Formules correctes de la nutation eulérienne de l'axe instantané, suivies des expressions complètes de la nutation de l'écorce solide du globe; par F. Folie, membre de l'Académie.

L'année dernière je recherchais, en suivant la voie tracée par Oppolzer, et en la dégageant de l'erreur analytique qu'il a commise, les expressions de la nutation eulérienne de l'axe instantané, et je trouvais des termes nullement insensibles à ajouter à ceux qu'il a donnés (*).

La marche que j'ai suivie ne me satisfaisait pas entièrement; elle conduisait, en effet, à des difficultés d'intégration qui ne pouvaient être surmontées que par des développements en série; or ces développements peuvent toujours éveiller des doutes.

J'ai pu surmonter ces difficultés et lever ces doutes en partant simplement des équations différentielles, au lieu d'aborder immédiatement l'intégration. Les idées les plus simples ne sont pas celles qui viennent les premières.

L'analyse qui suit est donc celle d'Oppolzer lui-même, mais dégagée des erreurs qu'il a commises dans la sienne.

Le résultat de cette nouvelle analyse est le suivant :

« La nutation eulérienne de l'axe instantané est trois cents fois plus grande que celle de l'axe géographique. Son expression, de même que celle de l'heure, rapportée

(*) *Examen d'un cas particulier très important du mouvement d'un corps solide* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, mars 1899).

à cet axe, renferme en plus des termes multipliés par le temps. »

L'explication théorique de ces termes est fort simple, comme je l'ai déjà dit dans l'*Examen* rappelé ci-dessus : ils proviennent de ce que tout mouvement de rotation qui ne s'effectue pas autour d'un axe principal est toujours accompagné d'un mouvement de précession du nœud.

Je donnerai à cette note une forme très concise, les développements que j'ai exposés dans la précédente (*) pouvant édifier le lecteur sur l'exactitude des équations dont je fais usage (**).

A. — *Expressions des vitesses angulaires de la Terre autour des axes principaux.*

Ces expressions sont :

$$\begin{aligned} l &= \gamma_1 \cos(n_1 t + \beta) + L \\ m &= \gamma_1 \sin(n_1 t + \beta) + M \\ n &= c^{te}; \end{aligned}$$

L et M désignant des fonctions périodiques dépendant des forces perturbatrices.

Pour plus de simplicité, nous ne traiterons, avec Oppolzer, que le cas où $L = M = 0$, en faisant remar-

(*) Voir l'*Examen* cité ci-dessus.

(**) Relativement à cette analyse, qui n'est autre que celle d'Oppolzer *rectifiée,* il m'est venu un scrupule, à la suite d'une correspondance que j'ai échangée sur ce sujet avec M. G. Darwin. C'est celui-ci : On part des équations du mouvement autour des axes principaux XYZ, et on les rapporte aux axes instantanés X'Y'Z'.

Les premiers sont fixes dans le corps; les seconds ne le sont ni dans le corps ni dans l'espace. Le procédé est-il licite? Si non, l'analyse d'Oppolzer, même rectifiée, tombe tout entière *ab ovo*.

quer, toutefois, que ce procédé n'est nullement licite lorsqu'il s'agit de passer des axes principaux aux axes instantanés, et écrirons

$$(1)\qquad l=\gamma_1\cos(n\iota t+\beta),\quad m=\gamma_1\sin(n\iota t+\beta),\quad n=c^{te}.$$

B. — *Transformation des coordonnées* x, y, z (*axes principaux*) *en* x', y', z' (*axes instantanés*).

Puisque le mouvement de la Terre s'effectue autour de l'axe instantané Z' (auquel sont corrélatifs les axes orthogonaux X', Y') dont les cosinus directeurs sont

$$\frac{l}{\omega},\quad \frac{m}{\omega},\quad \frac{n}{\omega},\qquad \omega=\sqrt{l^2+m^2+n^2},$$

après le temps dt, les axes x, y, z auront pris la position X'Y'Z'; pour les y amener, il suffira de leur faire décrire, autour de X, Y, Z considérés comme fixes, les angles Δa, Δb, Δc donnés par

$$\frac{da}{dt}=l,\qquad \frac{db}{dt}=m,\qquad \frac{dc}{dt}=n,$$

d'où, eu égard aux équations (1) :

$$\Delta a=\frac{m}{n\iota},\qquad \Delta b=-\frac{l}{n\iota},\qquad \Delta c=nt.$$

C. — *Expressions des vitesses angulaires autour des axes instantanés.*

Ces expressions sont données par les formules connues:

$$\begin{aligned} l' &= l+n\Delta b-m\Delta c,\\ m' &= m-n\Delta a+l\Delta c,\\ n' &= n+m\Delta a-l\Delta b,\end{aligned}$$

ou, eu égard aux équations (1) et (2) :

$$(5)\quad \ldots\ldots \left\{\begin{aligned} l' &= l\left(1-\frac{1}{\iota}\right)-mt,\\ m' &= m\left(1-\frac{1}{\iota}\right)+lt,\\ n' &= n\left(1+\frac{1}{\iota}\gamma^2\right),\end{aligned}\right.$$

en faisant

$$\gamma_1=n\gamma.$$

D. — *Expressions différentielles de la nutation eulérienne des axes instantanés.*

Soient θ, ψ, φ les angles que les axes instantanés font avec ceux de l'écliptique fixe. Les formules de transformations sont

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -l'\cos\varphi+m'\sin\varphi,\\ \sin\theta\frac{d\psi}{dt} &= l'\sin\varphi+m'\cos\varphi,\\ \frac{d\varphi}{dt} &= n'+\cos\theta\frac{d\psi}{dt}.\end{aligned}$$

Elles deviennent, par la substitution des expressions précédentes,

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \Gamma_1\cos(n\iota t+\beta+\varphi)+\gamma_1 t\sin(n\iota t+\beta+\varphi),\\ \sin\theta\frac{d\psi}{dt} &= -\Gamma_1\sin(n\iota t+\beta+\varphi)+\gamma_1 t\cos(n\iota t+\beta+\varphi),\\ \frac{d\varphi}{dt} &= n'+\cot\theta\{\ldots\ldots\ldots\},\end{aligned}$$

où Γ_1 représente $\gamma_1\left(\frac{1}{\iota} - 1\right)$, ou, à très peu près, $\gamma_1 \frac{1}{\iota}$, puisque $\frac{1}{\iota} = 500$ environ.

E. — *Expressions définitives de la nutation eulérienne en obliquité, en longitude et en heure dans le système de l'axe instantané.*

Intégrant les équations précédentes, en supposant θ constant (car θ est un angle fini soumis à de faibles variations périodiques) et $\varphi = \varphi_0 + n't$ simplement (*), on obtient, après avoir posé $\gamma_1 = n'(1 + \iota)\gamma$:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{\gamma}{\iota} \left\{ \sin(n\iota t + \beta + \varphi) - \iota t \cos(n\iota t + \beta + \varphi) \right\} \\ \sin\theta\gamma\psi &= \frac{\gamma}{\iota} \left\{ \cos(n\iota t + \beta + \varphi) + \iota t \sin(n\iota t + \beta + \varphi) \right\} \\ \varphi - \varphi_0 - n't = \Delta\varphi &= \frac{\gamma}{\iota} \cot\theta \left\{ \ldots\ldots\ldots\ldots \right\} \end{aligned}\right.$$

Telles sont les expressions de la nutation eulérienne dans le système des axes instantanés.

Dans celui des axes principaux, elles sont :

$$(4')\quad \ldots \left\{\begin{aligned} \Delta\theta &= -\gamma \sin(n\iota t + \beta + \varphi) \\ \sin\theta\Delta\psi &= -\gamma \cos(n\iota t + \beta + \varphi) \\ \Delta\varphi &= -\gamma \cot\theta \cos(n\iota t + \beta + \varphi). \end{aligned}\right.$$

(*) Ce procédé est bien moins licite ici que dans le système des axes principaux, puisque θ et φ renferment des termes, très petits à la vérité, mais multipliés par le temps.

F. — *Expression de la nutation eulérienne en déclinaison dans le système de l'axe instantané.*

Des formules (4) on déduit, pour le passage au méridien,

$$(5)\ \ldots\ \Delta\delta = \pm \frac{\gamma}{\iota} \left\{ \cos(n\iota t + \beta') + \iota t \sin(n\iota t + \beta') \right\},$$

β' représentant $\beta + L$, et L la longitude orientale d'un premier méridien relativement au lieu de l'observation.

Dans le système des axes principaux, l'expression de la nutation eulérienne en déclinaison est

$$(5')\quad \ldots\ldots\quad \Delta\delta = \mp \gamma \cos(n\iota t + \beta'),$$

les signes supérieurs et inférieurs correspondant aux passages de même nom.

On trouverait de même l'expression de l'ascension droite.

G. — *Expressions de la nutation dans le cas général.*

Nous avons obtenu les formules (4) en négligeant les forces perturbatrices.

Soient N_ψ, N_θ les termes de la précession et de la nutation générale en obliquité et en longitude. Relativement aux axes principaux, on a, rigoureusement :

$$(6')\ \ldots \left\{\begin{aligned} \Delta\theta &= -\gamma \sin(n\iota t + \beta + \varphi) + N_\theta \\ \sin\theta\Delta\psi &= -\gamma \cos(n\iota t + \beta + \varphi) + N_\psi. \end{aligned}\right.$$

Nous avons vu que, abstraction faite de N_θ et de N_ψ, on a, relativement aux axes astronomiques :

$$(6)\quad \begin{cases} \Delta\theta = \dfrac{\gamma}{\iota}\left\{\sin(n\iota t + \beta + \varphi) - \iota t \cos(n\iota t + \beta + \varphi)\right\} \\ \sin\theta\Delta\psi = \dfrac{\gamma}{\iota}\left\{\cos(n\iota t + \beta + \varphi) + \iota t \sin(n\iota t + \beta + \varphi)\right\}. \end{cases}$$

Mais, si l'on tient compte de N_θ et de N_ψ, il va de soi que, dans la transformation des coordonnées principales en coordonnées astronomiques, il se présentera des combinaisons des termes eulériens avec ceux de la précession et de la nutation générale, et quelque faibles que soient ces termes du second ordre, ils ne pourront pas être négligés, multipliés qu'ils sont par le temps.

C'est encore un argument de plus contre l'adoption du système des axes astronomiques.

Donc, les formules rapportées aux axes principaux, celles d'Euler, Laplace, Bessel, Poisson, Serret, Tisserand, qui sont rigoureuses, sont beaucoup plus simples que les formules relatives à l'axe instantané, qu'il serait bien difficile d'établir correctement sous une forme applicable en pratique, et qui rendent la définition de l'heure absolument impossible.

H. — *Conclusion.*

I. Dans le système de l'axe instantané, traité correctement par l'analyse d'Oppolzer, non seulement la nutation eulérienne est trois cents fois plus grande que dans celui des axes principaux dans son terme simplement périodique, mais elle renferme, de plus, un terme périodique multiplié par le temps, même dans l'expression de l'heure sidérale.

II. Admettons qu'on définisse la latitude relativement au pôle instantané.

Il résulte des observations que ses variations eulériennes sont comprises entre $\pm 0'',15$; elles correspondent évidemment bien plutôt au terme (5) négligé par les astronomes qu'au terme trois cents fois plus petit de la distance entre les deux pôles.

Cette dernière γ serait donc égale à $0'',0005$; il s'ensuivrait que, dans les formules (4′) rapportées aux axes principaux, le coefficient γ serait tout à fait négligeable, et que c'est dans ce système de coordonnées qu'on pourrait, comme l'ont fait tous les géomètres, y compris Tisserand, en faire complètement abstraction.

Ce serait un nouvel argument en faveur de l'emploi de celui-ci. Mais nous pensons, avec tous les astronomes, que la distance entre les deux pôles est supérieure à $0'',1$.

On pourra la déduire des observations de latitude, en faisant usage des formules relatives aux axes principaux, et particulièrement de la formule (5′), qui permettra de déterminer cette distance.

C'est ce système d'axes qu'on n'eût jamais dû abandonner et auquel on reviendra ; mais il en est plus que temps.

Depuis dix ans je défends cette opinion (*).

J'espère que la présente note, qui est mon dernier mot sur ce sujet (à moins qu'on ne tente de me réfuter sérieu-

(*) *C. R.*, mai et juillet 1890. — *Bulletin astronomique*, 1891. — *Acta Mathematica*, 1892. — *Annuaire de l'Observatoire royal*, 1892-1897. — *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1892-1900.

sement), convaincra les astronomes qui ont à cœur le progrès de la science et leur propre réputation.

Afin de ne pas compliquer inutilement l'analyse, je me suis borné au cas d'une Terre rigide.

J'ajouterai ici les expressions, aussi complètes que je puis les donner, des termes de nutation qui doivent être ajoutés aux termes usuels pour l'écorce solide du globe. On les trouvera développés dans ma *Revision des constantes de l'astronomie stellaire* (1896) et ma *Théorie du mouvement de rotation de l'écorce solide* (1898).

I. — *Termes complémentaires de la nutation de l'écorce solide du globe.*

Ces termes sont, en obliquité et en longitude (*) :

$$
\begin{aligned}
\Delta\theta &= \gamma'' \sin(\beta'' - \beta' t) - \gamma \sin(\varphi + \beta t + \beta_0) - \gamma' \sin(\varphi + \beta' t + \beta'_0) \\
&= \nu \quad [\Sigma_1 \cos 2\varphi + \Sigma_2 \sin x\varphi] \\
&\quad - \iota \quad \sin(\varphi + \mathrm{I}) \cos(\odot - \mathrm{A}) \\
\sin\theta\Delta\psi &= \gamma'' \cos(\beta'' - \beta' t) - \gamma \cos(\varphi + \beta t + \beta_0) - \gamma' \cos(\varphi + \beta' t + \beta'_0) \\
&\quad + \nu \quad [-\Sigma_1 \sin z\varphi + \Sigma_2 \cos z\varphi] \\
&\quad - \iota \quad \cos(\varphi + \mathrm{I}) \cos(\odot - \mathrm{A}).
\end{aligned}
$$

Σ_1 et Σ_2 représentent :

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1 &: -1.15 - 0.135 \cos\delta + 0.56 \cos 2\odot + 0.84 \cos 2cc, \\
\Sigma_2 &: \qquad\quad - 0\,18 \ \sin\delta + 0\,39 \sin 2\odot + 0.88 \sin 2cc.
\end{aligned}
$$

On prendra, pour la nutation diurne, $\nu = 0'',067$, et L, longitude du premier méridien, égale à $2^{\mathrm{h}}15^{\mathrm{m}} + l$, l désignant la longitude de l'observatoire à l'W de Greenwich.

(*) Je fais abstraction des termes correctifs en $2\odot$ et en $\odot$ exposés dans le dernier ouvrage cité, page 3.

Le terme en γ est le terme eulérien proprement dit d'une période de trois cents jours environ.

Le terme en γ' est le terme chandlérien d'une période de quatre cent trente jours environ, de même que celle du terme rétrograde en γ''. Le terme en i provient du déplacement du pôle d'inertie de l'écorce dû à des circonstances climatologiques. Il indique, à proprement parler, une *variation réelle* de la latitude.

Une autre cause produira également des *variations réelles de latitude :* c'est l'élasticité de l'écorce.

Une dernière influence enfin doit être étudiée : celle des *déviations périodiques de la verticale,* qui proviennent de la non-coïncidence des centres de gravité de l'écorce et du noyau.

Quand on possédera les formules relatives à ces deux derniers points, on aura l'explication intégrale du phénomène connu sous le nom de *variation des latitudes.*

Sur la décomposition de l'iodoforme en solution chloroformique; par M.-C. Schuyten, docteur en sciences.

Dans le courant de mes recherches sur l'influence des conditions atmosphériques sur l'activité intellectuelle et physique des êtres vivants, j'ai senti plus d'une fois la nécessité d'établir que cette même influence doit exister aussi sur les réactions chimiques. C'est même cette idée qui m'a amené à entreprendre mes recherches sur l'attention et la force musculaire (1896 et années suivantes).

Nous savons, à priori, qu'il doit en être ainsi, car en été il fait plus chaud qu'en hiver, et la grande majorité des réactions chimiques est favorisée par une élévation de