

Réponse de M. Folie aux rapports précédents de MM. Catalan et De Tilly.

« Je ne répondrai pas longuement aux rapports de mes savants confrères.

Il résulte, en effet, de ces rapports, que le principe que M. Le Paige et moi nous avons formulé les premiers (*), n'est, que nous sachions, explicitement énoncé nulle part.

Mais, en premier lieu, d'après M. Saltel, il lui aurait été enseigné il y a dix ans; en second lieu, selon mes honorables confrères, ce principe est tellement évident qu'il ne valait pas la peine de l'énoncer.

Quant au premier de ces points, si nous n'avions donné que le théorème que M. Saltel nous attribue à tort (et qui a suggéré à M. Catalan une Note qui va tout droit à l'adresse de son correspondant), certes nous n'eussions fait qu'exprimer une vérité à la La Palisse; nous pensons bien qu'on sait, depuis longtemps, que si des variables vérifient simultanément n équations, elles vérifient toute équation qui résulte de la combinaison des premières entre elles.

Mais l'énoncé même que M. Saltel nous attribue prouve, une fois de plus, de quelle manière il comprenait et appliquait le principe, avant que nous l'eussions formulé explicitement, M. Le Paige et moi; et les citations qu'il fait, de ses travaux antérieurs, corroborent encore cette manière de voir. Nous regrettons que notre savant confrère M. Catalan ait fait siennes les observations de M. Saltel, sans

(*) *Bulletins de l'Académie*, 2^e série, tome XLVI.

prendre même la peine de vérifier s'il nous citait exactement.

Nous sommes bien loin toutefois de vouloir dire, par là, qu'il n'a pas mieux compris que M. Saltel la portée du principe (*).

Voilà pour le premier point.

Quant au second, je puis répondre qu'un analyste éminent m'a déclaré que la démonstration analytique du principe ne serait pas le moins du monde aisée à établir d'une manière générale (**).

J'ajouterai que ce même analyste, lorsque M. Le Paige lui énonça le principe, posa immédiatement cette objection: « Mais si la relation donnée entre les paramètres est incompatible avec la condition du concours des lieux variables, les points de concours de ceux-ci engendreront-ils encore un lieu? »

Cette objection, que je m'étais formulée moi-même avant

(*) M. De Tilly ayant cité celui-ci exactement dans son rapport, il est superflu que nous le répitions ici.

(**) Je crois utile de citer, à ce propos, l'opinion que j'exprimais dès ma première Note (*l. c.*, p. 201), opinion qui s'est parfaitement vérifiée :

« Les géomètres saisiront immédiatement la portée de ce principe; les analystes y trouveront certainement matière à des recherches intéressantes.

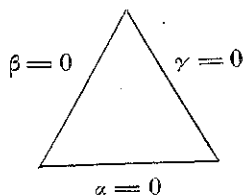
» Mais, pour des lecteurs moins familiers avec la haute analyse, ou avec la haute géométrie, ce principe pourra paraître, ou bien simple, pour ne pas dire bien naïf, ou bien peu important.

» Nous ne sommes pas nous-même assez analyste pour pouvoir donner, du principe général, une démonstration purement analytique, et nous serions heureux que cette démonstration pût être faite, indépendamment de la nature des équations proposées. Nous avouons même que, dans le cas le plus général, la démonstration basée sur la conception de Riemann nous paraît seule acceptable. »

d'oser énoncer le principe, est, en effet, assez sérieuse pour mériter d'être exposée en détail. Nous allons le faire sur le cas particulier proposé à M. Le Paige par son savant ami.

Soit $\alpha. \beta. \gamma = 0$ un triangle de référence.

Prenons ses sommets pour centres de trois faisceaux de rayons; λ, μ, ν désignant des paramètres arbitraires, il est clair que les rayons de chacun de ces faisceaux pourront se représenter par les équations



$$\left. \begin{aligned} \alpha + \lambda\beta &= 0, \\ \beta + \mu\gamma &= 0, \\ \gamma + \nu\alpha &= 0, \end{aligned} \right\} \dots (R)$$

et que la condition de concours de ces trois rayons sera $\lambda\mu\nu = -1$.

Qu'arrivera-t-il si l'on se donne, entre les paramètres variables, la relation

$$\lambda\mu\nu = a, \dots (C)$$

dans laquelle a est différent de -1 ?

Si le principe est vrai, cette relation, combinée avec les équations (R), doit conduire à l'équation du lieu engendré par les rayons homologues.

Or, l'élimination de λ, μ et ν , entre les équations (R) et (C), donne

$$a\beta\gamma (1 + a) = 0;$$

d'où $\alpha. \beta. \lambda = 0$,

c'est-à-dire que le lieu est le triangle de référence lui-même.

Il reste à vérifier toutefois si la condition du concours de trois rayons homologues se vérifie, malgré l'incompatibilité de cette condition avec la relation donnée (C).

Considérons un point du lieu trouvé, point qui est nécessairement sur l'un des côtés des triangles, et choisissons-le sur le côté γ . Pour que les équations (R) soient vérifiées pour ce point, il faudra que $\mu = \infty$ et $\nu = 0$, puisque ce point est déterminé par les deux équations $\alpha + \gamma\beta = 0, \gamma = 0$.

Ces valeurs de μ et ν , substituées dans l'expression $\lambda\mu\nu$, donnent à celle-ci la forme de l'indétermination, $\infty \cdot 0$; et rien n'empêche, cela étant, cette expression d'être égale à la fois à -1 et à a , comme le veulent respectivement la condition de concours, et la relation donnée (C).

Ces points, nos honorables contradicteurs ne les auront certes pas approfondis, puisque l'un d'entre eux va jusqu'à dire que notre principe a la même nouveauté que l'égalité

$$58745 + 17499 = 56242!$$

et que le second adhère à cette critique.

La réponse qui précède, jointe au Rapport qu'on vient de lire, pourrait sembler suffisante; j'y ajouterai cependant les opinions que deux géomètres, très-distingués en effet, n'en déplaise à notre honorable confrère M. Catalan, ont exprimées sur la question.

Comme je l'ai dit ailleurs (*), M. Klein, professeur à l'Université et à l'École polytechnique de Munich, lorsque je lui énonçai le principe, me dit qu'il ne se souvenait en avoir vu qu'un cas particulier, celui de la recherche du

(*) Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 2^e série, tome III, 1879.

Jacobien ; et cette réponse elle-même témoigne déjà d'une très-grande compétence. Postérieurement, il m'a écrit qu'il pensait que M. Cremona avait *appliqué* le principe, dans le cas où les relations qui lient entre eux les paramètres sont *linéaires* (*).

M. Em. Weyr, professeur à l'Université de Vienne, membre correspondant de l'Académie des sciences de cette ville, à qui j'ai demandé ce qu'il pensait de ce principe, me répond : « Quant à *votre* principe de la théorie des faisceaux, c'est certainement un principe très-simple ; mais je pense que c'est en cela même que consistent et sa fertilité et son importance. »

Il est vrai que M. E. Weyr, comme M. Klein, ont immédiatement saisi toute la portée du principe ; qu'ils n'ignoraient pas qu'on avait déjà tiré parti, en géométrie, du principe ordinaire appliqué à la génération d'une surface par l'intersection de trois surfaces variables (**), et qu'on n'eût pas manqué, si l'on avait eu une connaissance exacte du nouveau principe, d'en tirer immédiatement les théorèmes du plan, analogues à ceux qui étaient connus dans l'espace, et, en particulier, le premier et le plus simple de ces théorèmes, celui dont il vient d'être question.

Que des géomètres distingués aient une notion consciente de ce principe, nous l'admettons volontiers ; et lorsque M. Cremona nous déclare qu'il le connaissait dans toute sa généralité, en écrivant sa théorie des surfaces,

(*) Voy. *Preliminari d'una teoria delle superficie*, MÉMOIRES DE BOLOGNE, 2^e série, tomes VI et VII.

(**) AUGUST, *Dissertationes de superficiebus tertii ordinis*, Berlin, 1862, cité par Cremona dans son mémoire sur les surfaces du 5^e ordre, *Journal de Crelle*, tome LXVI.

nous voulons le croire sur parole ; mais, pour ceux qui affirment avoir *énoncé* depuis dix ans ce principe, et qui n'ont pas cru qu'il valût les honneurs de l'impression, il me font songer, malgré moi, au coq de la fable : ils ont trouvé une perle ; je la crois fine, se seront-ils dit, et ils n'auront pas pris la peine de la ramasser. »

Réplique de M. Catalan à M. Folie.

I.

« Vers la fin de sa *Réponse*, notre honorable Confrère s'énonce ainsi :

« L'un d'entre eux va jusqu'à dire que notre principe a
» la même nouveauté que l'égalité

$$38\ 745 + 17\ 499 = 56\ 242. »$$

Ceci n'est pas tout à fait exact. Au paragraphe III de mon Rapport, après avoir rappelé ces deux lignes de M. Folie : « *Qu'on veuille bien nous indiquer un texte, imprimé ou autographié avant 1878, dans lequel le principe soit formellement ou implicitement énoncé* », j'ajoutais :

« Qu'il (M. Folie) me permette une comparaison : elle
» fera comprendre, à ceux de nos Confrères qui ne sont
» pas Géomètres, la nature de la discussion.

» Très-probablement, dans aucun ouvrage *imprimé ou autographié*, on ne trouve l'égalité

$$38\ 745 + 17\ 499 = 56\ 242.$$

» Si j'en réclamaï la *priorité*, que penserait-on de moi ? »