COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Du sens et de la période du mouvement eulérien;

par F. Folie, membre de l'Académie.

§ 1. — *Recherche de la période de la nutation eulérienne par les observations de Greenwich.*

Dans mon *Essai sur les variations des latitudes,* je m'étais rallié à la période de la nutation eulérienne trouvée par Chandler, ou, pour préciser, à une période de 423 jours, parce que celle-ci faisait concorder entre elles un grand nombre de déterminations de l'angle β, qui fixe la position de l'axe de rotation, à des dates comprises entre 1824 et 1892.

J'avais toutefois beaucoup de peine à m'expliquer, par la fluidité intérieure de la Terre, l'écart énorme entre cette période et celle de 305 jours, qui aurait lieu pour une Terre solide; et la période de 337 jours, que j'avais trouvée auparavant, me satisfaisait beaucoup mieux à cet égard.

En effet, pour la Terre, supposée fluide à l'intérieur, le coefficient $\frac{A}{C-A}$, qui détermine la période, n'est pas tout à fait le même que pour la Terre solide.

J'ai fait voir, par les observations de Gyldén (*), que le

(*) *Annuaire de l'Observatoire royal* pour 1894.

coefficient des termes dépendants de la double longitude du Soleil, calculé par Peters, doit être multiplié par $(1-0.08)$; c'est-à-dire que, dans le mouvement de l'écorce terrestre, pour des termes semestriels, le facteur $\frac{C-A}{A}$ qui convient à la précession, et probablement au terme nodal de la nutation bradléenne, à raison de la longueur de leur période, doit être multiplié par $(1-0.08)$. Pour des termes à peu près annuels, comme ceux de la nutation eulérienne, le facteur différera un peu moins de celui qui convient à la Terre solide, puisque leur période est deux fois plus longue environ que celle des termes semestriels.

Admettons que le multiplicateur doive être, pour ces cas, $(1-0.06)$. Il en résultera que la période qui conviendrait à la Terre solide, et qui dépend de $\frac{C-A}{A}$, devra être multipliée par $1+0.06$ pour les termes eulériens du mouvement de l'écorce.

La période de ceux-ci serait donc $305\,(1+0.06)=323$ jours; en tous cas, elle ne pourrait excéder $305\,(1+0.08)=329$ jours, à raison de la fluidité intérieure de la Terre.

Je laisse de côté l'hypothèse de la plasticité de l'écorce, jusqu'à ce qu'il soit démontré qu'elle joue un rôle dans la question, parce que ses effets les plus grands me semblent devoir dépendre surtout des doubles longitudes du Soleil, et, plus encore, de la Lune.

Et je me suis demandé si une période approchant de cette période *théorique* de 323 jours, que je viens de calculer, ne rendrait pas aussi bien compte des faits que celle de 423 jours que j'avais admise.

Cette idée m'est venue à la suite de la question que je me suis posée : Le sens du mouvement du pôle de rotation à la surface de la Terre est-il direct ou rétrograde? Question qu'il n'est possible de résoudre, ni en théorie, parce

que l'argument ι de ce mouvement est égal à

$$\pm\sqrt{\frac{(C-A)\,C-B)}{A\,B}},$$

ni par l'étude des variations de latitude, puisque le terme eulérien en est $\gamma \cos(\beta+\iota t)$, β augmentant de 1° par degré de longitude occidentale, quel que soit le signe de ι, et que ce terme peut s'écrire également $\gamma\cos(2\pi-\beta-\iota t)$.

La seule différence qu'on puisse trouver dans les valeurs de β, calculées suivant l'une ou l'autre hypothèse, est donc que ces deux valeurs sont égales et de signes contraires.

Or, en admettant la période de 423 jours avec mouvement rétrograde, je trouvais un accroissement annuel $\iota t=-311°$ ou $+409°$, si l'on ajoute deux circonférences entières.

Cet accroissement de 409° répond à une période de 321 jours ou de 10 ½ mois, se rapprochant très fort de la période théorique que je viens de calculer pour l'écorce terrestre.

Les valeurs de β que j'ai déterminées précédemment, en faisant usage de la période de Chandler, ne seront nullement altérées si j'y substitue la mienne : j'aurais seulement à en prendre le supplément à 360°.

Quant au choix à faire entre ces deux périodes, il n'y a donc rien à tirer de ces déterminations.

Théoriquement, celle de 321 jours est indubitablement préférable. Encore faut-il la confirmer par les observations, et, pour cela, recourir, non à des déterminations annuelles, qui confirmeront également l'une et l'autre période, mais à des déterminations poursuivies durant un certain nombre d'années.

MM. Thackeray et Turner ont publié assez récemment les résultats de douze années d'observations faites à Greenwich, et reconnaissent y avoir trouvé la confirmation de la période de Chandler, tout en faisant remarquer qu'il y semble bien manifestement exister une période de cinq ans.

Quoique les erreurs accidentelles soient assez considérables, je me suis résolu à faire usage de ces observations pour la comparaison de ma période avec celle de Chandler.

Tout d'abord, je ferai remarquer qu'outre cette analogie si grande qu'elles offrent, de représenter le même mouvement du pôle de rotation, l'une dans le sens direct, l'autre dans le sens rétrograde, il en existe encore une autre, purement accidentelle, il est vrai, mais qui est de nature à les faire discerner assez difficilement l'une de l'autre.

La période de Chandler (C) est de 14 mois; la mienne (F), de 10 $^1/_2$. Donc :

$$6C = 8F = 7 \text{ ans.}$$

La longue période de 7 ans renferme donc exactement 6 périodes de Chandler ou 8 des miennes.

Les criteriums qui permettront de trancher la question sont les suivants.

La meilleure période sera celle suivant laquelle :

1° Les maxima et les minima seront le plus nettement caractérisés;

2° Les époques de maxima (ou des minima) seront séparées entre elles par des périodes entières;

3° Les époques d'un maximum et d'un minimum, par un nombre impair de demi-périodes.

Afin que notre comparaison ne fût pas troublée par les variations annuelles, que les astronomes ont reconnues, et dont nous avons donné la formule, nous avons commencé par éliminer ces dernières, en prenant la somme des résidus à six mois de distance; ces résidus ont été pris sur le diagramme des observations de Greenwich donné par M. Thackeray, dans les *M. N. V.*, LIII, page 120.

C'est de ces sommes de résidus, d'où les variations annuelles sont éliminées, que nous avons fait usage en vue de la comparaison des périodes. Nous en avons fait la somme deux par deux, d'abord à 10 $^1/_2$ mois, ensuite à 14 mois d'intervalle.

Le premier tableau nous a donné des séries de 6 ou 7 résidus consécutifs, tous négatifs, et de 11 résidus supérieurs à 100.

Dans le second, on ne rencontre pas de séries semblables.

Si l'on recherche, dans l'un et dans l'autre, les séries de 12 résidus consécutifs, présentant les maxima et les minima les plus caractéristiques, on obtiendra les résultats ci-dessous pour les sommes de ces 12 résidus :

F	1880	III	à	1881	II	—	83
	1882	X	»	1883	IX		1535
	1887	VI	»	1888	V	—	129
	1888	VI	»	1889	V	—	78
Ch	1880	IV	»	1881	III	—	28
	1882	VII	»	1883	VI		1398
	1887	IV	»	1888	III	—	64
	1888	VI	»	1889	V		87.

Et l'on voit que les maxima et les minima sont bien mieux accusés dans le premier que dans le second tableau.

Recherchons maintenant les intervalles de temps qui se sont écoulés entre les différents minima et maxima.

Le premier minimum se trouvant au commencement de la série, n'est certainement pas un minimum absolu; nous n'en ferons donc pas usage.

Mais le maximum est bien nettement caractérisé.

L'intervalle de temps écoulé entre ce maximum et le premier ou le second minimum suivant, est

$$\text{F}\begin{cases} 1^\circ\ 56 \text{ mois} = 5\,{}^1/_3 \text{ périodes (F)} \\ 2^\circ\ 68 \text{ mois} = 6\,{}^1/_2 \text{ périodes (F)} \end{cases}$$

$$\text{Ch}\begin{cases} 1^\circ\ 57 \text{ mois} = 4 \text{ périodes} + 1 \text{ mois (Ch)} \\ 2^\circ\ 69 \text{ mois} = 5 \text{ périodes} - 1 \text{ mois (Ch)} \end{cases}$$

Les seconds résultats (Ch) sont absolument mauvais, puisqu'il s'écoule un nombre entier de périodes, presque exactement, entre un maximum et un minimum.

Les premiers, au contraire, sont satisfaisants; l'un donne exactement une demi-période au delà du nombre entier, l'autre un tiers de période.

Or, entre un maximum et un minimum, il doit s'écouler un nombre impair de demi-périodes.

Tous les criteriums tirés des observations sont donc en faveur de la période de 321 jours.

C'est celle-ci, où l'accroissement annuel de 409° (soit 1°12 par jour) pour it, que nous avons admise pour le calcul de la nutation initiale et de la variation annuelle au moyen de la formule

$$(1) \qquad z + n\gamma\cos(\beta + it) + h\cos(\odot - \text{A}) = 0,$$

ou

$$z + n + u\sin it + v\cos it + h\cos(\odot - \text{A} = 0,$$

si l'on pose

$$u = -\gamma\sin\beta,\quad v = \gamma\cos\beta.$$

On voit immédiatement que, si l'on fait la somme de ces équations, pour deux observations séparées par un intervalle de six mois, les termes annuels disparaîtront, d'où l'équation plus simple :

$$2z + n + n' + u(\sin it + \sin it') + v(\cos it + \cos it') = 0.$$

C'est cette équation que nous avons formée pour toutes les combinaisons deux à deux; nous avons ainsi obtenu un système de 134 équations de la forme :

$$2z + au + bv + n_1 = 0$$

Nous en avons tiré les équations normales :

$$\begin{array}{rrrrl} 11.7u & -\ 0.1v & -\ 1.9z & -\ 0''.22 & = 0 \\ -\ 0.1 & +\ 12.5 & -\ 0.19 & -\ 1''.25 & = 0 \\ -\ 1.9 & -\ 0.19 & +\ 1\ 34 & +\ 27''.4 & = 0; \end{array}$$

d'où

$$u = -0''014;\ v - 0''096;\ z = -0''.21.$$

Nous ne formerons pas les nouveaux résidus que donnerait l'application de notre formule, parce que nous devrions les comparer à ceux qu'on obtiendrait en employant la période de Chandler, et que nous reculons devant ce labeur.

Notre but est de construire le diagramme de nos variations de latitude, pour le comparer à celui de Chandler.

Mais pour cela, il est nécessaire que nous déterminions le terme h cos $(\odot - \text{A})$ de la formule (1).

2. Tenant donc pour exacte la période de 321 jours, nous avons voulu rechercher également, comme M. Van de Sande Backhuyzen l'a déjà fait dans le volume LI des *M. N.*, si, au lieu d'éliminer les variations annuelles, nous ne pourrions pas les déterminer en éliminant la nutation eulérienne.

Dans ce but, comme les observations comprennent à peu près 14 périodes complètes de 321 jours, et que les moyennes mensuelles seront très peu influencées par la nutation eulérienne, nous avons commencé par prendre ces moyennes.

Mais comme, de plus, après 47 $^1/_2$ mois, l'angle ιt aura augmenté de 180° (abstraction faite des circonférences entières), nous avons pris également les moyennes mensuelles des résidus deux à deux à 47 $^1/_2$ mois = 4 ans — $^1/_2$ mois d'intervalle.

Les variations annuelles sont bien nettement marquées dans les deux séries, mais plus particulièrement dans la seconde, dont la nutation eulérienne est complètement éliminée, si, comme nous croyons l'avoir démontré, la période de 321 jours est exacte.

A ces résidus, nous avons à appliquer l'équation des variations annuelles de latitudes $\Delta\varphi = h \cos(\odot - A)$, qui devient, en faisant $h \sin A = x$, $h \cos A = y$:

$$z + x \sin \odot + y \cos \odot + n = 0.$$

Elle nous a donné, par l'emploi du procédé de T. Mayer,

$$1^\circ \quad 7.60x + 1.215y = -118 = -1''.18$$
$$1.22x + 7.\ 65y = -\ \ 14 = -0''.14$$

d'où

$$x = -0''.155, \qquad y = 0''.046.$$

Et par suite

$$h = 0''.16, \qquad A = 287^\circ$$

$$2^\circ \quad 7.\ 70x - 0.255y = -175 = -1''.75$$
$$0.245x + 7.\ 77y = +\ \ 16 = +0''.16;$$

d'où

$$x = -0''.226,\ y = 0''.0135,$$

et par suite

$$h = 0''.23, \qquad A = 274^\circ.$$

Les résultats des deux déterminations sont assez concordants pour qu'il soit permis d'en prendre la moyenne :

$$h = 0''.2, \qquad A = 280^\circ.$$

Cette valeur de A approche de 300°, comme nous l'avions affirmé *a priori* dans notre *Essai sur les variations de latitude;* elle diffère peu aussi de celle que Van de Sande Bakhuyzen a déduite d'une autre série de latitudes de Greenwich (*), et de la valeur adoptée par Chandler pour Greenwich également.

Nous avons fait remarquer dans notre *Essai* que c'est erronément que ce dernier astronome considère cet angle comme variant avec la longitude du lieu de l'observation ; c'est le facteur h qui varie suivant la formule $h = i \cos M$, i étant le maximum de la variation annuelle, M l'angle du méridien du lieu avec celui sur lequel se présente ce maximum.

Notre valeur de h est deux fois plus forte que celle de Van de Sande Bakhuyzen. Au surplus, d'après notre

(*) *M. N.* Vol. LI.

théorie des variations annuelles, ce facteur h doit varier, d'une année à l'autre, avec la quantité de neige qui s'est accumulée pendant l'hiver sur les terres de l'hémisphère boréal. Il est assez probable toutefois qu'il sera sensiblement constant lorsqu'il est déduit des moyennes d'une assez longue série d'observations.

On remarquera que la valeur de h déduite du second procédé est sensiblement plus grande que l'autre; cela tient probablement à cette circonstance que la nutation eulérienne est complètement éliminée dans ce procédé, tandis qu'elle ne l'est qu'imparfaitement dans le premier.

3. Des déterminations que nous venons de faire, d'après les 11 années d'observations de Greenwich, de la variation eulérienne et de la variation annuelle des latitudes (astronomiques), il résulte que la formule qui exprime complètement, d'après nous, ces variations est

$$\Delta\varphi = \gamma \cos(\beta - \mathfrak{t}) + h \cos(\odot - A),$$

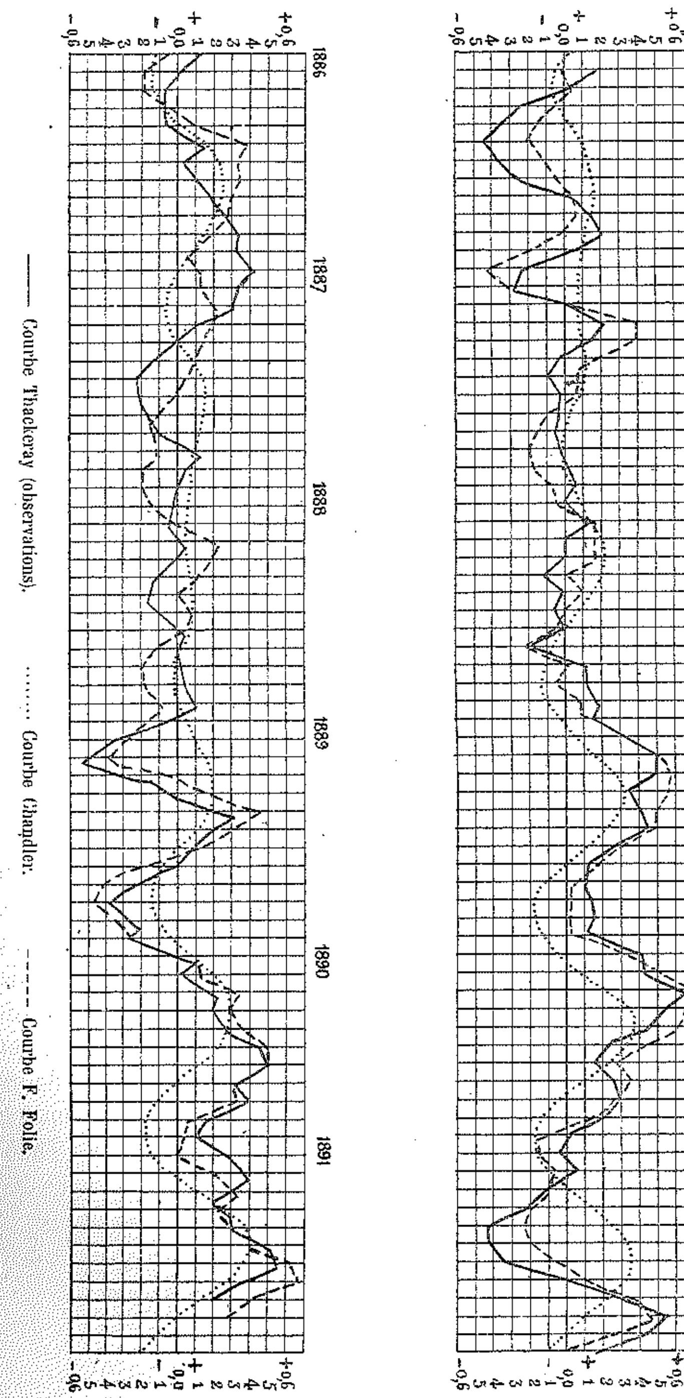
γ étant égal à 0''.096, h à 0''.2;

A à 280°, β à 8°20' pour 1880. 0, Greenwich,

et $\mathfrak{t}$ à 409° par an ou à 1°12 par jour.

Nous n'introduirons pas la correction z de la latitude moyenne adoptée, parce que, pour la déterminer, il faudrait former et résoudre complètement un système de 141 équations de condition, labeur très considérable et superflu; nous déterminerons simplement z par la comparaison de nos valeurs de $\Delta\varphi$ avec celles qui résultent des observations.

Les nouvelles valeurs ainsi obtenues ont servi à former la courbe F du diagramme ci-joint, à côté duquel figure également la reproduction des observations de Greenwich et de la courbe C de Chandler, d'après celui de M. Thackeray.



Variations de latitude déduites à Greenwich des observations de quatre circompolaires.

F. Folie, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 3e sér., t. XXVII, n° 2, p. 220, 1894.

Nous ne donnons pas cette courbe F comme celle des variations normales de latitude de Greenwich, parce qu'elle est calculée d'après des observations dont les erreurs accidentelles sont assez considérables, mais bien comme celle qui représente le mieux ces observations, tout en étant déduite d'une formule, non empirique, mais théorique.

Dans la courbe normale, les coefficients γ et h seraient, γ particulièrement, peut-être un peu moindres, et l'angle β (Greenwich 1880.0) un peu différent de la valeur trouvée.

Mais la comparaison de notre courbe avec celle de Chandler et avec les observations, confirme amplement la thèse que nous nous sommes proposé de démontrer, et qui rétablit une complète harmonie entre la théorie et l'observation, à savoir que : *La période du cycle eulérien n'est pas de 14 mois* (comme Chandler l'avait trouvé et comme l'admettent plusieurs astronomes), *mais bien de 10 $^1/_2$ mois.*

§ 2. — *Confirmation du cycle eulérien de 321 jours et de l'invariabilité de la latitude géographique par les observations du Dr Marcuse, à Honolulu.*

Nous n'essayerons pas de démontrer, par les observations de Greenwich, l'invariabilité de la latitude géographique. Il faut, pour cela, des observations beaucoup plus précises, qui serviront en même temps à vérifier si la période eulérienne est de 321 ou de 427 jours.

Comme moyens de contrôle, nous avons deux critériums : d'abord la valeur de la constante A qui entre dans l'argument de la variation annuelle des latitudes, et qui ne devrait pas s'écarter trop de 300° pour notre hémisphère ; ensuite, un autre, plus important encore à nos yeux.

La différence de période entre la nutation eulérienne et les variations annuelles n'est pas assez grande pour que leurs influences soient aisées à discerner l'une de l'autre dans une série annuelle d'observations.

Or, d'un grand nombre de déterminations faites, soit par de très courtes, soit par de très longues séries, en sorte que les variations annuelles y étaient fort peu sensibles, on a généralement déduit pour son coefficient une valeur inférieure a $0''.1$: des deux périodes, c'est celle qui donnera la valeur la plus approchante sur laquelle se fixera notre choix.

Les observations qui nous ont paru le plus appropriées à cette recherche, à raison de leur précision et de leur continuité, sont celles que M. le docteur Marcuse a faites en 1891-1892 à Honolulu, et qui ont été calculées avec beaucoup de soin par M. le professeur Albrecht.

On a vu qu'en les combinant deux par deux, à six mois de distance, pour en éliminer les variations annuelles, nous avons ramené les écarts extrêmes, qui étaient $-0''.25$ et $+0''.30$ à $-0''.085$ et $+0''.095$ respectivement, ce qui donne $0''.09$ pour le coefficient de la nutation eulérienne (*).

L'application de notre formule aux observations individuelles devrait conduire à la même valeur.

En supposant β égal à la valeur que j'avais déterminée antérieurement, et en admettant la période de Chandler quant à la nutation eulérienne, en prenant, de plus, $A = 310°$ dans l'expression de la variation annuelle, je croyais arriver à des résultats assez satisfaisants; nullement : le coefficient de la nutation eulérienne obtenu est $\gamma = 0''.30$; celui de la variation annuelle h, à peu près nul.

(*) *Annuaire de l'Observatoire royal* pour 1894.

J'ai supposé ensuite l'angle A inconnu, et j'ai trouvé, avec la même période de Chandler :

$$\gamma = 0''.21, \qquad h = 0''.076, \qquad A = 40°.$$

La valeur de γ est deux fois trop forte, celle de A est peu admissible.

Ainsi donc, le mouvement du pôle instantané, avec la période de Chandler, et la valeur de β très précise, comme on l'a vu (*), que nous en avons déduite par les observations mêmes de Honolulu, en éliminant la variation annuelle, ne satisfaisaient nullement aux critériums indiqués.

Aussi, partant toujours de l'angle β comme connu, ai-je adopté l'accroissement annuel de 409° correspondant à la période de 321 jours; j'ai obtenu ainsi des résultats meilleurs :

$$\gamma = 0''.108; \qquad h = 0''.21.$$

Mais l'angle A était de 59°, ce qui me semble inadmissible : le maximum de la variation annuelle tomberait vers le 20 mai, c'est-à-dire en dehors même de la période d'observation.

Je me suis décidé alors à résoudre complètement cette question de la variation des latitudes de Honolulu, c'est-à-dire à déterminer à la fois β et γ, A et h, en admettant la période de 321 jours, puisque c'est la seule qui m'eût donné des résultats assez satisfaisants quant au coeffi-

(*) *Essai sur les variations de latitude.*

cient γ. J'ai donc appliqué aux observations individuelles l'équation complète

$$au + bv + ck + el + z = n,$$

dans laquelle u et v sont les produits de γ par le sinus et le cosinus de β, origine juin 0,1891 ; k et l, les produits de h par le sinus et le cosinus de A ; z, la correction de la latitude adoptée $\varphi_0 = 21° 16' 24.''9$; n, le résidu $\varphi - \varphi_0$ déduit des latitudes φ calculées par le professeur Albrecht ;

$a = -\sin \iota t$, $b = \cos \iota t$, $c = \sin\odot$, $e = \cos\odot$, $\iota t = 409°$ par an, ou 1°12 par jour.

La résolution des équations normales a donné :

$$u = 0''.072, v = 0''.000, k = 0''.086, l = 0''.203, z = 0''.005,$$

d'où $\beta = 90°$ Honolulu, 1891 juin 0, $\gamma = 0.''072$, $h = 0''.222$, $A = 22°40'$.

Ces résultats ne diffèrent pas sensiblement de ceux que nous avions obtenus en considérant l'angle β comme connu à priori, et en admettant la période de 321 jours.

Nos résidus n'atteignent jamais 0.''1 que dans les cas où les n sont manifestement anomaux :

1891 août 7 et 22 : $n = 7$ et 11, compris respectivement entre 20 et 25, 25 et 27.

Septembre 18 : $n = 14$, compris entre 24 et 25.

1892 janvier 21 : $n = 3$ compris entre 7 et 11.

Avril 27 et mai 6 : $n = 38$ et 30, compris tous deux entre 26 et 20.

Sauf le dernier de ceux-ci, les résidus du professeur Albrecht sont, dans tous ces cas également, assez considérables, et notre courbe ne différerait guère de la sienne que vers l'extrémité.

Or, il nous semble qu'une courbe théorique, s'accordant avec toutes les observations qui ne présentent pas des anomalies révélées par l'irrégularité même de la marche, est préférable à une formule purement empirique, quand bien même, en déterminant empiriquement la période et en la subdivisant, on arrive, au moyen de cette dernière formule, à des résultats qui concordent davantage avec les résultats anomaux de l'observation ; mais de cette concordance même, on peut conclure que la formule n'est pas fondée en théorie, à moins qu'on ne veuille supposer une marche anomale du phénomène, ce qui n'est pas le moyen d'en découvrir la loi.

Il est bon de rappeler que l'équation dont nous avons fait usage :

$$au + bv + ck + el + z = n,$$

n'est autre chose que l'expression de l'invariabilité de la *latitude géographique* Φ, le *pôle géographique* étant la moyenne des positions du pôle d'inertie, qui est sujet à la nutation eulérienne et aux variations annuelles ; en sorte que la déclinaison apparente, rapportée à l'*équateur géographique*, a pour expression $\delta + \Delta\delta$, si δ désigne celle qui est rapportée à l'*équateur astronomique*. L'expression de $\Delta\delta$ est, comme on l'a vu dans notre ***Essai sur les variations des latitudes***, pour un passage supérieur :

$$\Delta\delta = -\gamma\cos(\beta + \iota t) - h\cos(\odot - A),$$

et la latitude géographique Φ sera donc égale à la latitude astronomique φ augmentée de cette quantité $\Delta\delta$; ou $\Phi - \Phi_0 = \varphi - \Phi_0 + \Delta\delta$, ou encore $z = n + \Delta\delta$.

Remplaçant $\Delta\delta$ par l'expression précédente et faisant $\gamma \sin\beta = u$, $\gamma\cos\beta = v$, $h\sin A = k$, $h\cos A = l$, $-\sin\iota t = a$, cos ι=b, sin $\odot = c$, cos $\odot$=e, on retrouve l'équation précitée.

Nos résidus ne sont donc autre chose que les différences entre la latitude géographique calculée d'après notre formule, et la latitude, supposée constante, de Waïkiki.

Leur faiblesse témoigne de l'invariabilité de cette latitude géographique, comme de la précision des observations.

L'erreur probable d'une observation est, en effet, de 0."055; celle de la moyenne, de 0."007.

Nous déduisons donc des observations du Dr Marcuse, calculées par le professeur Albrecht, pour la *latitude géographique* de la station de Waïkiki :

$$\Phi = 21°16'24''.905 \pm 0''.007.$$

C'est la période de 321 jours seule qui nous a conduit à un résultat aussi favorable; celle de Chandler, on l'a vu, nous a conduit à des valeurs de γ que nous considérons comme beaucoup trop fortes.

Des déterminations précédentes, les seules qui ne nous satisfont pas sont celles que nous avons obtenues pour l'angle A, qui, théoriquement, ne doit pas s'écarter beaucoup de 300° pour Berlin, de 120° pour Honolulu.

On a vu dans notre *Essai* que Chandler a trouvé 303°, Van de Sande Backhuyzen, 321°.

Nous venons de trouver nous-même, par les observations de Greenwich, rapportées par Thackeray, dans le tome LIII des *M. N.*, p. 120, en les combinant de deux manières différentes ayant pour effet d'éliminer la nutation initiale, 287° et 273°.

La valeur déduite des observations de Honolulu est 202°, qui s'éloigne très fort des valeurs précédentes.

Quelle est la cause de cet écart considérable?

C'est ce qu'il est bien difficile de présumer, aussi longtemps qu'on n'aura pas, comme terme de comparaison, une série complète d'observations précises faites en un autre lieu et aussi correctement réduites.

Lorsque celles de Berlin le seront, nous y appliquerons notre méthode; elles nous fourniront peut-être quelque indication sur la nature de cette cause inconnue.

Mais la discussion d'autres points très importants, comme celle de la constante de l'aberration ou de la nutation diurne, ne peut se faire au moyen de ces observations sans exiger un labeur véritablement rebutant.

Pour résoudre de telles questions, il faut nécessairement recourir à des séries isolées d'observations de quelques étoiles seulement.

§ 3. — *Preuves du mouvement rétrograde du pôle instantané.*

Nous nous proposons de déterminer le sens du mouvement relatif du pôle instantané de rotation de la Terre autour du pôle géographique.

Comme on l'a vu, l'analyse ne peut se prononcer sur ce point, à cause du double signe de l'argument de ce mouvement, qui est

$$\pm\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}.$$

Puisque ce mouvement relatif est la conséquence du mouvement réel du pôle d'inertie autour du pôle instantané, il semble plus naturel d'admettre que ce dernier mouvement a lieu dans le sens de la rotation de la Terre; auquel cas le mouvement relatif du pôle instantané serait rétrograde.

Mais cette présomption a besoin d'être confirmée par l'observation.

On a vu aussi que l'étude des variations de latitude ne peut apporter aucun argument pour ou contre; car la variation produite par la nutation eulérienne étant de la forme $\gamma \cos(\beta + \iota t)$, on peut prendre indifféremment ι positif ou négatif, pourvu qu'on en fasse de même quant à β.

La seule question que l'on puisse décider par l'étude de la variation des latitudes, est celle de la valeur qu'il faut attribuer à ι; faut-il prendre $\iota t = 311°$ par an (période de Chandler) ou $\iota t = -311° = +409°$ par an (période de 321 jours)? Et nous avons montré par les observations de Greenwich, comme par celles de Honolulu, que cette dernière y satisfaisait beaucoup mieux.

Quant à décider si l'adoption de cette période entraîne celle du sens rétrograde du mouvement instantané, l'étude de la variation des latitudes y est insuffisante.

Il en serait de même si l'on déterminait la nutation initiale exclusivement au moyen des différences d'ascension droite d'une même étoile à ses passages supérieurs et inférieurs.

Si les Æ sont observées dans le méridien géographique, cette différence est de la forme

$$2\gamma \operatorname{tg} \delta \sin(\beta + \iota t).$$

Que l'on prenne ι positif ou négatif, c'est indifférent, pourvu que, dans le second cas, on donne à β une valeur supplémentaire de celle qu'on lui assigne dans le premier.

Mais on voit que la comparaison des valeurs de β, déterminées par les deux procédés, permettra de trancher la question du sens du mouvement du pôle instantané à la surface de la Terre.

Dans le premier procédé, en effet, suivant que l'on adopte l'un ou l'autre sens, on doit donner à β des valeurs égales, mais de signes contraires; dans le second, des valeurs supplémentaires.

Or, outre la valeur $\beta = 165°.5$, 1824.0 Polkouva que nous avons déduite des Æ de la polaire observée par Struve à Dorpat, celles de Preuss nous ont donné $\beta = 228°$, 1838.0 Poulkova.

Comparons ces deux valeurs entre elles et avec celles que nous avons tirées des variations de la latitude observées par Peeters, $\beta = 1°.5$ (1842.0 Poulkova).

Si nous admettons la période de Chandler, ou, plus exactement, celle de 423 jours, qui correspond à un accroissement de 311° par an, nous trouvons, en partant de la valeur $\beta = 165°.5$ 1824.0 Poulkowa :

	Observé.	Calculé.	$o - c.$
1° 1842.0	1°.5	3°.5	— 2°

L'usage de la même période nous donnera, en partant de la valeur $\beta = 228°$, 1838.0 :

	Observé.	Calculé.	$o - c.$
2° 1842	1°.5	32°	— 30°.5

L'accroissement annuel de 311° donne donc des résultats très satisfaisants.

Essayons maintenant l'accroissement annuel de 409° = 2 circonférences — 311°.

Au lieu des valeurs précédentes, nous trouverons, en prenant pour β les suppléments des angles précédents, puisque ι est négatif :

	Observé.	Calculé.	$o - c$.
	—	—	—
1° 1842	1°.5	176°.5	— 175°
2° 1842	1°.5		

Ici, désaccord absolu entre le calcul et l'observation.

Il en résulte que l'accroissement annuel de 311° est le seul qui soit vérifié par celle-ci. Mais, d'autre part, nous venons de voir que la valeur de ι qui donne les meilleurs résultats dans l'étude des variations de latitude de Greenwich et de Honolulu, est celle qui répond à la période de 321 jours, et que cette nouvelle période est en parfaite harmonie avec la valeur que la théorie lui assigne.

Que faut-il conclure de là ?

1° Que la période du cycle eulérien est bien de 321 jours, conformément à la théorie.

2° Que le mouvement relatif du pôle instantané autour du pôle géographique est rétrograde, ou que le mouvement absolu du pôle d'inertie autour du pôle instantané, produit par la nutation eulérienne, est direct.

En admettant ces conclusions, on voit que le pôle instantané, décrivant, en un an, un arc de 409° dans le sens rétrograde, occupera la même position que si on lui fait décrire, dans le sens direct, un arc de 311° correspondant à la période de Chandler, et s'accordant parfaitement avec les observations, aussi longtemps qu'il ne s'agit que des valeurs annuelles consécutives de l'angle β.

S'agit-il, au contraire, de la série des valeurs successives de β dans le cours d'une année, on a vu, par les observations de Greenwich comme par celles de Honolulu, que l'accroissement annuel qui rend compte des observations, est celui de 409° par an, répondant à la période de 321 jours, mais sans que nous ayons pu nous prononcer quant à la question de signe.

Cette question se trouve actuellement résolue : le signe est négatif, puisque c'est la période de Chandler, ou l'accroissement annuel de 311° = 2 circonférences — 409°, qui vérifie les observations.

Conclusions.

I. Le sens du mouvement eulérien du pôle d'inertie autour du pôle instantané est direct : celui du mouvement du pôle instantané à la surface de la Terre est rétrograde.

II. La période de ce dernier mouvement est de 321 jours; l'accroissement correspondant est de 409° par an, ou de 1°,12 par jour; mais à ce mouvement rétrograde de 409° par an, on peut substituer, s'il s'agit d'un nombre entier d'années, un mouvement direct de 311° qui donne une période de 423 jours.

III. La formule des variations de latitude produites par la nutation eulérienne est donc

$$\Delta\varphi = \gamma \cos(\beta - \iota t),$$

ι étant égal à 1°,12 par jour, tandis que Chandler prend

$$\Delta\varphi = \gamma \cos(\beta + \iota t)$$

avec $\iota t = 0°84$ par jour.

Comme on vient de le voir, notre formule vérifie toutes les déterminations que nous avons faites de l'angle β au moyen des variations de latitude, en admettant la période de Chandler, pourvu que nous les changions toutes de signes.

Mais elle vérifie seule, en même temps, les déterminations que nous en avons faites au moyen des Æ, de même que les observations de latitude faites à Greenwich et à Honolulu.

Et puisque, tout en donnant les mêmes résultats annuels que ceux de Chandler, elle échappe, par la période de 321 jours, aux objections fondées des géomètres contre la période de 423 jours, il nous est permis de croire qu'elle sera accueillie avec satisfaction.

Détermination de l'influence de la pression sur la chaleur spécifique, prise en deçà et au delà de la température critique; par P. De Heen, membre de l'Académie.

Nous avons entrepris, il y a quelques années, de déterminer les variations de la chaleur spécifique des fluides avec la température en deçà et au delà de la température critique. A cet effet, nous avions observé le refroidissement