THÉORÈME III. $B(p, q) = \frac{1}{q} \prod_0^\infty \frac{(1+\lambda)(p+q+\lambda)}{(p+\lambda)(1+p+\lambda)}$.

THÉORÈME IV. $\frac{B(p, p)}{B\left(\frac{1}{2}, p\right)} \prod_0^\infty \frac{(2\lambda+1)(\lambda+2p)}{(2\lambda+2p+1)(\lambda+p)}$.

THÉORÈME V. $\frac{p}{q} = \prod_0^\infty \frac{(p+\lambda)(1+q+\lambda)}{(q+\lambda)(1+p+\lambda)}$.

THÉORÈME VI. $\frac{B\left(\frac{1}{2}+q, \frac{1}{2}+q\right)}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+q\right)} \times \frac{B\left(\frac{1}{2}-q, \frac{1}{2}-q\right)}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-q\right)} = 1. \quad \left(q < \frac{1}{2}\right)$

THÉORÈME VII. $4 = \prod_0^\infty \frac{(\lambda+p+1)(\lambda+2p)(2\lambda+2p+3)}{(\lambda+p)(\lambda+2p+2)(2\lambda+2p+1)}$ (*).

Liège, novembre 1891.

Sur les formules correctes du mouvement de rotation de la Terre ; par F. Folie, membre de l'Académie.

Depuis que l'astronomie pratique est parvenue à établir ce fait que la Terre ne tourne pas autour d'un axe principal, plusieurs astronomes modernes ont pensé qu'il serait plus correct de rapporter les équations de ce mouvement à l'axe instantané.

C'est Oppolzer qui a ouvert la voie : « On doit se rappeler, dit-il, que dans les observations l'équateur est pris comme plan fondamental et qu'il est déterminé par le

(*) Le premier membre est indépendant de p; ce qui est assez remarquable.

plan perpendiculaire à l'axe instantané de rotation. ... Si ces deux axes (ce dernier et le petit axe de l'ellipsoïde terrestre) avaient entre eux une inclinaison notable, dans l'établissement des formules que nous avons maintenant en vue, on devrait avoir égard à la différence qu'ils présenteraient. »

A cette raison, que nous discuterons plus bas, est venue s'en joindre une autre qui a corroboré Oppolzer dans son idée : les formules d'intégration de Poisson, qui avait étudié le mouvement de la Terre autour de son axe principal, renferment des termes du second ordre que ce géomètre avait considérés comme négligeables, tandis qu'ils ne le sont pas en réalité, ainsi que l'a fait voir, le premier, Oppolzer, mais qui disparaissent lorsqu'on étudie le mouvement de la Terre autour de son axe instantané.

Il n'est donc pas douteux que, si l'on adopte la méthode d'intégration de Poisson, les formules rapportées à l'axe instantané ne soient plus correctes que celles qui sont rapportées à l'axe principal, en ce sens que les termes négligés sont d'une importance beaucoup moindre.

Mais ici se posent deux questions :

1° Les raisons invoquées par Oppolzer justifient-elles le choix de l'axe instantané comme axe de référence?

2° Dans la négative, puisque les formules de Poisson rapportées aux axes principaux conduisent à des termes du second ordre qui sont difficiles à évaluer, n'existe-t-il pas des formules d'intégration rigoureuses relativement à ces axes ?

Élucidons le premier point.

Selon qu'on rapporte le mouvement de la Terre à son axe instantané, autour duquel elle tourne en réalité, ou à son axe principal, le méridien, qui est le plan déterminé par l'un ou l'autre de ces axes et par le zénith, sera mobile ou sera fixe.

Or, la définition de l'heure ne peut être donnée que par rapport à un méridien fixe. C'est quand l'équinoxe vrai passe dans ce plan qu'il est 0 heure sidérale ; et, entre 0 heure d'aujourd'hui et 0 heure de demain, il s'écoule exactement vingt-quatre heures sidérales, puisque la vitesse de rotation de la Terre autour de son axe principal est constante, ou du moins admise comme telle par tous les géomètres qui ont traité la question du mouvement de rotation du globe.

Supposons, au contraire, qu'on définisse 0 heure comme l'instant du passage de l'équinoxe vrai par le méridien instantané, et admettons que la vitesse de rotation de la Terre autour de l'axe instantané soit constante, comme autour de l'axe principal.

Entre 0 heure d'aujourd'hui et 0 heure de demain, il ne se sera plus écoulé exactement vingt-quatre heures sidérales, puisque le méridien de demain ne sera pas celui d'aujourd'hui. Et l'écart ne fera que s'accentuer de jour en jour.

Il y a plus : deux lieux situés sur le même méridien géographique n'auront pas la même heure, puisque très généralement ces deux lieux seront situés sur des méridiens instantanés différents. Et la définition des longitudes terrestres ne peut se donner correctement que par rapport au méridien géographique. Car deux lieux, qui sont aujourd'hui sur un même méridien instantané et auraient même longitude en ce moment, selon la manière de voir d'Oppolzer, ne l'auraient plus demain, à cause du déplacement de l'axe instantané à la surface de la Terre.

Ces arguments suffiront pour démontrer aux astronomes

que les géomètres qui rapportent le mouvement de la Terre à son axe instantané se mettent en contradiction avec les définitions fondamentales de l'astronomie.

Et qu'on ne vienne pas objecter qu'il s'agit ici de quantités assez petites pour pouvoir être négligées : dans l'application de l'analyse à l'astronomie, on ne doit rien négliger de ce qui peut n'être pas négligé.

Ajoutons enfin qu'à cette première négligence capitale il s'en joint forcément une autre, avouée par Oppolzer, mais beaucoup moins importante, il faut le reconnaître : c'est celle de certains termes qu'il est obligé de laisser de côté, et qui proviennent de la substitution de l'axe instantané à l'axe principal comme axe de référence (*).

De négligence en négligence cependant, que deviendrait la correction des formules, correction que l'astronomie de précision est en droit d'attendre aujourd'hui des géomètres ?

La première question est donc résolue : malgré le fait, invoqué par Oppolzer, de la rotation de la Terre autour d'un axe instantané variable à sa surface, on ne peut prendre celui-ci comme axe de référence, sans se mettre en contradiction ouverte avec les définitions capitales de l'astronomie, celle de l'heure et celle des longitudes terrestres ; on ne peut davantage faire usage du méridien instantané (qu'il faudrait, du reste, déterminer à nouveau chaque jour) dans les observations astronomiques, sous peine de déterminer l'heure d'une manière incorrecte, puisqu'elle ne peut être définie que par le méridien géographique. C'est dans ce dernier plan qu'on observera le passage des astres pour la détermination de l'heure et de

(*) Oppolzer, trad. Pasquier, p. 137.

l'ascension droite; c'est à lui et à l'équateur géographique que devront être rapportées leurs coordonnées.

Ces idées, que nous venons de développer (un peu trop longuement à notre gré) pour répondre aux critiques dont elles ont été l'objet de la part d'astronomes et de géomètres très distingués (*), ces idées ont été embrassées par Laplace avec le coup d'œil du génie, lorsqu'il a dit que si le mouvement de nutation initiale *était sensible, on le reconnaîtrait par les variations* JOURNALIÈRES *de la hauteur du pôle* (**). Aussi Laplace, pas plus qu'aucun de ses successeurs jusqu'à Oppolzer, ne s'est-il jamais occupé de l'axe instantané, et n'y eût-il pas rapporté ses formules, si même cet axe n'avait pas coïncidé à peu près avec l'axe principal.

Oppolzer a contesté formellement cette affirmation du grand géomètre, en définissant la latitude par rapport au pôle instantané.

Il en est de même de Tisserand (*Bull. Astr.*, loc. cit.). Je dois reconnaître toutefois que, dans sa *Mécanique céleste*, à part la définition qu'il donne de la latitude, tome II, page 380, selon Oppolzer, il n'a pas suivi celui-ci dans son procédé d'intégration, consistant à rapporter les formules du mouvement de la Terre à son axe instantané. Cette définition est donc sans conséquence aucune sur la théorie développée par M. Tisserand dans son ouvrage; elle n'a que le tort de n'être pas adéquate à cette théorie (*).

(*) Voir *Bull. Astr.*, 1890, p. 278. — *Astr. Nachr.*, n° 3041.

(**) LAPLACE, *Méc. cél.*, t. V, n° 4.

(*) Je ne parle pas ici du chapitre XXIX, dans lequel cette définition sert de base à de nombreux développements, parce que M. Tisserand déclare, dans sa préface, que ce n'est pas lui qui a rédigé ce chapitre.

Une preuve absolument convaincante du caractère diurne de la nutation initiale, affirmé par Laplace, est la détermination que j'en ai faite au moyen des différences observées, soit en Æ, soit en déclinaison, entre deux passages consécutifs (supérieur et inférieur) d'une même étoile, et qui m'a conduit, en ne faisant usage que d'un nombre assez restreint de couples, à des valeurs qui non seulement concordent très bien avec celles de Peters, Nyrén et Downing, mais qui font concorder ces dernières d'une façon inespérée, et avec les miennes et entre elles, par la substitution de ma période de 337 jours à celle de 305 jours calculée dans l'hypothèse d'une Terre solide (voir l'*Annuaire* pour 1891 et pour 1892). Cette période nouvelle, déduite des observations, est, soit dit en passant, une preuve indirecte, mais frappante, de l'existence de la nutation diurne.

Il nous reste à traiter la seconde question.

Peut-on intégrer les équations du mouvement de rotation de la Terre, rapportées à ses axes principaux, sans obtenir ces termes du second ordre dont Oppolzer a justement reproché la négligence à Poisson, et pour l'élimination desquels il a imaginé, à tort, de vouloir prendre l'axe instantané comme axe de référence?

Cette question peut être hardiment résolue par l'affirmative, si l'on admet d'abord, comme on le fait, du reste, dans toutes les méthodes d'intégration dont on s'est servi, que la vitesse de rotation de la Terre autour de son plus petit axe principal est constante.

Le procédé d'intégration de Laplace, à l'inverse de celui de Poisson, n'introduit, en effet, aucun terme du second ordre dans l'intégrale des deux premières équations du mouvement de rotation de la Terre, la troisième étant relative à la variation de la vitesse angulaire, admise provisoirement comme constante. Et si le grand géomètre a laissé de côté, dans l'évaluation des coefficients des termes de la fonction perturbatrice, des quantités que l'on n'est plus en droit de négliger aujourd'hui, il faut l'attribuer exclusivement à ce que ses formules étaient d'une exactitude suffisante eu égard à la précision des observations de son temps.

Mais cette négligence peut aisément être réparée; et c'est ce que nous avons fait.

Les intégrales que nous avons données des deux premières équations du mouvement de rotation de la Terre sont absolument correctes, comme on s'en convaincra aisément par la différentiation.

Nous allons les rappeler brièvement.

Les équations d'Euler sont, l, m, n représentant les composantes de la vitesse angulaire du corps autour des axes principaux :

$$\begin{aligned} A\,dl + (C - B)\,mn\,dt &= P\,dt \\ B\,dm + (A - C)\,ln\,dt &= Q\,dt \\ C\,dn + (B - A)\,lm\,dt &= R\,dt. \end{aligned}$$

Si l'on y fait

$$C - A = a;\quad C - B = b;\quad B - A = d;$$

$$-3f\frac{m_1^2}{n} = h;\quad P = -bnq;\quad Q = anp;\quad R = dnr;$$

d'où

$$q = h\frac{yz}{R_1^2}\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^3,\quad p = h\frac{xz}{R_1^2}\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^3,\quad r = h\frac{xy}{R_1^2}\left(\frac{D_1}{R_1}\right)^3,$$

elles s'écriront :

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= -\frac{b}{A}\,n(m+q) \\ \frac{dm}{dt} &= \frac{a}{B}\,n(l+p) \\ \frac{dn}{dt} &= -\frac{d}{C}(lm+nr); \end{aligned}$$

l et m étant connus, on en tirera $\frac{d\theta}{dt}$ et $\sin\frac{d\lambda}{dt}$ au moyen des formules

$$\frac{d\theta}{dt} = -l\cos\varphi + m\sin\varphi,$$

$$\sin\theta\frac{d\lambda}{dt} = l\sin\varphi + m\cos\varphi.$$

Or, l'intégration montrera que le second membre de l'équation en $\frac{d\theta}{dt}$ est très faible; aussi pourrons-nous supposer provisoirement θ constant; on calculerait ultérieurement les modifications que l'abandon de cette hypothèse introduira dans les formules; mais nous ne nous occuperons pas ici de ce point, que nous avons traité ailleurs (*).

Ceci admis, Laplace a montré que la fonction perturbatrice p peut se mettre sous la forme

$$p = \Sigma u \sin(1 + \upsilon_2)\varphi,$$

d'où

$$q = \Sigma u \cos(1 + \upsilon_2)\varphi,$$

et a donné les intégrales des deux premières équations d'Euler, mais en négligeant υ_2 vis-à-vis de l'unité.

(*) *Traité des Réductions stellaires.*

Sans rien négliger, on peut mettre ces intégrales sous la forme :

$$l = \gamma \sin(\iota\varphi + \beta) - \frac{b}{A}\Sigma u \frac{1 - \frac{a}{B} + v_2}{(1 + v_2)^2 - \frac{ab}{AB}} \sin(1 + v_2)\varphi$$

$$m = -\sqrt{\frac{Aa}{Bb}}\,\gamma \cos(\iota\varphi + \beta) - \frac{a}{B}\Sigma u \frac{1 - \frac{b}{A} + v_2}{(1 + v_2)^2 - \frac{ab}{AB}} \cos(1 + v_2)\varphi, \qquad (*)$$

où ι représente $\sqrt{\frac{ab}{AB}}$, γ et β les constantes arbitraires.

On sait que γ est peu sensible, que A et B, et, par suite, $a = C - A$, $b = C - B$ diffèrent très peu l'un de l'autre; et l'on voit immédiatement par là que $\frac{d\theta}{dt}$ sera, en effet, une quantité très petite, comme nous l'avons admis avant d'effectuer l'intégration.

Il est inutile que nous poussions plus loin le développement de ces formules, qui conduisent aux expressions complètes de la nutation.

Celles-ci renferment quatre catégories bien distinctes de termes :

un terme constant, qui a pour facteur

$$\mu_1 = \frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi},$$

(*) Si l'on suppose $A = B$, comme l'ont fait tous les géomètres jusqu'à ce jour, la nutation initiale ne renferme qu'une seule constante numérique γ. J'ai des raisons de croire qu'il n'en est pas ainsi, et je cherche en ce moment à déduire des observations l'existence d'une seconde constante. Si je parviens à la déterminer, c'est-à-dire à démontrer, par la nutation initiale, que B est différent de A, l'existence de la nutation diurne sera prouvée *a priori*.

μ étant

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{B} + \frac{b}{A}\right), \text{ et } \varpi, \frac{ab}{AB},$$

d'où

$$\mu_1 = \frac{2C - A - B}{2C};$$

des termes périodiques qui ont pour facteur

$$\mu \frac{1 + v_2 - \frac{\varpi}{\mu}}{(1 + v_2)^2 - \varpi},$$

que tous les géomètres ont remplacé par $\frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi}$ ou μ_1; ces termes sont ceux de la nutation que j'ai appelée annuelle, pour la distinguer des deux suivantes;

des termes également périodiques qui ont pour facteur

$$\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{B} - \frac{b}{A}\right),$$

et pour argument principal 2φ; ce sont les termes de la nutation diurne;

enfin les termes de la nutation initiale, qui ont pour facteur principal γ et pour argument $(1 + \iota)\varphi$.

On le voit, non seulement la méthode de Laplace, qui consiste à rapporter le mouvement de rotation de la Terre à ses axes principaux, est seule absolument correcte, mais son procédé d'intégration, légèrement amélioré, permet d'éviter bien des négligences de détail qu'il avait commises lui-même, et qui n'ont été évitées par aucun de ses successeurs.

La conclusion à tirer de cette analyse, c'est que : en théorie, les formules de la précession et de la nutation doivent être rapportées aux axes principaux, et non à l'axe instantané;

en pratique, les observations doivent être faites dans le méridien géographique, et non dans le méridien instantané.

A la vérité, les parallèles décrits par les étoiles sont perpendiculaires au second, et non au premier de ces plans; et, de ce chef, il y aurait une réduction à faire aux observations si l'inclinaison de ces plans l'un sur l'autre était un peu sensible.

Mais les astronomes se convaincront immédiatement que la négligence de cette réduction est tellement insignifiante qu'elle ne peut absolument pas entrer en ligne de compte.

Étude de la synthèse de la Benzine par l'action du zincéthyle sur l'acétophénone; par Maurice Delacre, professeur à l'École militaire.

Les diverses réactions susceptibles de donner naissance à la chaîne benzinique ont, pour l'étude de sa constitution, une importance incontestée. Cependant, si l'on cherche à se rendre compte du mécanisme de la synthèse, on ne tarde pas s'apercevoir des lacunes qui restent encore à combler dans cette voie.

La polymérisation de l'acétylène ne peut, en aucune façon, nous dévoiler la structure de la benzine; les synthèses si importantes de l'éther succinylo-succinique et de l'acide phloroglucinetricarbonique ne sont guère favorables à l'étude des produits intermédiaires, et c'est uniquement le produit final que l'on a eu en vue.

Parmi les méthodes mieux connues, il faut citer en

première ligne les condensations de l'acétone ordinaire; on sait que M. Baeyer en a déduit un argument très séduisant en faveur de la formule hexagonale. Pourtant M. Claisen, dans son travail important sur les produits de condensation de l'acétone, n'a pas admis cette manière de voir; il a conclu que l'oxyde de mésityle n'était pas intermédiaire entre l'acétone et le mésitylène.

Cette question est importante; l'oxyde de mésityle est un produit non saturé des mieux définis, et, s'il entre dans la construction de la chaîne benzinique, il y a lieu d'admettre dans cette dernière l'existence de doubles liaisons. Le caractère saturé de la benzine proviendrait de l'équilibre des trois doubles liaisons, équilibre qui est rompu lorsque l'une vient à disparaître, ainsi que l'a montré M. Baeyer.

Profitant des avantages que présente l'acétophénone sur l'acétone, pour l'étude de ses produits de condensation, j'ai cru pouvoir conclure de mes recherches que la dypnone $\frac{C^6H^5}{CH^3} > C = CH.CO.C^6H^5$ était intermédiaire entre l'acétophénone et la triphénylbenzine.

Il paraît légitime d'appliquer cette conclusion à l'oxyde de mésityle, mais ce n'est là qu'une analogie; elle ne peut d'ailleurs être utile à la théorie de la benzine que pour autant que se trouve résolue la constitution de la phorone ou des autres produits intermédiaires entre l'oxyde de mésityle et le mésitylène. S'il est encore permis de douter de la formule de M. Claisen $\frac{CH^3}{CH^3} > C = CH.CO.CH = C < \frac{CH^3}{CH^3}$, on doit reconnaître qu'elle a une base qui manque à la formule ancienne, et rien ne saurait, quant à présent, justifier l'admission de cette dernière. J'estime cependant l'utilité de nouvelles recherches dans ce sens et je m'effor-