

RAPPORTS.

Sur l'influence du frottement et des actions mutuelles intérieures dans les mouvements périodiques d'un système. Application au sphéroïde terrestre ; par E. Ronkar.

Rapport de M. Folie, premier commissaire.

« Lorsque les déterminations des constantes de la nutation diurne, reposant sur des observations faites en différents lieux, de la Russie aux États-Unis, ont mis hors de doute l'existence de cette nutation, une grave difficulté a surgi dans mon esprit.

L'existence de la nutation diurne exige que, dans le corps qui y est soumis, le rapport $\frac{B-A}{C}$ de la différence des deux plus petits moments d'inertie principaux au plus grand soit une fraction appréciable.

Mais ce corps, qui est l'écorce solide du globe, est sujet à la précession et à la nutation annuelle, dont les constantes, malgré les négligences théoriques commises dans leur détermination, sont bien probablement connues avec une approximation qui atteint le 0.01".

Les expressions algébriques que j'ai données de ces constantes permettent de déduire, des valeurs numériques de celles-ci, celle du rapport $\frac{B-A}{C}$.

Or, il se trouve que cette dernière est tout à fait insi-

gnifiante. En d'autres termes, les constantes de la précession et de la nutation annuelle semblent indiquer que ces phénomènes se rapportent au globe terrestre en entier, pour lequel le rapport $\frac{B-A}{C}$ est certainement très petit; tandis que le facteur de la nutation diurne indique clairement qu'elle n'affecte que l'écorce solide du globe, et même que celle-ci est assez mince, étant donnée la valeur que doit avoir ce rapport $\frac{B-A}{C}$ (0,017) pour que le coefficient de la nutation diurne soit égal à 0.1'', chiffre que l'ensemble des déterminations qui ont été faites permet de regarder comme n'étant pas exagéré.

Et cependant, puisque la Terre se compose d'un noyau fluide et d'une croûte solide, c'est bien du mouvement de cette dernière seule autour de son centre de gravité que doit s'occuper l'astronome, puisque c'est elle qui est occupée par les observateurs; je dirai même que, pour l'astronome, le noyau fluide serait comme s'il n'existait pas, n'étaient les actions que sa présence peut exercer sur l'écorce solide.

Comment donc concilier ces deux faits en apparence contradictoires, d'une part, une précession et une nutation annuelle qui indiquent une valeur très faible du rapport $\frac{B-A}{C}$; d'autre part une nutation diurne qui assigne à ce même rapport une valeur relativement élevée?

Comment résoudre ce problème, à première vue insoluble, et dont cependant la solution est imposée par les faits?

Une conclusion s'imposait fatalement: dans la recherche de la précession et de la nutation annuelle, A, B, C, se rapportent au globe entier; dans celle de la nutation diurne, à l'écorce solide seule.

Mais en quoi le globe entier peut-il intervenir dans la recherche du mouvement de son écorce?

C'est à la suite de conversations répétées sur ce problème difficile, entre M. Ronkar et moi, que nous sommes arrivés à cette conclusion qu'une seule solution en était possible et qu'elle s'imposait: étudier le mouvement de l'écorce en tenant compte des réactions du noyau fluide.

Cette étude présentait de grandes difficultés d'analyse.

Absorbé par mes calculs des réductions stellaires, je l'ai abandonnée entièrement à M. Ronkar, qui a pu, avant la fin de l'année dernière, m'en transmettre ce résultat désiré, mais non attendu, que j'ai déjà communiqué dans ma Notice sur la nutation diurne (1) et qui lève la grave difficulté signalée ci-dessus:

Dans les mouvements à courte période, le mouvement de l'écorce solide est indépendant des réactions du noyau fluide.

Dans les mouvements à longue période, le mouvement de l'écorce et celui du noyau s'effectuent comme si les deux masses étaient solidaires.

M. Ronkar a analysé et discuté avec beaucoup de pénétration, et d'une manière très générale, le problème du mouvement de deux masses, soumises, d'une part, à des forces périodiques, d'autre part, au frottement qu'elles exercent l'une sur l'autre et à leurs actions mutuelles.

Le travail se divise donc très naturellement en trois parties: le cas où le frottement ajouterait seul son action à

(1) *Annuaire de l'Observatoire royal, pour 1888, et Traité des réductions stellaires. Bruxelles, Hayez, 1888.*

celle des forces périodiques ; le cas où le frottement serait remplacé par des actions mutuelles ; enfin le cas où le frottement vient s'ajouter à ces dernières.

Dans chacune de ces parties il commence par examiner le cas de deux, puis celui de trois points matériels seulement, en montrant, un peu rapidement peut-être, qu'on peut étendre de même la démonstration à un nombre quelconque de points matériels.

Je ne puis entrer dans les détails d'analyse, souvent très délicats, que l'auteur se trouve obligé d'aborder dans l'examen des différents cas particuliers que pourrait offrir le problème, et je me bornerai à l'expression de l'énoncé général auquel a été conduit M. Ronkar, en appliquant son analyse au cas du globe terrestre considéré comme composé d'une croûte solide mobile sur son noyau qui est, soit fluide, soit solide, en totalité ou en partie ; dans ce cas il y a à considérer l'action du frottement de la croûte sur le noyau, celle du frottement intérieur dû à la viscosité plus ou moins grande de celui-ci, enfin les actions mutuelles qui s'exercent entre le noyau et l'écorce ou entre les divers points mêmes du noyau, si celui-ci est fluide.

Voici quel est cet énoncé :

« Dans les mouvements à très longue période, le sphéroïde terrestre se meut sensiblement comme si la croûte et le noyau ne formaient qu'une seule masse ; dans les mouvements à très courte période, au contraire, le noyau et la croûte se meuvent indépendamment l'un de l'autre ; dans les mouvements à période moyenne, on peut considérer les deux parties comme s'entraînant partiellement, et il y a, en outre, généralement une variation de phase dans l'action des forces. »

Par ce théorème se trouve levée la plus grande partie de la grave difficulté que soulevait le problème du mouvement de rotation de l'écorce solide du globe : la nutation diurne, dont la période est courte, s'effectue d'une manière presque complètement indépendante du mouvement du noyau ; la nutation annuelle, dont la période est assez longue, si l'on n'en considère que le terme principal, s'effectue à peu près comme si l'écorce et le noyau étaient solidaires.

Cette indépendance d'une part, et cette solidarité de l'autre, ne sont toutefois pas absolues, parce que ni la première période n'est excessivement courte, ni la seconde excessivement longue.

Pour les périodes intermédiaires, à plus forte raison y aura-t-il entraînement réciproque entre l'écorce et le noyau, avec modification probable dans la phase. Et ceci s'applique tout particulièrement aux termes qui dépendent du mouvement en longitude de la Lune, et, probablement même, du Soleil.

L'astronomie connût-elle donc les masses et les distances des deux astres avec une précision suffisante pour pouvoir déterminer rigoureusement les coefficients de ces termes, dans le cas d'une Terre entièrement solide, rien ne nous assure qu'ils sont valables pour l'écorce, ni même que leurs périodes ne sont pas un peu modifiées pour celle-ci.

Heureusement l'influence de ces termes diminue à mesure que leur période devient plus courte, et le plus considérable parmi eux n'a-t-il qu'un coefficient vingt fois moindre environ que celui du terme principal de la nutation.

Il n'en n'est pas moins vrai que l'école astronomique du

commencement de ce siècle, qui croyait pouvoir tenir compte des 0.0001'' d'arc dans ses formules, a fait aujourd'hui son temps; et qu'en présence des incertitudes soulevées par l'obligation où l'on se trouve maintenant d'étudier, non plus simplement, comme Laplace et ses successeurs, le mouvement d'une Terre entièrement solide, mais celui, bien plus complexe, de l'écorce solide du globe et de son noyau, des formules, de l'exactitude desquelles on pourrait absolument répondre au 0.01'' d'arc près, seraient déjà supérieures de beaucoup aux formules usuelles.

Ces incertitudes sont encore loin d'être entièrement levées, malgré le jour que le travail de M. Ronkar a répandu sur ce problème compliqué.

Et je citerai en particulier un point pour la solution duquel la combinaison des lumières de la théorie et de l'observation me semble encore indispensable.

La Terre, même considérée comme solide, n'étant pas un ellipsoïde de révolution formé de couches homogènes, ses irrégularités peuvent donner naissance à des termes dépendant des longitudes des périégées de la Lune et du Soleil. Les astronomes (Bessel, Peters, Nyrén) ont cru pouvoir déterminer les coefficients de ces termes au moyen d'observations faites sur le pendule: en quoi j'ai montré qu'ils se sont mépris (1), parce que des irrégularités superficielles du globe, qui sont négligeables à la distance du Soleil ou de la Lune, ne le sont plus pour le pendule; leur action sur ces astres, ou l'action réciproque de ceux-ci sur elles, n'est donc pas connue par le fait qu'on connaît leur action sur le pendule.

(1) *Traité des réductions stellaires*, p. 57.

Mais il y a plus: s'il est permis d'étudier l'effet de ces irrégularités sur le mouvement de l'écorce, en le supposant indépendant de celui du noyau, cet effet deviendra naturellement beaucoup plus considérable que s'il s'exerce sur la masse entière de la Terre. Or, la période du mouvement du périégée lunaire est intermédiaire entre celle du mouvement diurne et celle du mouvement du nœud; elle rentre bien probablement dans la catégorie de ces périodes intermédiaires pour lesquelles la théorie de M. Ronkar ne donne qu'une solution nécessairement un peu vague, à raison du vague même des relations possibles entre les différentes forces perturbatrices et leurs périodes respectives.

L'observation seule, aidée de la théorie, peut donc résoudre la question de l'existence de termes dépendant du périégée lunaire dans les formules de la nutation.

Et c'est pourquoi j'ai introduit ces termes dans les miennes (1) en les affectant d'un coefficient que je cherche à déterminer par l'observation.

La présence de ces termes n'impliquerait pas nécessairement celle de termes analogues relatifs au périégée solaire, quoique théoriquement les uns se déduisent des autres; mais le mouvement du périégée solaire étant excessivement lent, peut-être, relativement à ces termes, l'écorce et le noyau doivent-ils être considérés comme s'entraînant mutuellement conformément à la première partie de l'énoncé de M. Ronkar; et alors il est probable que l'influence du périégée solaire, qui se traduirait par une variation périodique de la constante de la précession, serait presque insensible.

(1) *Traité des réductions stellaires*, pp. 69 et 70.

On conçoit aisément que les inexactitudes et les omissions résultant, dans les formules de la nutation, de l'ancienne théorie développée successivement par Euler, Laplace, Poisson, Serret, aient empêché les astronomes de fixer les termes de la période décimennale, malgré la haute précision des observations modernes. C'est encore un desideratum que je cherche à combler.

La Classe voudra bien m'excuser, vu l'importance du sujet, d'être entré dans ces détails, qui, tout en se rapportant directement à l'objet du Mémoire, n'ont pas été examinés par l'auteur, à cause de la généralité dans laquelle il s'est maintenu en étudiant la question. Ils montrent combien celle-ci présente d'intérêt, et quel progrès capital M. Ronkar a fait faire à la théorie de la nutation diurne, en levant la contradiction apparente qui existait entre les valeurs que l'observation assigne à son coefficient et à celui de la nutation annuelle.

Aussi ce nouveau travail fera-t-il honneur à son auteur et à l'Académie.

Je propose à la Classe d'en ordonner l'impression dans le recueil des *Mémoires* in-4°, et d'adresser des remerciements à M. Ronkar pour cette intéressante communication. »

Rapport de M. Lagrange, second commissaire.

« Dans le nouveau travail qu'il présente à l'Académie, M. Ronkar se propose d'apprécier les effets qu'auraient sur les mouvements de deux systèmes de points sollicités par des forces périodiques, soit les frottements mutuels de ces