COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Sur les formules de réduction des circompolaires en ascension droite et en déclinaison; par F. Folie, membre de l'Académie, directeur de l'Observatoire royal de Bruxelles.

Le procédé que j'ai trouvé le mieux approprié à la détermination des constantes de la nutation diurne, au moyen d'observations faites en un même lieu, consiste à suivre deux étoiles très voisines du pôle, de manière à obtenir une série de quelques couples de positions observées pendant la même nuit, à 6 heures d'intervalle.

Ces étoiles doivent donc rester constamment dans le champ de la lunette méridienne, et, par suite, n'être distantes que de quelques minutes du pôle; il importe, de plus, qu'elles diffèrent de 12 heures environ en Æ.

Les réductions devront en être faites avec la plus grande correction.

Je les ai calculées dans mon *Traité des réductions stellaires* (*), et je dois reconnaître qu'elles sont fort laborieuses, si l'on ne construit des tables destinées à faciliter le calcul numérique.

Ainsi ai-je été amené à étudier de plus près le mode de réduction proposé par M. Fabritius (**), mode auquel, dit

(*) Bruxelles. Hayez, 1888.

(**) A. N. N° 2075.

Oppolzer (*) qui en fait usage, on n'a pas accordé l'attention qu'il mérite.

J'ai fait voir dans le *Bulletin astronomique* (**) que, si l'on traite rigoureusement les formules qui servent de point de départ au procédé de Fabritius, on arrive simplement à une identité.

Voici, en effet, au fond, quel est le problème que prétend résoudre ce procédé :

« Étant données les valeurs *numériques* de α, δ, ainsi que des termes du premier ordre de leurs variations, $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, trouver les termes d'ordre supérieur de ces variations. »

Problème insoluble, puisqu'on ne donne pas la loi des variations de $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$.

Vraiment, on a lieu d'être surpris que des astronomes distingués n'aient pas envisagé la question de ce point de vue lumineux. Et je regrette que l'on m'ait obligé à le signaler.

Mais comme plusieurs croient encore à la valeur de la démonstration de Fabritius-Oppolzer (***), voici un dernier argument, plus astronomique, sur lequel j'appelle leur attention.

De $x = \cos\alpha\cos\delta$, $y = \sin\alpha\cos\delta$, Fabritius et Oppolzer tirent, *en se bornant aux termes du premier ordre* dans leurs variations, la formule

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha_0) = \frac{\Delta\alpha_0}{1 - \operatorname{tg}\delta_0\Delta\delta_0},$$

(*) Ch. I, § 4, pp. 265 et suivantes de la traduction de Pasquier.

(**) Février 1888.

(***) *Bull. astr.* Avril 1888.

dans laquelle *ils n'ont droit de considérer, ai-je dit, que les termes du premier ordre,* ce que l'on conteste.

Eh bien, je procède à leur manière; je prends l'écliptique au lieu de l'équateur pour plan des xy, conséquemment j'appelle α la longitude, δ la latitude de l'étoile. J'obtiens leur formule ci-dessus, et je la traduis au moyen des notations usuelles λ et β :

$$\operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0) = \frac{\Delta\lambda_0}{1 - \operatorname{tg}\beta_0\Delta\beta_0}.$$

Cette dernière est, pour les partisans de la formule précédente de Fabritius, tout aussi exacte évidemment que celle-là. Elles doivent donc devenir identiques par la transformation des coordonnées.

Or, si l'on transforme les Æ et D en longitudes et latitudes, la formule $\operatorname{tg}(\alpha - \alpha_0)$, bornée aux termes du second ordre, devient

$$\operatorname{tg}\lambda - \operatorname{tg}\lambda_0 = \sec^2\lambda_0\Delta\lambda_0(1 + \cos\varepsilon_0\operatorname{tg}\lambda_0\Delta\lambda_0) + \operatorname{tg}\varepsilon_0\Delta\lambda_0\Delta\varepsilon,$$

tandis que la formule $\operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0)$ développée donne

$$\operatorname{tg}\lambda - \operatorname{tg}\lambda_0 = \sec^2\lambda_0\Delta\lambda_0(1 + \operatorname{tg}\beta_0\Delta\beta_0 + \operatorname{tg}\lambda_0\Delta\lambda_0).$$

Il n'y a pas la moindre identité entre ces formules; ce qui n'a rien de surprenant, puisqu'elles sont fausses l'une et l'autre.

Et qu'on ne vienne pas dire qu'en pratique la différence ne sera pas considérable dans les termes dépendants de $\Delta\lambda$ seul, parce que $\cos\varepsilon_0$ ne diffère guère de l'unité.

Ce sont des formules théoriques qui sont développées dans Fabritius et Oppolzer, formules applicables à un système quelconque d'axes rectangulaires, et par suite au cas où l'obliquité ε_0 aurait une valeur même considérable.

Mais ce n'est pas tout encore : la première des formules ci-dessus renferme la variation (nutation) en obliquité $\Delta\varepsilon$, la seconde, au contraire, la variation (aberration) en latitude $\Delta\beta_0$.

Ainsi, la discordance est complète.

En voilà, je pense, assez sur ce sujet.

Il importe donc que les astronomes ne continuent pas à faire usage de ces expressions peu exactes, qui ne reposent que sur une combinaison incorrecte de formules détournées.

Ce qui les a raffermis dans leur confiance en elles, c'est l'accord assez satisfaisant entre les réductions opérées avec leur aide et les réductions que fournit le procédé ordinaire.

Je vais montrer que cet accord n'existe que pour un certain nombre de termes.

Dans mon *Traité des réductions stellaires* (*) j'ai recherché de la manière suivante les termes du second ordre de la nutation.

Partant de

$$\frac{d\alpha}{dt} = -c_1\frac{d\psi}{dt} - \operatorname{tg}\delta\left(\left(\sin\alpha\, s_1\frac{d\psi}{dt} + \cos\alpha\frac{d\theta}{dt}\right)\right.$$

et appelant α_0, δ_0 les coordonnées moyennes, j'ai supposé l'intégrale de la forme

$$\Delta\alpha = c_1\Delta\psi - \operatorname{tg}\delta_0(\sin\alpha_0\, s_1\Delta\psi + \cos\alpha_0\Delta\theta) + \mathrm{W},$$

(*) Bruxelles. Hayez, 1888.

et j'ai trouvé pour W (p. 64) l'expression suivante, dans les termes de laquelle s_1, c_1, c_1' et c_2 représentent $\sin\varepsilon$, $\cos\varepsilon$, $\cot\varepsilon$ et $\cos 2\varepsilon$, ε désignant l'obliquité; ω_1 est la vitesse du nœud; P, N, N′ les constantes connues 50.2; 9.2; 17.2 exprimées en secondes d'arc :

$$(1)\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin 1''}\mathrm{W} = \left[\sin 2\alpha\left(\frac{1}{2} + \operatorname{tg}^2\delta\right) + c_1'\cos\alpha\operatorname{tg}\delta\right]\frac{1}{2}\mathrm{P}^2 s_1^2 t^2\\
&-(c_1'\operatorname{tg}\delta - 1)\, s_1\,\mathrm{PN}\sin\alpha\,\frac{\sin\Omega}{\omega_1}\\
&-\frac{1}{2}\left[\cos 2\alpha\left(\frac{1}{2} + \operatorname{tg}^2\delta\right) - \frac{1}{2}c_1'\operatorname{tg}\delta\sin\alpha\right] s_1\,\mathrm{NN}'\sin 2\Omega\\
&-\frac{1}{4}\left[\sin 2\alpha\left(\frac{1}{2} + \operatorname{tg}^2\delta\right)\left(1 + \frac{c_1^2}{c_2^2}\right) + c_1'\operatorname{tg}\delta\cos\alpha\right] s_1^2\mathrm{N}'^2\cos 2\Omega\\
&-\frac{1}{2}(c_1'\operatorname{tg}\delta - 1)\, s_1\sin\alpha\,\mathrm{NN}'\omega_1 t\\
&+\left[\left(\frac{1}{2} + \operatorname{tg}^2\delta\right)s_1\sin 2\alpha + c_1\operatorname{tg}\delta\cos\alpha\right] s_1\,\mathrm{PN}'\sin\Omega\, t\\
&-\left[(\cos^2\alpha + \cos 2\alpha\operatorname{tg}^2\delta)s_1 - c_1\sin\alpha\operatorname{tg}\delta\right]\mathrm{PN}\cos\Omega\, t.
\end{aligned}\right.$$

W donnera donc les termes du second ordre de la nutation.

Pour obtenir l'expression complète des termes du second ordre, il faudrait ajouter à W ceux qui proviennent de la combinaison des effets de la nutation et de l'aberration, ainsi que les termes du second ordre de l'aberration.

Je reviendrai ci-dessous sur ce point, voulant me borner, pour le moment, à comparer mes termes W à ceux qui devraient y correspondre dans la formule de Fabritius-

Oppolzer, et qu'on peut écrire

$$\operatorname{tg}\delta\,(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b)\,(\mathrm{A}a' + \mathrm{B}b')$$

ou bien

$$\operatorname{tg}\delta\,\Delta_n\alpha\,\Delta_n\delta,$$

le symbole Δ_n désignant la variation du premier ordre qui provient de la nutation.

En remplaçant les notations Besséliennes par celles qui sont usitées dans l'expression (1), et en se bornant aux seuls termes importants, on pourra écrire :

$$\Delta_n\alpha = (c_1 + s_1 \sin\alpha \operatorname{tg}\delta)\,(\mathrm{P}t + \mathrm{N}'\sin\Omega) - \mathrm{N}\cos\alpha\operatorname{tg}\delta\cos\Omega$$
$$\Delta_n\delta = s_1\cos\alpha\,(\mathrm{P}t + \mathrm{N}'\sin\Omega) + \mathrm{N}\sin\alpha\cos\Omega$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\Delta_n\alpha\Delta_n\delta = {} & \\ & s_1\cos\alpha\,(c_1 + s_1\sin\alpha\operatorname{tg}\delta)\,(\mathrm{P}t + \mathrm{N}'\sin\Omega)^2 \\ & - \sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\delta\,(\mathrm{N}\cos\Omega)^2 \\ & - (s_1\cos 2\alpha\operatorname{tg}\delta - c_1\sin\alpha)\,(\mathrm{P}t + \mathrm{N}'\sin\Omega)\,\mathrm{N}\cos\Omega.\end{aligned}$$

Si l'on compare cette expression à l'expression exacte (1), sans doute, on trouvera entre elles une analogie qui n'offre rien de surprenant.

Ainsi, l'une comme l'autre renferment des termes en $\mathrm{PN}\cos\Omega t$ et $\mathrm{PN}'\sin\Omega t$; mais les coefficients en sont, comme on le voit, sensiblement différents dans l'une et l'autre. Il en est de même des termes en $\mathrm{NN}'\sin 2\Omega$ et $\mathrm{N}'^2\cos 2\Omega$, qui figurent dans les deux expressions, mais, encore une fois, avec des coefficients différents.

La mienne renferme un terme en $\mathrm{NN}'t$ qui ne se trouve pas dans celle de Fabritius, et celle-ci un terme en N^2 que je n'ai pas.

Je crois inutile d'insister sur mon terme en $\sin\Omega$, qui n'a pas $\operatorname{tg}^2\delta$ pour facteur.

Ce qui précède suffit pour établir que la formule de Fabritius-Oppolzer, qui ne repose sur aucune base théorique, peut tout au plus être considérée comme une formule empirique, qui ne renferme que deux termes exacts, ou à très peu près, pour les étoiles voisines du pôle : ce sont ceux qui proviennent de la combinaison de la nutation et de l'aberration, et les termes du second ordre de l'aberration. Les autres n'approchent pas suffisamment des véritables. Plusieurs termes, enfin, font défaut.

Or, il ne suffit pas de quelque analogie entre la formule exacte et une formule empirique, pour qu'on soit autorisé à substituer celle-ci, si simple soit-elle, à la première.

Certes, on ne peut s'astreindre au laborieux calcul de tous les termes des ordres supérieurs. Et même la précision qu'on atteindrait par là serait tout à fait hors de proportion avec celle des résultats que fournissent les termes du premier ordre, à cause de l'incertitude qui règne sur la valeur des constantes, dont les principales mêmes ne sont pas exactement connues, tandis que plusieurs autres restent encore à déterminer.

Mais, si l'on veut négliger certains termes, encore doit-on savoir bien précisément ce qu'on néglige; et c'est ce qu'il est assez difficile d'établir quant à la formule de Fabritius-Oppolzer.

Afin de permettre aux astronomes d'y substituer une formule plus correcte, je vais reprendre les formules que j'ai données dans mon Traité, et tâcher d'en déduire des formules véritablement pratiques.

Pour rechercher ces formules, j'ai comparé les expressions des termes du second ordre de la nutation au produit $\operatorname{tg}\delta\,(Aa+Bb)(Aa'+Bb')$, et j'ai trouvé que les seuls termes importants qu'il soit nécessaire d'ajouter à celui-ci, pour obtenir celles-là, sont

$$
(2)\left\{\begin{aligned}
&-\sin(\delta-\varepsilon)\sec\delta\sin\alpha\,\frac{N}{\omega_1}\left(P\sin\Omega+\frac{1}{2}N'\omega_1^2 t\right)\\
&-\frac{1}{2}s_1c_1\operatorname{tg}\delta\cos\alpha\,(P^2t^2+N'\sin\Omega\,Pt)\\
&-\frac{1}{2}c_1\operatorname{tg}\delta\,(Aa'+Bb')\,N'\sin\Omega
\end{aligned}\right.
$$

Je désignerai l'ensemble de ces termes par F.

Et voici, en faisant usage de formules rigoureuses, au lieu de formules approchées, pour les termes du second ordre de l'aberration annuelle proprement dite, et pour ceux qui proviennent de la combinaison de l'aberration avec la nutation, quelle sera la forme correcte de la réduction en Æ :

$$
\begin{aligned}
\alpha'-\alpha = {}& Aa+Bb+Cc+Dd+E+\mu\tau\\
&+\operatorname{tg}\delta(Aa+Bb)(Aa'+Bb')+F\\
&+\frac{2}{\sin 2\delta}(Cc+Dd)(Cc'+Dd')\\
&+\operatorname{tg}\delta(Aa'+Bb')(Cc+Dd)+\frac{2}{\sin 2\delta}(Aa+Bb)(Cc'+Dd')
\end{aligned}
$$

forme qui se réduit à la suivante :

$$
(3)\left\{\begin{aligned}
\alpha'-\alpha = {}& Aa+Bb+Cc+Dd+E+\mu\tau\\
&+\operatorname{tg}\delta\,(Aa'+Bb')(Aa+Bb+Cc+Dd)\\
&+\frac{2}{\sin 2\delta}(Cc'+Dd')(Aa+Bb+Cc+Dd)+F.
\end{aligned}\right.
$$

Pour les étoiles fort voisines du pôle, il est permis de prendre $\frac{2}{\sin 2\delta}$ ou $\frac{\sec\delta}{\sin\delta}=\operatorname{tg}\delta+\operatorname{cotg}\delta$ comme égal simplement à $\operatorname{tg}\delta$.

Si l'on veut le faire pour λ Ursæ minoris, on aura plus simplement :

$$
(4)\left\{\begin{aligned}
\alpha'-\alpha = {}&(Aa+Bb+Cc+Dd)\{1+\operatorname{tg}\delta(Aa'+Bb'+Cc'+Dd')\}\\
&+E+\mu\tau+F,
\end{aligned}\right.
$$

formule qui ne diffère plus de celle de Fabritius que par le terme F, dont l'expression (2) est donnée ci-dessus.

Sa valeur, pour λ U. min., au 1er octobre 1890, est $-0^s.023$.

Mais la formule plus correcte (3) qui précède n'est guère plus longue à calculer, et j'engage les astronomes à en faire usage, surtout si la déclinaison n'est pas très forte.

En déclinaison, j'ai obtenu, en réduisant les expressions des pages 64, 77 et 79 de mon Traité à la forme Besséliennne, et en omettant les termes du deuxième ordre qui n'ont pas $\operatorname{tg}\delta$ pour facteur :

$$
\begin{aligned}
\delta'-\delta = {}& Aa'+Bb'+Cc'+Dd'+\nu\tau\\
&-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\delta\,(AP\sin\alpha-B\cos\alpha)^2\\
&-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\delta\,\frac{(Cc+Dd)^2}{\sec^2\delta}\\
&-\frac{1}{2}\sin 2\delta\,(Aa+Bb)(Cc+Dd)
\end{aligned}
$$

ou

$$
(5)\left\{\begin{aligned}
\delta'-\delta = {}& Aa'+Bb'+Cc'+Dd'+\nu\tau\\
&-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\delta\,(AP\sin\alpha-B\cos\alpha)^2\\
&-\frac{1}{2}\sin 2\delta\,(Cc+Dd)\left(Aa+Bb+\frac{Cc+Dd}{2}\right)
\end{aligned}\right.
$$

Cette dernière formule diffère trop notablement de celle de Fabritius

$$\delta' - \delta = Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + \nu\tau$$
$$- \frac{1}{2} \cot\delta\,(Aa + Bb + Cc + Dd)^2$$

pour qu'il puisse être utile de faire la comparaison.

Les formules (3) et (5) qui précèdent ne s'écartent des formules exactes, que j'ai démontrées dans mon Traité, que par des termes d'une importance tout à fait secondaire, et dont aucun n'a $\operatorname{tg}\delta$ pour facteur.

Elles sont assez aisées à calculer pour que les astronomes se décident, je l'espère, à les employer de préférence à celles de l'astronome russe, à qui je sais gré de m'avoir ouvert la voie à la transformation des expressions fort compliquées (1) en d'autres dont la forme est beaucoup plus pratique.

Il a déjà été dit ci-dessus que ces formules ne tiennent pas compte des termes périodiques qui proviennent de la combinaison de l'aberration annuelle et de l'aberration systématique.

Comme la constante de cette dernière ne tardera pas à être connue, je donnerai ci-dessous ces termes, que l'on trouvera dans mon Traité, pp. 74 et 77; a et σ désigneront respectivement les constantes des aberrations annuelle et systématique; $\Delta^2\alpha$ et $\Delta^2\delta$ les termes périodiques qui proviennent de leur combinaison; A' et D' les coordonnées de l'Apex du mouvement systématique; s' et c' les sinus et cosinus de la demi-obliquité.

En se limitant aux seuls termes qui ont $\operatorname{tg}\delta$ ou $\sec\delta$ en facteur, on aura :

$$\Delta^2\alpha = \frac{1}{2}\, a\sigma \cos D' \sec^2\delta \left\{ c'^2 \cos(\odot + A' - 2\alpha) - s'^2 \cos(\odot - A' + 2\alpha) \right\}.$$

$$\Delta^2\delta = \frac{1}{4}\, a\sigma \cos D' \operatorname{tg}\delta \left\{ \begin{array}{l} c'^2\left[\sin(\odot + A' - 2\alpha) - \sin(\odot - A')\right] \\ + s'^2\left[\sin(\odot - A' + 2\alpha) - \sin(\odot + A')\right] \end{array} \right\}.$$

Ces expressions ne renferment pas les termes non périodiques du second ordre, soit de l'aberration annuelle, soit de l'aberration systématique, termes que l'on considère comme rentrant dans la correction du lieu moyen.

On y fait rentrer de même les termes de la parallaxe systématique (v. pp. 84 et suivantes de mon Traité).

Je puis donc me dispenser de les transcrire, l'objectif de la présente note étant surtout de donner aux astronomes les formules pratiques qu'ils doivent substituer à celles de Fabritius. Si la vitesse systématique était considérable, de sorte que la constante de l'aberration systématique approchât de 10″, il y aurait lieu également d'ajouter les termes du deuxième ordre provenant de la combinaison des variations dues à cette aberration avec celles qui sont dues à la nutation.

Mais je doute que la vitesse systématique soit aussi grande, et m'abstiendrai provisoirement de calculer ces termes, que les astronomes trouveraient du reste aisément.
