SUR LES VARIATIONS JOURNALIÈRES DE LA HAUTEUR DU PÔLE,

ET SUR LES ERREURS QUI RÉSULTENT DE L'OMISSION DE LA NUTATION INITIALE DANS LES DÉTERMINATIONS ASTRONOMIQUES.

1. Les astronomes commencent à s'occuper de la nutation initiale, qu'aucun d'entre eux n'avait encore fait entrer, à ma connaissance, dans les formules de réductions stellaires.

J'ai, le premier, déterminé directement les constantes de cette nutation, qui sont, à une infime quantité près, les mêmes que celles de la variation *réelle* de la latitude *astronomique*, c'est-à-dire du déplacement de l'axe instantané de rotation à la surface de la Terre.

La période de ce déplacement est de 336,7 jours moyens; celle de la nutation initiale est, au contraire, de

$$\frac{1}{1+\frac{1}{336,7}}$$

jour moyen, c'est-à-dire qu'elle est presque exactement diurne.

Peters, Nyrén et Downing ont déterminé les constantes de

la variation de la latitude, au moyen de longues séries d'observations de cet élément.

Ma détermination des constantes de la nutation initiale a donné des résultats qui, non seulement concordent très bien avec les leurs, mais ont même permis de faire concorder ceux-ci entre eux, grâce à la modification que j'ai fait subir à la période des variations de la latitude, que tous les astronomes croyaient être de 305 jours environ.

La seule manifestation de la nutation initiale que les astronomes aient donc déterminée par l'observation est la variation *réelle* de la latitude *astronomique*. Mais plusieurs ont pensé que les variations *apparentes* de la hauteur du pôle ne présentent pas un caractère diurne (voyez entre autres Oppolzer, p. 151; Tisserand, B.-A., juillet 1890), contredisant ainsi formellement le passage, que j'ai maintes fois cité, de Laplace: « Si cette nutation était sensible, on le reconnaîtrait par les variations *journalières* de la hauteur du pôle ».

Je vais démontrer, au contraire, qu'il existe des variations *diurnes apparentes* de la hauteur du pôle, et que le passage de Laplace est vrai, pris à la lettre.

La confusion qui règne, à ce sujet, dans l'esprit même d'astronomes et de géomètres très distingués, m'engage à le traiter brièvement *ab ovo*.

Dans la présente note nous rapporterons toutes les coordonnées au pôle et à l'équateur géographique, en sorte que le méridien dont il sera question est le méridien géographique.

Plusieurs motifs puissants militent en faveur de ce choix.

1° Les formules de précession et de nutation donnent les variations du pôle géographique, non celles du pôle instantané. La vitesse angulaire constante de la Terre est également donnée par ces formules autour du même pôle.

2° Le méridien géographique est fixe, le méridien astronomique varie de jour en jour pendant une période de 336,7 jours. Ce n'est donc que par rapport au premier qu'on peut définir l'Æ d'une étoile, l'heure de son passage méridien. Car cette définition n'est valable que pour un plan méridien fixe.

3° Si deux lieux observent le même jour la même étoile, à la même hauteur dans le méridien géographique, la hauteur du pôle en ces lieux sera la même.

Il n'en est plus ainsi dans le méridien astronomique. C'est alors la latitude astronomique qui serait la même. Mais l'expression de cette latitude étant, comme on le verra, de la forme

$$z + \delta - \gamma \cos(nit + \beta),$$

et β variant de 180° d'un méridien au méridien opposé, on voit que les latitudes déterminées sur ces deux méridiens par une même étoile, observée à la même hauteur, différeront entre elles de $2\gamma \cos(nit + \beta)$.

Nous n'ignorons pas que les astronomes admettent généralement comme méridien le plan qui passe par le zénith et par l'axe instantané. Mais nous pensons que les raisons précédentes leur feront adopter le méridien géographique, même en pratique, surtout s'ils possèdent de bonnes mires.

S'il ne le font pas, il faut de toute nécessité qu'ils modifient les formules dont ils se servent, puisqu'elles sont relatives au pôle et au méridien géographiques, et non à l'axe et au méridien instantanés.

Ce n'est pas ici le lieu de rechercher quelles seraient ces

modifications. Nous pensons, cependant, que la précision des observations modernes est assez grande pour qu'il faille en tenir compte, et qu'elle est même supérieure, chez les bons observateurs, à celle des formules de réduction dont ils se servent habituellement.

2. L'intégration des équations différentielles du mouvement de rotation de la Terre introduit dans l'expression des vitesses angulaires l et m, autour des axes principaux x et y (en supposant constante la vitesse n autour de l'axe polaire z), les termes suivants, renfermant les constantes arbitraires γ' et β', termes dont je m'occuperai exclusivement :

$$l = \gamma' \cos(int + \beta'); \qquad m = \gamma' \sin(int + \beta'),$$

γ' étant égal à 0''08, et i à $\frac{1}{337}$ environ, d'après ma détermination.

Les cosinus des angles de l'axe instantané avec les axes principaux seront

$$\cos l_1 = \frac{l}{n}, \qquad \cos m_1 = \frac{m}{n}, \qquad \cos n_1 = 1,$$

si, vis-à-vis de n^2, on néglige l^2 et m^2 qui sont, en effet, absolument inappréciables.

Les cosinus des angles que la verticale du lieu fait avec ces trois axes seront, si Φ_0 désigne la latitude *géographique* du lieu ou la hauteur du pôle, L sa longitude rapportée au méridien qui passe par l'axe x :

$$\cos L_1 = \cos\Phi_0 \cos L, \quad \cos M_1 = -\cos\Phi_0 \sin L, \quad \cos N_1 = \sin\Phi_0.$$

L'expression du cosinus de l'angle compris entre la verticale du lieu et l'axe instantané, ou de la colatitude *astronomique,* sera donc

$$\sin \Phi = \cos \Phi_0 \frac{l \cos L - m \sin L}{n} + \sin \Phi_0.$$

d'où l'on tire, en remplaçant l et m par les expressions précédentes,

$$\sin \Phi - \sin \Phi_0 = \frac{\gamma'}{n} \cos \Phi_0 \cos(nit + \beta' + L),$$

formule qui se déduit directement du triangle PIZ, et qu'on peut écrire *correctement* avec les astronomes (*sauf* pour les latitudes très élevées, circonstance qui leur a échappé), en faisant $2 \sin \frac{\Phi - \Phi_0}{2} = \Delta\Phi_0$,

$$\Delta\Phi_0 = \frac{\gamma'}{n} \cos(nit + \beta' + L),$$

ou, en remplaçant $\frac{\gamma'}{n}$ par γ et $\beta' + L$ par β,

$$\Delta\Phi_0 = \gamma \cos(nit + \beta). \tag{1}$$

Telle est donc la quantité qu'il faut ajouter à la latitude *géographique,* ou à la distance du lieu à l'équateur terrestre (perpendiculaire à l'axe principal z), pour obtenir la latitude *astronomique*, c'est-à-dire sa distance à l'équateur astronomique (perpendiculaire à l'axe instantané).

La période des variations de cette quantité est de 336,7 jours moyens. C'est cette quantité que Peters et

Downing ont cherché à déterminer au moyen des variations de latitude constatées à Poulkova et à Greenwich par l'observation des distances zénithales de la polaire, et Nyrén, par des observations faites dans le premier vertical.

J'appelle l'attention sur cette dernière circonstance, sur laquelle je reviendrai plus loin.

5. Dans ce qui précède, il s'agit, comme on le voit, des variations *réelles* de la latitude *astronomique,* ou, pour parler plus exactement, des différences entre la latitude *astronomique* et la latitude *géographique*, différences indépendantes de toute observation astronomique, mais qu'on peut constater par ces observations.

Occupons-nous maintenant des variations *apparentes* de la hauteur du pôle, c'est-à-dire de celles que les astronomes constatent par leurs observations, faute d'avoir corrigé celles-ci, au préalable, de la nutation initiale.

Si l'on substitue les expressions précédentes de l et de m dans les formules

$$\frac{d\theta}{dt} = -l \cos\varphi + m \sin\varphi, \qquad s_1 \frac{d\lambda}{dt} = l \sin\varphi + m \cos\varphi,$$

où s_1 représente le sinus de l'obliquité, on trouve

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma' \cos(\varphi + nit + \beta') = -\gamma' \cos[(1+i)nt + \beta],$$

$$s_1 \frac{d\lambda}{dt} = \gamma' \sin(\varphi + nit + \beta') = \gamma' \sin[(1+i)nt + \beta],$$

puisque $\varphi = nt + L$; et, en intégrant,

$$\Delta\theta = -\frac{\gamma'}{n(1+i)}\sin\left[(1+i)nt+\beta\right],$$

$$s_1\Delta\lambda = -\frac{\gamma'}{n(1+i)}\cos\left[(1+i)nt+\beta\right].$$

Comme $\frac{\gamma'}{n(1+i)}$ diffère très peu de $\frac{\gamma'}{n} = \gamma$, nous écrirons simplement

$$\Delta\theta = -\gamma\sin\left[(1+i)nt+\beta\right]$$

$$s_1\Delta\lambda = -\gamma\cos\left[(1+i)nt+\beta\right],$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\delta = -\gamma\cos\left[(1+i)nt-\alpha+\beta\right] \\ \text{et}\quad &\Delta\alpha = \gamma\cot z\cos\left[(1+i)nt+\beta\right] \\ &\qquad + \gamma\operatorname{tg}\delta\sin\left[(1+i)nt-\alpha+\beta\right]. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Telles sont les variations subies en Æ et en D par une étoile, en vertu de la nutation initiale, variations rapportées à l'équateur *géographique*.

Si l'on n'en tient pas compte dans la détermination de la hauteur du pôle, il s'ensuivra nécessairement dans celle-ci une erreur que nous calculerons ci-après; mais faisons observer que, de toutes les déterminations de la latitude, la moins sujette à cette erreur est celle qui se tire d'observations de passages d'étoiles assez voisines du zénith par le

premier vertical. La latitude se déduit alors, en effet, de l'angle horaire

$$t_2 - \Delta\alpha_2 - (t_1 - \Delta\alpha_1)$$

ou

$$t_2 - t_1 - (\Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_1);$$

et la différence

$$\Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_1,$$

dépendant de

$$\sin n\frac{t_2 - t_1}{2},$$

sera très faible pour les étoiles voisines du zénith.

4. Commençons par la plus usuelle parmi les autres déterminations de la hauteur du pôle.

Soit Φ_0 cette hauteur; z la distance zénithale d'une circompolaire, observée à l'un de ses passages méridiens et corrigée de la réfraction; — R la réduction de la déclinaison au lieu moyen, telle que les astronomes la calculent; — $(R + \Delta\delta)$ la réduction correcte.

L'expression de la déclinaison moyenne sera, pour le passage supérieur, si l'on compte les distances zénithales comme négatives du côté du Nord,

$$D = \Phi_0 - z_s - R_s - \Delta\delta,$$

ou, par la formule (2), en négligeant ici la nutation diurne, qui entre implicitement dans $\Delta\delta$,

$$D = \Phi_0 - z_s - R_s + \gamma\cos(nit+\beta); \qquad (3)$$

pour le passage inférieur

$$\begin{aligned}\pi - D &= \Phi_0 - z_i + R_i + \Delta\delta \\ &= \Phi_0 - z_i + R_i + \gamma \cos(nit + \beta), \qquad (3^{\text{bis}})\end{aligned}$$

puisque nt est égal, dans ce dernier cas, à $\pi + \alpha$, et que nous pouvons négliger la quantité $i\pi$, qui est à peine supérieure à $1'$.

La somme de ces équations donnera

$$\frac{\pi}{2} - \Phi_0 = -\frac{z_i + z_s}{2} + \gamma \cos(nit + \beta),$$

si l'on admet que $R_i = R_s$, c'est-à-dire si l'on néglige la nutation diurne. Nous tiendrons compte ultérieurement de cette dernière.

Donc à la latitude Φ_a, telle que les astronomes la déterminent usuellement, il faut ajouter

$$\Delta\Phi_a = -\gamma \cos(it + \beta) \qquad (4)$$

pour obtenir la latitude géographique Φ_0.

La même correction serait à appliquer à la latitude déterminée au moyen d'une seule distance zénithale.

La latitude déterminée par les observations des distances zénithales supérieures ou inférieures, sans tenir compte de la nutation initiale, est donc la latitude astronomique, au moins à une très petite quantité près, car on ne doit pas oublier que les constantes γ des expressions (1) et (4) ne sont pas identiquement les mêmes; elles sont entre elles dans le rapport de 1 à $1 + i$.

Et cette différence provient de ce que nous avons adopté le méridien géographique au lieu du méridien astronomique.

Ici le caractère diurne de la variation apparente de la latitude disparaît à raison de cette circonstance que, pour le passage supérieur ou inférieur, on a $nt = \alpha$ ou $\alpha \pm \pi$.

Faisons observer que, si l'on retranche l'une de l'autre les équations (3), en tenant compte des remarques faites à ce sujet, on aura correctement

$$p = \frac{z_s - z_i}{2};$$

c'est-à-dire que la distance polaire de l'étoile, déduite des deux distances zénithales observées, est absolument indépendante de la nutation initiale.

Elle n'est pas indépendante de la nutation diurne.

5. Mais la latitude ne se détermine pas seulement par les distances zénithales observées aux passages méridiens.

Rien n'empêche de la déterminer par la hauteur d'une étoile voisine du pôle, observée à un instant quelconque, et la Connaissance des Temps développe même cette méthode avec beaucoup de détails.

Alors $nt - \alpha$ n'est plus égal à un nombre entier de demi-circonférences, et les variations apparentes de la latitude seront à la lettre *journalières*, puisqu'elles sont exprimées directement en fonction de l'erreur que l'on commet sur la position de l'étoile en négligeant la nutation initiale, erreur qui se tirera des deux formules (2)

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= -\gamma \cot\varepsilon \cos[(1 + i)nt + \beta] \\ &\quad + \gamma \operatorname{tg}\delta \sin[(1 + i)nt - \alpha + \beta]; \\ \Delta\delta &= -\gamma \cos[(1 + i)nt - \alpha + \beta].\end{aligned}$$

Recherchons en particulier quelle est, dans ce mode d'observation, l'erreur en latitude qui provient de ce qu'on néglige la nutation initiale.

La hauteur observée, corrigée de la réfraction, sera désignée par h, et pourra s'exprimer en fonction de la latitude, de l'angle horaire et des coordonnées *apparentes* de l'étoile, telles que les astronomes les calculent habituellement, au moyen de la formule

$$\sin h = c^2 \cos(\Phi_a - \delta) - s^2 \cos(\Phi_a + \delta);$$

c et s désignent respectivement les sinus et cosinus de la moitié de l'angle horaire $\varkappa = t - \alpha$.

Mais si l'on tient compte de la nutation initiale, α et δ devront être remplacés par $\alpha + \Delta\alpha$, $\delta + \Delta\delta$, et la latitude Φ_a par $\Phi_a + \Delta\Phi = \Phi_0$, en sorte que $\Delta\Phi$ est la correction à apporter à la latitude telle qu'on la calcule habituellement, ou la variation *apparente* de la latitude, variation dont le caractère est évidemment diurne, puisqu'elle dépendra de $\varkappa = nt - \alpha$.

Si nous opérons ces substitutions, et que nous retranchions la première formule de celle qu'elles fournissent, nous obtiendrons immédiatement

$$\begin{aligned} &\sin\varkappa \cos\Phi_a \cos\delta\,\Delta\alpha \\ &+ \left\{c^2 \sin(\Phi_a - \delta) + s^2 \sin(\Phi_a + \delta)\right\} \left\{\Delta\delta + \Delta\Phi\right\} \\ &- c^2 \sin(\Phi_a - \delta) + s^2 \sin(\Phi_a + \delta) = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tirera $\Delta\Phi$ en substituant à $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ leurs expressions précédentes.

Discutons cette formule dans quelques cas particuliers.

Pour $\varkappa = 0$ ou $nt = \alpha$, c'est-à-dire pour le passage supérieur,

$$\Delta\Phi = \Delta\delta = -\gamma\cos(int + \beta).$$

Pour $\varkappa = \pi$, c'est-à-dire pour le passage inférieur,

$$\Delta\Phi = -\Delta\delta = -\gamma\cos(int + \beta),$$

comme pour le passage supérieur.

Ce résultat a déjà été trouvé ci-dessus (4).

Pour

$$\varkappa = \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire pour la plus grande digression occidentale,

$$\Delta\Phi = -\frac{1}{\operatorname{tg}\delta}(\Delta\alpha + \operatorname{tg}\Phi_a \Delta\delta).$$

Pour

$$\varkappa = 3\frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire pour la plus grande digression orientale,

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\operatorname{tg}\delta}(\Delta\alpha - \operatorname{tg}\Phi_a \Delta\delta).$$

Il n'est pas nécessaire que nous substituions à $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ les valeurs qu'elles prennent si l'on y fait

$$t = \alpha + \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad t = \alpha + 3\frac{\pi}{2},$$

pour montrer que ces corrections de la hauteur du pôle sont ici toutes différentes de celles que nous venons de trouver dans le méridien, et pour faire sauter aux yeux le caractère diurne de ces variations apparentes, qui a été méconnu de presque tous les astronomes, malgré l'affirmation bien positive de Laplace.

Et toutes les autres déterminations, si nombreuses, que l'on peut faire de la hauteur du pôle, seront influencées par cette erreur d'un caractère absolument diurne.

6. Récapitulons brièvement les résultats de notre analyse.

1° La latitude *géographique* ou la hauteur du pôle est égale à la latitude *astronomique* moins la quantité $\gamma \cos (nit + \beta)$; la première étant considérée comme constante, la seconde subit des variations *réelles* d'une période de 336,7 jours.

2° La hauteur du pôle est sujette à des variations *apparentes* provenant de l'omission de la nutation initiale dans la réduction des positions des étoiles observées.

Le caractère de ces variations *apparentes* est diurne. Ce caractère est masqué seulement dans les observations méridiennes.

Si l'on corrige la position de l'étoile observée de la nutation initiale, ces variations *apparentes* disparaissent.

3° C'est dans les déterminations de la latitude déduites d'observations de passage par le premier vertical, au voisinage du zénith surtout, que ces variations *apparentes* sont le moins sensibles. Et si Nyrén a pu constater des variations de la latitude de Poulkova, d'une période de onze mois environ, dans les déterminations faites par ce procédé, ces variations sont des variations *réelles* de la latitude

astronomique, c'est-à-dire les différences entre cette latitude, qui est sujette à des variations d'une période de onze mois, et la latitude *géographique*, qui est constante.

7. Il nous reste à signaler encore une conséquence importante de l'omission de la nutation initiale dans la réduction des observations astronomiques.

Comme le pôle instantané ne coïncide jamais avec le pôle géographique, autour duquel il se déplace en 336,7 jours, il en résulte que le *méridien astronomique* fait en général, avec le *méridien géographique*, un petit angle Δz.

Déterminons cet angle azimutal.

Le triangle PIZ, dans lequel P et I représentent les deux pôles et Z le zénith, donne immédiatement

$$Z = \gamma \frac{\sin (nit + \beta)}{\cos \Phi},$$

qu'on peut écrire, en faisant abstraction d'un terme du second ordre,

$$Z = \gamma \frac{\sin (nit + \beta)}{\cos \Phi_0}.$$

Tel est l'angle dont le méridien astronomique s'écarte du méridien géographique. Cet angle se compte positivement du S. vers l'E. au N. du zénith, donc dans le sens généralement attribué aux azimuts; par suite la variation correspondante de l'angle horaire $\mathfrak{z}$ sera

$$\Delta \mathfrak{z} = \gamma \frac{\sin (nit + \beta)}{\cos \Phi} \frac{\sin (\Phi - \delta)}{\cos \delta},$$

pour le passage supérieur au méridien astronomique. Soit α_m l'Æ moyenne de l'étoile; $\alpha_m + R$ l'Æ apparente, telle qu'on la calcule habituellement; $\alpha = \alpha_m + R + \Delta\alpha$ l'Æ apparente correcte (abstraction faite de la nutation diurne), ou l'heure du passage au méridien géographique.

L'heure du passage au méridien astronomique sera

$$u = \alpha + \Delta\gamma = \alpha_m + R + \Delta\alpha + \Delta\gamma.$$

Les astronomes écrivent $u = \alpha'_m + R$.

Donc, à l'Æ moyenne α'_m, habituellement calculée, il faut ajouter, pour tenir complètement compte de la nutation initiale, si l'observation a été faite dans le méridien astronomique,

$$\left.\begin{aligned} \Delta u_s = -\Delta\gamma - \Delta\alpha &= \gamma \cot\varepsilon \cos(nit + \beta + \alpha) \\ &- \gamma \sin(nit + \beta)\left[\frac{\sin(\Phi - \delta)}{\cos\Phi \cos\delta} + \operatorname{tg}\delta\right] \\ &= \gamma \cot\varepsilon \cos(nit + \beta + \alpha) - \gamma \sin(nit + \beta) \operatorname{tg}\Phi. \end{aligned}\right\} (5)$$

Pour le passage inférieur, on aurait à ajouter

$$\left.\begin{aligned} \Delta u_i = &- \gamma \cot\varepsilon \cos(nit + \beta + \alpha) \\ &+ \gamma \sin(nit + \beta)\left[\frac{\sin(\Phi + \delta)}{\cos\Phi \cos\delta} - \operatorname{tg}\delta\right] \\ = &- \gamma \cot\varepsilon \cos(nit + \beta + \alpha) \\ &+ \gamma \sin(nit + \beta) \operatorname{tg}\Phi. \end{aligned}\right\} (5^{bis})$$

Si S et I désignent les Æ moyennes déduites par les astronomes des passages supérieur et inférieur consécutifs, on aura entre ces quantités la différence

$$\begin{aligned} S - I = \Delta u_i - \Delta u_s = 2\gamma \operatorname{tg}\Phi \sin(nit + \beta) \\ - 2\gamma \cot\varepsilon \cos(nit + \beta + \alpha), \end{aligned}$$

pour des observations faites dans le méridien astronomique. Si elles ont été faites dans le méridien géographique, au contraire, on aura (2) :

$$S - I = 2\gamma \operatorname{tg}\delta \sin(nit + \beta) - 2\gamma \cot\varepsilon \cos(nit + \beta + \alpha),$$

qu'on peut écrire, en posant $2\gamma \sin\beta = x$, $2\gamma \cos\beta = y$,

$$\left.\begin{aligned} S - I = x\,[\operatorname{tg}\delta \cos nit + \cot\varepsilon \sin(nit + \alpha)] \\ + y\,[\operatorname{tg}\delta \sin nit - \cot\varepsilon \cos(nit + \alpha)]. \end{aligned}\right\} (6)$$

C'est en faisant usage de ces formules que nous avons déterminé les constantes γ et β de la nutation initiale, au moyen des séries d'observations de la polaire faites par W. Struve en 1823, 1824, 1825, et que nous avons pu déterminer avec précision la période de cette nutation ou des variations de la latitude.

Nos déterminations concordent tellement bien avec celles de Peters et de Downing quant à la valeur de β, avec celles de Peters, Nyrén et Downing quant à la valeur de γ, que la nutation initiale peut être considérée comme bien connue (*).

(*) Voir la notice suivante : *Sur la période astronomique dite décimensuelle.*

Si l'on désigne maintenant par $\Delta\alpha$ la *correction totale* qu'il faut ajouter à l'Æ moyenne, telle qu'on la déduit usuellement de l'observation d'un passage supérieur ou inférieur par le méridien astronomique, pour tenir compte de la nutation initiale et de ce que ce méridien n'est pas le méridien géographique, cette *correction totale* sera donnée par l'une des formules (5).

Il est inutile que nous recherchions ce qu'elle serait hors du méridien. On le trouvera aisément, au moyen des principes précédents, pour le cas du passage par le premier vertical, par exemple.

On trouvera de même aisément la correction à apporter à la déclinaison telle que les astronomes la calculent aujourd'hui, et l'on pourra, ici, faire complètement abstraction de la différence des méridiens géographique et astronomique.

Nous allons, du reste, appliquer nos principes à un exemple frappant dans l'article 8.

Les développements que nous venons de donner à ces deux chapitres des variations de la latitude, et des conséquences de l'omission de la nutation initiale dans la réduction des observations astronomiques, ne paraîtront certainement pas superflus.

Le premier de ces chapitres a seul fait l'objet des travaux de quelques astronomes ; mais la manière dont il a été traité est incorrecte, comme on l'a vu.

Quant au second chapitre, aucun traité d'astronomie, aucun astronome ne s'en est occupé, non pas tant à cause de la faiblesse de la quantité qui en fait l'objet (l'astronomie recherche aujourd'hui des quantités plus faibles encore), mais peut-être parce qu'on n'en a pas bien clairement entrevu l'importance.

En appliquant à leurs observations les formules que nous venons de développer, les astronomes pourront se rendre compte de maintes discordances restées pour eux, jusqu'aujourd'hui, tout à fait inexplicables.

8. Parmi les effets de la négligence que commettent les astronomes en ne tenant pas compte de la nutation initiale ni de la variation de la latitude astronomique, signalons l'un des plus importants, l'influence de cette omission sur la détermination de l'obliquité de l'écliptique.

Pour bien faire saisir ce point capital, nous allons montrer que les deux obliquités moyennes que l'on détermine aux deux solstices peuvent différer entre elles de 0",16 environ, abstraction faite de la diminution séculaire, si l'on admet que la constante de la nutation initiale est égale à 0",08.

Soit Φ_0 la latitude géographique ; Z la distance zénithale du soleil, observée à l'un des solstices, et corrigée de la réfraction ; R la réduction au lieu apparent, telle que les astronomes la calculent, $R + \Delta\delta$ la réduction correcte (abstraction faite de la nutation diurne), $\Delta\delta$ étant égal (2) à $-\gamma' \cos(int + \beta)$.

L'expression correcte de l'obliquité moyenne sera (5) :

$$\varepsilon = \Phi_0 - Z - R + \gamma' \cos(nit + \beta).$$

Les astronomes écrivent, au contraire,

$$\varepsilon_u = \Phi_0 - Z - R.$$

On tire de là

$$\varepsilon - \varepsilon_u = \Delta\varepsilon = \gamma' \cos(nit + \beta). \tag{7}$$

Telle est l'expression générale de l'erreur commise par les astronomes dans leurs déterminations de l'obliquité de l'écliptique, abstraction faite de la nutation diurne.

9. Recherchons si cette erreur ne peut pas se manifester par la comparaison des obliquités déterminées aux deux solstices.

Prenons pour origine du temps le solstice d'été; nous aurons, en appelant E_e l'obliquité déterminée par les astronomes, ε l'obliquité correcte, $\Delta\varepsilon$ leur différence :

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon - E_e = \gamma \cos\beta.$$

Au solstice d'hiver, *nt* a augmenté de 195°,2; on aura donc (7) :

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_h - E_h = -\gamma \cos(15°,2 + \beta);$$

et, en adoptant 46″ pour la diminution séculaire de l'obliquité :

$$\varepsilon - 0'',23 = E_h - \gamma \cos(15°,2 + \beta),$$

E_h étant l'obliquité déterminée par les astronomes au solstice d'hiver.

Des deux expressions précédentes de l'obliquité on tire

$$-0'',23 = E_h - E_e - \gamma[\cos\beta + \cos(15° + \beta)],$$

ou

$$E_h - E_e + 0'',23 = 2\gamma \cos 7°,6 \cos(\beta + 7°,6).$$

Si l'on prenait pour origine du temps le solstice d'hiver,

il faudrait changer les signes de E_h et E_e dans le premier membre.

On voit que, si l'on a $\beta = 0$ ou 180°, ce qui arrive nécessairement pour deux certains méridiens diamétralement opposés de la Terre, la différence des obliquités déterminées par les astronomes aux deux solstices sera en ces lieux

$$\pm 2\gamma \cos^2 7°,6,$$

ou, très approximativement, $\pm 2\gamma$.

10. Appliquons cette formule aux obliquités déterminées par Bradley (*) pour les années 1753 à 1760.

En partant de la valeur de β trouvée par Downing, 205° pour 1872,0, et en adoptant mon accroissement annuel de 390°,5, on trouve pour le solstice d'été de 1753 (1753,47), $\beta = 359°$; pour celui d'hiver $\beta = 194°,2$; et la dernière équation, appliquée à chacun des couples de solstices, donnera, si l'on fait $2\gamma \cos 7°,6 = x$ et qu'on néglige les centièmes de seconde :

Origine : Solstice d'hiver.		Origine : Solstice d'été.	
1753	$1.6 = 0,970\,x$	1754	$5.0 = 0.798\,x$
4	$1.6 = 0.711\,x$	5	$-1.0 = 0.386\,x$
5	$2,5 = 0.256\,x$	6	$-2.1 = 0.141\,x$
6	$-0.7 = 0.270\,x$	7	$0.1 = 0.617\,x$
7	$1.7 = 0.721\,x$	8	$0.8 = 0.955\,x$
8	$0.4 = 0.975\,x$	9	$1.5 = 0.986\,x$
9	$3.5 = 0.900\,x$	1760	$3.9 = 0.765\,x$

(*) Peters, *Num. Constans nutationis*, p. 65.

Chacune de ces quatorze équations, prise isolément, donne pour x une valeur positive, trois seulement d'entre elles exceptées.

On peut donc voir dans ce fait une confirmation, non seulement de la théorie que je viens d'exposer, mais encore de l'exactitude de la période que j'ai assignée à la nutation initiale, ou aux variations de la latitude, puisque l'application de cette période à une durée de plus d'un siècle donne des résultats très satisfaisants.

11. Montrons enfin qu'une série de déterminations de la latitude, déduites de l'observation des distances zénithales de la polaire à deux passages consécutifs, permet de déterminer à la fois les constantes de la nutation initiale et de la nutation diurne.

Nous avons vu (4) qu'à la latitude *astronomique*, déterminée au moyen de l'une quelconque des distances zénithales de la polaire, il faut ajouter, pour tenir compte de la nutation initiale et obtenir la latitude *géographique*, la quantité

$$\Delta\Phi = -\gamma\cos(nit + \beta).$$

On pourrait commettre une grave erreur si l'on appliquait immédiatement cette correction à chaque latitude observée; car on négligerait la nutation diurne, qui pourrait être plus considérable que la nutation initiale.

Mais il est facile de s'assurer que, si l'on applique la correction à la moyenne des valeurs de la latitude déterminées par deux passages (supérieur et inférieur) consécutifs, la nutation diurne en déclinaison aura, à fort peu de chose près, la même valeur à chacun de ces passages, puisque sa

période est de 12 heures; et, comme elle intervient avec des signes contraires dans les expressions de la latitude déterminée aux deux passages supérieur et inférieur, elle s'éliminera dans la moyenne de celles-ci.

12. Soit donc Φ_0 la latitude géographique *correcte*, $\Phi_a - r$ la moyenne des latitudes déduites par l'astronome de deux passages consécutifs (supérieur et inférieur), $-r$ représentant l'ensemble des corrections instrumentales et d'observation; nous aurons

$$\Phi_0 = \Phi_a - r - \gamma\cos(nit + \beta),$$

ou, en appelant z la correction $\Phi_0 - \Phi_a$ à apporter à la latitude déterminée par l'astronome,

$$z + \gamma\cos(nit + \beta) + r = 0.$$

Faisant

$$\gamma\sin\beta = x, \quad \gamma\cos\beta = y,$$

on a

$$z + y\cos nit - x\sin nit + r = 0,$$

t étant le temps compté à partir de l'époque, et nit augmentant de $1^\circ\!,07$ par jour, ou de $390^\circ\!,5$ par an.

Dans une *Notice* ultérieure, nous appliquerons ce mode de détermination des constantes de la nutation initiale aux observations de Peters, de Gyldén et de Nyrén sur la latitude de Poulkova.

13. Nous venons de dire que la nutation diurne s'élimine lorsqu'on prend la moyenne des latitudes déterminées par deux passages consécutifs, supérieur et inférieur, d'une circompolaire.

Prend-on au contraire la différence de ces deux latitudes, il va de soi que l'effet de la nutation diurne s'y fera doublement sentir.

Reprenons en effet les équations (3), qui déterminent la latitude, en y remplaçant $\Delta\delta$ par $\Delta_i\delta + \Delta_d\delta$, ces deux notations désignant la nutation initiale et la nutation diurne en déclinaison; les latitudes géographiques déterminées par les passages supérieur et inférieur seront

$$\Phi_s = -Z_s + D + R_s - \gamma\cos(nit + \beta) + \Delta_d\delta + \Delta_i\delta,$$
$$\pi - \Phi_i = -Z_i + D + R_i + \gamma\cos(nit + \beta) + \Delta_d\delta - \Delta_i\delta.$$

Ajoutant ces deux équations et observant que

$$\pi = -Z_s - Z_i + 2D + R_s + R_i,$$

on a

$$\Phi_s - \Phi_i = 2\Delta_d\delta.$$

Entre les latitudes géographiques déterminées par deux passages consécutifs, supérieur et inférieur, il doit donc y avoir, si la nutation diurne est sensible, une différence égale au double de la nutation diurne en déclinaison.

L'expression de celle-ci est, si N_d représente le coefficient de la nutation diurne, φ le temps sidéral du premier méridien,

$$\Delta_d\delta = -N_d\Sigma_1\sin(2\varphi - \alpha) + N_d\Sigma_2\cos(2\varphi - \alpha).$$

En posant

$$N_d\sin(2\varphi - \alpha) = x, \quad N_d\cos(2\varphi - \alpha) = y,$$

nous aurons donc l'équation :

$$\frac{\Phi_s - \Phi_i}{2} = -x\Sigma_1 + y\Sigma_2.$$

Nous appliquerons également cette équation, dans une autre *Notice*, aux latitudes déterminées à Poulkova, afin d'en déduire les constantes de la nutation diurne.

CONCLUSION.

La nutation initiale me semble suffisamment bien déterminée pour qu'on puisse en tenir compte dans les réductions astronomiques.

En en désignant le coefficient par γ et la constante angulaire par β_0 pour Greenwich, 1890,0 on prendra

$$\gamma = 0'',08, \quad \beta_0 = 54^\circ;$$

l'angle β qui entre dans les expressions suivantes sera égal à

$$\beta_0 + L + 390^\circ{,}5t,$$

t désignant le temps écoulé à partir de 1890,0, exprimé en années tropiques, et L la longitude occidentale du lieu d'observation par rapport à Greenwich.

a. Pour déduire la latitude *géographique* correcte de la latitude déduite, suivant le procédé usuel, d'une distance zénithale, il faut *retrancher* de cette dernière latitude

$$\gamma \cos \beta.$$

b. Si l'on connaît exactement la latitude géographique Φ_0, et la réduction *complète* R au lieu apparent (c'est-à-dire y compris la nutation diurne, sans tenir compte de la nutation initiale), la déclinaison moyenne δ_m s'exprimera en fonction de la distance zénithale vraie Z de l'étoile à son passage supérieur par

$$\delta_m = \Phi_0 - Z - R + \gamma \cos(int + \beta) = \Phi - Z - R.$$

Elle est donc en apparence indépendante de la nutation initiale, lorsqu'on l'exprime au moyen de la latitude astronomique; il en serait de même pour le passage inférieur.

c. L'Æ moyenne, telle qu'on la calcule habituellement, et réduite de la nutation diurne, doit, si elle est déduite d'un passage au méridien *géographique*, être augmentée de

$$\gamma \left\{ \cot \varepsilon \cos(\beta + \alpha) - \operatorname{tg} \delta \sin \beta \right\}$$

pour le passage supérieur, et de

$$\gamma \left\{ - \cot \varepsilon \cos(\beta + \alpha) + \operatorname{tg} \delta \sin \beta \right\}$$

pour le passage inférieur.

d. Les formules générales de la réduction au lieu vrai, provenant de la nutation initiale, ont été données ci-dessus (2).