SUR L'INCORRECTION DES FORMULES PROPOSÉES PAR FABRITIUS POUR LA RÉDUCTION DES CIRCOMPOLAIRES;

Par M. F. FOLIE.

Occupé en ce moment de la détermination des constantes de la nutation diurne et comptant faire usage d'observations de la Polarissime, j'ai voulu m'assurer tout d'abord de l'exactitude des formules de réduction proposées par Fabritius (*Astronomische Nachrichten*, n° 2073). Après y avoir mûrement réfléchi, je me suis aperçu que l'astronome russe a été le jouet d'une illusion, à laquelle Oppolzer (¹) n'a pas échappé.

Comme le regretté savant viennois appuie de son autorité le procédé de Fabritius, auquel on n'a pas accordé, dit-il, l'attention qu'il mérite, je crois de mon devoir de faire toucher du doigt le cercle vicieux sur lequel ce procédé repose.

Le point de départ en est l'introduction des coordonnées rectangulaires

$$x = \cos\delta\cos\alpha, \qquad y = \cos\delta\sin\alpha, \qquad z = \sin\delta,$$

coordonnées qu'on élimine pour obtenir les formules définitives.

Cet artifice inutile peut être ici qualifié de *trompe-l'œil,* puisqu'il est la cause de l'illusion dont Fabritius et Oppolzer ont été victimes. Toutefois ce n'est pas en lui-même, bien évidemment, qu'il faut chercher l'origine de l'erreur; mais plutôt en ce que Fabritius, partant des expressions de Δx et Δy, bornées aux termes du premier ordre, a cru pouvoir en déduire les expressions extraites de $\tang(\alpha - \alpha_0)$ et de $\delta - \delta_0$ en y conservant ceux du second.

Je vais faire voir comment Fabritius pouvait déduire sa formule (3), qui donne $\tang(\alpha - \alpha_0)$ (formule 16 d'Oppolzer), sans passer par les coordonnées rectilignes, et en quoi cette formule est incorrecte.

Partant de $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$, $\delta = \delta_0 + \Delta\delta$, on a, aux termes près du quatrième ordre,

$$\sin(\alpha - \alpha_0) = \Delta\alpha\left(1 - \frac{1}{6}\Delta\alpha^2\right), \qquad \cos(\alpha - \alpha_0) = 1 - \frac{\Delta\alpha^2}{2},$$

(¹) *Traité de la détermination des orbites des planètes et des comètes,* Chap. I, § 4, p. 263 et suivantes de la traduction française de Pasquier.

d'où

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tang}(\alpha - \alpha_0) = \Delta\alpha\left(1 + \frac{\Delta\alpha^2}{3}\right),$$

formule bien connue.

Pour arriver à celle de Fabritius partons, comme lui, mais sans passer par l'intermédiaire des coordonnées rectilignes, de

$$\text{(2)} \qquad \cos\delta \sin(\alpha - \alpha_0) \quad \text{et de} \quad \cos\delta\cos(\alpha - \alpha_0).$$

Ces expressions peuvent s'écrire :

$$\text{(2')} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\alpha\left(1 - \dfrac{\Delta\alpha^2}{6}\right)\left(\cos\delta_0 - \sin\delta_0\Delta\delta - \cos\delta_0\dfrac{\Delta\delta^2}{2}\right) \\ \text{et} \\ \left(1 - \dfrac{\Delta\alpha^2}{2}\right)\left(\cos\delta_0 - \sin\delta_0\Delta\delta - \cos\delta_0\dfrac{\Delta\delta^2}{2}\right). \end{array} \right.$$

Si l'on y néglige, avec Fabritius, les termes d'un ordre supérieur au premier, elles se réduisent respectivement à

$$\cos\delta_0\Delta\alpha \quad \text{et} \quad \cos\delta_0 - \sin\delta_0\Delta\delta;$$

et l'on en tirera par division

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tang}(\alpha - \alpha_0) = \frac{\Delta\alpha}{1 - \operatorname{tang}\delta_0\Delta\delta},$$

ce qui est la formule de l'astronome russe.

Si l'on conserve les termes du second ordre, on aura

$$\cos\delta_0(1 - \operatorname{tang}\delta_0\Delta\delta)\Delta\alpha \quad \text{et} \quad \cos\delta_0\left(1 - \operatorname{tang}\delta_0\Delta\delta - \frac{\Delta\alpha^2 + \Delta\delta^2}{2}\right)$$

et par division

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{tang}(\alpha - \alpha_0) = \frac{\Delta\alpha}{1 - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\Delta\alpha^2 + \Delta\delta^2}{1 - \operatorname{tang}\delta_0\Delta\delta}},$$

formule plus exacte que celle de Fabritius, mais moins exacte et bien plus compliquée que la véritable formule (1).

Conservons enfin les termes du troisième ordre dans les expressions (2'); elles s'écriront

$$\Delta\alpha\cos\delta_0\left(1 - \operatorname{tang}\delta_0\Delta\delta - \frac{\Delta\delta^2}{2} - \frac{\Delta\alpha^2}{6}\right)$$

et

$$\cos\delta_0\left(1 - \operatorname{tang}\delta_0\Delta\delta - \frac{\Delta\delta^2}{2} - \frac{\Delta\alpha^2}{2} + \operatorname{tang}\delta_0\Delta\delta\,\frac{\Delta\alpha^2}{2}\right);$$

d'où

$$\operatorname{tang}(\alpha - \alpha_0) = \frac{\Delta\alpha}{1 + \dfrac{\dfrac{\Delta\alpha^2}{3} - \operatorname{tang}\delta_0\Delta\delta\,\dfrac{\Delta\alpha^2}{2}}{1 - \operatorname{tang}\delta_0\Delta\delta - \dfrac{\Delta\delta^2}{2} - \dfrac{\Delta\alpha^2}{6}}},$$

formule qui se réduit à la véritable (1), si l'on s'arrête aux termes du troisième ordre.

La formule (3) de Fabritius est donc illusoire et incorrecte. Mais sa formule (4)

$$\delta - \delta_0 = \Delta\delta - \cot\delta_0\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha - \alpha_0)\Delta\alpha \text{ (formule 18 d'Oppolzer)}$$

est tout simplement paradoxale (je dirais absurde, si le terme n'était un peu vif), puisqu'on a posé $\delta = \delta_0 + \Delta\delta$.

Pour arriver à cette formule à la manière de Fabritius, multiplions les expressions (2) par $\sin\dfrac{\alpha - \alpha_0}{2}$ et $\cos\dfrac{\alpha - \alpha_0}{2}$ respectivement; opérons de même sur les expressions (2'); la somme donnera, si l'on désigne $\sin\dfrac{\alpha - \alpha_0}{2}$ par s et $\cos\dfrac{\alpha - \alpha_0}{2}$ par c,

$$\begin{aligned} c\cos\delta = {} & s\cos\delta_0\left(1 - \frac{\Delta\alpha^2}{6}\right)\left(1 - \operatorname{tang}\delta_0\Delta\delta - \frac{\Delta\delta^2}{2}\right)\Delta\alpha \\ & + c\cos\delta_0\left(1 - \frac{\Delta\alpha^2}{2}\right)\left(1 - \operatorname{tang}\delta_0\Delta\delta - \frac{\Delta\delta^2}{2}\right) \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} c(\cos\delta - \cos\delta_0) = {} & s\cos\delta_0\left(1 - \operatorname{tang}\delta_0\Delta\delta - \frac{\Delta\delta^2}{2} - \frac{\Delta\alpha^2}{6}\right)\Delta\alpha \\ & - c\cos\delta_0\left(\operatorname{tang}\delta_0\Delta\delta + \frac{\Delta\delta^2 + \Delta\alpha^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Si l'on fait, avec Fabritius, $\cos\delta - \cos\delta_0 = -\sin\delta_0(\delta - \delta_0)$ et qu'on néglige les termes du second ordre, on trouve sa formule (4).

Mais on voit aussi que l'exactitude en est illusoire, puisqu'on a remplacé $\sin\dfrac{\delta + \delta_0}{2}$ par $\sin\delta_0$, ce qui revient à négliger, dans le premier membre, les termes de l'ordre qu'on veut conserver dans le second.

Par de semblables procédés, on arrivera à autant d'expressions différentes que l'on voudra de la même quantité.

Ainsi, je tirerai facilement des formules de Fabritius

$$\sin(\alpha - \alpha_0) = \frac{\Delta\alpha}{1 - \tang\delta_0\Delta\delta}\left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{\Delta\delta^2}{1 - \tang\delta_0\Delta\delta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\tang\delta_0\Delta\delta^2}{1 - \tang\delta_0\Delta\delta}\right)^2\right],$$

qui fournit un résultat supérieur à celui qu'il donne pour

$$\tang(\alpha - \alpha_0).$$

Veut-on trouver l'expression de $\tang(\delta - \delta_0)$, on combinera, par exemple, celle de $\cos\delta\cos(\alpha - \alpha_0)$ donnée ci-dessus, (2′), avec la suivante

$$\sin\delta\cos(\alpha - \alpha_0) = \cos(\alpha - \alpha_0)\left[\sin\delta_0\left(1 - \frac{\Delta\delta^2}{2}\right) + \cos\delta_0\Delta\delta\right],$$

et l'on en déduira

$$\cos(\alpha - \alpha_0)\sin(\delta - \delta_0) = \Delta\delta\left(1 - \frac{\Delta\alpha^2}{2}\right),$$

$$\cos(\alpha - \alpha_0)\cos(\delta - \delta_0) = 1 - \frac{\Delta\alpha_2 + \Delta\delta^2}{2}.$$

La division donne

$$\tang(\delta - \delta_0) = \Delta\delta\left(1 + \frac{\Delta\delta^2}{2}\right),$$

formule qui concorderait avec la véritable, analogue à la formule (1), si l'on avait poussé plus loin l'approximation.

Les formules (3) et (4) de Fabritius (*Astronomische Nachrichten*, n° 2073) ou (16) et (18) d'Oppolzer sont donc incorrectes, et l'introduction tout à fait superflue des coordonnées rectilignes dans cette recherche est la source première de l'illusion à laquelle n'a pas échappé ce dernier savant lui-même.

Cette critique ne porte pas, au surplus, sur l'exactitude du calcul des coordonnées rectilignes mêmes, donné dans le n° 2072 des *Astronomische Nachrichten*.

En résumé, le procédé proposé par Fabritius pour le calcul des réductions des circompolaires ne peut remplacer que très désavantageusement les procédés en usage.

Ces derniers ne sont pas exempts d'erreurs cependant, comme on pourra le voir dans mon *Traité des réductions stellaires*, dont le premier fascicule vient de paraître.