

JUGEMENT DES CONCOURS ANNUELS.

Année 1893.

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

TROISIÈME QUESTION.

Poser les équations du mouvement de rotation de l'écorce solide du globe, en tenant compte des actions extérieures, du frottement de l'écorce sur la partie fluide du noyau et des réactions intérieures.

Indiquer le mode d'intégration qui pourrait être appliqué à ces équations.

Rapport de M. Folie, premier commissaire.

« Dans le cours de mes études sur la nutation diurne, une grave question m'a préoccupé très fortement.

Pour que cette nutation fût sensible, il fallait que les rapports entre les moments d'inertie de la Terre, envisagée dans son ensemble, et de son écorce, fussent sensiblement différents entre eux, surtout en ce qui concerne les rapports $\frac{B}{C}$ et $\frac{A}{C}$; car la nutation diurne n'est possible que si $\frac{B-A}{C}$ n'est pas insensible.

D'autre part, des valeurs suffisamment bien connues des constantes de la précession et de la nutation, on déduit que ce rapport est excessivement petit.

Si donc, comme j'en étais persuadé, la nutation diurne

existait, il en résultait nécessairement que le rapport $\frac{B-A}{C}$ devait être sensible pour l'écorce dans l'expression de la nutation diurne, insensible dans celle de la précession et de la nutation.

Mais comment cela pouvait-il être ?

Ainsi que je l'ai dit antérieurement, c'est après avoir longuement discuté avec M. Ronkar cette question, dont la solution nous semblait tout d'abord bien difficile à trouver, que nous sommes arrivés à penser qu'il était possible qu'à raison des actions mutuelles qui s'exercent entre le noyau et l'écorce, les coefficients des termes périodiques du mouvement de cette dernière, le seul, à proprement parler, qui intéresse l'astronomie, pourraient fort bien dépendre, non seulement des moments d'inertie de cette écorce, comme cela aurait lieu exclusivement si l'écorce était indépendante du noyau, mais encore des moments d'inertie de celui-ci, pour les mouvements dans lesquels cette indépendance n'existerait pas d'une manière absolue.

Lorsque M. Ronkar, en poursuivant ces recherches d'une manière générale, eut trouvé ce beau théorème :

« Dans les mouvements à très longue période, le sphéroïde terrestre se meut sensiblement comme si la croûte et le noyau étaient solidaires ; dans les mouvements à très courte période, au contraire, le noyau et la croûte se meuvent indépendamment l'un de l'autre ; dans les mouvements à période moyenne, on peut considérer les deux parties comme s'entraînant partiellement, et il y a, en outre, généralement une variation de phase dans l'action des forces », mes appréhensions furent dissipées : le coefficient de la nutation diurne, qui est indépendante du noyau, ne dépendait dès lors que des moments d'inertie de

l'écorce ; ceux de la précession et, bien probablement, du terme nodal de la nutation, mouvements à longue période, dépendaient, au contraire, des moments d'inertie de la Terre entière.

Le théorème de M. Ronkar, toutefois, établi d'une manière très générale, ne renfermait pas la solution de la question spéciale qui me préoccupait, à savoir de la forme qu'allaient prendre les coefficients des différents termes de la nutation.

Ces termes se divisent naturellement en quatre grandes classes :

- 1° La nutation diurne, dont la période est de douze heures ;
- 2° La nutation initiale ou eulérienne, dont la période est de vingt-quatre heures ;
- 3° La précession ;
- 4° La nutation que j'appelle annuelle pour la distinguer des deux précédentes, ou la nutation bradléenne, qui renferme une multitude de termes dont les périodes varient entre quelques jours et dix-neuf ans.

Pour la première classe, comme pour le terme de précession, pas de doute.

Pour les deux autres classes, l'analyse, appliquée au problème spécial de mouvement de l'écorce terrestre autour de son centre de gravité, pouvait seule fournir des indications un peu précises sur la forme des coefficients de leurs termes.

A la vérité, W. Thomson avait déjà pressenti la solution dans le même sens que M. Ronkar, mais sans donner de démonstration du résultat qu'il avait trouvé, à savoir, qu'il suffirait d'une légère ellipticité du noyau liquide pour que celui-ci et l'écorce eussent sensiblement le même mouve-

ment de précession que s'ils constituaient ensemble un corps rigide; qu'avec une ellipticité de $\frac{1}{300}$, la nutation nodale serait modifiée de 5 % environ par suite de la fluidité intérieure; que la nutation semestrielle serait considérable, et la nutation bi-hebdomadaire énormément modifiée par suite de la même circonstance (*).

Darwin, de son côté, était arrivé à des conclusions analogues (**).

Mais au point de vue astronomique, le problème restait, pour ainsi dire, tout entier.

La démonstration pratique de l'existence de la nutation diurne m'occupait trop pour que je pusse songer à le résoudre moi-même. Et c'est pourquoi j'ai proposé à l'Académie de mettre au concours la question suivante :

Poser les équations du mouvement de rotation de l'écorce solide du globe, en tenant compte des actions extérieures, du frottement de l'écorce sur la partie fluide du noyau, et des réactions intérieures.

Indiquer le mode d'intégration qui pourrait être appliqué à ces équations.

Un seul mémoire a été envoyé en réponse à cette question. Il porte pour épigraphe :

Les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe du monde sont exactement les mêmes que si la mer formait une masse solide avec le sphéroïde qu'elle recouvre. (LAPLACE, Mécanique céleste, t. II, p. 359.)

Comme le fait remarquer l'auteur, W. Thomson estime qu'il y a lieu d'étudier le mouvement d'un globe constitué

(*) Report of the Brit. Assoc., 1876, pp. 5 à 12 (2^e pagin.) et 6-7.

(**) Phil. Trans., 1879, pp. 464 et 525.

d'un noyau et d'une écorce solides, avec une partie fluide intérieure, fût-ce en supposant que les surfaces limitantes sont des ellipsoïdes et que la densité de la partie liquide est uniforme.

Et c'est dans ce sens qu'il a résolu la question.

Les conclusions principales de son travail sont les suivantes, telles qu'il les a lui-même résumées :

« Le phénomène de la précession a lieu comme si la Terre était entièrement solide.

» Dans les termes de la nutation annuelle, nous trouvons une altération du genre de celle énoncée par Thomson, c'est-à-dire généralement croissante à mesure que la longueur des périodes diminue. Il pourrait même exister une certaine période pour laquelle l'altération serait considérable; le peu de données précises que nous avons sur l'importance des diverses parties du globe ne permet guère de la calculer.

» L'intervention du frottement a pour effet d'introduire dans les formules de la nutation des termes complémentaires des formules usuelles. Mais il semble que ces termes doivent être fort petits.

» En ce qui concerne les termes de la nutation diurne, nous trouvons que les principaux d'entre eux dépendent surtout des moments de l'écorce du globe; ce fait rend possible l'existence théorique de cette nutation, puisque, pour l'écorce, il peut exister une valeur appréciable de la quantité $\frac{B-A}{C}$, tandis que, pour le sphéroïde, l'accord des formules usuelles de la précession et des termes principaux de la nutation annuelle avec l'observation semble exiger que la quantité correspondante pour le globe entier soit insensible. Encore une fois, ici, le frottement tend à

introduire des termes complémentaires aux formules usuelles.

» Enfin, en ce qui concerne la nutation initiale, nous voyons apparaître la possibilité de l'existence de plusieurs périodes, qu'il serait difficile de déterminer actuellement. De plus, les formules de cette nutation prennent ce caractère que chaque période y entre par trois arguments, différant entre eux de 2φ . »

Pour trouver les équations du mouvement de chacune des parties du globe, supposé constitué d'un noyau et d'une écorce solides, différant peu de la forme sphéroïdale et comprenant entre eux une couche fluide, l'auteur rappelle d'abord, d'après Laplace, les expressions de l'attraction d'un sphéroïde peu différent d'une sphère sur un point intérieur ou extérieur, et il en déduit :

a) Les composantes de l'attraction exercée par une écorce composée de couches ellipsoïdales de densité constante pour chaque couche : 1° sur un point intérieur ; 2° sur le noyau ; et il conclut de ces expressions que celui-ci est en équilibre si ses axes principaux coïncident avec ceux de l'écorce ; de plus que, pour une écorce de révolution, de densité constante et d'ellipticité décroissante, l'ordre de succession des moments d'inertie est, dans la position d'équilibre stable, le même que pour ceux du noyau ;

b) Les composantes de l'attraction exercée par un noyau formé de couches ellipsoïdales sur un point extérieur ;

c) Celles de l'attraction exercée par un point extérieur très éloigné sur le noyau et sur l'écorce.

Ces préliminaires exposés, l'auteur aborde les équations du mouvement, en supposant que l'écorce et le noyau sont

formés de couches dont les densités varient d'une manière continue, et que le liquide visqueux qui les sépare a une densité constante.

Chacune des trois parties du globe est soumise aux attractions des deux autres, aux actions qui s'exercent entre le liquide et les surfaces qui le limitent, enfin aux actions extérieures.

Après avoir cherché les expressions des moments de ces différentes forces, l'auteur pose successivement les équations du mouvement de l'écorce et du noyau, puis celles du liquide, d'après Kirchhoff, en le supposant adhérent aux deux surfaces qui le limitent et en faisant abstraction des marées.

Pour simplifier l'intégration de ces équations fort compliquées, il fait les hypothèses suivantes :

1° Les axes principaux de l'écorce et du noyau restent toujours très rapprochés entre eux ;

2° Ces deux corps ont un mouvement de rotation uniforme autour de leurs axes principaux C ou C' ;

3° Les moments des pressions exercées par le liquide sur le noyau et sur l'écorce sont égaux et de signes contraires, et, de plus, proportionnels aux différences des vitesses angulaires de l'écorce et du noyau, comme on peut l'admettre si la couche liquide intermédiaire est très mince, ainsi que le suppose l'auteur, d'accord sur ce point avec W. Thomson ; auquel cas les marées sont également négligeables, ou, du moins, produisent des mouvements qui rentrent dans les précédents.

Ces hypothèses nous paraissent justifiées, et l'insignifiance des marées de la couche fluide confirmée par le fait que l'expérience n'a pas démontré l'existence de déviations périodiques de la verticale, à moins qu'elles ne soient l'effet de circonstances particulièrement locales.

Quant à la proximité des axes principaux du noyau et de l'écorce, elle est bien confirmée par la concordance des résultats que nous avons toujours obtenus pour la position du premier méridien, en faisant usage de formules identiques à celles qui terminent le travail, au moins dans les termes principaux de celles-ci.

Au moyen de ces hypothèses, les équations du mouvement de l'écorce et du noyau revêtent une forme plus simple, mais trop compliquée encore pour qu'on puisse en déduire des conclusions d'une valeur pratique.

L'auteur les étudie dans le cas particulier où ces deux corps se réduiraient à une sphère et à une enveloppe sphérique concentriques, ce qui conduit à une solution au moins approchée du cas général, et il fait remarquer qu'on arriverait au même résultat en négligeant simplement l'effet de l'inertie du liquide intérieur.

L'introduction des équations montre d'abord que les vitesses de rotation de l'écorce et du noyau autour des axes principaux C et C' renferment chacune, dans leur expression, outre une constante commune, un terme exponentiel égal, mais de signes contraires, pour les deux, et décroissant rapidement avec le temps; en sorte qu'elles tendent vers une limite commune qui est probablement atteinte aujourd'hui.

Ensuite, quant à la précession et à la nutation, en laissant d'abord de côté la nutation diurne, on trouve, outre les termes ordinaires, en *cos it* ou en *sin it*, de la variation différentielle en obliquité ou en longitude, des termes beaucoup moins importants en *sin it* ou en *cos it*.

Ces termes doivent être excessivement faibles; s'ils étaient appréciables, ils donneraient lieu, en effet, à une variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique qui ne semble pas vérifiée par l'observation.

Après avoir démontré que les différences entre les obliquités et les longitudes obtenues pour le noyau et l'écorce sont toujours très petites, l'auteur supprime les termes qui sont affectés de ces facteurs dans les expressions des moments des astres attirants, et justifie amplement cette simplification.

Il n'en est pas moins conduit à la résolution d'un système de seize équations linéaires à seize inconnues.

On peut toutefois en déduire des conséquences générales.

En premier lieu, le mouvement de précession s'effectue comme si le noyau et l'écorce étaient solidaires.

En deuxième lieu, les expressions de la nutation renferment des termes nouveaux, comme il a déjà été dit.

En troisième lieu, les coefficients des termes usuels sont altérés.

Pour rechercher l'importance relative de ces altérations, l'auteur démontre d'abord que, dans cette étude, il est permis, sans commettre d'erreur appréciable, d'assimiler le noyau et l'écorce à des sphères de moments d'inertie C et C' .

Mais dans ce cas même, les équations restent encore fort compliquées.

Afin de pouvoir discuter la question, l'auteur examine en particulier l'influence des attractions mutuelles et celle du frottement, et l'on voit immédiatement que les premières n'introduisent pas les termes complémentaires dont nous avons parlé et qui sont dus au frottement. Il trouve que, pour le terme nodal de la nutation, le coefficient est à peu près le même que si l'écorce et le noyau étaient solidaires, et reprend la démonstration de la solidarité absolue dans le mouvement de précession, en abandonnant l'hypo-

thèse, faite précédemment, qui considère ces deux corps comme deux sphères en ce qui concerne les termes complémentaires des formules usuelles.

En général, la différence sera minimale entre les coefficients de la nouvelle et de l'ancienne théorie. Pour certaines valeurs particulières de la période, toutefois, il pourrait se faire que ces coefficients différassent sensiblement entre eux.

C'est aux astronomes qu'il incombe de rechercher quels sont les termes dans lesquels cette différence peut se présenter; il n'est pas possible actuellement à la théorie de les déterminer.

Quant aux termes additionnels produits par le frottement, ils seront très petits, à moins que les coefficients de frottement ne soient considérables, et nous avons vu ci-dessus que tel ne peut être le cas; en somme, c'est l'attraction mutuelle entre l'écorce et le noyau qui établit la solidarité de ceux-ci dans les mouvements à longue période.

La nutation diurne enfin dépend presque exclusivement de $\frac{B-A}{C}$, comme nous l'avons admis dans nos formules, surtout en ce qui concerne les termes à longue période. Ici encore, pour certaines valeurs de la période, les valeurs des coefficients pourraient dépendre à la fois des moments d'inertie de l'écorce et de ceux du noyau.

L'influence du frottement est insignifiante dans la nutation diurne.

Reste l'étude de la nutation initiale, qui a acquis, dans ces derniers temps, une si grande importance sous le nom de variations des latitudes.

La résolution de cette question conduit à celle de seize équations linéaires, sans second membre, dont le déterminant doit, par conséquent, être nul.

Il est à présumer que l'auteur, pressé par le temps, n'a pu discuter cette question avec autant de loisir que les précédentes; il n'eût pas eu de peine, pensons-nous, en introduisant certaines simplifications, à donner quelques indications, plus précises que ne le sont ses conclusions, sur la nature des termes nouveaux que la théorie ajoute à ceux de Laplace. On y voit clairement toutefois qu'à côté des termes en jt , correspondant à ceux de l'ancienne théorie, il en existe en $jt + 2\varphi$, comme si la nutation initiale se combinait avec la nutation diurne.

Mais cette discussion à laquelle l'auteur n'aura pu se livrer, faute de temps, les astronomes géomètres n'auront pas de peine à la faire d'après ses prémisses.

C'est à eux aussi à tirer de ce Mémoire très savant les conclusions pratiques relatives aux trois nutations dont l'étude s'impose aujourd'hui à eux, et est faite ici, pour la première fois, d'une manière complète.

À part la discussion, un peu trop écourtée, de la question si importante de la nutation initiale, le Mémoire satisfait entièrement à toutes les conditions requises; il est l'œuvre d'un géomètre sagace et très versé dans ces questions de haute analyse.

J'ai l'honneur de proposer à la Classe d'accorder à l'auteur le prix institué et d'ordonner l'impression de son travail dans le recueil des *Mémoires couronnés*. »

—

Rapport de M. Ch. Lagrange, deuxième commissaire.

« 1. J'ai reçu à l'examen le présent Mémoire le 25 octobre; aux termes de l'article 38 du règlement de l'Académie, le Mémoire devait être déposé et les rapports lus