

PREUVES DE LA NUTATION DIURNE.

DÉTERMINATION APPROXIMATIVE DE SES CONSTANTES.

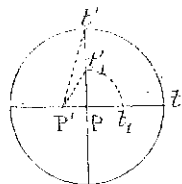
Dans l'Annuaire de l'an dernier, j'ai montré la certitude de l'existence de la nutation diurne, la nécessité d'en tenir compte dans les observations, et les conséquences qu'on doit en tirer quant à la constitution intérieure du globe terrestre.

Pendant l'année qui vient de s'écouler, je me suis appliqué à rechercher quelles sont les méthodes d'observation et les formules les plus propres à manifester et à déterminer ce petit mouvement de l'axe de l'écorce terrestre.

Il résulte de l'expression analytique de ce mouvement, que c'est après 6 heures qu'il produit ses effets les plus grands, ou que sa période est d'un demi-jour sidéral.

Qu'on se figure le pôle de la croûte terrestre parcourant en un demi-jour une circonférence, et partant à 0 heure d'une extrémité du diamètre horizontal; à 6 heures il sera arrivé à l'autre extrémité, et se trouvera à la distance la plus grande possible de son point de départ, auquel il reviendra à 12 heures. C'est là une image assez fidèle de la nutation diurne du pôle.

Pour la constater avec le plus de chances possible de succès, il faudra donc faire usage d'observations d'une même étoile répétées à six heures d'intervalle.



Si t et t' représentent les positions de l'étoile, au commencement et à la fin de cet intervalle, autour du pôle P supposé immobile, l'arc $t't$ sera exactement égal au quart de la circonférence; or cet arc sert de mesure à l'angle tP' , qui est donné aux astronomes par les deux observations de l'étoile. Cet angle est droit, dans l'hypothèse du pôle immobile. Mais que le pôle se déplace, dans l'intervalle, de P en P' , quel que soit ce dernier point, on voit qu'en général l'angle de tP avec $t'P'$ ne sera plus droit.

L'écart entre cet angle et l'angle droit dépendra, d'une part, de la grandeur et de la direction du déplacement PP' , d'autre part, de la distance de l'étoile t au pôle P . Moins grande sera cette distance, plus sensible sera évidemment la différence entre l'angle de tP avec $t'P'$ et l'angle droit, comme on le voit sur la figure, où t_1 , t'_1 , représentent les deux positions, correspondantes à t , t' , d'une étoile plus rapprochée du pôle que cette dernière.

Ce sont donc les étoiles les plus proches du pôle qui permettent de vérifier le plus sûrement l'existence de la nutation diurne. Et, comme il a été dit ci-dessus, c'est entre des observations faites à six heures d'intervalle que l'on constatera les plus grandes différences entre les deux positions de l'étoile relativement au pôle.

Ces observations, qui doivent être très précises pour manifester des mouvements aussi faibles, devront se faire à un instrument bien stable, comme une lunette méridienne. Mais si l'on dirige cette lunette vers le pôle, la plupart des étoiles quitteront le champ, généralement très

peu étendu, de la lunette, et ne pourront pas être observées à six heures d'intervalle, puisque l'instrument est immobile dans le sens Est-Ouest.

Aussi avais-je songé tout d'abord à la comparaison de positions observées, le même jour, dans deux Observatoires situés à six heures environ de distance en longitude, comme Paris, ou Poulkova, et Washington.

Et l'on trouvera ci-dessous, en effet, une détermination des constantes de la nutation diurne, fondée sur la comparaison des positions de δ Petite Ourse, observées simultanément à Paris et à Washington.

Ces deux constantes sont, d'une part, la grandeur, ou plus exactement, le coefficient de la nutation diurne; d'autre part, la longitude du premier méridien, c'est-à-dire du méridien de la croûte terrestre qui la traverse dans sa plus grande épaisseur; cette croûte est relativement beaucoup plus irrégulière que ne l'est la Terre entière, et les différences d'épaisseur suivant les divers méridiens sont, relativement aussi, plus considérables.

C'est à raison de ces irrégularités mêmes que les actions combinées du Soleil et de la Lune peuvent déplacer en quelques heures l'axe de la croûte; et l'on saisit immédiatement le rôle important que joue la position du premier méridien eu égard à ce déplacement.

Mais ces mêmes actions produisent aussi une irrégularité dans le mouvement de rotation de la croûte terrestre autour de son axe supposé immobile, irrégularité que j'ai appelée *libration de l'écorce terrestre*.

Or la théorie fait voir que le coefficient de cette libration est à très peu près le même que celui de la nutation diurne, et que sa période est également de douze heures sidérales.

Les formules, qui expriment le déplacement apparent des étoiles en quelques heures, doivent donc renfermer, à la fois, les expressions de la nutation et de la libration diurnes.

Mais, de même que, dans l'expression de la nutation annuelle, il existe un terme non périodique, c'est-à-dire ne renfermant aucune quantité telle que la longitude du Soleil, de la Lune, du Nœud, etc., terme dont la présence se manifeste par la précession des équinoxes, de même, dans les expressions de la nutation et de la libration diurnes, il existe également un terme non périodique.

Et, de même aussi que les deux moyennes d'un grand nombre de positions d'une même étoile observées, les unes vers 1820, les autres vers 1880, par exemple, accuseront, dans leur différence, l'effet de la précession des équinoxes, de même les moyennes d'un grand nombre de positions obtenues à Paris et à Poulkova, par exemple, accuseront, dans leurs différences, l'existence du terme non périodique des expressions de la nutation et de la libration diurnes de l'écorce terrestre.

Il doit donc y avoir, entre les catalogues d'étoiles faits par ces deux Observatoires, des différences systématiques, qui ont été soupçonnées et même constatées par les astronomes (*), mais dont nul n'avait encore entrevu la cause.

Cette cause, je viens de l'indiquer.

Elle peut être mesurée par ses effets.

C'est-à-dire que les constantes de la nutation diurne peuvent se déduire de la comparaison des catalogues.

C'est ce que j'ai fait pour ceux de Paris, Poulkova et Bruxelles, comparés à celui de Washington.

(*) Auwers, *Berliner Jahrbuch*, 1885.

On trouvera ci-dessous les résultats, vraiment remarquables, de ces comparaisons.

J'ai déjà dit plus haut qu'une autre détermination des constantes de la nutation diurne, fort concordante avec ces précédentes déterminations fondées sur la comparaison des catalogues, a été déduite de celle des positions de δ Petite Ourse, observées simultanément à Paris et à Washington.

Mais ces deux méthodes n'éliminent pas les erreurs instrumentales des deux Observatoires, erreurs parmi lesquelles il peut y en avoir de systématiques, telles que la déviation de la verticale.

C'est à ces erreurs systématiques qu'il faut attribuer la différence constatée entre les longitudes déterminées pour le premier méridien, suivant qu'on fait usage du catalogue de Paris, ou de celui de Poulkova, pour le comparer à celui de Washington.

Or on peut éliminer ces erreurs, et fonder en même temps la détermination des constantes de la nutation diurne sur des observations faites en un seul lieu, et même en un seul jour, si l'on observe des étoiles situées à quelques minutes d'arc seulement du pôle. Ces étoiles ne quittent pas le champ de la lunette, et, dans les nuits d'hiver, peuvent être observées trois fois à des intervalles de six heures.

Fait bien frappant, trois bonnes observations d'une seule étoile, faites dans ces conditions, suffisent pour manifester l'existence de la nutation diurne.

Aussi est-ce à ce genre particulier d'observations que je me consacre à l'Institut astronomique de Cointe (Liège), que j'habite encore, et qui possède un cercle méridien de 7 pouces d'ouverture, au moyen duquel je puis apercevoir, en éclai-

rant faiblement le réticule, des étoiles de 12^e à 15^e grandeur (*).

Je rapporterai ci-dessous quelques-unes de ces observations, ainsi que les valeurs qui s'en déduisent pour les constantes de la nutation diurne.

Cette dernière preuve, dans laquelle on voit, pour ainsi dire, le mouvement du pôle de la croûte terrestre s'effectuer sous ses yeux dans l'espace d'une seule nuit, est la plus convaincante entre toutes les preuves que j'ai données de l'existence de la nutation diurne, et, comme conséquence, de la fluidité superficielle du noyau du globe et de la libration diurne de son écorce.

On voit que des méthodes très diverses, reposant sur des formules bien diverses également, quoiqu'elles soient déduites, cela va de soi, d'une théorie unique, ont toutes conduit à des résultats très concordants.

Afin de permettre aux astronomes de faire de nouvelles vérifications de la nutation diurne (et le matériel ne manque pas pour cela), j'indiquerai, dans ce qui suit, les formules dont j'ai fait usage dans les déterminations dont je viens de parler (**).

(*) Ces étoiles ne sont pas visibles, dans les lunettes méridiennes de Bruxelles, soit à cause de leur moindre ouverture, soit à cause de l'éclairage de l'atmosphère par le gaz de la ville.

(**) Ces formules n'ont pas encore été publiées. Elles doivent paraître dans le second fascicule de mon *Traité des réductions stellaires*, dont le premier fascicule a paru chez Hayez.

1. *Expressions de l'erreur systématique des catalogues.*
Détermination des constantes de la nutation diurne
par la comparaison des catalogues.

Les expressions de la nutation diurne sont essentiellement des fonctions du double du temps sidéral φ , compté sur le premier méridien, c'est-à-dire sur le méridien qui passe par l'axe du plus petit moment d'inertie de la croûte terrestre.

Elles sont, de plus, des fonctions des arguments mêmes de la nutation annuelle, Ω , \odot , \textcircled{C} , etc.; mais elles renferment, en obliquité comme en longitude, un terme indépendant de ces arguments, et dont la présence se manifesterait dans les catalogues, puisqu'il n'est pas périodique.

Ce terme est, en obliquité,

$$\Delta\theta = -K \cos 2\varphi,$$

et en longitude,

$$\Delta\theta = -\frac{K}{\sin \omega} \sin 2\varphi,$$

ω représentant l'obliquité de l'écliptique, et K le produit du coefficient de la nutation diurne par 1.156.

De là on déduit aisément les expressions suivantes de la nutation diurne en \mathcal{R} et en D :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= K [\cot \omega \sin 2\varphi + \text{tg } \delta \cos (2\varphi - \alpha)] \\ \Delta\delta &= K \sin (2\varphi - \alpha). \end{aligned}$$

Pour une étoile observée, à son passage méridien, dans un lieu dont la longitude occidentale est L par rapport au

premier méridien, on a $\varphi = \alpha + L$, ou $\varphi = 12^h + \alpha + L$, ce qui revient au même dans les formules, puisque φ n'y entre que sous la forme 2φ .

Les formules suivantes

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= K [\cot \omega \sin (2\alpha + 2L) + \text{tg } \delta \cos (\alpha + 2L)] \\ \Delta\delta &= K \sin (\alpha + 2L) \end{aligned}$$

expriment donc la quantité dont les coordonnées moyennes, déterminées selon les formules usuelles, dans un observatoire de longitude occidentale L , diffèrent des coordonnées *véritables*, c'est-à-dire débarrassées de la nutation diurne. En d'autres termes, elles sont l'expression de l'erreur systématique du catalogue, qui provient de cette nutation.

La différence, due à la même cause, des positions moyennes, déterminées dans deux observatoires de longitudes respectives L et L' , sera donc, si l'on fait $L' - L = l$ et $L' + L = 2L_m$:

$$\begin{aligned} \Delta^2\alpha &= 2K \sin l [\cot \omega \cos (2\alpha + 2L_m) - \text{tg } \delta \sin (\alpha + 2L_m)]; \\ \Delta^2\delta &= 2K \sin l \cos (\alpha + 2L_m). \end{aligned}$$

Cette différence sera la plus considérable pour deux lieux situés à 6^h de distance en longitude, puisqu'alors $\sin l = 1$.

La comparaison des catalogues de ces deux lieux permettra de déterminer les deux constantes de la nutation diurne, savoir son coefficient $N_d = \frac{K}{1.156}$, et la longitude L du premier méridien.

Si l'on pose, en effet,

$$2K \sin l \sin 2L_m = x, \quad 2K \sin l \cos 2L_m = y,$$

les différences précédentes s'écriront :

$$1) \quad \Delta^2 \alpha + \left[\cot \omega \sin 2 \alpha + \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \right] x \\ + \left[- \cot \omega \cos 2 \alpha + \operatorname{tg} \delta \sin \alpha \right] y = \varepsilon,$$

$$2) \quad \Delta^2 \delta + \sin \alpha \cdot x - \cos \alpha \cdot y = \varepsilon,$$

ε désignant l'erreur accidentelle de chacune des différences individuelles.

Indépendamment de la nutation diurne, j'ai démontré l'existence d'une inégalité dans le mouvement de rotation de la croûte terrestre autour de son axe.

Les géomètres qui ont étudié le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité (Laplace, Poisson, Serret), n'ont traité que le cas d'une Terre solide, et ont démontré que le mouvement de celle-ci serait absolument uniforme, ou, pour nous exprimer mathématiquement, qu'il n'offrirait que des irrégularités tout à fait inappréciables.

Mais si la Terre est, comme le prouve le fait même de l'existence de la nutation diurne, composée d'un noyau fluide, même à la surface seulement, et d'une croûte solide, c'est l'étude du mouvement de cette croûte autour de son centre de gravité qui doit préoccuper l'astronome.

Or, de même que la croûte se meut indépendamment du noyau, pour produire la nutation diurne, de même elle pourra être sujette, dans son mouvement de rotation, à une inégalité qui n'affecte pas le noyau.

Cette inégalité est donnée par la troisième des équations d'Euler.

Les géomètres qui m'ont précédé n'ont pas eu à tenir compte de cette troisième équation, parce que, appliquée à la Terre entière, elle conduit, comme je l'ai dit, à des irrégularités absolument inappréciables.

Le second membre de cette équation a, en effet, pour facteur, la différence B — A des moments d'inertie du corps considéré (Terre ou écorce) autour des deux axes principaux d'inertie situés dans le plan de l'équateur.

Selon que ce corps est la Terre, ou l'écorce terrestre, cette différence est insensible vis-à-vis de chacun de ses termes, ou ne l'est pas. Et c'est pourquoi le mouvement de rotation de l'écorce est soumis à une inégalité qui serait absolument insensible pour une Terre entièrement solide.

Cette inégalité, que j'ai appelée *libration de l'écorce terrestre*, renferme, comme la nutation diurne elle-même, une partie périodique et une partie non périodique.

Cette dernière seule peut laisser sa trace dans les catalogues.

Si l'on appelle $\Delta^2 h$ la différence entre l'heure *réelle* de l'observatoire M, affectée de la libration de l'écorce, et l'heure calculée pour cet observatoire, abstraction faite de cette libration, d'après sa différence de longitude avec l'observatoire L, j'ai trouvé

$$\Delta^2 h = 0.4554 \times 2K \sin l \cos (2t + 2L_m),$$

l représentant, comme ci-dessus, $L' - L$; $L_m, \frac{L' + L}{2}$; L et L' les longitudes des deux lieux, et t l'heure sidérale pour le méridien L, heure qu'on peut remplacer par l'AA α de l'étoile observée dans ce méridien.

Lorsque la même étoile passera dans le méridien L', l'heure sidérale, qui serait aussi α pour ce méridien, dans l'hypothèse du mouvement uniforme de la croûte et d'une nutation diurne nulle, sera $\alpha + \Delta^2 h$ en vertu de la seule libration terrestre.

Autrement dit, les \mathcal{R} observées en L' diffèrent, de cette quantité $\Delta^2 h$, des \mathcal{R} observées en L , abstraction faite de la nutation diurne.

L'expression complète de la différence des \mathcal{R} observées dans les deux lieux sera donc

$$\Delta^2 \alpha = 2K \sin \{ (\cot \omega + 0.4554) \cos(2\alpha + 2L_m) - \text{tg} \delta \sin(\alpha + 2L_m) \},$$

d'où l'on déduira, comme ci-dessus, au lieu de l'équation 1), la suivante, dans laquelle c représente $\cot \omega + 0.4554$:

$$1') \Delta^2 \alpha + (c \sin 2\alpha + \text{tg} \delta \cos \alpha) x + [-c \cos 2\alpha + \text{tg} \delta \sin \alpha] y = \varepsilon.$$

En appliquant l'une ou l'autre des équations 1') et 2), à une série de positions moyennes d'étoiles données par deux catalogues différents, et réduites à une même époque, on tirera x et y , du système des équations 1') ou des équations 2), par la méthode des moindres carrés, c'est-à-dire par la condition $\Sigma \varepsilon^2 = \text{min}$.

La première application que j'ai faite de cette méthode a porté sur la comparaison du nouveau catalogue de Paris avec celui de Washington (1860).

80 étoiles de ces deux catalogues, d'une déclinaison supérieure à 50° , identifiées et réduites à 1860, ont été partagées en deux groupes, les impaires et les paires. L'application de la formule 1), qui ne tient pas compte de la libration de l'écorce terrestre, a donné, en secondes d'arc, par

$$\begin{aligned} \text{les étoiles imp. } & x = -0.29 \pm 0.028, \quad y = -0.125 \pm 0.055 \\ \text{les étoiles paires } & x = -0.074 \pm 0.009, \quad y = -0.165 \pm 0.055 \\ \text{l'ensemble } & x = -0.168 \pm 0.015, \quad y = -0.142 \pm 0.016 \end{aligned}$$

L'application de la formule 1'), qui tient compte de la libration, a donné par

$$\begin{aligned} \text{les étoiles imp. } & x = -0.262 \pm 0.026, \quad y = -0.115 \pm 0.029 \\ \text{les étoiles paires } & x = -0.056 \pm 0.026, \quad y = -0.159 \pm 0.028 \\ \text{l'ensemble } & x = -0.157 \pm 0.015, \quad y = -0.125 \pm 0.014 \end{aligned}$$

La comparaison des dernières erreurs probables avec les précédentes montre que l'introduction de la libration de l'écorce terrestre, quelque faible qu'elle soit, dans les équations de condition, a cependant pour effet de diminuer ces erreurs.

Voici un nouvel argument en faveur de l'existence de la libration de l'écorce terrestre, existence qui, du reste, est une conséquence mathématique de celle de la nutation diurne, comme je l'ai dit ci-dessus. On a vu même que les expressions de l'une et de l'autre sont affectées du même coefficient K , qui dépend essentiellement de la différence $B - A$ des moments d'inertie de la croûte autour des deux axes principaux de son équateur.

Ce sont donc les dernières valeurs de x et de y que nous adopterons.

On en tire, pour la valeur du coefficient de la nutation diurne,

$$N_d = \frac{K}{4.156} = 0.0885 \pm 0.0084;$$

et, pour la longitude orientale du premier méridien par rapport à Paris,

$$L = 5^h 51^m \pm 2^s 75.$$

En déclinaison, 189 étoiles ont été identifiées et partagées en deux groupes de 94 et de 95 étoiles respectivement.

L'application de l'équation 2) à ces étoiles a donné pour

$$\text{le 1}^{\text{er}} \text{ groupe } x = -0.156, \quad y = -0.272$$

$$\text{le 2}^{\text{e}} \text{ groupe } x = -0.195, \quad y = -0.631$$

$$\text{l'ensemble } x = -0.157, \quad y = -0.485.$$

On en déduit respectivement

$$N_d = 0.514, \quad 0.660, \quad 0.508$$

$$L = 4^{\text{h}}48^{\text{m}}, \quad 4^{\text{h}}22^{\text{m}}, \quad 4^{\text{h}}26^{\text{m}}.$$

Si la détermination de la longitude du premier méridien, fondée successivement sur l'emploi des deux groupes des déclinaisons comparées, conduit à des résultats qui concordent entre eux, et assez bien également avec celui que donne la comparaison des \mathcal{R} , il n'en est pas de même du coefficient de la nutation diurne, qui varie du simple au double de l'un à l'autre, et dont la valeur la moins forte est déjà, je pense, trop considérable.

Mais on conçoit aisément que la détermination d'un coefficient si faible ne puisse pas se faire aussi exactement par la comparaison des déclinaisons, que par celle des \mathcal{R} .

Si l'on combine entre elles les valeurs fournies par la comparaison des déclinaisons et par celle des \mathcal{R} , en tenant compte des poids, on trouve

$$N_d = 0.0894 \pm 0.0273,$$

$$L = 5^{\text{h}}3^{\text{m}} \pm 4^{\text{m}} \text{ E de Paris.}$$

Je me suis servi également, pour déterminer les constantes

de la nutation diurne, de la comparaison du nouveau catalogue de Poulkova avec celui de Washington.

En \mathcal{R} , 146 étoiles, comprises entre 60° et 88° de déclinaison, ont été identifiées et partagées en groupes de 70 et de 76 étoiles respectivement.

L'application de la formule 1') à ces deux groupes et à l'ensemble, a donné pour

$$\text{le 1}^{\text{er}} \text{ groupe } x = -0.179'', \quad y = +0.162''$$

$$\text{le 2}^{\text{e}} \text{ groupe } x = -0.490'', \quad y = +0.219''$$

$$\text{l'ensemble } x = -0.308'' \pm 0.0064, \quad y = +0.197'' \pm 0.0144''.$$

Les valeurs de x et de y , tirées des deux groupes séparément, ne sont pas bien concordantes; assez cependant pour que l'accord des signes, et même celui des grandeurs, ne puisse pas être considéré comme fortuit.

Des valeurs de x et de y fournies par l'ensemble des comparaisons en \mathcal{R} , on a déduit :

$$N_d = 0.1655'' \pm 0.0060''$$

$$L = 8^{\text{h}}22^{\text{m}}5^{\text{s}} \pm 9^{\text{m}}5^{\text{s}} \text{ E de Paris.}$$

En déclinaison, 148 étoiles ont été identifiées entre 57° et 69° , et partagées également en deux groupes, d'où l'on a conclu, en appliquant l'équation 2), pour

$$\text{le 1}^{\text{er}} \text{ groupe } x = -0.377'', \quad y = +0.205''$$

$$\text{le 2}^{\text{e}} \text{ groupe } x = -0.438'', \quad y = +0.405''$$

$$\text{l'ensemble } x = -0.4006'' \pm 0.0097, \quad y = +0.3305'' \pm 0.0087.$$

L'accord semble plus satisfaisant pour les déclinaisons que

pour les \mathcal{R} ; et les résultats, déduits de l'ensemble des unes et des autres, surtout, paraît très satisfaisant.

Les dernières valeurs de x et de y donnent

$$N_d = 0.2535'' \pm 0.0039''$$

$$L = 8^h 56^m 5^s \pm 1^m 3^s \text{ E de Paris.}$$

L'accord entre les longitudes du premier méridien déduites de la comparaison, soit des \mathcal{R} , soit des déclinaisons, est tout aussi remarquable que dans la comparaison des catalogues de Paris et de Washington.

Enfin, si l'on combine ensemble les résultats fournis par la comparaison des \mathcal{R} et des déclinaisons de Poulkova avec celles de Washington, on trouve

$$N_d = 0.2010'' \pm 0.0042,$$

$$L = 8^h 56^m 3^s \pm 1^m 7^s \text{ Est de Paris.}$$

J'ai fait également identifier les positions du catalogue de E. Quetelet avec celles du catalogue de Washington. La comparaison a porté sur 79 étoiles, en \mathcal{R} seulement. Elle n'a pas donné d'aussi bons résultats que celle des catalogues de Paris et de Poulkova avec celui de Washington, je dois le reconnaître. Les voici :

$$N_d = 0.071; L = 12^h 27^m 3^s \text{ E. de Paris.}$$

Une conclusion irréfutable, semble-t-il, se déduit des résultats qui précèdent : c'est l'existence certaine de la nutation diurne, qui se traduit même dans la comparaison des catalogues ; et, comme conséquence, celle de la libration de l'écorce terrestre.

Il est permis, d'après l'ensemble de ces résultats, d'affirmer que le coefficient de la nutation diurne est d'environ de 0.13 .

Mais la longitude du premier méridien reste encore assez indéterminée.

Quelle est la raison pour laquelle les diverses déterminations qui viennent d'en être faites concordent assez bien entre elles, si l'on s'en tient, soit aux comparaisons des catalogues de Paris et de Washington, soit à celles des catalogues de Poulkova et de Washington, mais sont assez différentes si l'on considère les valeurs respectives fournies par les deux comparaisons ?

Je ne puis attribuer cette discordance à une autre cause qu'à une différence systématique entre les réductions de Paris et celles de Poulkova, différence qui provient peut-être d'une déviation de la verticale dans l'un ou l'autre de ces observatoires.

Lorsque les constantes de la nutation diurne seront bien connues, les positions données dans tous les catalogues devront être corrigées, comme il a été dit ci-dessus, 1^o) et 2),

$$\text{en } \mathcal{R}, \text{ de } [0.06275] N_d [c \sin(2x + 2L) + \lg \delta \cos(\alpha + 2L)]$$

$$\text{en } D, \text{ de } [0.06275] N_d \sin(\alpha + 2L).$$

Ces quantités, dans lesquelles L désigne la longitude occidentale de l'observatoire par rapport au premier méridien, devront être retranchées des positions données dans le catalogue de cet observatoire, pour obtenir les véritables positions moyennes, débarrassés de l'influence de la nutation diurne et de la libration de l'écorce terrestre.

H. *Expression de la différence des \mathcal{R} d'une étoile observée le même jour dans deux lieux différents. Détermination des constantes de la nutation diurne par la comparaison de ces \mathcal{R} .*

Les résultats qui précèdent, fondés uniquement sur la comparaison des catalogues, concordaient suffisamment entre eux, pour me permettre d'espérer que la comparaison des positions d'une étoile observée, le même jour, à Paris et à Washington, conduirait également à la détermination des constantes de la nutation diurne.

Ici, toutefois, il se présente une nouvelle cause d'erreur, qui se trouvait éliminée dans la comparaison des catalogues. Elle réside dans l'intervention des termes de la nutation qui renferment les constantes arbitraires. La période de ces termes est, en effet, de $1\frac{1}{500}$ jour environ (et non pas de 500 et quelques jours, comme semble le croire plusieurs astronomes). On devrait donc les ajouter à l'expression de la nutation diurne, et il faudrait, à la rigueur, en tenir compte dans l'expression des différences entre les positions observées le même jour à Paris et à Washington.

Mais ces termes sont bien probablement d'un ordre inférieur à ceux de la nutation diurne; leur période est beaucoup moins exactement connue qu'on ne le suppose, et j'estime qu'on ne pourra en déterminer les deux constantes qu'au moyen d'observations bien précises faites en un seul lieu, et débarrassées de toutes les autres causes de variation, particulièrement de la nutation diurne proprement dite.

J'indiquerai ultérieurement la méthode que je compte appliquer, à Cointe également, en vue de cette détermination.

Provisoirement du moins, il est donc prudent de ne pas introduire ces deux nouvelles constantes indéterminées dans la comparaison des observations de Paris et de Washington.

M. Nicsten, astronome à l'Observatoire royal, qui a obtenu le premier, au moyen de séries très diverses d'observations, des valeurs concordantes et très plausibles du coefficient de la nutation diurne (*), a bien voulu se charger de la comparaison des \mathcal{R} de δ Urs. min., observées aux mêmes dates, à Paris et à Washington, pendant les années 1862 et 1863.

Nous indiquerons les formules à l'aide desquelles il a déduit, de ces observations, le coefficient de la nutation diurne et la longitude du premier méridien.

La nutation diurne absolue en \mathcal{R} est exprimée par la formule (*Réd. stel.*, p. 70) :

$$\Delta\alpha = -N_d [c'_1 \sin 2\varphi + \operatorname{tg} \delta \cos (2\varphi - \alpha)] \Sigma_1 \\ + N_d [c'_1 \cos 2\varphi - \operatorname{tg} \delta \sin (2\varphi - \alpha)] \Sigma_2,$$

Σ_1 et Σ_2 représentant respectivement des fonctions linéaires des cosinus et des sinus des arguments de la nutation, Ω , \odot , etc., exprimées numériquement à la page 69 du *Traité*.

Supposons que ces formules se rapportent à l'observation de Paris.

Pour celle de Washington, nous n'aurons qu'à changer φ en $\varphi + l$, l désignant, comme ci-dessus, la longitude occidentale de Washington par rapport à Paris, et nous écrirons $\Delta'\alpha$, Σ'_1 , Σ'_2 au lieu de $\Delta\alpha$, Σ_1 , Σ_2 .

(*) Voir l'*Annuaire* pour 1888, p. 290 et p. 360, et le tableau qui figure à la fin de la présente notice.

Posons $\Delta' \alpha - \Delta \alpha = \Delta^2 \alpha$, nous obtiendrons la différence des nutations diurnes, ou des \mathcal{N}_d , de Washington et de Paris, et nous trouverons aisément, en faisant $2 N_d \sin l = g$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \Delta^2 \alpha = & -c'_1 [\cos (2\varphi + l) \Sigma''_1 + \sin (2\varphi + l) \Sigma''_2] \\ & + \text{tg } \delta [\sin (2\varphi + l - \alpha) \Sigma''_1 - \cos (2\varphi + l - \alpha) \Sigma''_2] \\ & - \frac{1}{2} \cot l \Delta \Sigma_1 \{c'_1 \sin (2\varphi + l) + \text{tg } \delta \cos (2\varphi + l - \alpha)\} \\ & + \frac{1}{2} \cot l \Delta \Sigma_2 \{c'_1 \cos (2\varphi + l) - \text{tg } \delta \sin (2\varphi + l - \alpha)\}, \end{aligned}$$

formule dans laquelle Σ''_1 et Σ''_2 représentent les moyennes $\frac{\Sigma_1 + \Sigma'_1}{2}$ et $\frac{\Sigma_2 + \Sigma'_2}{2}$ des fonctions Σ_1 et Σ_2 calculées successivement pour les heures des passages à Paris et à Washington, ou, plus simplement, les valeurs calculées pour l'heure du passage par le méridien moyen entre Paris et Washington; $\Delta \Sigma_1$ et $\Delta \Sigma_2$ les différences $\Sigma'_1 - \Sigma_1$ et $\Sigma'_2 - \Sigma_2$. Ces différences sont généralement négligeables, sauf peut-être pour les termes dépendants de la double longitude de la Lune. Mais ceux-ci mêmes sont assez petits, et pourrout, dans le cas actuel, être négligés, puisqu'ils sont multipliés par $\cot l = 0.188$.

Nous nous bornerons donc aux deux premiers termes de la formule précédente, dans laquelle nous écrirons simplement Σ_1 et Σ_2 au lieu de Σ''_1 et Σ''_2 , 2φ au lieu de $2\varphi + l$, en convenant que toutes ces quantités sont calculées pour le méridien moyen entre Paris et Washington.

Faisant alors $g \sin 2\varphi = x$, $g \cos 2\varphi = y$, nous aurons

$$\begin{aligned} \Delta^2 \alpha = & - [(c'_1 + \text{tg } \delta \sin \alpha) \Sigma_1 + \text{tg } \delta \cos \alpha \Sigma_2] y \\ & - [(c'_1 + \text{tg } \delta \sin \alpha) \Sigma_2 - \text{tg } \delta \cos \alpha \Sigma_1] x, \end{aligned}$$

Au moyen de cette formule, M. Nicsten a déduit, de vingt-cinq comparaisons seulement, en tenant compte également de la libration terrestre :

$$N_d = 0.056, \quad L = 8^h 52^m \text{ E de Paris.}$$

Ce dernier résultat concorde fort bien avec celui qu'a donné le catalogue de Poulkova.

Mais le nombre trop peu considérable des observations ne pouvait certainement pas permettre d'en déduire, avec quelque précision, des constantes d'une détermination si difficile.

On voit cependant que les valeurs, trouvées au moyen de formules très différentes de celles qui ont servi à la comparaison des catalogues, concordent suffisamment avec les résultats de cette comparaison, pour établir, sur des bases inébranlables, l'existence de la nutation diurne.

La comparaison des catalogues, et même celle des observations individuelles faites en deux lieux différents, est toutefois insuffisante pour déterminer des quantités aussi délicates que les constantes de la nutation diurne.

On ne pourra le faire qu'au moyen d'observations instituées spécialement dans ce but.

III. *Méthode la mieux appropriée à la détermination des constantes de la nutation diurne. Première application de cette méthode, faite à l'Institut astronomique de Coïnte (Liège).*

Après de mûres réflexions, voici le procédé que j'ai trouvé le mieux approprié à la détermination des constantes de la nutation diurne.

On observera, autant que possible à 6 heures d'intervalle, deux étoiles très voisines du pôle, et fort différentes en \mathcal{R} .

Si la différence pouvait approcher de 12 heures, l'observation la plus favorable se ferait, pour toutes deux, 5 heures avant et 5 heures après leur passage au méridien.

On voit immédiatement que la différence des deux \mathcal{R} de chaque étoile est à l'abri de toutes les erreurs de collimation, d'azimut, d'inclinaison et de déviation de la verticale, ainsi que des erreurs qui peuvent affecter les constantes de la nutation annuelle et de l'aberration.

De plus, la très forte déclinaison de ces étoiles permet à la nutation diurne de se manifester très nettement dans leurs \mathcal{R} apparentes, surtout si la différence des \mathcal{R} est déduite d'observations séparées par un intervalle de 6 heures, parce que c'est celui après lequel l'effet de la nutation diurne atteint son maximum.

J'ai commencé à expérimenter ce procédé à l'Institut astronomique de Coïnte (Liège). L'été pluvieux de cette année, et, du reste, la brièveté des nuits en cette saison, m'ont empêché de commencer mes observations avant la mi-septembre.

Tout d'abord j'avais choisi deux étoiles, l'une de 10^e.

l'autre de 12^e à 13^e grandeur, distantes du pôle de 3' environ, que j'appellerai t et Q .

La difficulté d'observer des étoiles aussi faibles, jointe au désir que j'avais d'en choisir deux, différant autant que possible de 12 heures en \mathcal{R} , m'a engagé à poursuivre ensuite, en même temps que t , une autre étoile de 10^e grandeur environ, que je dénommerai t' , et qui est à 8',5 du pôle.

Je me hâte de dire que ce dernier choix n'a pas été heureux.

On verra ci-dessous, en effet, que l'étoile t' , qui devrait être sujette, en \mathcal{R} , à des variations plus faibles que l'étoile t , puisqu'elle est notablement plus éloignée du pôle que cette dernière, a accusé, au contraire, des variations beaucoup plus considérables. Cette anomalie ne peut s'expliquer, je pense, que par la circonstance que l'étoile t' a été observée vers l'extrémité du champ, et que l'incertitude de la détermination de son azimut, dans cette position, est très grande.

Aussi me suis-je décidé à reprendre plus tard l'observation de deux étoiles P et Q , de 12^e à 13^e grandeur, quoiqu'elles ne diffèrent que de 6 heures en \mathcal{R} , n'ayant pu en trouver une troisième observable, également voisine du pôle, et qui différerait davantage, en \mathcal{R} , de l'une ou de l'autre de ces deux étoiles.

Je consigne ici les résultats de quelques soirées d'observation.

★	Sept. 26.	20 ^h 19 ^m 7 ^s	43.72 sec. W	174.93=20.77	327.156	Σ ₁	Σ ₂
—	—	20 26 46	20.95 —	12 36 37.89	3 47.56	—	—
—	27	1 43 44	47.92 —	17 25 58.50	3 27.86	—	+ 0.1903
—	—	1 27 26	5.35 —	12 36 47.82	3 47.36	—	—
Nov. . . 4	P	22 45 22	43.38 —	6 49 49	8 36	—	—
—	—	22 24 20	21.08 —	17 27 49	3 28.5	—	—
—	E	2 46 43.5	42.96 —	17 27 22.5	3 28.5	—	—
—	—	2 39 41	45.82 —	6 48 50	8 36	—	—
—	—	21 46 46	48.38 —	17 27 26	3 28	—	—
—	—	21 22 50	35.24 —	6 44 7	8 43.5	—	—
—	6	3 22 26	41.49 —	17 27 3	3 29.5	—	+ 1.037
—	—	3 27 31	41.54 —	6 48 7	8 43.5	—	—
—	P	0 51 3	46.33 —	16 58 48.3	2 40	—	—
—	—	2 39 20	2.98 —	16 59 16.4	2 40	—	—
—	—	3 33 21	6.82 —	16 59 43	2 40	—	—
—	4	40 56 52	48.61 —	16 58 50	2 40	—	+ 0.940
—	—	22 46 9	49.42 —	17 0 8	3 5.5	—	—
—	—	26 3 5	43.61 —	17 0 4	3 5.5	—	—
—	Q	22 49 34	44.66 —	12 37 27	4 6.5	—	+ 0.020
—	—	26 42 26	40.45 —	12 37 43	4 6.5	—	—
—	—	2 35 21	0.68 —	17 6 7	2 50	—	—
—	—	41 9 43	47.90 —	17 5 43	—	—	—
—	—	2 31 4	43.35 —	12 24 59	—	—	—
—	—	41 2 49	9.07 —	12 24 30	—	—	—

Je ferai remarquer, en passant, combien ce mode d'observation est avantageux pour la détermination précise des déclinaisons d'étoiles très voisines du pôle, et l'utilité qu'on pourra en retirer dans l'étude de la réfraction et des variations de la latitude.

Les formules de la nutation diurne, le mieux appropriées à ce cas, sont les suivantes, dans lesquelles α et δ représentent l'ascension droite et la déclinaison de l'étoile; l l'intervalle de temps qui sépare les deux observations de l'étoile; $\Delta \alpha$ la différence des R observées à la fin et au commencement de cet intervalle; L la longitude orientale du premier méridien par rapport à l'observatoire; Σ_1 et Σ_2 les mêmes fonctions que ci-dessus :

$$\Delta \alpha = 2 \sin l \operatorname{tg} \delta N_d \left\{ \Sigma_1 \sin (\alpha + l + 2L) - \Sigma_2 \cos (\alpha + l + 2L) \right\},$$

en négligeant les termes qui n'ont pas $\operatorname{tg} \delta$ pour facteur. On en déduit, en posant

$$x = N_d \sin 2L, \quad y = N_d \cos 2L,$$

d'où

$$\operatorname{tg} 2L = \frac{x}{y} \text{ et } N_d = \frac{x}{\sin 2L} = \frac{y}{\cos 2L};$$

$$\Delta \alpha = 2 \sin l \operatorname{tg} \delta \left\{ [\Sigma_1 \sin (\alpha + l) - \Sigma_2 \cos (\alpha + l)] y + [\Sigma_1 \cos (\alpha + l) + \Sigma_2 \sin (\alpha + l)] x \right\}.$$

Deux observations de chacune des deux étoiles fournissent une semblable équation, et permettent de déterminer x et y , ou N_d et L .

Certes, aucune des constantes astronomiques n'est susceptible d'une détermination aussi rapide; et c'est à la brièveté

même de sa période que la nutation diurne doit cet avantage.

J'ajouterai que les résultats tirés des observations des étoiles t et Q , P et Q , les plus voisines du pôle, sont très admissibles, et concordent avec ceux que je viens de déduire de la comparaison des observations européennes avec celles de Washington; qu'au contraire, les étoiles t et t' ont donné une valeur près de dix fois trop grande pour le coefficient de la nutation diurne, ce qui s'explique comme je l'ai dit plus haut.

Les observations de t et de Q des 26 et 27 septembre ont donné, en effet :

$$N_d = 0,19 \quad L = 9^h 50^m \text{ E. de Cointe} = 9^h 43^m \text{ E. de Paris.}$$

Celles de t et t' , au contraire :

$$\text{Le 4 nov. } N_d = 1,61 \quad L = 5^h 56^m \text{ E. de Cointe.}$$

$$\text{Le 5 — } \quad 2,18 \quad 4 \quad 59 \quad \text{—}$$

Les unes et les autres assignent, comme on voit, une longitude orientale assez forte au premier méridien, de même que l'ont fait les comparaisons des catalogues de Paris ou de Poulkova et de Washington, et celles des positions de δ Urs. Min. observées simultanément dans ce dernier Observatoire et à Paris.

Les observations, que j'ai reprises en décembre, des deux étoiles P et Q , ont donné

$$\text{Le 2 déc. ... } N_d = 0,15 \quad L = 11^h 13^m \text{ E. de Cointe.}$$

$$\text{— 4 — } \quad 0,50 \quad 4 \quad 8 \quad \text{—}$$

$$\text{— 7 — } \quad 0,20 \quad 10 \quad 24 \quad \text{—}$$

Les déterminations qui résultent de mes observations de Cointe, quelque probantes qu'elles soient, devront être refaites à loisir, lorsque j'aurai une série d'observations suffisante pour me permettre de les traiter par la méthode des moindres carrés.

Il n'est pas possible, au surplus, d'arriver à des déterminations absolument concordantes des constantes de la nutation diurne, aussi longtemps qu'on ne sera pas parvenu à éliminer des observations les termes provenant de la nutation initiale, termes qui, à cause de leur période presque exactement diurne, s'entremêlent nécessairement avec ceux de la nutation diurne proprement dite, dans l'expression des différences de position d'une étoile à quelques heures d'intervalle.

IV. Résumé et Conclusions.

Résumons en un tableau les différentes valeurs obtenues, dans ces deux dernières années, pour les constantes de la nutation diurne, par des méthodes, de même que par des formules très diverses :

MÉTHODES.	OBSERVATOIRES.	N ^o .	LONGITUDE E. DE PARIS.
En 1887 *.			
Observation de la Polarisine	Kieff	0,209	96 19 ^m
— α Ursæ minoris	Harvard College	0,077	9 29
— 417 Pol. Zone	Bonn	0,136	11 1
— 297 —	—	0,22	12 7
— γ Ursæ minoris	Bruxelles	0,10	10 23
— α —	Poulkova	0,18	11 45
— δ —	—	0,32	8 41
— α —	Greenwich	0,12	10 17
— α —	Washington	0,17	11 36
— σ Oct.	Cordoba	0,11	10 17
En 1888.			
Comparaison des catalogues en AR . . .	Paris-Washington	0,0885 \pm 0,0084	3 31 \pm 2 ^m ,8
— — D	— —	0,508	4 26
— — AR	Poulkova-Washington . . .	0,1633 \pm 0,006	8 22 \pm 0 ^m
— — D	— —	0,2353 \pm 0,006	8 36 \pm 1 ^m
— — AR	Bruxelles-Washington . . .	0,071	12 27,5
— des AR de δ Ursæ min. . . .	Paris-Washington	0,056	8 52
Observations de α Lyræ	Washington	0,095	8 48 (**)
2 observations de ϵ et Q, 26 sept. . . .	Cointe (Liège)	0,19	9 43
1 — P 2 déc. . . .	—	0,45	11 26
2 — P et Q, 4 —	— —	0,30	4 21
2 — — 7 —	— —	0,20	10 37

(288)

(289)

(*) Résultats trouvés par M. Niesten. Voir l'Annuaire pour 1888.

(**) Voir plus loin, p. 295, la notice de M. Niesten, et, dans les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 3^e série, t. XVI, pp. 307-310, les deux rapports sur cette dernière détermination.

En présence de ces résultats (*), aucun astronome ne révoquera en doute l'existence ni la grandeur de la nutation diurne.

Son coefficient, déduit de l'ensemble des observations des étoiles t ou P et Q , est égal à $0''35$.

La longitude du premier méridien, qui en résulte, est de $10^h 57^m$ E. de Paris.

Les observations de ces étoiles très voisines du pôle, que je poursuivrai à Cointe pendant l'hiver, permettront certainement d'arriver à une connaissance suffisamment précise des constantes de la nutation diurne, pour qu'on puisse en corriger les positions observées.

Il est à souhaiter que d'autres astronomes s'appliquent également à ce genre d'observations.

On a vu, dans le dernier tableau, et particulièrement dans les lignes qui terminent celui-ci, et qui rapportent les différentes déterminations des constantes de la nutation diurne, obtenues au moyen de trois observations consécutives d'une étoile très voisine du pôle, faites à Cointe, à six heures environ d'intervalle, la preuve absolument irréfutable du fait de la nutation diurne, dont j'affirmais en 1882 l'existence, fortement mise en doute, sinon absolument niée, à cette époque,

(*) Les formules sur lesquelles sont fondées les déterminations qui font le sujet de la présente notice sont extraites de mon *Traité des réductions stellaires*. (Bruxelles, Hayez, 1888.)

Le calcul de mes observations de Cointe a été fait par M. Niesten.

L'identification des étoiles des divers catalogues, et le calcul des coefficients, ont été effectués par M. Hooreman, la résolution des équations par M. Byl.

Je remercie ces Messieurs du zèle avec lequel ils se sont acquittés de ces tâches laborieuses.

par tous les astronomes. Des déterminations que j'en ai faites, il semble résulter que sa grandeur est plus considérable que je ne le supposais, et que son coefficient approche plus de $0''2$ que de $0''1$.

Cette nutation, comme je l'ai dit dans l'*Annuaire* de l'an dernier, n'a lieu que pour la croûte terrestre, qui, étant très mince, peut obéir en un jour, d'une manière sensible, aux actions combinées du Soleil et de la Lune, ce que ne ferait pas le globe entier, envisagé comme un ensemble solidaire.

La croûte est indépendante, dans les mouvements à courte période, du noyau intérieur, qui est fluide, tout au moins à sa surface.

Et cette indépendance même fait que la croûte peut subir, dans son mouvement de rotation autour de ses pôles supposés immobiles, une avance ou un retard qui dépendra des positions occupées par le Soleil et la Lune, par rapport au premier méridien, c'est-à-dire à celui suivant lequel l'épaisseur de la croûte est la plus considérable.

En admettant même que le coefficient de la nutation diurne ne soit égal qu'à $0''15$, j'ai déjà dit que cette avance ou ce retard pourrait être, dans des circonstances de positions favorables du Soleil et de la Lune, de 0.06 de seconde de temps après un intervalle de six heures, et qu'il en résulterait, pour un point du parallèle de 45° , une avance ou un retard de 20 mètres, par rapport à un point du même parallèle qui conserverait, inaltéré, le mouvement de rotation qu'il avait à l'origine de ces six heures.

Ce fait, disais-je dans l'ouvrage où j'ai exposé la théorie du mouvement de rotation de la croûte terrestre (*), provoquera

(*) Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde, 2^e fascicule. Bruxelles, Hayez, 1888.

chez les astronomes un étonnement très vif, peut-être accompagné de scepticisme.

Et j'ajoutais ces lignes, par lesquelles je terminerai également cette notice :

« La nutation diurne n'est possible que si le mouvement
 » de l'écorce solide est plus ou moins indépendant de celui
 » du noyau fluide qu'elle recouvre. Or, la nutation diurne
 » est prouvée par les meilleures observations. Cette indé-
 » pendance existe donc. Pourquoi dès lors l'écorce n'obéirait-
 » elle pas, dans son mouvement de rotation autour de son
 » axe, aux attractions luni-solaires, de même que leur obéit
 » l'Océan dans ses marées, dont les oscillations présentent
 » la plus grande analogie avec celles de cette écorce ?

« Ainsi donc, cette majestueuse horloge du ciel, sur la
 » régularité absolue de laquelle les astronomes de tous les
 » temps ont cru pouvoir étayer leurs observations, est
 » sujette elle-même à des fluctuations périodiques, dans le
 » court intervalle de quelques heures. Et l'homme, à qui il
 » a été donné par le Créateur de pénétrer de plus en plus
 » les secrets de la nature, parviendra un jour, si même il
 » n'y est déjà arrivé, à réaliser des appareils, doués d'un
 » mouvement plus uniforme que celui qui anime l'écorce
 » solide du globe autour de son axe instantané de rotation. »

F. F.