

conditions : 1° les conditions de possibilité de trouver une série à coefficients constants par l'application des formules de Wronski; 2° les conditions de convergence de la série; 3° les conditions d'exactitude. Cette distinction permettra seule, me semble-t-il, de faire connaître le degré de confiance que mérite l'application générale de la méthode développée par M. C. Lagrange.

En ce qui concerne l'application de cette méthode aux problèmes de mécanique céleste, je regrette vivement que diverses circonstances aient empêché M. Folie de faire connaître son appréciation personnelle; car, à cet égard, j'ai dû me renfermer dans une sage abstention, non seulement faute de temps, mais encore par le manque d'une compétence suffisante.

En définitive, je me rallie volontiers aux conclusions du savant premier commissaire; et j'espère que l'auteur continuera ses belles recherches avec courage et persévérance. »

La Classe adopte les conclusions de ses commissaires.

Essai de détermination du rapport $\frac{C}{A}$ des moments d'inertie principaux du sphéroïde terrestre; par M. Ronkar, docteur en sciences, ingénieur honoraire des mines.

Rapport de M. Folie, premier commissaire.

« L'existence de la nutation diurne, que nous trouvons confirmée par les observations les plus précises, et dont nous serons bientôt à même de déterminer la constante, ne peut s'expliquer que dans l'hypothèse de la fluidité intérieure du globe.

Lorsque la constante en sera bien connue, elle permettra de déterminer approximativement la limite de l'épaisseur de la croûte terrestre.

Cette détermination, toutefois, exigera que l'on puisse exprimer théoriquement les rapports qu'ont entre eux les moments d'inertie de la Terre autour de ses axes principaux.

Pour cela, l'on doit partir d'une hypothèse déterminée sur la loi de densité des couches du sphéroïde terrestre.

Deux hypothèses surtout se recommandent à l'attention des analystes, celle de Laplace et celle de M. Lippschitz.

Je m'étais proposé de les comparer entre elles, et mon idée première avait été de substituer à la troisième condition posée par M. Lippschitz, en vue de la détermination de l'une des constantes de sa formule, la valeur déduite de l'observation pour le rapport $\frac{C}{A}$ du plus grand au plus petit moment d'inertie de la Terre.

Les nombreuses occupations qui m'absorbent m'ont engagé à confier ce travail à l'un de mes élèves, M. le D^r Ronkar, ingénieur des mines.

De l'étude à laquelle il s'est livré il résulte, comme on le verra, que la constante cherchée λ ne peut pas se déterminer convenablement par ce procédé, parce que sa valeur n'exerce que peu d'influence sur celle du rapport $\frac{C}{A}$.

J'ai alors engagé M. Ronkar à déterminer cette dernière valeur dans les deux hypothèses, celle de Laplace et celle de M. Lippschitz.

J'ignore si l'on s'est déjà occupé de ce travail, même dans la première hypothèse. Quoi qu'il en soit, elles concourent, l'une et l'autre, à donner, au rapport des moments d'inertie C et A, une valeur qui approche beaucoup de celle que Poisson avait déduite de la comparaison de la constante théorique de la précession, qui renferme ce

rapport, avec la valeur numérique de cette constante, déterminée par l'observation.

Et ce résultat remarquable autorisera à pouvoir faire usage, avec quelque assurance, de l'une ou de l'autre loi de densité, dans l'étude des questions relatives à la constitution du globe terrestre.

Ce n'est que plus tard, quand on aura pu déterminer, par la grandeur de la nutation diurne, quelle est la limite de l'épaisseur de la croûte solide, que l'on sera à même de décider laquelle des deux hypothèses est le mieux d'accord avec les faits.

Après avoir esquissé, dans ses grandes lignes, le travail de M. Ronkar, il convient que je le résume avec quelques détails.

J'insisterai peu sur les difficultés analytiques que l'auteur a eu à vaincre; des confrères compétents pourront en parler avec plus d'autorité.

Il a d'abord rappelé brièvement quelques-uns des résultats obtenus par Laplace dans l'étude des conditions d'équilibre d'une masse fluide, soumise à la gravitation, et tournant autour d'un axe avec une vitesse constante, lorsque cette masse se compose d'une série de couches homogènes, infiniment minces, et de densités variables suivant une loi quelconque. Cette dernière loi étant admise, on peut déterminer la forme que prendra chacune des couches successives dans l'état d'équilibre.

Il rappelle ensuite les résultats que M. Lippschitz a obtenus, en partant de la loi de densité

$$\rho = D - Eb^{\lambda}.$$

Se fondant sur ces données, il procède à la recherche du moment d'inertie C autour de l'axe des pôles; et pour cela, il détermine d'abord le moment d'inertie, autour du

même axe, d'un solide homogène de densité 1, remplissant l'espace limité à la surface externe de la couche de paramètre b .

De cette quantité on déduit aisément le moment d'inertie de l'une quelconque des couches par rapport au même axe. Une simple intégration donne alors le moment d'inertie C , de la partie du sphéroïde qui est limitée à la couche de paramètre b . En faisant $b = 1$ dans cette formule, on a le moment d'inertie C cherché.

Le résultat est exprimé en série, suivant les puissances de l'aplatissement intérieur μ du sphéroïde. Dans tous ces calculs, ainsi que dans toute l'étendue du travail, l'auteur n'a conservé, comme Laplace, que les termes du premier degré de l'aplatissement.

Il détermine ensuite le moment d'inertie A autour d'un diamètre équatorial, en faisant usage d'une autre quantité, facile à calculer dans le cas où les couches sont de révolution, et qu'il a nommée moment d'inertie central: c'est la somme des produits des masses des divers éléments par les carrés de leurs distances à un point fixe.

En s'occupant de cette quantité, l'auteur a été conduit à la remarquable propriété suivante:

« Si l'on néglige les puissances de l'aplatissement, supérieures à la première, on trouve que le moment d'inertie central d'une couche, par rapport au centre de gravité, est le même que celui d'une couche sphérique de même densité, et dont les aires internes et externes sont respectivement équivalentes à celles de la couche. »

On déduit aisément, de la valeur du moment d'inertie central, la valeur A_b du moment d'inertie, autour d'un diamètre équatorial, de la portion du sphéroïde intérieure à la couche de paramètre b , et ensuite la valeur cherchée de A .

Les quantités A_e, C_e, A, C étant connues, les valeurs des rapports $\frac{C_e}{A_e}, \frac{C}{A}$ en résultent immédiatement, de même que les valeurs C_e et A_e des moments d'inertie principaux de la partie du sphéroïde comprise entre la couche externe et la couche de paramètre b , et leur rapport $\frac{C_e}{A_e}$.

Les valeurs numériques ont été calculées d'abord en adoptant, pour les constantes, les valeurs données par M. Lippschitz.

M. Ronkar a repris ensuite les calculs en admettant la loi de densité de Laplace et Legendre :

$$\rho = \gamma_1 \frac{\sin nb}{b},$$

et il a déterminé les constantes γ_1 et n de manière à satisfaire aux conditions de la densité superficielle et de la densité moyenne.

Il en a déduit l'aplatissement en valeur numérique, et a recherché de nouveau les valeurs $\frac{C_e}{A_e}, \frac{C}{A}, \frac{C_e}{A_e}$ par les mêmes procédés que dans la première partie.

Les résultats obtenus concordent assez bien avec ceux qu'avait donnés la loi de M. Lippschitz; les écarts proviennent, pour la plus grande partie, de la différence entre les deux valeurs de l'aplatissement, qui est $\frac{1}{287,9}$ d'après les formules de M. Lippschitz et $\frac{1}{301,1}$ d'après les formules de Laplace. En calculant les résultats, pour les deux théories, dans le cas de $\mu = \frac{1}{292,3}$, valeur donnée comme la plus probable par M. Faye (*), M. Ronkar fait voir que ceux-ci deviennent beaucoup plus concordants : or, si l'adoption de cette valeur entraîne une modification dans celle de λ trouvée par M. Lippschitz, cette modification exerce très peu d'influence sur la valeur du coefficient de μ .

(*) Cours d'astronomie de l'École polytechnique, t. I, 299.

dans l'expression de $\frac{C}{A}$, en sorte que, tout en prenant $\mu = \frac{1}{292,3}$, on peut conserver aux coefficients numériques les valeurs qui avaient été déterminées pour $\lambda = 2.39$ et $\mu = \frac{1}{287,9}$.

Si l'on examine les hypothèses de Laplace et de M. Lippschitz au point de vue des résultats qui en découlent pour l'aplatissement du sphéroïde terrestre, on voit que la première s'éloigne plus de la vérité que la seconde; Laplace lui-même avait trouvé, en effet, $\frac{1}{506,6}$ pour l'aplatissement; d'après sa théorie, mais en adoptant d'autres constantes, M. Ronkar est arrivé à $\frac{1}{501,1}$; dans l'hypothèse de M. Lippschitz, il a trouvé $\frac{1}{287,9}$.

Si on les examine au point de vue des valeurs qui s'en déduisent pour $\frac{C}{A}$, on trouve que l'hypothèse de Laplace conduit à un résultat un peu trop faible, tandis que l'inverse a lieu dans celle de M. Lippschitz; la différence se maintient dans le même sens, du reste, quoique beaucoup moindre, si l'on admet, dans les deux hypothèses, le même aplatissement.

Comme nous l'avons dit plus haut, il serait difficile, quant à présent, de décider en faveur de l'une ou de l'autre.

Le travail de M. Ronkar, on le voit, a mis en lumière des points qui avaient échappé aux recherches de géomètres très distingués; il contribuera certainement à éclaircir la question de la constitution de la Terre.

Nous ne doutons pas que l'Académie ne l'accueille avec faveur, et nous lui proposons d'en voter l'impression, en même temps que des remerciements à l'auteur.

Ces conclusions, appuyées par MM. Catalan et De Tilly, sont mises aux voix et adoptées.