_{X_{x^2_{i-1}}}L^\Sigma_{X_{y^2_{i-1}}}-\sum_{i,j}L^\Sigma_{X_{x_{j-1}x_{i-1}}}L^\Sigma_{X_{y_{i-1}y_{j-1}}}+\sum_{i,j}L^\Sigma_{X_{x_{i-1}y_{j-1}}}L^\Sigma_{X_{x_{j-1}y_{i-1}}}$$
$$-\sum_{i,j}L^\Sigma_{X_{y_{i-l-2}\theta_j}}L^\Sigma_{X_{x_{i-l-2}\theta_j}}+\sum_{i,j}L^\Sigma_{X_{x_{i-1}\theta_j}}L^\Sigma_{X_{y_{i-1}\theta_j}}+\sum_j L^\Sigma_{X_{y_{j-1}}}L^\Sigma_{X_{x_{j-1}z}}+\sum_i L^\Sigma_{X_{x_{i-1}z}}L^\Sigma_{X_{y_{i-1}}}.$$

En utilisant la formule (4.7) de la dérivée de Lie dans l'expression de C^Σ, on peut voir que C^Σ est un opérateur différentiel qui peut s'écrire en termes des opérateurs ∂_z, ∂_ζ, T_i et ∂_{ξ_i}. Comme C^Σ commute avec $X_1=\partial_z$ et comme ∂_z et T_i commutent, les coefficients de C^Σ ne dépendent pas de z. De plus, puisque C^Σ commute avec X_{θ_i}, alors les coefficients de l'opérateur de Casimir C^Σ ne dépendent pas de θ_i. La commutation de C^Σ avec X_{x_i} implique que les coefficients de C^Σ ne dépendent pas de x_i et la commutation de C^Σ avec X_{y_i} montre que les coefficients de C^Σ ne dépendent pas de la coordonnée y_i.

Par conséquent, on néglige tous les termes dont les coefficients dépendent des variables x_i, y_i, z et θ_i. A cause des expressions explicites des termes $L^\Sigma_{X_{z^2}}$ et $\sum_i L^\Sigma_{X_{z\theta_i}}$, les contributions des termes $-\frac{1}{2}L^\Sigma_{X_{z^2}}L^\Sigma_{X_1}$ et $\sum_{i=1}^n L^\Sigma_{X_{z\theta_i}}L^\Sigma_{X_{\theta_i}}$ sont nulles. Ainsi la contribution du terme $-\frac{1}{2}L^\Sigma_{X_1}L^\Sigma_{X_{z^2}}$ est la même que celle donnée par

$$-\frac{1}{2}L^\Sigma_{[X_1,X_{z^2}]}=-\frac{1}{2}L^\Sigma_{X_{\{1,z^2\}}}=-L^\Sigma_{X_z}=-\left(\delta-\mathcal{E}_\zeta-\frac{1}{2}\sum_{i,k}(\alpha_i\partial_{\alpha_i}+\beta_i\partial_{\beta_i}+\gamma_k\partial_{\gamma_k})\right).$$

La contribution du terme $\sum_{i,j}^n\sum_{i<j}(L^\Sigma_{X_{\theta_i\theta_j}})^2$ est égale à $\frac{1}{4}\sum_{i,j}\sum_{i<j}(\alpha_i\partial_{\alpha_j}-\alpha_j\partial_{\alpha_i})(\alpha_i\partial_{\alpha_j}-\alpha_j\partial_{\alpha_i})$. Donc on peut encore l'écrire comme suit

$$\begin{aligned}(\sum_{i,j}^{n}\sum_{i<j}L^\Sigma_{X_{\theta_i\theta_j}})^2 &= \frac{1}{4}\sum_{i,j}\sum_{i<j}(-\alpha_i\partial_{\alpha_i}+2\alpha_i\alpha_j\partial_{\alpha_j}\partial_{\alpha_i}-\alpha_j\partial_{\alpha_j})\\ &= \frac{1}{4}\left(-(n-i)\alpha_i\partial_{\alpha_i}-(i-1)\alpha_j\partial_{\alpha_j}+2\sum_{i,j}\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j\partial_{\alpha_j}\partial_{\alpha_i}\right).\end{aligned}$$

Le troisième terme $\sum_{i,j}\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j\partial_{\alpha_j}\partial_{\alpha_i}$ du second membre peut s'écrire également comme suit

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}\sum_{i<j}\alpha_i\partial_{\alpha_i}\alpha_j\partial_{\alpha_j} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j}\alpha_i\partial_{\alpha_i}\alpha_j\partial_{\alpha_j}-\sum_{i=j}\alpha_i\partial_{\alpha_i}\alpha_j\partial_{\alpha_j}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j}\alpha_i\partial_{\alpha_i}\alpha_j\partial_{\alpha_j}-\sum_{i}\alpha_i\partial_{\alpha_i}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{E}_\alpha^2-\mathcal{E}_\alpha\right).\end{aligned}$$

On obtient enfin que la contribution de $\sum_{i,j}^n\sum_{i<j}(L^\Sigma_{X_{\theta_i\theta_j}})^2$ est égale à $\frac{1}{4}(\mathcal{E}_\alpha^2-n\mathcal{E}_\alpha)$. La contribution du terme $\sum_{i=1}^n L^\Sigma_{X_{\theta_i}}L^\Sigma_{X_{z\theta_i}}$ est égale à $\frac{n}{2}\left(\delta\mathrm{Id}-\mathcal{E}_\zeta-\frac{1}{2}\mathcal{E}_\alpha-\frac{1}{2}\mathcal{E}_\beta-\frac{1}{2}\mathcal{E}_\gamma\right)$. La somme de toutes les contributions de l'opérateur de Casimir C^Σ est donc un polynôme en les opérateurs d'Euler correspondant aux coordonnées ζ et ξ_i. Il est alors facile de voir que la restriction de $C^{\mathcal{P}}$ à $\Sigma^{k,d}$ est égale à $\alpha_{k,d}\mathrm{Id}$.
La preuve de la formule (4.20) est similaire. Pour cela, on utilise la formule (4.8) qui définit la dérivée de Lie sur les symboles $\mathcal{S}_\delta(M)$. Les termes $-\sum_{i=1}^n L^S_{X_{z\theta_j}}L^S_{X_{\theta_j}}$ et $\sum_{j=1}^n L^S_{X_{\theta_j}}L^S_{X_{z\theta_j}}$ donnent des contributions supplémentaires égales dont la somme vaut $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\alpha_j\bar{D}_j\partial_\zeta$. De même les termes $-\sum_{j=2}^{l+1}L^S_{X_{y_{j-1}z}}L^S_{X_{x_{j-1}}}$ et $-\sum_{j=2}^{l+1}L^S_{X_{x_{j-1}}}L^S_{X_{y_{j-1}z}}$ donnent des contributions supplémentaires égales dont la somme vaut $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^l\alpha_iB_i\partial_\zeta$. Enfin les termes $\sum_{j=2}^{l+1}L^S_{X_{x_{j-1}z}}L^S_{X_{y_{j-1}}}$ et $\sum_{j=2}^{l+1}L^S_{X_{y_{j-1}}}L^S_{X_{x_{j-1}z}}$ donnent des contributions supplémentaires égales dont la somme vaut $-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^l\beta_iA_i\partial_\zeta$. La somme de toutes les contributions donne le résultat annoncé. $\square$

4.5 Opérateur de Casimir sur les opérateurs différentiels

Nous rappelons la définition de l'opérateur γ qui mesure la différence entre les représentations $(\mathcal{S}_\delta, L)$ et $(\mathcal{S}_\delta,\mathcal{L})$:

$$\gamma:\mathfrak{spo}(2l+2|n)\to\mathfrak{gl}(\mathcal{S}_\delta,\mathcal{S}_\delta): X_f\mapsto\gamma(X_f)=\mathcal{L}_{X_f}-L_{X_f}. \tag{4.21}$$

A cause de la nullité de $\gamma(X_f)$ (confer proposition 1.10.5) sur les champs de vecteurs de contact X_f linéaires et constants, c'est-à-dire les éléments de $\mathfrak{g}_{-2}\oplus\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0$ dans la graduation (1.25), il reste à calculer γ sur les champs de vecteurs de contact X_f appartenant à $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$; c'est-à-dire sur les champs de vecteurs de contact X_{z^2}, $X_{z\theta_j}$, X_{x_iz} et X_{y_iz}. La connaissance de l'opérateur γ permettra de calculer l'opérateur N qui mesure la différence entre les opérateurs de Casimir $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ et C^{Σ}.

Avant cela nous établissons les faits suivants établis par P. Mathonet et F. Radoux dans [28] et qui ont un rôle pratique dans nos calculs.

Définition 4.5.1. *Le produit intérieur d'un élément $h \in (\mathbb{R}^{2l+1|n})^*$ et d'un tenseur symétrique $h_1 \vee \ldots \vee h_k$, avec $h_1 \ldots h_k \in \mathbb{R}^{2l+1|n}$ est défini par*

$$i(h)h_1 \vee \ldots \vee h_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{\tilde{h}(\Sigma_{r=1}^{j-1}\tilde{h_r})} \langle h, h_j \rangle h_1 \vee \ldots \hat{j} \ldots \vee h_k,$$

où $\langle h, x \rangle$ désigne la multiplication standard de la matrice ligne h par la matrice colonne x.

Nous pouvons expliciter la définition comme suit : on étend le produit intérieur entre $(\mathbb{R}^{2l+1|n})^*$ et $(\mathbb{R}^{2l+1|n})$ comme une dérivation sur la partie tensorielle d'un tenseur symétrique. Dans notre cas on étend le produit intérieur $i(h)$ sur $\mathcal{S}_\delta$ en disant qu'il s'annule sur les densités de poids δ (n'agit pas sur le coefficient du polynôme) et que donc c'est un opérateur différentiel d'ordre zero et de parité $\tilde{h}$.

Nous rappelons que (cf [28]) que si $h \in (\mathbb{R}^{2l+1|n})^*$ alors X^h est le champ de vecteurs projectif quadratique donné par la formule :

$$X^h = \sum_{j=1}^{2l+1+n} h_j t^j (-1)^{\tilde{j}} \mathcal{E}.$$

On peut maintenant donner l'opérateur γ comme suit :

Lemme 4.5.2. *Si h est un champ de vecteurs projectif de contact quadratique et si $h' \in (\mathbb{R}^{2l+1|n})^*$ est tel que $X^{h'} = h$ alors on a sur $\mathcal{S}^k_\delta$*

$$\gamma(h) = -(2\lambda + k - 1)\, i(h'), \tag{4.22}$$

où $i(h')$ désigne le produit intérieur donné par la définition 4.5.1.

La preuve de ce lemme est donnée en détail dans [28]. Elle consiste à considérer que les deux membres de l'égalité (4.22) sont des opérateurs différentiels d'ordre zero et qu'ils donnent le même résultat quand on les calcule sur un tenseur $h_1 \vee \ldots \vee h_k$, avec $h_1, \ldots, h_k \in \mathbb{R}^{2l+1|n}$. Pour cela on développe l'expression

$$Q_{\mathrm{Aff}}(\gamma(h)(h_1 \vee \ldots \vee h_k)),$$

en utilisant la définition de γ donnée par (4.21).

Proposition 4.5.3. *Soit ε^k le vecteur dual du $k^{ième}$ vecteur colonne de la base canonique de $\mathbb{R}^{2l+1|n}$. On va désigner par ζ (resp. η_k, resp. μ_k, resp. Ω_k) la coordonnée moment canonique associée à la variable z (resp. x_k, resp. y_k, resp. θ_k).*

1. *Quand on écrit un symbole en termes de coordonnées moments contact $\zeta, \alpha_i, \beta_i \gamma_i$, l'opérateur $i(\varepsilon^1)$ se lit comme l'opérateur $\partial_\zeta + x_k\partial_{\beta_k} + y_k\partial_{\alpha_k} - \theta_k\partial_{\gamma_k}$.*
2. *Quand on écrit un symbole en termes de coordonnées moments contact, l'opérateur $i(\varepsilon^k)$ où $2 \leqslant k \leqslant l$ (resp. $l+1 \leqslant k \leqslant 2l$, resp. $2l+1 \leqslant k \leqslant 2l+n$) se lit comme l'opérateur $\frac{1}{2}\partial_{\alpha_k}$ (resp. $-\frac{1}{2}\partial_{\beta_k}$, resp. $-\frac{1}{2}\partial_{\gamma_k}$).*

Démonstration. Le symbole $\zeta^c\alpha_i^I\beta_i^J\gamma_i^T$ s'écrit en termes des coordonnées moments canoniques comme

$$\zeta^c(\eta_i + y_i\zeta)^I(-\mu_i + x_i\zeta)^J(\Omega_i - \theta_i\zeta)^T. \tag{4.23}$$

Il suffit pour démontrer le point 1, de montrer qu'appliquer ∂_ζ au symbole $\zeta^c(\eta_i + y_i\zeta)^I(-\mu_i + x_i\zeta)^J(\Omega_i - \theta_i\zeta)^T$ revient à appliquer l'opérateur $\partial_\zeta + x_i\partial_{\alpha_i} + y_i\partial_{\beta_i} - \theta_i\partial_{\gamma_i}$ au symbole $\zeta^c\alpha_i^I\beta_i^J\gamma_i^T$ et à réécrire le symbole obtenu en termes de coordonnées moments canoniques. La démonstration du point 2 est similaire. □

Nous avons maintenant les éléments nécessaires pour calculer l'opérateur de casimir sur les opérateurs différentiels $\mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(M)$. Nous commençons par définir les invariants affines suivants.

Définition 4.5.4. (*i*) *On appelle divergence de contact et on note* Div_C, *l'opérateur suivant*

$$\mathrm{Div}_C : \Sigma^{k,d}_\delta \to \Sigma^{k-1,d-1}_\delta : S \mapsto \partial_z\partial_\zeta S;$$

(*ii*) *On appelle divergence tangentielle et on note* Div_T, *l'opérateur suivant*

$$\mathrm{Div}_T : \Sigma^{k,d}_\delta \to \Sigma^{k-1,d-\frac{1}{2}}_\delta : S \mapsto (A_r\partial_{\alpha_r} + B_r\partial_{\beta_r} + \bar{D}_r\partial_{\gamma_r})S.$$

Les opérateurs Div_C et Div_T entrelacent l'action de la superalgèbre de Lie affine $\mathrm{Aff}(2l+2|n)$.

Proposition 4.5.5. *Si m désigne la superdimension, alors l'opérateur de Casimir $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ sur les opérateurs différentiels $\mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(M)$ s'écrit comme suit*

$$\mathcal{C}^{\mathcal{D}} = C^S + N_{\mathcal{SD}},$$

où l'opérateur $N_{\mathcal{SD}}$ est égal à

$$\frac{(2\lambda+k-1)}{2}\left(2\mathrm{Div}_C + \mathrm{Div}_T\right).$$

Démonstration. En utilisant la définition de l'application $\gamma(X_f)$ donnée par la formule (4.21), le fait que $\gamma(X_f)$ s'annule sur $\mathfrak{g}_{-2}\oplus\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0$ et en utilisant la définition de l'opérateur de Casimir donnée dans (1.10.8), on obtient la formule suivante

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^{\mathcal{D}} = C^S &- \frac{1}{2}\gamma(X_{z^2})L^S_{X_1} - \sum_{i=1}^n \gamma(X_{z\theta_i})L^S_{X_{\theta_i}} + \sum_{i=1}^n L^S_{X_{\theta_i}}\gamma(X_{z\theta_i}) - \frac{1}{2}L^S_{X_1}\gamma(X_{z^2})\\ &+ \sum_{i=1}^l L^S_{X_{y_i}}\gamma(X_{x_iz}) - \sum_{i=1}^l L^S_{X_{x_i}}\gamma(X_{y_iz}) - \sum_{i=1}^l \gamma(X_{y_iz})L^S_{X_{x_i}} + \sum_{i=1}^l \gamma(X_{x_iz})L^S_{X_{y_i}}.\end{aligned}$$

Définissons l'opérateur $N_{\mathcal{SD}}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}N_{\mathcal{SD}} = &-\frac{1}{2}\gamma(X_{z^2})L^S_{X_1} - \sum_{i=1}^n \gamma(X_{z\theta_i})L^S_{X_{\theta_i}} + \sum_{i=1}^n L^S_{X_{\theta_i}}\gamma(X_{z\theta_i}) - \frac{1}{2}L^S_{X_1}\gamma(X_{z^2})\\ &+ \sum_{i=1}^l L^S_{X_{y_i}}\gamma(X_{x_iz}) - \sum_{i=1}^l L^S_{X_{x_i}}\gamma(X_{y_iz}) - \sum_{i=1}^l \gamma(X_{y_iz})L^S_{X_{x_i}} + \sum_{i=1}^l \gamma(X_{x_iz})L^S_{X_{y_i}}.\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.5.2 et la proposition 4.5.3, on obtient les différentes contributions des termes de $N_{\mathcal{SD}}$. Il est facile de voir que les contributions des termes $-\frac{1}{2}\gamma(X_{z^2})L^S_{X_1}$ et $-\frac{1}{2}L^S_{X_1}\gamma(X_{z^2})$ se doublent et valent

$$(2\lambda+k-1)(\partial_z\partial_\zeta - \theta_j\partial_{\gamma_j} + y_i\partial_{\alpha_i} + x_i\partial_{\beta_i})$$

tandis que les termes $-\sum_{i=1}^n \gamma(X_{z\theta_i})L^S_{X_{\theta_i}}$ et $\sum_{i=1}^n L^S_{X_{\theta_i}}\gamma(X_{z\theta_i})$ donnent la même contribution égale à

$$\frac{(2\lambda+k-1)}{4}\sum_{j=1}^n(\partial_{\theta_j}+\theta_j\partial_z)\partial_{\gamma_j}.$$

Les termes $-\sum_{i=1}^{l} L^S_{X_{x_i}}\gamma(X_{y_iz})$ et $-\sum_{i=1}^{l}\gamma(X_{y_iz})L^S_{X_{x_i}}$ ont même contribution égale à

$$-\frac{(2\lambda+k-1)}{4}\sum_{i=1}^{l}(\partial_{y_i}+x_i\partial_z)\partial_{\beta_i}$$

et enfin les termes $\sum_{i=1}^{l} L^S_{X_{y_i}}\gamma(X_{x_iz})$ et $\sum_{i=1}^{l}\gamma(X_{x_iz})L^S_{X_{y_i}}$ ont aussi une même contribution égale à

$$-\frac{(2\lambda+k-1)}{4}\sum_{i=1}^{l}(-\partial_{x_i}+y_i\partial_z)\partial_{\alpha_i}.$$

La somme de toutes ces contributions donnent l'expression de l'opérateur $N_{\mathcal{SD}}$. □

Remarque 4.5.6. *On voit donc que l'opérateur $N_{\mathcal{PD}}$ qui sépare l'opérateur de Casimir sur les symboles fins $\mathcal{P}_\delta(M)$ et l'opérateur de Casimir sur les opérateurs différentiels $\mathcal{D}^k_{\lambda\mu}(M)$ est un opérateur qui s'écrit*

$$N_{\mathcal{PD}}=\frac{1}{2}\Delta+\frac{(2\lambda+k-1)}{2}\left(2\mathrm{Div}_C+\mathrm{Div}_T\right).$$

4.6 Unicité de la quantification fine $\mathfrak{spo}(2l{+}2|n)$-équivariante

Nous donnons d'abord la définition de l'ensemble des valeurs critiques de δ.

Définition 4.6.1. *Une valeur de δ est dite critique s'il existe des valeurs k, d, k' et d' satisfaisant les conditions suivantes*

$$d'\leqslant k'\leqslant 2d',\quad d'<d\quad \text{et}\quad d\leqslant k\leqslant 2d.$$

telles que

$$\alpha_{k,d}-\alpha_{k',d'}=0.$$

Nous calculons dans la proposition suivante les valeurs explicites de ces valeurs critiques.

Proposition 4.6.2. *Si $P(k,k',d,d')$ représente la fonction*

$$(k-k')(2(k+k')+m-1)-4(kd-k'd')+2(d-d')(2d+2d'+1),$$

l'ensemble $C_{\delta,\mathrm{crit}}$ des valeurs critiques de δ est donné par

$$\{\frac{P(k,k',d,d')}{4(d-d')}, k,k'\in\mathbb{N}, d,d'\in\frac{1}{2}\mathbb{N}, d'\leqslant k'\leqslant 2d', d'<d, d\leqslant k\leqslant 2d\}.$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la définition 4.6.1 et la proposition 4.19 pour conclure. $\square$

Théorème 4.6.3. *Si $\delta \notin C_{\delta,\mathrm{crit}}$ et si $\delta \notin I_\delta \cup \mathsf{C}$, alors la quantification fine $\mathfrak{spo}(2l+2|n)$-équivariante donnée dans le théorème 4.3.7 est unique.*

Démonstration. Si $S \in \Sigma_\delta^{k,d}(M)$, alors il existe un unique $\hat{S} = S + \sum_{\substack{k',d' \\ d' \leqslant k' \leqslant 2d' \\ d'<d}} S_{k',d'}$ dont le symbole d'Heisenberg est donné par S et qui est vecteur propre de valeur propre $\alpha_{k,d}$ de l'opérateur $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$. En effet, ces conditions s'écrivent sous la forme suivante :

$$(C^\Sigma + N_{\mathcal{PD}}) \left(S + \sum_{\substack{k',d' \\ d' \leqslant k' \leqslant 2d' \\ d'<d}} S_{k',d'} \right) = \alpha_{k,d} \left(S + \sum_{\substack{k',d' \\ d' \leqslant k' \leqslant 2d' \\ d'<d}} S_{k',d'} \right). \tag{4.24}$$

Puisque l'opérateur $N_{\mathcal{PD}}$ envoie $\Sigma_\delta^{k,d}(M)$ sur la somme directe

$$\Sigma_\delta^{k,d-\frac{1}{2}}(M) \oplus \Sigma_\delta^{k-1,d-\frac{1}{2}}(M) \oplus \Sigma_\delta^{k-1,d-1}(M),$$

on obtient alors, d'une manière générale, des équations en les symboles $S_{k',d'}$ qui sont de la forme

$$(\alpha_{k,d} - \alpha_{k',d'})S_{k',d'} = f(S_{k'',d''}), \quad \text{avec} \quad k''+d'' > k'+d' \tag{4.25}$$

et f une fonction qui dépend de l'opérateur $N_{\mathcal{PD}}$.

Puisque δ est non critique, les expressions $(\alpha_{k,d} - \alpha_{k',d'})$ dans (4.25) sont non nulles et les équations (4.25) possèdent chacune une solution unique, i.e. les inconnues $S_{k',d'}$ sont univoquement déterminées. On détermine ainsi de proche en proche les inconnues $S_{k',d'}$.
Donc, pour résumer, si $S \in \Sigma_\delta^{k,d}$, alors il existe un unique $\hat{S}$ tel que $h\sigma_{\lambda,\mu}^d(\hat{S}) = S$ et tel que $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}(\hat{S}) = \alpha_{k,d}(\hat{S})$. On définit alors $Q(S)$ comme étant $\hat{S}$.
Si maintenant $S \in \mathcal{P}_\delta^d(M)$ et si $S = \sum_{k=\lceil d \rceil}^{2d} S_k$ avec $S_k \in \Sigma_\delta^{k,d}$, alors on pose $Q(S) := \sum_{k=\lceil d \rceil}^{2d} Q(S_k)$. Puisque nous avons

$$h\sigma_{\lambda,\mu}^d(\mathcal{L}_{X_f}^{\lambda\mu} Q(S_k)) = L_{X_f}^{\mathcal{P}} h\sigma_{\lambda,\mu}^d Q(S_k) = L_{X_f}^{\mathcal{P}}(S_k), \quad \forall k \quad \text{et} \quad h\sigma_{\lambda,\mu}^d(Q(L_{X_f}^{\mathcal{P}}(S_k))) = L_{X_f}^{\mathcal{P}}(S_k), \forall k$$

alors nous obtenons

$$\mathcal{L}^{\lambda\mu}_{X_f} Q(S_k) = Q L^{\mathcal{P}}_{X_f}(S_k) \quad \forall k$$

puisque les deux membres sont des vecteurs propres de $C^{\mathcal{D}}$ de même valeur propre. En effet, on a :

$$\mathcal{C}^{\mathcal{D}}(\mathcal{L}^{\lambda\mu}_{X_f} Q(S_k)) = \mathcal{L}^{\lambda\mu}_{X_f} \mathcal{C}^{\mathcal{D}} Q(S_k) = \alpha_{k,d} \mathcal{L}^{\lambda\mu}_{X_f} Q(S_k)) \, \forall k$$

$$\text{tandis que} \quad \mathcal{C}^{\mathcal{D}} Q(L^{\mathcal{P}}_{X_f}(S_k)) = \alpha_{k,d} Q(L^{\mathcal{P}}_{X_f}(S_k)) \, \forall k.$$

En effet, $L^{\mathcal{P}}_{X_f}(S_k)$ est vecteur propre de C^{Σ} de valeur propre $\alpha_{k,d}$ puisque l'on a

$$C^{\Sigma}(L^{\mathcal{P}}_{X_f}(S_k)) = L^{\mathcal{P}}_{X_f}(\alpha_{k,d} S_k) = \alpha_{k,d} L^{\mathcal{P}}_{X_f}(S_k).$$

Par linéarité, on a $\mathcal{L}^{\lambda\mu}_{X_f} Q(S) = Q L^{\mathcal{P}}_{X_f}(S)$.

Si Q est une quantification fine sur $\mathcal{P}^d_\delta(M)$, alors ses restrictions aux sous-espaces $\Sigma^{k,d}_\delta(M)$ où $\lceil d \rceil \leqslant k \leqslant 2d$, sont uniques car si $S \in \Sigma^{k,d}_\delta(M)$ alors $Q(S)$ doit être tel que $h\sigma^d_{\lambda,\mu}(Q(S)) = S$ et tel que $\mathcal{L}^{\lambda\mu}_{X_f} Q(S) = Q(L^{\mathcal{P}}_{X_f} S)$, donc $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}(Q(S))$ doit être égal à $\alpha_{k,d} Q(S)$. D'où $Q(S)$ est unique par la première partie de la preuve. Comme la restriction de Q aux espaces $\Sigma^{k,d}_\delta(M)$ est unique alors Q est unique sur $\mathcal{P}^d_\delta(M)$.

Si $\delta \notin C_{\delta,\text{crit}}$, l'existence et l'unicité de la quantification sont assurées sur l'espace $\mathcal{P}^d_\delta(M)$ pour tout $d \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Par conséquent, la quantification équivariante existe et est unique sur $\mathcal{P}_\delta(M)$. □

4.7 Du cas général au cas particulier

Ici nous montrons brièvement comment on peut visualiser sur $S^{1|1}$ les espaces d'opérateurs différentiels bifiltrés et ainsi que les espaces des symboles fins associés. Nous montrons que les formules explicites obtenues dans le deuxième chapitre s'obtiennent également en composant $Q^{\mathfrak{sl}}$ et $\mathcal{S}Q$. En plus, nous montrerons que l'opérateur $N_{\mathcal{PD}}$ qui sépare les opérateurs de Casimir $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ sur les opérateurs différentiels et l'opérateur de Casimir C^{Σ} sur les symboles fins dans le formalisme du chapitre deux (N. Mellouli et al. dans [10]) est le même que celui obtenu dans le nouveau formalisme(V. Ovsienko et C. Conley dans [5]).

4.7.1 Remarque 1

On rappelle que sur $S^{1|1}$ l'espace $\mathrm{Tan}(S^{1|1})$ est constitué par $<\bar{D}>$ et le champ de Reeb s'écrit ∂_x. En plus, on sait que

$$\mathrm{Vect}(S^{1|1}) = K(1) \oplus \mathrm{Tan}(S^{1|1})$$

où $K(1)$ est l'espace des champs de vecteurs $X \in \mathrm{Vect}(S^{1|1})$ qui préservent $\mathrm{Tan}(S^{1|1})$. Un symbole S d'ordre d'Heisenberg k avec k un entier naturel s'écrit $S = [F_k \partial_x^k]$ tandis que si $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$, le symbole S s'écrit $S = [F_k \partial_x^{k-\frac{1}{2}} \bar{D}]$ où F_k est une δ-densité.

Si ζ est la coordonnée moment correspondant à la coordonnée x et si γ est le moment correspondant à $\overline{D}$, alors l'isomorphisme (4.5) nous permet de voir qu'un symbole fin $S \in \mathcal{P}_\delta^k(S^{1|1})$ d'ordre d'Heisenberg entier k s'écrit $S = F_k \zeta^k$ pour une certaine δ-densité F_k tandis qu'un symbole fin $S \in \mathcal{P}_\delta^{k'}(S^{1|1})$ d'ordre d'Heisenberg $k' \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$ s'écrit $S = F_{k'} \zeta^{k'-\frac{1}{2}} \gamma$ pour une certaine δ-densité $F_{k'}$.

Si k est un entier naturel, alors l'application $\mathcal{S}Q$ est définie sur $\mathcal{P}_\delta^k(S^{1|1})$ de la forme suivante :

$$\mathcal{S}Q|_{\mathcal{P}_\delta^k} : \mathcal{P}_\delta^k(S^{1|1}) \to \mathcal{P}_\delta^k(S^{1|1}) \oplus \mathcal{P}_\delta^{k-\frac{1}{2}}(S^{1|1}) : S \mapsto S + C_1 \Delta S,$$

où $\Delta = \gamma \bar{D} \partial_\zeta$ et $C_1 = \frac{1}{2(c-\delta)}$ d'après la Définition 4.3.2 et la Proposition 4.3.5. L'application $Q^{\mathfrak{sl}}$ définissant la quantification projectivement équivariante

$$Q^{\mathfrak{sl}} : \mathcal{S}_\delta^k(S^{1|1}) \to \mathcal{D}_{\lambda\mu}^k(S^{1|1})$$

s'écrit

$$Q^{\mathfrak{sl}} := \sum_{l=0}^{k} C_{k,l} Q_{\mathrm{Aff}}(\mathrm{Div}^l), \quad \text{où} \quad \mathrm{Div} = \partial_x \partial_\zeta + \bar{D} \partial_\gamma. \tag{4.26}$$

où les coefficients $C_{k,l}$ sont donnés par

$$C_{k,l} = \frac{\prod_{j=1}^{l}(2\lambda + k - j)}{l! \prod_{j=1}^{l}(2k - 2\delta - j)}, \quad \forall l \geqslant 1, \quad C_{k,0} = 1.$$

On établit d'abord le lemme suivant

Lemme 4.7.1. *Les formules suivantes sont vérifiées :*
(i) $\mathrm{Div}^l(F_k \zeta^k) = \partial_x^l(F_k) \zeta^{k-l} C_k^l (l!)$,

(ii) $\Delta C_1(F_k\zeta^k) = (-1)^{\tilde{F}_k+1}kC_1\overline{D}(F_k)\gamma\zeta^{k-1}$,
(iii) $\mathrm{Div}^l(F_k\zeta^{k'-\frac{1}{2}}\gamma) = C^l_{k'-\frac{1}{2}}(l!)\partial^l_x(F_{k'})\zeta^{k'-l-\frac{1}{2}}\gamma+(-1)^{\tilde{F}_{k'}+1}l(l-1)!C^{l-1}_{k'-\frac{1}{2}}\partial^{l-1}_x\overline{D}(F_{k'})\zeta^{k'-l+\frac{1}{2}}$.
(iv) $\Delta C_1(F_k\zeta^{k-\frac{1}{2}}\gamma) = 0$.

On a directement le résultat suivant

Proposition 4.7.2. *Si δ n'appartient pas à $\mathfrak{Cr}$ (voir Proposition 2.6.2), alors les formules énoncées dans les propositions 2.7.1 et 2.7.2 donnant les uniques quantifications fines $\mathfrak{spo}(2|1)$-équivariantes sur $\mathcal{P}^k_\delta(S^{1|1})$ coïncident avec les formules explicites qui donnent $Q^{\mathfrak{sl}}\circ\mathcal{S}Q$.*

Démonstration. Si k est un entier naturel et si $\delta\notin\mathfrak{Cr}$ alors $\mathcal{S}Q$ est bien défini sur $\mathcal{P}^k_\delta(S^{1|1})$ et $\mathcal{S}Q(F_k\zeta^k)$ est donné par

$$F_k\zeta^k + (-1)^{\tilde{F}_k+1}(kC_1\overline{D}(F_k))\gamma\zeta^{k-1} \quad \text{où} \quad C_1 = \frac{1}{2(k-\delta)}$$

En effet, vu la description de l'ensemble $\mathfrak{Cr}$, la valeur de δ est différente de k. L'application $Q^{\mathfrak{sl}}$ est bien définie sur l'image de $\mathcal{P}^k_\delta(S^{1|1})$ par $\mathcal{S}Q$ et en utilisant le lemme 4.7.1, on obtient

$$Q^{\mathfrak{sl}}\circ\mathcal{S}Q(F_k\zeta^k) = Q^{\mathfrak{sl}}\left(F_k\zeta^k + (-1)^{\tilde{F}_k+1}(kC_1\overline{D}(F_k))\gamma\zeta^{k-1}\right). \tag{4.27}$$

Comme $Q^{\mathfrak{sl}}$ est donné par (4.26) on a besoin de la formule suivante :

$$\mathrm{Div}^l = (\partial_x\partial_\zeta + \bar{D}\partial_\gamma)^l = (\partial_x\partial_\zeta)^l + l(\partial_x\partial_\zeta)^{l-1}\overline{D}\partial_\gamma.$$

L'opérateur différentiel donné par la formule (4.27) est alors égal à

$$Q_{\mathrm{Aff}}\left(\sum_{l=0}^{k} C_{k,l}C^l_k(l!)(1-C_1l)\partial^l_x(F_k)\zeta^{k-l} + (-1)^{\tilde{F}_k+1}\sum_{l=0}^{k} C_{k,l}C_1(k-l)C^l_k(l!)\partial^l_x\overline{D}(F_k)\gamma\zeta^{k-l-1}\right).$$

Il suffit pour conclure de remarquer que les coefficients C_l intervenant dans la formule (2.13) sont égaux à $C_{k,l}C^l_k(l!)(1-C_1l)$ et que les coefficients E_l intervenant dans la formule (2.14) sont égaux à

$$(-1)^{l-\frac{1}{2}}\left(C_{k,l-\frac{1}{2}}\right)C_1\left(k-l+\frac{1}{2}\right)C^{l-\frac{1}{2}}_k(l-\frac{1}{2})!, \forall l\in\frac{1}{2}+\mathbb{N}.$$

Il suffit pour faire cette constatation de noter que, grâce à la proposition 2.5.5, les différences $(\alpha_k - \alpha_{k-l+\frac{1}{2}})$ sont égales à

$$(2l-1)(k-\delta-\frac{1}{2}(l-1)), \tag{4.28}$$

pour tout entier l compris entre 1 et k.

Si $k \in \frac{1}{2}+\mathbb{N}$, alors l'application $\mathcal{S}Q$ restreinte à $\mathcal{P}^k_\delta(S^{1|1})$ est simplement égale à l'identité. Il reste donc à calculer $Q^{\mathfrak{sl}}$ sur un symbole de la forme $F_k\zeta^{k-\frac{1}{2}}\gamma$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} Q^{\mathfrak{sl}} \circ \mathcal{S}Q(F_{k'}\zeta^{k'-\frac{1}{2}}\gamma) &= Q^{\mathfrak{sl}}(F_{k'}\zeta^{k'-\frac{1}{2}}\gamma) \\ &= Q_{\mathrm{Aff}}\left(\sum_{l=0}^{k'+\frac{1}{2}} C_{k'+\frac{1}{2},l}\mathrm{Div}^l(F_{k'}\zeta^{k'-\frac{1}{2}}\gamma)\right). \end{aligned}$$

Grâce au lemme 4.7.1, nous pouvons voir que ce dernier opérateur différentiel est égal à

$$Q_{\mathrm{Aff}}\left(\sum_{l=0}^{k+\frac{1}{2}} C_{k+\frac{1}{2},l}\left(C^l_{k-\frac{1}{2}}(l!)\partial^l_x(F_k)\zeta^{k-l-\frac{1}{2}}\gamma+(-1)^{\tilde{F}_k}l(l-1)!C^{l-1}_{k-\frac{1}{2}}\partial^{l-1}_x\overline{D}(F_k)\zeta^{k-l+\frac{1}{2}}\right)\right).$$

Il suffit pour conclure de remarquer que les coefficients C_l intervenant dans la formule (2.16) sont égaux à

$$C_{k+\frac{1}{2},l}C^l_{k-\frac{1}{2}}(l!)$$

et que les coefficients E_l intervenant dans la formule (2.17) sont égaux à

$$(-1)^{l+\frac{1}{2}}C_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}(l+\frac{1}{2})(l-\frac{1}{2})!C^{l-\frac{1}{2}}_{k-\frac{1}{2}}.$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser, comme dans la situation où k est entier, la formule (4.28) qui donne les différences $(\alpha_k-\alpha_{k-l+\frac{1}{2}})$.

□

4.7.2 Remarque 2

Nous pouvons traduire les expressions de l'opérateur N donné dans la proposition 2.5.7 en fonction de la divergence de contact et de la divergence tangentielle. D'une part, si k est entier, nous avons

$$N_1|_{\mathcal{P}^k_\delta} : F_k\zeta^k \mapsto -(-1)^{\tilde{F}_k}\frac{k}{2}\overline{D}(F_k)\zeta^{k-1}\gamma+k(2\lambda+k-1)(\partial_xF_k)\zeta^{k-1}.$$

En d'autres termes,

$$N_1(F_k\zeta^k) = \frac{1}{2}\gamma(\partial_\zeta\overline{D})(F_k\zeta^k) + (2\lambda + k - 1)(\partial_x\partial_\zeta)(F_k\zeta^k).$$

Donc pour tout entier naturel k, l'opérateur $N_1|_{\mathcal{P}^k_\delta}$ s'écrit

$$N_1|_{\mathcal{P}^k_\delta} = \frac{1}{2}\gamma\partial_\zeta\overline{D} + (2\lambda + k - 1)(\partial_x\partial_\zeta). \tag{4.29}$$

D'autre part, si $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$, alors

$$N_2|_{\mathcal{P}^k_\delta} : F_k\zeta^{k-\frac{1}{2}}\gamma \mapsto (k - \frac{1}{2})(k + 2\lambda - \frac{1}{2})\partial_x(F_k)\zeta^{k-\frac{3}{2}}\gamma + (-1)^{\tilde{F}_k}\frac{1}{2}(2\lambda + k - \frac{1}{2})\overline{D}(F_k)\zeta^{k-\frac{1}{2}}.$$

En d'autres termes,

$$N_2(F_k\zeta^{k-\frac{1}{2}}\gamma) = (k + 2\lambda - \frac{1}{2})(\partial_x\partial_\zeta)(F_k\zeta^{k-\frac{1}{2}}\gamma) + \frac{1}{2}(2\lambda + k - \frac{1}{2})\overline{D}\partial_\gamma(F_k\zeta^{k-\frac{1}{2}}).$$

Donc pour tout $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}$, l'opérateur $N_2|_{\mathcal{P}^k_\delta}$ s'écrit

$$(k + 2\lambda - \frac{1}{2})(\partial_x\partial_\zeta) + \frac{1}{2}(2\lambda + k - \frac{1}{2})\overline{D}\partial_\gamma. \tag{4.30}$$

Nous rappelons que dans le cas général, l'opérateur qui sépare l'opérateur de Casimir $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ sur les opérateurs différentiels et l'opérateur de Casimir C^{Σ} sur les symboles fins s'écrit pour tout entier naturel k (ici k désigne le degré canonique du symbole S) comme

$$N_{\mathcal{PD}}|_{\mathcal{P}^k_\delta} = \frac{1}{2}\gamma\overline{D}\partial_\zeta + \frac{(2\lambda + k - 1)}{2}\left(2\partial_x\partial_\zeta + \overline{D}\partial_\gamma\right). \tag{4.31}$$

On peut alors comparer l'opérateur (4.31) et les opérateurs (4.29) et (4.30). En effet, pour tout entier naturel k, les opérateurs $N_1|_{\mathcal{P}^k_\delta}$ et $N_{\mathcal{PD}}|_{\mathcal{P}^k_\delta}$ sont les mêmes : il suffit de voir qu'ils sont égaux quand on les applique à un symbole $S = F_k\zeta^k$.
De même, pour tout demi-entier naturel k, les opérateurs $N_2|_{\mathcal{P}^k_\delta}$ et $N_{\mathcal{PD}}|_{\mathcal{P}^k_\delta}$ sont égaux quand on les applique à un symbole $S = F_k\zeta^{k-\frac{1}{2}}\gamma$. Le degré d'Heisenberg d'un tel symbole est égal à k tandis que son degré canonique est égal à $k + \frac{1}{2}$.

Table des matières

Bibliographie

[1] D. A. Leites. *Introduction to the theory of Supermanifolds.* Russian Math.Surveys 35 :1 (1980),1-64.

[2] F. A. Berezin. *Introduction to superanalysis*, volume 9 of *Mathematical Physics and Applied Mathematics.* D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. Edited and with a foreword by A. A. Kirillov, With an appendix by V. I. Ogievetsky, Translated from the Russian by J. Niederle and R. Kotecký, Translation edited by D. Leites.n

[3] F. Boniver, S. Hansoul, P. Mathonet, and N. Poncin. Equivariant symbol calculus for differential operators acting on forms. *Lett. Math. Phys.*, 62(3) :219–232, 2002.

[4] Y. Kosmann-Schwarzbach and J. Monterde. Divergence operators and odd Poisson brackets. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 52, 2(2002), 419-456

[5] C. Conley and V. Ovsienko. Linear Differential Operators on Contact manifolds. *arxiv :math-Ph/1205.6562v1*,24p, 2012.

[6] F. Boniver and P. Mathonet. IFFT-equivariant quantizations. *J. Geom. Phys.*, 56(4) :712–730, 2006.

[7] M. Bordemann. Sur l'existence d'une prescription d'ordre naturelle projectivement invariante. *arXiv :math.DG/0208171.*

[8] A. Čap and J. Šilhan. Equivariant quantizations for AHS-structures. *Adv. Math.*, 224(4) :1717–1734, 2010.

[9] D. J. F. Fox. Projectively invariant star products. *IMRP Int. Math. Res. Pap.*, (9) :461–510, 2005.

[10] H. Gargoubi, N. Mellouli, and V. Ovsienko. Differential operators on supercircle : conformally equivariant quantization and symbol calculus. *Lett. Math. Phys.*, 79(1) :51–65, 2007.

[11] N. Mellouli. *Quantification conformément équivariante sur le supercercle.* Thèse de doctorat en cotutelle, Faculté des sciences de Monastar (FSM), Institut Camille Jordan (CNRS-UCBL), 2010.

[12] S. Hansoul. Existence of natural and projectively equivariant quantizations. *Adv. Math.*, 214(2) :832–864, 2007.

[13] S. Hansoul. Projectively equivariant quantization for differential operators acting on forms. *Lett. Math. Phys.*, 70(2) :141–153, 2004.

[14] V. G. Kac. Lie superalgebras. *Advances in Math.*, 26(1) :8–96, 1977.

[15] P. B. A. Lecomte. Classification projective des espaces d'opérateurs différentiels agissant sur les densités. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(4) :287–290, 1999.

[16] P. B. A. Lecomte. Towards projectively equivariant quantization. *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, (144) :125–132, 2001. Noncommutative geometry and string theory (Yokohama, 2001).

[17] P. B. A. Lecomte and V. Yu. Ovsienko. Projectively equivariant symbol calculus. *Lett. Math. Phys.*, 49(3) :173–196, 1999.

[18] P. B. A. Lecomte. Classification projective des espaces d'opérateurs différentiels agissant sur les densités. *C.R Acad.Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(4) :287-290, 1999.

[19] I. Kaplansky. $\mathbb{Z}_2$-Graded Lie algebras I. *http ://just-pasha.org/math/links/subj/lie/kaplansky.*

[20] D. Leites, E. Poletaeva and V. Serganova. On Einstein Equations on Manifolds. and Supermanifolds. *J. of Nonlinear Math. Phys.*, 9(4) :394-425, 2002

[21] D. Leites and A. N. Sergeev. Casimir operators for Lie superalgebras. arXiv :0202180v1.

[22] T. Leuther, P. Mathonet and F. Radoux. On $\mathfrak{osp}(p+1,q+1|2r)$-equivariant quantizations. *J. Geom. Phys.*, 62 :87–99, 2012.

[23] T. Leuther and F. Radoux. Natural and Projectively Invariant Quantizations on Supermanifolds. *SIGMA*, 7(34) :12 pages, 2011.

[24] P. Mathonet and F. Radoux. Cartan connections and natural and projectively equivariant quantizations. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 76(1) :87–104, 2007.

[25] P. Mathonet and F. Radoux. Existence of natural and conformally invariant quantizations of arbitrary symbols. *To appear in J. Nonlinear Math. Phys., arXiv :0811.3710.*

[26] P. Mathonet and F. Radoux. Natural and projectively equivariant quantizations by means of Cartan connections. *Lett. Math. Phys.*, 72(3) :183–196, 2005.

[27] P. Mathonet and F. Radoux. On natural and conformally equivariant quantizations. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 80(1) :256–272, 2009.

[28] P. Mathonet and F. Radoux. Projectively equivariant quantizations over the Superspace $\mathbb{R}^{p|q}$. *Lett. Math. Phys.*, 98 :311–331, 2011.

[29] N. Mellouli, and A. Nibirantiza, and F. Radoux. $\mathfrak{spo}(2|2)$-Equivariant Quantizations on the Supercircle $S^{1|2}$. SIGMA 9 (2013), 055, 17 pages http ://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2013.055

[30] N. Mellouli. Second-order conformally equivariant quantization in dimension 1|2. *SIGMA*, 5(111), 2009.

[31] J.-P. Michel. *Quantification conformément équivariante des fibrés supercotangents.* Thèse de Doctorat, Université Aix-Marseille II. http ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00425576/fr/, 2009.

[32] J. George. Projective connections and schwarzian derivatives for supermanifolds, and batalin-vilkovisky operators. arXiv :0909.5419v1.

[33] I. M. Musson. On the center of the enveloping algebra of a classical simple Lie superalgebra. *J. Algebra*, 193(1) :75–101, 1997.

[34] G. Pinczon. The enveloping algebra of the Lie superalgebra $\mathrm{osp}(1,2)$. *J. Algebra*, 132(1) :219–242, 1990.

[35] A. N. Sergeev. The invariant polynomials on simple Lie superalgebras. *Represent. Theory*, 3 :250–280 (electronic), 1999.

[36] D. Bukiriro. *Quantification $su(n,n)$- équivariante.* Thèse de Doctorat, Université de Liège. 2007-2008.

[37] G. Nizigama. *Quantification $sl(p+q,\mathbb{R})$- équivariante.* Thèse de Doctorat, Université de Liège. 2008-2009.

[38] Duval, C. and Lecomte, P. and Ovsienko, V. Conformally equivariant quantization : existence and uniqueness, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), Université de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier,49(6),1999–2029, 1999.

[39] Boniver, F. and Mathonet, P. IFFT-equivariant quantizations, J. Geom. Phys., Journal of Geometry and Physics,56(4),712–730,2006.

[40] V.S Varadarajan. Supersymmetry for Mathematicians : An Introduction. Courant Lecture Notes, 11. American Mathematical Sciences Society, Courant Institute of Mathematical Sciences,2004.

[41] H.M Khudaverdian, and TH.TH. Voronov. Geometric constructions on the algebra of densities http ://arxiv.org/pdf/1310.0784.pdf,2013.

[42] J.Grabowski, and A. Kotov, and N. Poncin. Lie superalgebras of differential operators http ://arxiv.org/pdf/1011.1804v1.pdf,2010.

[43] J.Grabowski. Graded contact manifolds and contact courant algebroids Journal of Geometry and Physics,68(2013),27-58.