Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.

This page intentionally left blank.

Note sur quelques théorèmes de géométrie supérieure ; par M. F. Folie, correspondant de l'Académie.

Dans nos *Fondements d'une géométrie supérieure cartésienne* (*) nous avons étendu les théorèmes de Desargues et de Pascal aux courbes planes et aux surfaces d'ordre et de classe supérieurs, et nous avons annoncé que nous appliquerions notre méthode aux courbes gauches.

Ce dernier travail n'étant pas achevé, et certains résultats pouvant se déduire avec la plus grande facilité des théorèmes que nous avons énoncés dans le Mémoire précité, nous croyons utile de les signaler dans cette note pour éviter toute contestation de priorité quant à leur découverte.

On sait que le théorème de Pascal se transporte très-simplement des coniques aux cubiques gauches; nous allons transporter de même notre théorème de Pascal des cubiques planes aux courbes gauches du quatrième ordre.

Si nous prenons une G_4 (**) pour directrice d'un cône ayant son sommet en un point de la courbe, nous savons qu'il projettera celle-ci sur un plan quelconque suivant une courbe du troisième ordre. Nous rappelant le théorème de Pascal que nous avons donné relativement à deux quadrilatères conjugués inscrits à ces courbes (***), et menant des plans par les côtés de ces quadrilatères et le sommet

---

(*) *Mémoires de l'Académie*, t. XXXIX.

(**) Nous désignerons, pour abréger, par ce signe G_4 une courbe gauche du quatrième ordre.

(***) *Fondements d'une géométrie supérieure cartésienne*, p. 22.

de notre cône, nous arriverons immédiatement à l'énoncé suivant :

Théorème de Pascal pour les G_4. *Dans deux angles tétraèdres conjugués, inscrits à une* G_4, *les faces opposées se coupent suivant quatre droites situées dans un même plan.*

On voit au reste aisément que ce théorème n'est qu'un cas particulier de celui que nous avons démontré pour les surfaces du troisième ordre (*).

Un autre théorème susceptible de s'étendre également aux courbes gauches du troisième et du quatrième ordre est celui de Desargues.

Nous dirons que trois cubiques gauches sont conjuguées entre elles lorsqu'elles ont cinq points communs; et de même, que trois G_4 sont conjuguées entre elles lorsqu'elles ont sept points communs; ces dernières ont alors un huitième point commun associé aux sept premiers. Ceci est évidemment pour les G_4 de la première famille, c'est-à-dire pour celles qui sont l'intersection de deux surfaces du second degré. En effet, toutes les surfaces du second degré qui ont sept points communs en ont en outre un huitième associé aux premiers; ce huitième point appartient donc à toutes les G_4 qui sont les intersections des surfaces du second degré passant par les sept premiers points.

Pour les G_4 de la seconde famille, c'est-à-dire pour celles qui ne sont pas l'intersection de deux surfaces du second degré, il en sera de même. On sait en effet que par une G_4 de cette famille passe une surface du second degré,

(*) *Fondements d'une géométrie supérieure cartésienne*, p. 104.

mais une seule (*). Imaginons par sept points de cette courbe d'autres surfaces du second degré dont les intersections avec la première surface seront des G_4 de la première famille. La première G_4 coupe ces surfaces, et par suite les autres G_4 en huit points, et ces points sont associés, sans quoi toutes les G_4 coïncideraient. Une G_4 de la seconde famille, qui a sept points communs avec des G_4 de la première, en a donc huit; et cette raison suffit pour établir qu'il en est de même de deux G_4 de la seconde famille.

Cela posé, le théorème de Desargues, transporté aux courbes gauches, s'énoncera :

Théorème de Desargues pour les G_3 et G_4. *Si trois courbes gauches du troisième ou du quatrième ordre sont conjuguées entre elles, et qu'une droite les rencontre chacune en un couple de points, ces trois couples de points seront en involution.*

La démonstration de ce théorème pour les cubiques résulte très-simplement du théorème de Desargues transporté des coniques aux cônes du second degré.

Pour les G_4 on le déduira du théorème analogue à celui de Desargues que nous avons donné pour les surfaces du second degré (**).

Les propriétés que nous venons d'exposer ont naurellement leurs corrélatives : il sera facile à un lecteur un peu familier avec la géométrie supérieure de les énoncer.

(*) Salmon, *Anal. Geom. of three Dim.*, p. 274. C'est ce savant qui a le premier appelé l'attention sur cette famille de courbes du quatrième ordre.

(**) *Fondements d'une géométrie supérieure cartésienne*, p. 123.

Nous pouvons ajouter que le théorème de Desargues que nous venons de démontrer pour les G_3 et les G_4 s'étend également à trois courbes gauches conjuguées de quelque ordre qu'elles soient.

En se servant de la méthode au moyen de laquelle nous avons trouvé de nouvelles extensions du théorème de Pascal (*), on pourrait de même découvrir d'autres théorèmes très-généraux sur les courbes planes.

Voici les énoncés de quelques-uns de ces théorèmes que nous développerons plus tard.

THÉORÈME I. *Étant donné un faisceau* (**) *de courbes planes d'ordre* n, *ayant* n p *points communs sur une courbe fixe d'ordre* p, *si par les mêmes points on fait passer une autre courbe d'ordre* n, *elle coupera les premières en des systèmes de* n (n — p) *nouveaux points qui appartiennent à un faisceau de courbes d'ordre* n — p.

THÉORÈME II. *Étant donné un système de courbes planes ayant* $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2n$ *points communs, l'une d'entre elles coupera les autres en des systèmes de* $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ *nouveaux points qui déterminent un système de courbes d'ordre* n — 2 *passant par* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *points fixes de la première.*

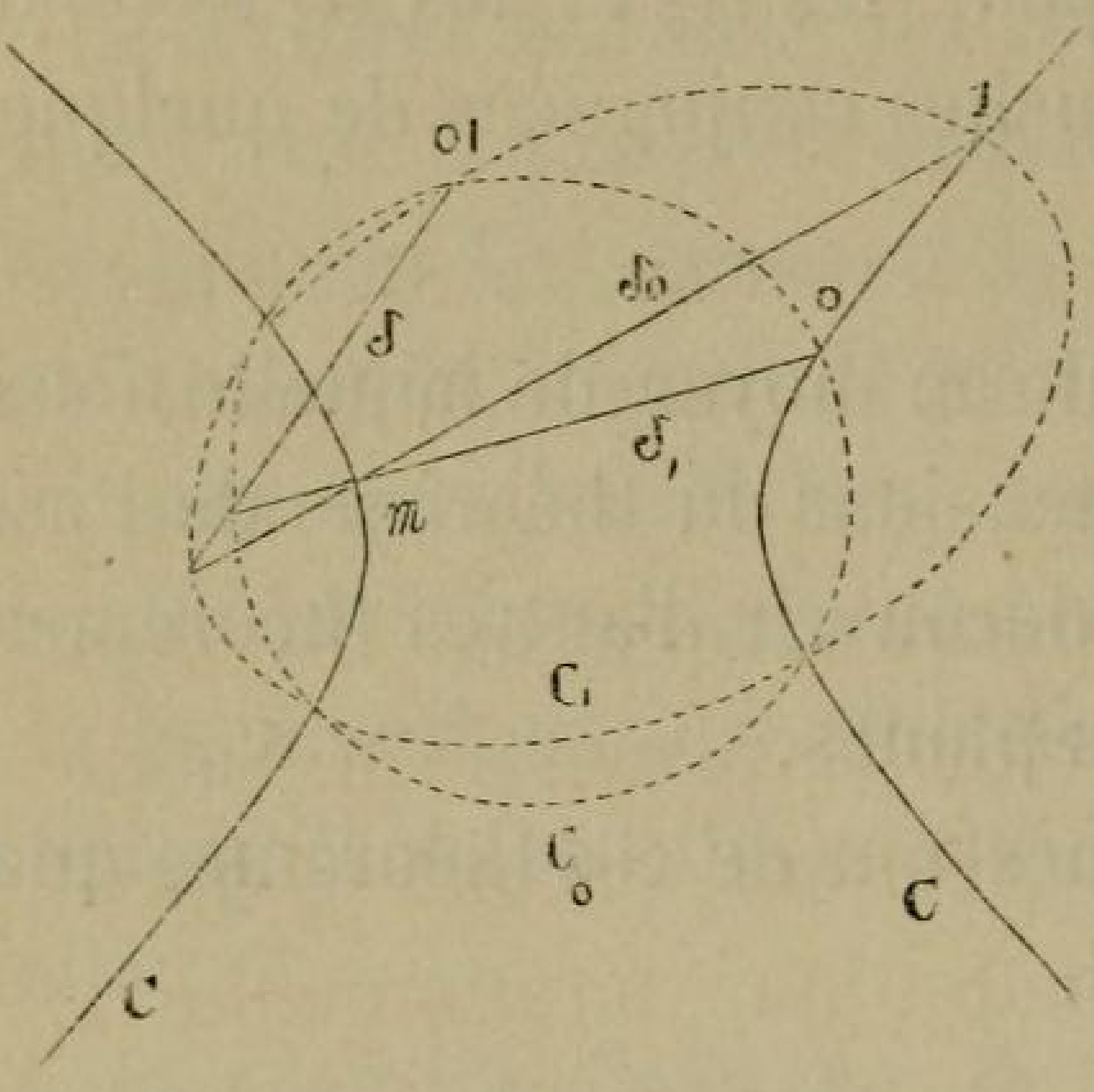
Ce dernier théorème n'est pas applicable aux coniques; pour celles-ci, on a l'énoncé suivant :

THÉORÈME III. *Si l'on fait passer par trois points donnés deux coniques fixes et une conique variable, et que l'on*

(*) *Fondements d'une géometrie supérieure cartés.*, pp. 54 et suiv.

(**) Cette dénomination, empruntée à Steiner et à ses continuateurs indique que les courbes sont conjuguées entre elles suivant notre définition, c'est-à-dire qu'elles ont les mêmes n^2 points communs.

mène dans chacune des deux coniques fixes, d'un point quelconque de la conique variable, une corde passant par le quatrième point d'intersection de cette dernière avec chacune des coniques fixes, la droite variable qui réunit les secondes extrémités de ces deux cordes passera constamment par le quatrième point d'intersection des deux coniques fixes (*).



Pour les courbes supérieures, il existe également d'autres théorèmes analogues au dernier théorème général, et relatifs à un système de courbes qui ont un certain nombre de points communs, moins grand que celui qui est supposé dans cet énoncé; mais ces théorèmes devraient être formulés pour chaque ordre en particulier.

Chacun des théorèmes précédents a son corrélatif, et donne lieu, en outre, à plusieurs réciproques.

Enfin, il est facile de les étendre aux surfaces, et par suite aux courbes gauches.

(*) Dans la figure ci-contre C_0 et C_1 sont les deux coniques fixes, C la conique variable, m un point pris sur celle-ci ; δ_0 et δ_1 les deux cordes menées dans les coniques fixes; δ la droite variable qui réunit leurs secondes extrémités, et qui passe par le quatrième point o_1 d'intersection des deux coniques fixes.