En résumé, on voit que la théorie des moindres carrés devra, à ce travail de notre savant confrère, quelques progrès que peu d'analystes auraient osé tenter de réaliser après Gauss, et c'est pour cette raison même que nous regrettons peut-être un peu que M. Catalan ait cru devoir démontrer, concernant la théorie des déterminants, des théorèmes plus connus qu'il ne le suppose, nous le craignons du moins.

Quoi qu'il en soit, son travail sera lu avec beaucoup d'intérêt, et nous proposons bien volontiers à la classe d'en ordonner l'impression et de voter des remercîments à notre confrère. »

M. Liagre, second commissaire, partage la manière de voir de M. Folie.

M. De Tilly, troisième commissaire, se rallie aux conclusions des deux premiers rapports, mais présente certaines observations qui seront communiquées à ses deux collègues et à l'auteur du mémoire.

La classe ordonne l'impression du travail de M. Catalan dans les Mémoires in-4°.

Sur quelques applications de la théorie des formes algébriques à la géométrie; par M. C. Le Paige.

Rapport de M. Folie.

« Comme le dit l'auteur dans l'introduction placée en tête de ce Mémoire, il s'est proposé de réunir, en les complétant, les applications géométriques qu'il a faites de la théorie des formes. Plusieurs des résultats consignés dans

ce travail ont donc été donnés ou indiqués dans les notes précédentes. Nous allons les rappeler tout d'abord.

Parti de l'involution à $3n$ points, M. Le Paige a montré comment on peut y rattacher la théorie des points harmoniques : mais pour cette involution, les points harmoniques ne se découvrent pas nécessairement. Il n'en est pas de même pour l'involution de $(n+1)$ n points, qu'il a le premier imaginée, et où cette notion s'impose pour ainsi dire. Il a également rattaché cette idée à la théorie des polaires, et il a donné, pour les courbes en général, des théorèmes qui n'étaient connus que pour le second ou le troisième ordre seulement, et même des théorèmes complétement nouveaux.

Ayant repris l'étude des invariants élémentaires, qu'il a désignés par I_q, $\mathfrak{I}_q$ et les ayant rattachés à notre notion du rapport anharmonique du n^e ordre, il a montré comment ils se lient à la relation d'harmonie trouvée antérieurement, et à l'involution; cette recherche l'a amené à écrire la condition d'involution sous la forme

$$\sum_1^{n+1} p_i(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_n)\equiv 0,$$

et la condition la plus générale de l'homographie du n^e ordre sous la forme

$$\sum_1^{n^2} p_i(X_1-\lambda_1)(X_2-\lambda_2)\ldots(X_n-\lambda_n)\equiv 0.$$

Nous croyons pouvoir dire, à ce sujet, que, dans nos leçons de géométrie supérieure, nous avons déjà, il y a un an, exprimé sous la forme

$$\sum_{i}^{iii}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\equiv 0$$

l'involution de $3n$ points; mais nous n'avions pas pensé, comme l'a fait M. Le Paige, à généraliser cette formule pour en tirer la notion de l'involution de $n\,(n+1)$ points.

Nous reviendrons plus bas sur celle de l'homographie.

En traitant ces différentes questions M. Le Paige a eu l'occasion de montrer la relation des invariants I_q et de certains invariants d'une ou de deux formes, tels que le quadrinvariant, le discriminant et le résultant.

Tels sont, dans leurs traits généraux, les résultats consignés dans les trois précédentes notes du jeune géomètre. Ces notes reflètent, en quelque sorte, le développement historique de la théorie des involutions supérieures.

Les liens qui existent entre ces différentes parties ne sont pas aussi apparents qu'ils pouvaient l'être, et divers points ne sont qu'effleurés dans ces notes.

Dans le Mémoire actuel, le but de l'auteur a été de faire, autant que possible, un ensemble de ces parties, de les relier en suivant l'ordre logique indiqué par Steiner, dans sa *Systematische Entwickelung der geometrischen Gestalten.*

Il a commencé par rappeler les notations et définitions dont il a eu à faire usage, ainsi que diverses propriét géométriques des invariants et des transformations linéaires. Il a exposé ensuite les propriétés des invariants I_q et $\mathfrak{J}_q$; ce dernier représente le rapport anharmonique du n^e ordre.

Remarquant que, dans le second ordre, quatre points en ligne droite sont caractérisés par une relation.

$$m_{12}\,I_{12} + m_{21}\,I_{21} = 0,$$

il était naturel d'introduire la fonction

$$\sum m_{q_1 q_2 \dots q_n} I_{q_1 q_2 \dots q_n} = 0,$$

bien que pour les ordres supérieurs, les constantes ne soient plus déterminées par la position des points. Mais il existe, pour le second ordre, un cas particulier important; c'est celui où $m_{12} = m_{21}$.

Les quatre points sont alors harmoniques.

On est donc amené à faire la même hypothèse pour les ordres supérieurs; au moyen de celle-ci, la fonction anharmonique acquiert une forme particulière: si les deux séries de n points, donnés sur une droite, sont définies par deux formes u_1, u_2, la fonction anharmonique ne diffère pas, lorsque les constantes sont toutes égales entre elles, de l'invariant linéo-linéaire de ces deux formes.

Guidé par l'analogie, on peut donc dire que, dans ce cas, les $2n$ points sont des points harmoniques du n^{me} ordre; on a ainsi un lien rationnel entre la relation d'harmonie et la fonction anharmonique. C'est de cette façon que la théorie est exposée dans le Mémoire actuel. M. Le Paige a également rappelé les relations qu'il a données antérieurement entre les invariants I_q et les invariants I, I_1, Δ et R; et il a démontré la formule

$$\text{II.}\quad I_{q_1 q_2 \dots q_n} = k\,\Delta,$$

indiquée seulement dans ses notes antérieures.

II. Étudiant ensuite l'homographie, dans les ordres supérieurs au second, et considérant que la notion fondamentale, qui lui sert de base, est qu'à un point de série ne correspond qu'un point dans la seconde, il a défini d'une manière générale l'homographie de la manière suivante:

Si sur n *droites données, nous prenons des points tels que* (n—1) *points étant donnés sur* (n—1) *droites, il ne corresponde au système de ces* (n—1) *points qu'un seul* *point sur la* n^{me}, *ces points forment* n *séries homographiques du* n^{me} *ordre.*

La longueur des formules que l'on obtiendrait en général a engagé l'auteur à se borner à considérer l'homographie du 3^{me} ordre.

Dans ce dernier cas, la définition donnée se traduit par la formule

$$x_1 y_1 z_1 + a_{12} x_1 y_1 + \cdots + b_1 x_1 + \cdots + c = 0.$$

De cette relation se déduit la condition d'homographie sous forme de déterminant, et sous forme d'identité.

En cherchant, de notre côté, à étendre aux rapports anharmoniques d'ordre supérieur, la notion d'homographie, telle qu'elle a été formulée par M. Chasles, nous l'avions exprimée par

$$\sum_{1}^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{pq} \lambda_p \lambda_q + \sum_{1}^{n} a_p \lambda_p + 1 = 0.$$

Cette formule, moins générale que celle de M. Le Paige, puisqu'elle ne renferme que les combinaisons deux à deux, et une à une, des indéterminées, nous semble mieux adaptée aux applications géométriques, comme nous le ferons voir prochainement.

Enfin M. Le Paige rattache la théorie de l'involution du n^e ordre à celle de l'homographie, au moyen du théorème suivant, dont il borne la démonstration au 3^{me} ordre:

Lorsque n *séries de points homographiques, situées sur une même droite, sont telles que* n *points soient les mêmes dans quelques groupes qu'on les considère, ces séries sont en involution.*

Ce théorème peut ainsi être considéré comme une définition de l'involution.

La condition la plus générale de l'involution de $(n+1)\,n$ points est donc

$$x_1 x_2 \ldots x_n + \mathrm{A}\,\Sigma x_1 \ldots x_{n-1} + \cdots + \mathrm{A}_{n-2}\,\Sigma x_1 + \mathrm{A}_{n+1} = 0.$$

De là, la condition d'involution en forme de déterminant que l'auteur a fait connaître antérieurement, ainsi que l'identité :

$$\sum_{1}^{n+1} p_i (\mathrm{X} - x_1)(\mathrm{X} - x_2) \ldots (\mathrm{X} - x_n) = 0.$$

Partant de cette dernière relation, il en a déduit les diverses formes de l'involution de $(n+1)\,n$ points. Il a aussi énoncé, en général, le théorème suivant : [*La condition d'involution de* (n + 1) n *points peut s'exprimer par la réduction à zéro d'une somme algébrique de produit d'invariants* $\mathfrak{I}$ *pris* n — 1 *à* n — 1], et il l'a démontré pour le troisième ordre, en donnant la forme de l'équation à laquelle on est conduit dans ce cas.

Si l'on suppose les $(n+1)$ ponctuelles de n points représentées par des formes $\mathrm{U}_1\,\mathrm{U}_2 \ldots \mathrm{U}_{n+1}$, on prouve sans peine que ces points sont en involution s'il existe entre celles-ci une relation

$$\sum_{1}^{n+1} k_i\,\mathrm{U}_i \equiv 0.$$

Cette dernière forme se prête à une considération importante.

Si, au lieu de considérer cette identité normale, on part de la condition

$$\sum_{1}^{m} k_i\,\mathrm{U}_i \equiv 0, \quad m \text{ étant } < n+1,$$

on peut dire qu'une telle identité définit une involution du n^{me} ordre et de la m^{me} classe.

Parmi ces involutions, M. Le Paige s'est arrêté davantage à celles de la 3^{me} classe. Ce sont en effet les seules qui aient été étudiées jusqu'ici, et appliquées à la géométrie, sauf les théorèmes qu'il a donnés sur les polaires, et ceux qu'il a communiqués en dernier lieu à l'Académie.

Il a rappelé, en les démontrant par sa méthode, les propriétés analogues à celles du point central, dans l'involution du second ordre; il a, de même, étudié les propriétés des points multiples d'ordre n dans les involutions de $(n+1)$ n points, et démontré, par deux méthodes, que les points n^{ples} sont des points harmoniques de n^{me} ordre de chaque groupe de n points appartenant à l'involution.

On se trouve ainsi ramené à l'étude des points harmoniques.

III. On peut mettre la relation d'harmonie sous différentes formes, c'est ce que l'auteur a fait.

Il a, dans ce chapitre, reproduit les applications analytiques et géométriques, données dans une note antérieure; il a, de plus, commencé une étude plus approfondie du rapport anharmonique du troisième ordre.

On sait que MM. Cayley et Clebsch ont rattaché le rapport anharmonique du second ordre aux invariants I et J d'une quartique binaire.

Sans résoudre la même question d'une manière complète pour la forme sextique M. Le Paige a eu le courage de l'aborder, et d'en poursuivre assez loin l'étude.

Une sextique binaire a quatre invariants fondamentaux A, B, C, D, respectivement du second ordre, du quatrième, du sixième et du dixième, et un invariant gauche du quinzième ordre, E, dont le carré et une fonction rationnelle des quatre autres.

M. Salmon a fait voir que la condition

$$E = 0,$$

exprime que les six points représentés par l'équation

$$U \equiv (a, b, c, d, e, f, g \between x, y)$$

sont en involution, et le P. Joubert, qui a donné le premier l'expression de E au moyen des racines de la forme, s'est servi de cette propriété pour calculer une réduite du sixième degré de l'équation du même degré, alors que les travaux de Lagrange et de Vandermonde conduisaient à des réduites du dixième degré et du quinzième.

L'expression de E, donnée par le P. Joubert, rattache cet invariant aux invariants I_q. M. Le Paige fait voir comment il est possible de rattacher, à ces mêmes invariants, les invariants A et D, ainsi que le discriminant Δ qui est aussi du dixième ordre.

La réduction à zéro de l'invariant D exprime que les points représentés par la forme sont conjugués harmoniques.

Déjà précédemment, M. Le Paige avait étendu la notion d'involution de 3_n à $(n+1)$ n points, et en avait tiré celle des points harmoniques du n^e ordre, il a rattaché aujourd'hui ces propriétés à la notion que nous avons donnée récemment du rapport anharmonique du n^e ordre, et a fait une étude, à peu près complète, des différentes théories qui se rattachent à cette notion capitale du rapport anharmonique, telles que l'homographie, l'involution, et les points harmoniques.

Par ce nouveau travail, M. Le Paige a montré, une fois de plus, quelles ressources la géométrie peut tirer de l'analyse moderne, sans laquelle, comme le disait M. Chasles lui-même, elle ose à peine aborder certaines questions.

On trouvera pourtant peu d'applications géométriques proprement dites dans ce Mémoire. Celles-ci sont destinées à un autre travail que nous avons proposé à M. Le Paige, d'entreprendre en collaboration avec nous pour développer la théorie des courbes et des surfaces supérieures en partant de notre notion du rapport anharmonique du n^e ordre.

Nous avons l'honneur de proposer à la classe de voter l'insertion du travail de M. Le Paige dans les Mémoires in-4°, et d'adresser des remercîments à l'auteur pour cette communication très-intéressante. »

La classe a adopté ces conclusions auxquelles s'est rallié M. E. Catalan, second commissaire.

Recherches sur les Acinétiniens de la côte d'Ostende, IIIe partie; par M. Julien Fraipont.

Rapport de M. J.-P. Van Beneden.

« La nouvelle notice de M. Fraipont est la continuation de ses recherches sur les Acinétiniens de la côte d'Ostende; elle traite de l'*Acineta crenata* et *Vorticelloides,* de la *Podophrya lyngbyi* et *truncata.* Ce sont quatre formes nouvelles qui viennent enrichir la faune de notre littoral, et dont trois sont nouvelles pour la science. M. Fraipont a étudié ces Protozoaires avec le même soin que les précédents, et je n'hésite pas à proposer la publication de ce nouveau travail dans les *Bulletins* de l'Acadé-